# Seminario de Solución de Problemas de Inteligencia Artificial I: Optimización multidimensional

M.C. Jesús Hernández Barragán

UDG - CUCEI

Ciclo: 2018-B

# Contenido

# Métodos de optimización multidimensional

Existen diversos métodos para optimizar funciones multidimensionales. A continuación se nombran algunos métodos.

Métodos Directos:

- Búsqueda Aleatoria (Random Search)
- Búsquedas Univariadas y de Patrones (Univariate and Pattern Searches)

Métodos de Gradientes:

- Método de Gradiente Conjugado (Conjugate Gradient Method)
- Método de Newton (Newton's Method)
- Método de Gradiente Descendiente (Gradient Descent Method)

En este curso nos enfocaremos en conocer los métodos de Búsqueda Aleatoria y Gradiente Descendiente.

## Búsqueda Aleatoria

Este método evalúa repetidamente la función $f(\mathbf{x})$ con los valores de $\mathbf{x}$ seleccionados aleatoriamente. Si un número suficiente de iteraciones es seleccionado, el óptimo es encontrado eventualmente.

Los números aleatorios normalmente son generados en el rango $r \in [0, 1]$. Se pueden generar entonces números aleatorios dentro del intervalo $\mathbf{x}_l$ y $\mathbf{x}_u$ mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_l + (\mathbf{x}_u - \mathbf{x}_l)\,\mathbf{r}$$

donde $\mathbf{x}_l$ y $\mathbf{x}_u$ son el limite inferior y superior del intervalo seleccionado. El vector $\mathbf{r}$ contiene números aleatorios. Finalmente, $\mathbf{x}_l, \mathbf{x}_u, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n$ donde $n$ define la dimension del problema.

# Búsqueda Aleatoria (continuación)

El algoritmo del método de Búsqueda Aleatoria se muestra a continuación:

**Algorithm 1** Método de Búsqueda Aleatoria para minimizar una función

```
f(x) ← definir función
f_best ← 9999999, definir mejor Costo
x_best ← {0}, definir mejor posición
Hacer
    x ← x_l + (x_u − x_l) r
    f_val ← f(x)
    Si f_val < f_best entonces
        f_best ← f_val
        x_best ← x
    Fin
Mientras que se cumpla el total de iteraciones
Reportar Mínimo en la posición x_best con Costo f_best
```

# El Gradiente

Antes de comenzar a describir el método de Gradiente Descendiente, es necesario conocer algunos conceptos y operaciones.

El Gradiente es una operación vectorial, que opera sobre una función escalar, para producir un vector cuya magnitud es la máxima razón de cambio de la función en el punto del gradiente y que apunta en la dirección de ese máximo.

Un ejemplo de un gradiente de dimensión 2 se muestra a continuación:

$$\nabla f\left(x, y\right) = \frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial y}\mathbf{j}$$

# El Gradiente (continuación)

Para generalizar el gradiente a $n$ dimensiones, utilizamos:

$$\nabla f\left(\mathbf{x}\right) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f\left(\mathbf{x}\right)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f\left(\mathbf{x}\right)}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f\left(\mathbf{x}\right)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

donde $\mathbf{x} \in [x_1, x_2, \cdots, x_n]$.

# Diferencias finitas

En algunos casos en específicos, resulta inconveniente calcular analíticamente el gradiente. El gradiente puede ser evaluado numéricamente mediante aproximaciones como se muestra a continuación:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \approx \frac{f\left(x+\frac{1}{2}d_x, y\right) - f\left(x-\frac{1}{2}d_x, y\right)}{d_x}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \approx \frac{f\left(x, y+\frac{1}{2}d_y\right) - f\left(x, y-\frac{1}{2}d_y\right)}{d_y}$$

donde $d_x$ y $d_y$ son números fraccionarios pequeños.

## Gradiente Descendiente

El método de gradiente descendiente es una técnica de optimización clásica. Para encontrar el mínimo de una función usando el gradiente descendiente, se utilizan pasos proporcionales del gradiente negativo en el punto actual.

Se requiere de una valor inicial $\mathbf{x}_0$, después el valor es ajustado mediante un proceso iterativo.

El método de gradiente descendiente aproxima el óptimo de una función resolviendo la siguiente ecuación:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - h\nabla f\left(\mathbf{x}_i\right)$$

donde $h$ es un valor que amplifica el resultado del gradiente en la iteración $i$.

## Gradiente Descendente (continuación)

El algoritmo del método de Gradiente Descendente se muestra a continuación:

**Algorithm 2** Método de Gradiente Descendente para minimizar una función

$f(x) \leftarrow$ definir función
$\mathbf{x}_0 \leftarrow$ definir posición inicial
$h, d_x, d_y \leftarrow$ definir parámetros
$\mathbf{x}_i \leftarrow \mathbf{x}_0$
**Hacer**
    $\nabla f(\mathbf{x}_i) \leftarrow$ calcular gradiente
    $\mathbf{x}_{i+1} \leftarrow \mathbf{x}_i - h\nabla f(\mathbf{x}_i)$
    $\mathbf{x}_i \leftarrow \mathbf{x}_{i+1}$
**Mientras** que se cumpla el total de iteraciones
Reportar Mínimo en la posición $\mathbf{x}_i$ con Costo $f(\mathbf{x}_i)$

# Gracias por tu atención!

Información de contacto:

M.C. Jesús Hernández Barragán

E-mail: jesus.hdez.barragan@gmail.com.