

## بخش اول. سوالات تئوری.

یک. متغیر فازی نمایش دهنده‌ی میزان تعلق یک موجودیت به دسته‌های مختلف عضویت است که از آن برای توصیف پدیده‌های نادقیق استفاده می‌شود، اما متغیر تصادفی تابعی از فضای موجودیت‌ها به اعداد حقیقی است که نشان دهنده‌ی احتمال رخداد یک عضو از فضا است.

دو.

$$A * Y = \left\{ \frac{0.1}{(2,2)} + \frac{0.1}{(2,3)} + \frac{0.1}{(2,6)} + \frac{0.7}{(3,2)} + \frac{0.7}{(3,3)} + \frac{0.7}{(3,6)} + \frac{1}{(5,2)} + \frac{1}{(5,3)} + \frac{1}{(5,6)} \right\}$$

$$X * B = \left\{ \frac{0.5}{(2,2)} + \frac{0.3}{(2,6)} + \frac{0.5}{(3,2)} + \frac{0.3}{(3,6)} + \frac{0.5}{(4,2)} + \frac{0.3}{(4,6)} + \frac{0.5}{(5,2)} + \frac{0.3}{(5,6)} + \frac{0.5}{(6,2)} + \frac{0.3}{(6,6)} \right\}$$

$$C * Y = \left\{ \frac{0.8}{(2,2)} + \frac{0.8}{(2,3)} + \frac{0.8}{(2,6)} + \frac{1}{(4,2)} + \frac{1}{(4,3)} + \frac{1}{(4,6)} + \frac{0.2}{(6,2)} + \frac{0.2}{(6,3)} + \frac{0.2}{(6,6)} \right\}$$

(الف)

$$B \cup C \text{ (using maximum operator)} = \left\{ \frac{0.8}{(2,2)} + \frac{0.8}{(2,3)} + \frac{0.8}{(2,6)} + \frac{0.5}{(3,2)} + \frac{0.3}{(3,6)} + \frac{1}{(4,2)} + \frac{1}{(4,3)} + \frac{1}{(4,6)} + \frac{0.5}{(5,2)} + \frac{0.3}{(5,6)} + \frac{0.5}{(6,2)} + \frac{0.2}{(6,6)} \right\}$$

$$(B \cup C) \cap A = \left\{ \frac{0.1}{(2,2)} + \frac{0.1}{(2,3)} + \frac{0.1}{(2,6)} + \frac{0.5}{(3,2)} + \frac{0.3}{(3,6)} + \frac{0.5}{(5,2)} + \frac{0.3}{(5,6)} \right\}$$

(ب)

$$A \cap A' = \left\{ \frac{0.1}{(2)} + \frac{0.3}{(3)} \right\}$$

(پ)

$$A \cap B = \left\{ \frac{0.1}{(2,2)} + \frac{0.1}{(2,6)} + \frac{0.5}{(3,2)} + \frac{0.3}{(3,6)} + \frac{0.5}{(5,2)} + \frac{0.3}{(5,6)} \right\}$$

(ت)

$$A * B = \left\{ \frac{0.1}{(2,2)} + \frac{0.1}{(2,6)} + \frac{0.5}{(3,2)} + \frac{0.3}{(3,6)} + \frac{0.5}{(5,2)} + \frac{0.3}{(5,6)} \right\}$$

سه.

**Commutativity:**

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) * \mu_B(x) = \mu_B(x) * \mu_A(x) = \mu_{B \cap A}(x)$$

$$\text{Max}(\mu_A(x) * \mu_B(x)) = \text{Max}(\mu_B(x) * \mu_A(x)) = \mu_{A \cup B}(x)$$

**Associativity:**

$$\mu_{(A \cap B) \cap C}(x) = (\mu_A(x) * \mu_B(x)) * \mu_C(x) = \mu_A(x) * (\mu_B(x) * \mu_C(x)) = \mu_{A \cap (B \cap C)}(x)$$

$$\mu_{(A \cap B) \cap C}(x) = (\mu_A(x) * \mu_B(x)) * \mu_C(x) = \mu_A(x) * (\mu_B(x) * \mu_C(x)) = \mu_{A \cap (B \cap C)}(x)$$

**Distributivity:**

$$\text{Max}(\mu_A(x), \mu_B(x) * \mu_C(x)) \neq \text{Max}(\mu_A(x) * \mu_B(x), \mu_A(x) * \mu_C(x))$$

=&gt; Not a normal class!

