کنترل غیرخطی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر، دانشکده مهندسی برق

زمستان ۱۴۰۳

دکتر شفیعی

لیاپانوف پیوسته و گسسته

عرفان عموزادخلیلی، علی رفیعی

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

سیستم‌های غیرمتغیر با زمان (Autonomous)

$$\boldsymbol{x(t+1) = f\big(x(t)\big)}$$

- تعریف پایداری مانند حالت پیوسته است.

$f: D \to \mathbb{R}^n \quad (D \subset \mathbb{R}^n)$
$f: locally\ Lipschitz$
$x = 0 \ \to equilibrium\ point$

نقطهٔ تعادل

پایدار (Stable) ⟵ پایدار مجانبی (Asymptotically) ⟵ پایدار مجانبی جامع (Globally)

نا پایدار (Unstable)

سیستم‌های غیرمتغیر با زمان
تعاریف پایداری

تعریف پایدار:

stable *if, for each* $\epsilon > 0$, *there is* $\delta = \delta(\epsilon)$ *such that*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \epsilon, \ \forall t \geq 0$$

تعریف ناپایدار:

if it is not stable

تعریف پایدار مجانبی:

if it is stable and δ *can be chosen such that*

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

تعریف پایدار مجانبی جامع:

if it is stable and for every initial conditions:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

سیستم‌های غیرمتغیر با زمان
قضیهٔ لیاپانوف

Theorem 1.2 (Existence of a Lyapunov function implies stability) *Let $x = 0$ be an equilibrium point for the autonomous system*

$$x(t+1) = f(x(t))$$

where $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ is locally Lipschitz in $D \subset \mathbb{R}^n$ and $0 \in D$. Suppose there exists a function $V\colon D \to \mathbb{R}$ which is continuous and such that

$$V(0) = 0 \text{ and } V(x) > 0,\ \forall x \in D - \{0\} \tag{3}$$

$$V(f(x)) - V(x) \le 0,\ \forall x \in D \tag{4}$$

Then $x = 0$ is stable. Moreover if

$$V(f(x)) - V(x) < 0,\ \forall x \in D - \{0\} \tag{5}$$

then $x = 0$ is asymptotically stable.

سیستم‌های غیرمتغیر با زمان
پایداری جامع

Theorem 1.4 (Global asymptotic stability from Lyapunov) *Let* $x = 0$ *be an equilibrium point for the autonomous system*

$$x(t+1) = f(x(t))$$

where $f : D \to \mathbb{R}^n$ *is locally Lipschitz in* $D \subset \mathbb{R}^n$ *and* $0 \in D$. *Let* $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *be a continuous function such that*

$$V(0) = 0 \text{ and } V(x) > 0, \ \forall x \in D - \{0\} \tag{6}$$

$$\|x\| \to \infty \Rightarrow V(x) \to \infty \tag{7}$$

$$V(f(x)) - V(x) < 0, \ \forall x \in D \tag{8}$$

then $x = 0$ *is globally asymptotically stable.*

If an equilibrium point is globally asymptotically stable, than it is the only possible equilibrium point of the system

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

سیستم‌های غیرمتغیر با زمان
قضیهٔ ناپایداری

Theorem 1.5 (Instability condition from Lyapunov) *Let $x = 0$ be an equilibrium point for the autonomous system*

$$x(t+1) = f(x(t))$$

where $f : D \to \mathbb{R}^n$ is locally Lipschitz in $D \subset \mathbb{R}^n$ and $0 \in D$. Let $V : D \to \mathbb{R}$ be a continuous function such that $V(0) = 0$ and $V(x_0) > 0$ for some x_0 with arbitrary small $\|x_0\|$. Let $r > 0$ be such that $B_r \subset D$ and $U = \{x \in B_r | V(x) > 0\}$, and suppose that $V(f(x)) - V(x) > 0$ for all $x \in U$. Then $x = 0$ is unstable.

