Seminario de Solución de Problemas de Inteligencia Artificial I: Preliminares de Optimización

M.C. Jesús Hernández Barragán

UDG - CUCEI

Ciclo: 2018-B

Contenido

Definición

- Optimización es la acción y efecto de optimizar. Este verbo hace referencia a buscar la mejor manera de realizar una actividad.

- Optimización: En matemáticas, es la selección del mejor elemento (con respecto a algún criterio) de un conjunto de elementos disponibles.

Definición (continuación)

Por ejemplo, dada la siguiente ecuación:

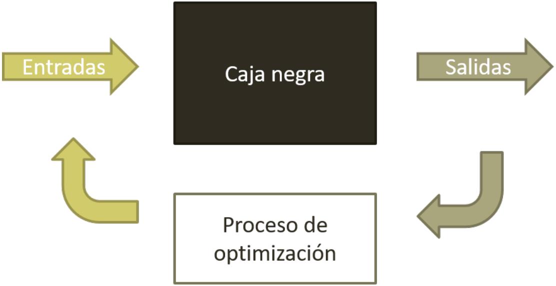
$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 0 \tag{1}$$

y si se tiene el siguiente conjunto de elementos disponibles, entonces podemos evaluar la función para determinar la calidad de cada elemento:

Elementos disponibles	Evaluación en (1)
$x_1 = 3,\ y_1 = 3$	2
$x_1 = 2,\ y_1 = 2$	0
$x_1 = 1,\ y_1 = 1$	2
$x_1 = 1.5,\ y_1 = 1.2$	0.5

Definición (continuación)

El proceso de optimización se puede representar a partir de un modelo de caja negra como sigue:



Preliminares

Dada una función cualquiera, en optimización la denominaremos Función Objetivo:

$$f(\mathbf{x})$$

al conjunto de elementos $\mathbf{x}$ utilizados son denominados Parámetros de Ajuste.

Además, un problema de optimización puede ser escrito como un problema de Minimización o Maximización:

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \Longleftrightarrow \max_{\mathbf{x}} \left[-f(\mathbf{x})\right]$$

$$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \Longleftrightarrow \min_{\mathbf{x}} \left[-f(\mathbf{x})\right]$$

Preliminares (continuación)

- Cuando se trata de Minimizar una Función Objetivo, esta es llamada Función de Costo.

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \Longrightarrow f(\mathbf{x})$$

- Cuando se trata de Maximizar una Función Objetivo, esta es llamada Función de Aptitud o Utilidad.

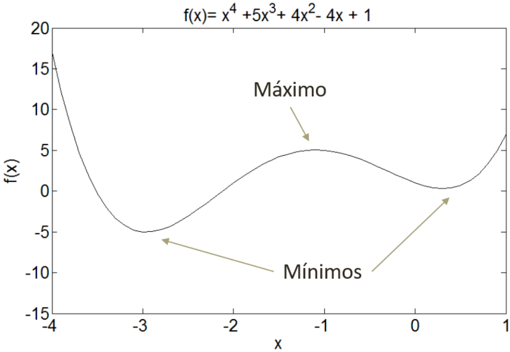
$$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \Longrightarrow f(\mathbf{x})$$

Preliminares (continuación)

- En una función $f(\mathbf{x})$, es posible encontrar dos tipos de valores mínimos (máximos): Mínimos (Máximos) Locales y Mínimo (Máximo) Global.
- Una función $f(\mathbf{x})$ puede tener uno o mas Mínimos (Máximos) Locales pero solo puede tener un Mínimo (Máximo) Global.
- Cuando se busca optimizar una función $f(\mathbf{x})$ con mas de un Mínimo Local se denomina Optimización Multimodal.
- Cuando se busca optimizar una función con el Mínimo Global se denomina Optimización Unimodal.

Preliminares (continuación)

Ejemplo de un problema de optimización:



La gráfica muestra la evaluación de x en la función dentro de un rango $x \in [-4, 1]$.

Método Analítico

Los pasos del método analítico para encontrar los mínimos o máximos de una Función Objetivo $f(x)$ son los siguientes:

- Cálculo de la derivada de primer orden $f'(x)$
- Encontrar los ceros o raíces x_{r_i} de la derivada $f'(x)$, con $i = 1, 2, 3, \cdots, N$ y N es el total de raíces encontradas.
- Cálculo de la derivada de segundo orden $f''(x)$
- Para determinar si las raíces x_{r_i} generan un Mínimo o Máximo, evaluamos lo siguiente:
  - Si $f''(x_{r_i})$ es positivo, entonces x_{r_i} es un Mínimo
  - Si $f''(x_{r_i})$ es negativo, entonces x_{r_i} es un Máximo

Con este método podemos encontrar los valores óptimos de una función para un problema unidimensional.