چهار.

(الف)

رابطه‌ای جداپذیر است که در آن به ازای هر درایه، مینیمم (ماکسیمم درایه‌های آن سطر، ماکسیمم درایه‌های آن ستون) برابر با مقدار خود درایه باشد.

در رابطه‌ی S برای درایه‌ی راست بالا داریم:

$$0.5 \neq \min (\max (0.5, 0.9, 0.4), \max (0.2, 0.7, 0.5)) = 0.7$$

پس رابطه جداپذیر نیست. اما این وضعیت برای تمامی درایه‌های رابطه‌ی R صادق است پس رابطه‌ی R جداپذیر است.

(ب)

RoS	C1	C2	C3
A1	0.4	0.7	0.7
A2	0.4	0.8	0.8
A3	0.4	0.8	0.8

(پ)

$$\text{Output} = \left\{ \frac{0.32}{c_1} + \frac{0.64}{c_2} + \frac{0.64}{c_3} \right\}$$

پنج.

$$A_1 * A_2 = \left\{ \frac{0.3}{(1,0)} + \frac{0.5}{(1,1)} + \frac{0.3}{(0,0)} + \frac{0.3}{(0,1)} \right\} \quad x_1 + x_2 = 0 \mid 1 \mid 2 \Rightarrow y = \sqrt{10} \mid 3 \mid 2\sqrt{2}$$

X1, X2 / Y	3	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{10}$
1,0	$1 * 0.3$	0	0
1,1	0	$1 * 0.5$	0
0,0	0	0	$1 * 0.3$
0,1	$1 * 0.3$	0	0

شش.

$$A' = \left\{ \frac{0.7}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0}{x_3} + \frac{0.3}{x_4} + \frac{0.4}{x_5} + \frac{1}{x_6} + \frac{1}{x_7} \right\}, \quad C = A' \cap B = \left\{ \frac{0.2}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0}{x_3} + \frac{0.3}{x_4} + \frac{0}{x_5} + \frac{0}{x_6} + \frac{0}{x_7} \right\}$$

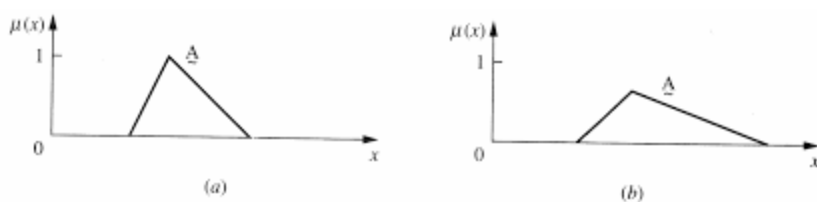
$$\Rightarrow \text{Lambda Cut}(C, 0.3) = \{x_2, x_4\}$$

$$\text{Lambda Cut}(B, 0) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$$

$$\text{Lambda Cut}(B, 0^+) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

هفت.

(الف) مجموعه نرمال فازی مجموعه‌ای است که حداقل یک عضو با تعلق کامل (=1) داشته باشد. در غیر این صورت مجموعه ساب‌نرمال است.



Fuzzy sets that are normal (a) and subnormal (b).

مجموعه‌ی Convex مجموعه‌ای است که در آن به‌ازای هر  $x < y < z$  داشته‌باشیم  $\mu(y) > \min(\mu(x), \mu(z))$ . در غیر این صورت مجموعه Non-Convex است.