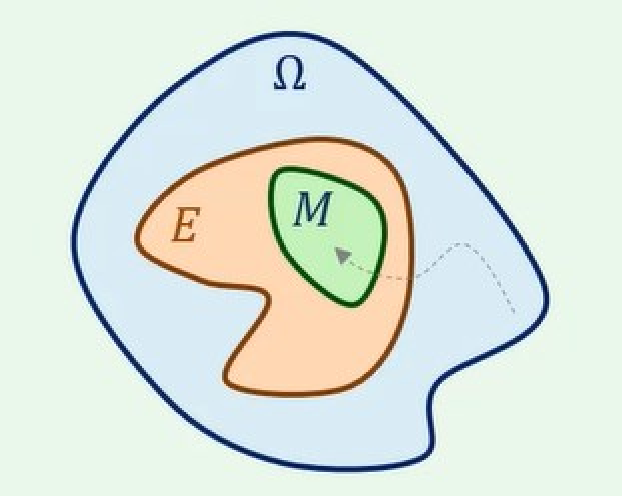
دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

سیستم‌های غیرمتغیر با زمان
اصل تغییرناپذیری (Invariance Principle)

Theorem 2.4 (LaSalle's theorem) *Let $\Omega \subset D$ be a compact set that is positively invariant with respect to the autonomous system*

$$x(t+1) = f(x(t))$$

where $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ is locally Lipschitz in $D \subset \mathbb{R}^n$ and $0 \in D$. Let $V : D \to \mathbb{R}$ be a continuous function such that $V(f(x)) - V(x) \leq 0$ in Ω. Let E be the set of all points in Ω where $V(f(x)) - V(x) = 0$, and let M be the largest invariant set in E. Then every solution starting in Ω approaches M as $t \to \infty$.



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

سیستم‌های غیرمتغیر با زمان
نتایج اصل تغییرناپذیری (Invariance Principle)

Corollary 2.5 *Let $x = 0$ be an equilibrium point for the autonomous system*

$$x(t+1) = f(x(t))$$

where $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ is locally Lipschitz in $D \subset \mathbb{R}^n$ and $0 \in D$. Let $V\colon D \to \mathbb{R}$ be a continuous positive definite function on a domain D, $x \in D$, such that $V(f(x)) - V(x) \le 0$ in D. Let $S = \{x \in D | V(f(x)) - V(x) = 0\}$ and suppose that no solution can stay identically in S other than the trivial solution $x(t) \equiv 0$. Then the origin is asymptotically stable.

Corollary 2.6 *Let $x = 0$ be an equilibrium point for the autonomous system*

$$x(t+1) = f(x(t))$$

where $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ is locally Lipschitz in $D \subset \mathbb{R}^n$ and $0 \in D$. Let $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ be a continuous, positive definite, radially unbounded function, such that $V(f(x)) - V(x) \le 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Let $S = \{x \in \mathbb{R}^n | V(f(x)) - V(x) = 0\}$ and suppose that no solution can stay identically in S other than the trivial solution $x(t) \equiv 0$. Then the origin is **globally** *asymptotically stable.*

سیستم‌های غیرمتغیر با زمان
مقایسهٔ LaSalle و Lyapunov

Lyapunov Stability Theorem	LaSalle's Invariance Principle
V positive definite on B_r	V **continuously differentiable** on Ω
$\dot{V}$ negative definite on B_r	$\dot{V}$ negative **semidefinite** on Ω
Equilibrium point	Equilibrium **set**
-	Gives estimate of the region of attraction
Aleksandr Lyapunov - 1892	Nikolay Krasovsky – 1959 Joseph LaSalle - 1960

اشتباه رایج(Common Mistake)

- باید به جزئیات شروط لیاپانوف و لاسال دقت شود؛ در لیاپانوف ناحیهٔ مورد بررسی دیسک B_r است و در لاسال ناحیهٔ مورد بررسی ناحیهٔ Ω است که positively Invariant است.
- در هر ناحیهٔ دلخواه اگر $V > 0$ و $\dot{V} < 0$ لزوماً آن ناحیه، ناحیهٔ پایدار نیست!

- مثال: سیستم زیر را در نظر بگیرید.