Método Analítico (continuación)

Ejemplo: Dada la siguiente función

$$f(x) = x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 4x + 1$$

Calculamos la derivada de primer orden

$$f'(x) = 4x^3 + 15x^2 + 8x - 4$$

Las raíces en las que $f'(x)$ es cero se encuentran en

- $x_{r_1} = -2.96$
- $x_{r_2} = -1.10$
- $x_{r_3} = 0.31$

Método Analítico (continuación)

Calculamos la derivada de segundo orden

$$f''(x) = 12x^2 + 30x + 8$$

Determinamos si las raíces x_{r_i} generan un Mínimo o Máximo

$$f''(x_{r_i}) = \begin{cases} 24.33, & \text{si } x_{r_1} = -2.96 \\ -10.48, & \text{si } x_{r_2} = -1.10 \\ 18.45, & \text{si } x_{r_3} = 0.31 \end{cases} \tag{2}$$

por lo tanto

- $x_{r_1} = -2.96$ es un mínimo
- $x_{r_2} = -1.10$ es un máximo
- $x_{r_3} = 0.31$ es un mínimo

Ceros o raíces de una función

Raíces de una función: En matemáticas, se conoce como raíz (o cero) de una función a todo elemento x_{r_i} perteneciente al dominio de dicha función tal que se cumpla:

$$f\left(x_{r_i}\right) = 0$$

Por ejemplo:

$$f\left(x\right) = x^2 - 6x + 8 = 0$$

tiene como raíces

- $x_{r_1} = 4$
- $x_{r_2} = 2$

Ceros o raíces de una función (continuación)

Los siguientes métodos son comúnmente utilizados para calcular las raíces de una función:

- Método de la bisección
- Método de las aproximaciones sucesivas
- Método de Newton-Raphson
- Método de la secante
- Método de Steffensen
- Método de la falsa posición

En este curso nos enfocaremos en conocer el método de Newton-Raphson.

Método de Newton-Raphson

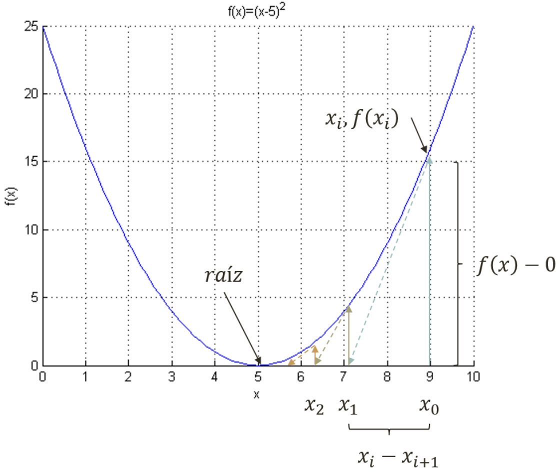
El método de Newton-Raphson consiste en estimar la solución de una ecuación $f(x)$ mediante una sucesión de aproximaciones que se acerquen a la solución.

Se requiere de una valor inicial x_0, después el método ajusta el valor inicial mediante durante un proceso iterativo para refinar el resultado.

Con este método podemos encontrar los valores óptimos de una función para un problema unidimensional.

Método de Newton-Raphson (continuación)

La descripción del método de Newton-Raphson es la siguiente



Método de Newton-Raphson (continuación)

De acuerdo al gráfico anterior, podemos estimar la pendiente (derivada) en el punto x_i de la siguiente manera

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}$$

Después, despejamos el valor de interés x_{i+1}

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Esta ultima ecuación es conocida como fórmula de Newton-Raphson.

Método de Newton-Raphson (continuación)

El método de Newton-Raphson esta dado por los siguientes pasos:

Algorithm 1 Método de Newton-Raphson

$f(x) \leftarrow$ definir función
$f(x)' \leftarrow$ calcular derivada
$x_0 \leftarrow$ definir valor iniciar
$x_i \leftarrow x_0$
Hacer
    $x_{i+1} \leftarrow x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
    $x_i \leftarrow x_{i+1}$
Mientras que se cumpla el total de iteraciones
$x_{r_i} \leftarrow x_i$ es una raíz de la función

Recuerda que este método se utiliza para encontrar los ceros de una función!

Método de Newton

Existen diversos método de optimización clásica para optimizar funciones en un espacio unidimensional. Algunos de los métodos son enunciados a continuación:

- Búsqueda de Sección Dorada
- Interpolación Parabólica
- Método de Newton

En este curso nos enfocaremos en conocer el método de Newton, que es el método de Newton-Raphson modificado para optimización.

Método de Newton (continuación)

La fórmula del método de Newton es la siguiente

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}$$

Prácticamente es la fórmula de Newton-Raphson, pero esta contiene ahora la primera y segunda derivada de la Función Objetivo.

Además, en este método también es necesario conocer un valor inicial x_0 que se ajusta mediante un proceso iterativo.

Método de Newton (continuación)

El algoritmo del método de Newton esta descrito a continuación:

Algorithm 2 Método de Newton

$f(x) \leftarrow$ definir Función Objetivo
$f(x)' \leftarrow$ calcular primer derivada
$f(x)'' \leftarrow$ calcular segunda derivada
$x_0 \leftarrow$ definir valor iniciar
$x_i \leftarrow x_0$
Hacer
    $x_{i+1} \leftarrow x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}$
    $x_i \leftarrow x_{i+1}$
Mientras que se cumpla el total de iteraciones
$x_{r_i} \leftarrow x_i$
determinar si $f''(x_{r_i})$ genera un mínimo o máximo

Gracias por tu atención!

Información de contacto:

M.C. Jesús Hernández Barragán

E-mail: jesus.hdez.barragan@gmail.com.