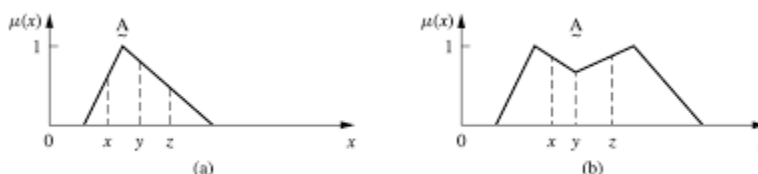
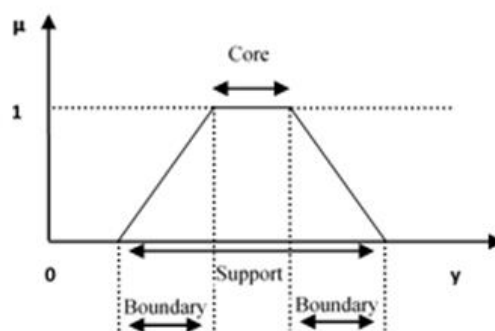


Figure 7: (a) convex and (b) non-convex fuzzy sets.

پ) مجموعه‌های محدب بر عملگر اشتراک بسته هستند ولی بر عملگر اجتماع خیر.

مجموعه‌های نرمال بر عملگر اجتماع بسته هستند ولی بر عملگر اشتراک خیر.

پ)



Features of Membership Function

ناحیه‌هایی که در آن مقدار تعلق  $= 1$  باشد Core نام دارد،

ناحیه‌هایی که در آن مقدار تعلق بین 0 و 1 است Boundary نام دارد.

ناحیه‌هایی که در آن مقدار تعلق بزرگ‌تر از 0 است Support نام دارند.

بخش اول. مسائل برنامه‌نویسی.

یک. ابتدا  $U$  را که به صورت یک ماتریس تعریف کرده‌ایم را به صورت تصادفی initialize می‌کنیم. سپس به کمک روابط داده شده در لینک

مربوطه، در هر مرحله مرکزهای جدید و  $U$ ی جدید را حساب می‌کنیم تا زمانی که تغییرات  $U$  از  $\epsilon$  که در ابتدای الگوریتم برابر با یک عدد

بسیار کوچک قرار می‌دهیم کم‌تر شود. این الگوریتم تقریباً یک الگوریتم k-means کلاسیک است که در محیط فازی آورده شده، به این معنی که هر داده در هر زمان میزان تعلقی به هر کدام از خوشه‌های پیدا شده دارد که در انتها و هنگام defuzzification، خوشه‌ای که تابع تعلق ماکسیمم را دارد را به عنوان خوشه‌ی crisp این داده انتخاب می‌کنیم.

دو. مجموع ضرب درجه‌ی عضویت هر نقطه به هر خوشه در فاصله‌ی مینکوفسکی آن با مرکز آن خوشه است که سعی داریم آن را به حداقل برسانیم. این به این معناست که می‌خواهیم تضمین کنیم هر نقطه به احتمال زیاد در خوشه‌ای قرار گرفته است که به مرکز آن خوشه نزدیک‌تر است. مقدار هزینه با افزایش خوشه‌ها زیاد می‌شود، چراکه مراکز بیش‌تری داریم و باید مجموع فواصل نقاط با مراکز خوشه‌ها را محاسبه کنیم.

$$J_m = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^C u_{ij}^m \|x_i - c_j\|^2, \quad 1 \leq m < \infty$$

سه. باید عدد بسیار بزرگی نباشد، چرا که در صورت زیاد بودن، در فرمول زیر، به سرعت مخرج کسر را به صفر نزدیک می‌کند و خود  $U_{ij}$  را به بی‌نهایت میل می‌دهد. به نظر می‌رسد که اعدادی بین ۱.۵ تا ۲ برای این امر منطقی باشند که در این مورد عدد ۲ انتخاب شد.

$$u_{ij} = \frac{1}{\sum_{k=1}^C \left( \frac{\|x_i - c_j\|}{\|x_i - c_k\|} \right)^{\frac{2}{m-1}}}$$

شکل‌های حاصل از کد برای سمپل‌های ۱ تا ۴:  
مراکز خوشه‌ها با نقاط سیاه مشخص شده‌اند.