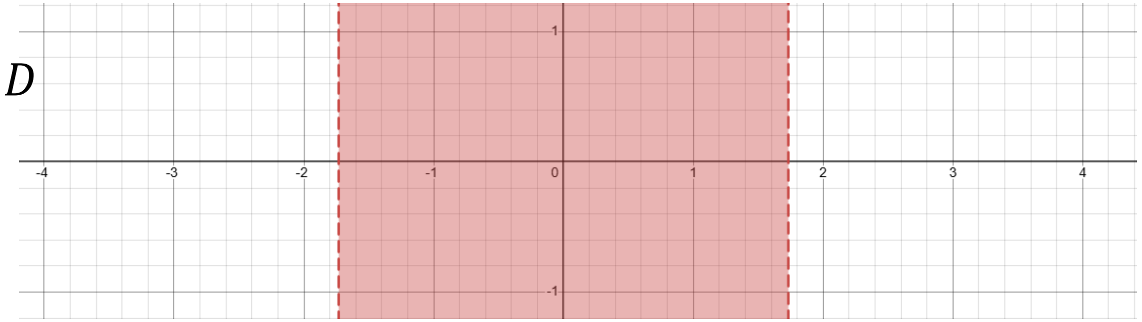
$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = -x_1 + \frac{1}{3}x_1^3 - x_2 \end{cases}$$

ناحیهٔ D را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid -\sqrt{3} < x_1 < \sqrt{3}\}$$

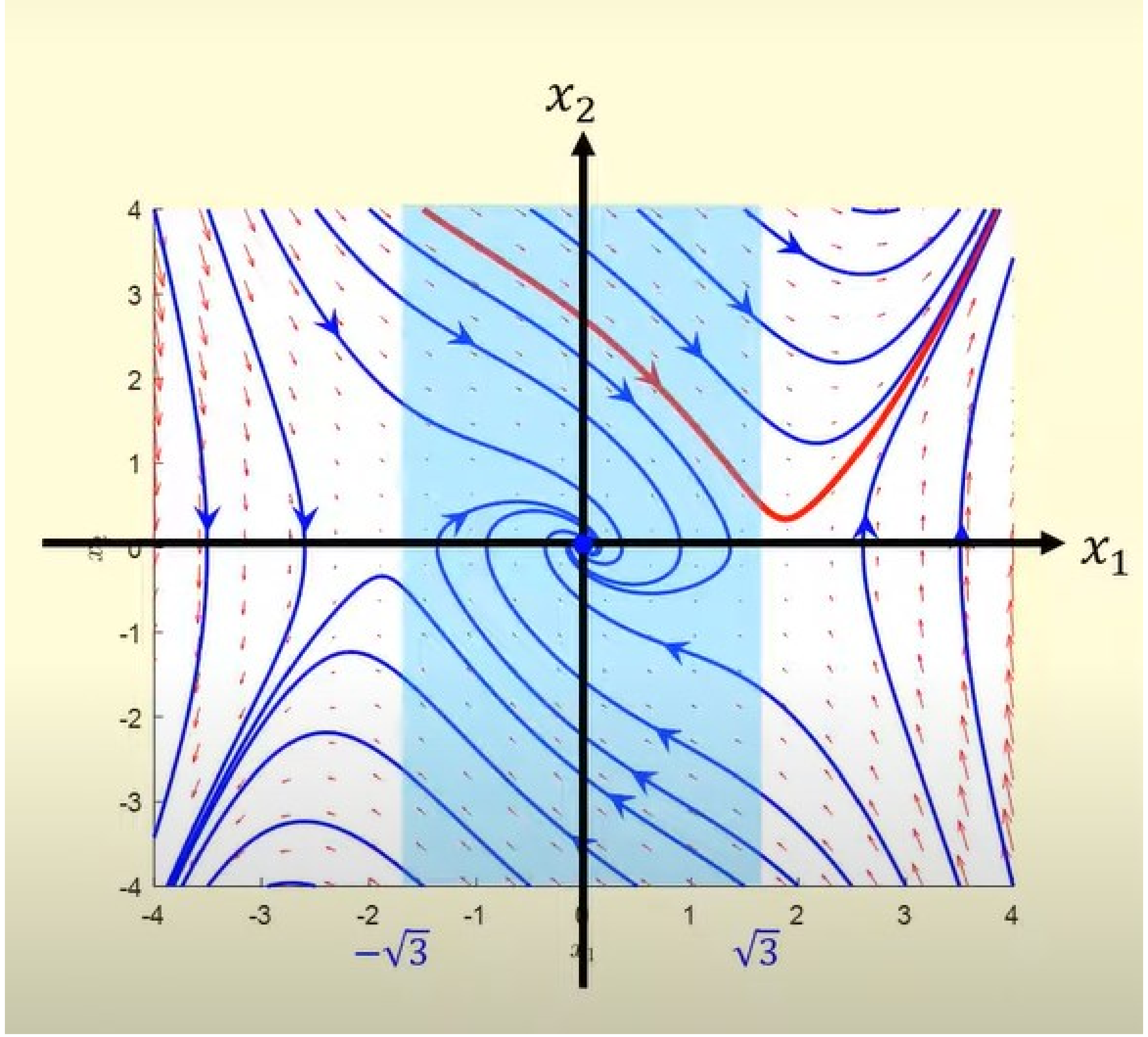
$$V(x) = \frac{3}{4}x_1^2 - \frac{1}{12}x_1^4 + \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 > 0 \qquad \forall x \in D$$

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}x_1^2\left(1 - \frac{1}{3}x_1^2\right) - \frac{1}{2}x_2^2 < 0 \qquad \forall x \in D$$



دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

اشتباه رایج

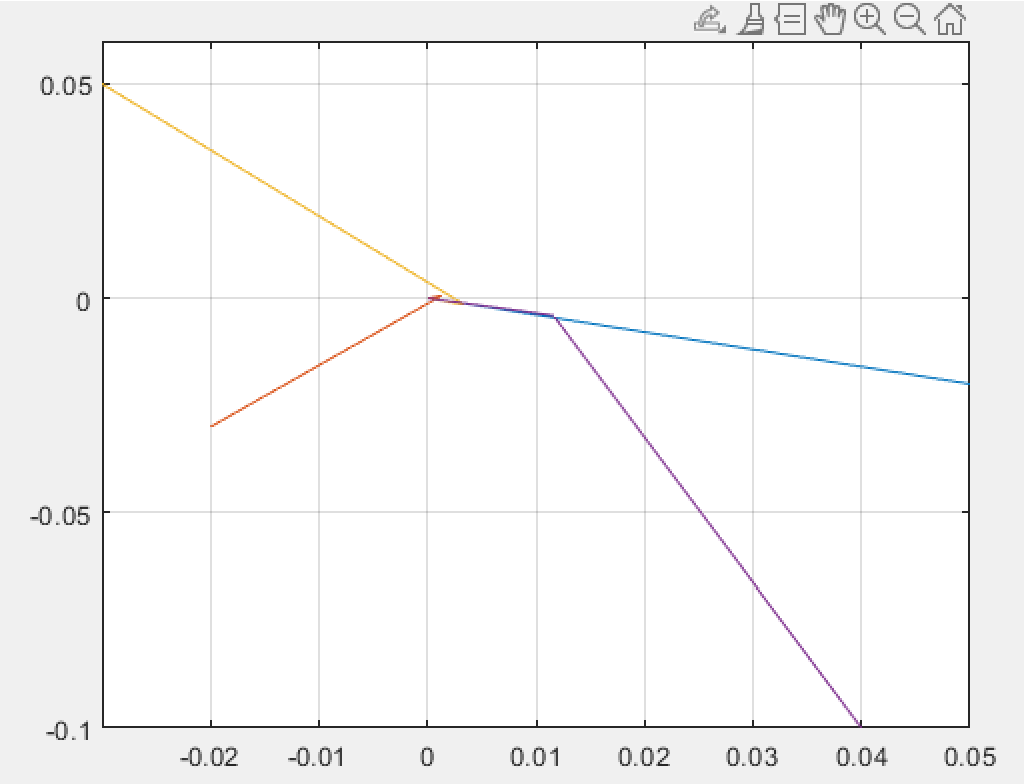


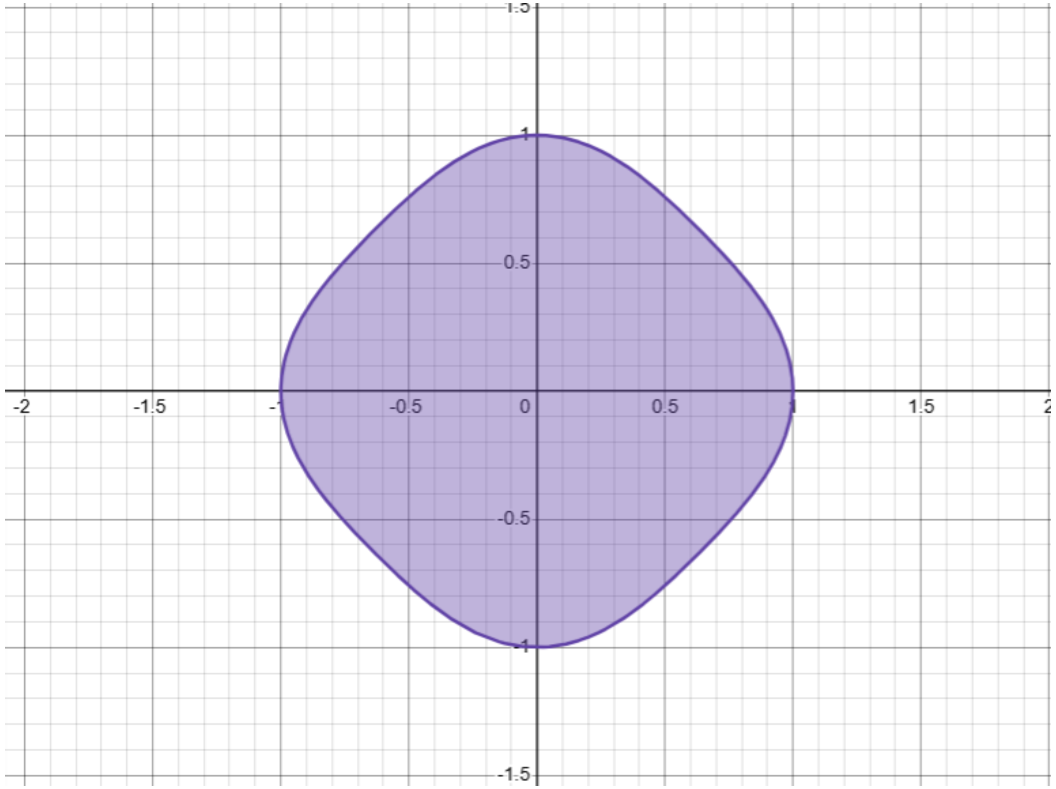
دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

سیستم‌های غیرمتغیر با زمان
یک مثال

$$x_1(t+1) = x_1^2(t) + x_2^2(t)$$
$$x_2(t+1) = x_1(t)x_2(t)$$

$$V(x(t)) = x_1^2(t) + x_2^2(t)$$
$$\rightarrow V(f(x)) - V(x(t))$$
$$= \left(x_1^2(t) + x_2^2(t)\right)^2 + \left(x_1(t)x_2(t)\right)^2 - x_1^2(t) - x_2^2(t)$$
$$\Delta V = x_1^4(t) + x_2^4(t) + 3x_1^2(t)x_2^2(t) - x_1^2(t) - x_2^2(t)$$





کدهای MATLAB در لینک GitHub موجود است.

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

سیستم‌های خطی غیرمتغیر با زمان
پایداری بر اساس مقادیر ویژه

$$\boldsymbol{x(t+1) = A\,x(t)} \xrightarrow{\text{Solution}} x(t) = A^t x(0)$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

Theorem 3.1 *The equilibrium point $x = 0$ of the linear time-invariant system*

$$x(t+1) = Ax(t),\ \ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

is stable if and only if all the eigenvalues of A satisfy $|\lambda_i| \le 1$ and the algebraic and geometric multiplicity of the eigenvalues with absolute value 1 coincide. The equilibrium point $x = 0$ is globally asymptotically stable if and only if all the eigenvalues of A are such that $|\lambda_i| < 1$.

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

سیستم‌های خطی غیرمتغیر با زمان
بررسی کاندید لیاپانوف

$V(x) = x^T P x$ $\quad$ P: متقارن مثبت معین

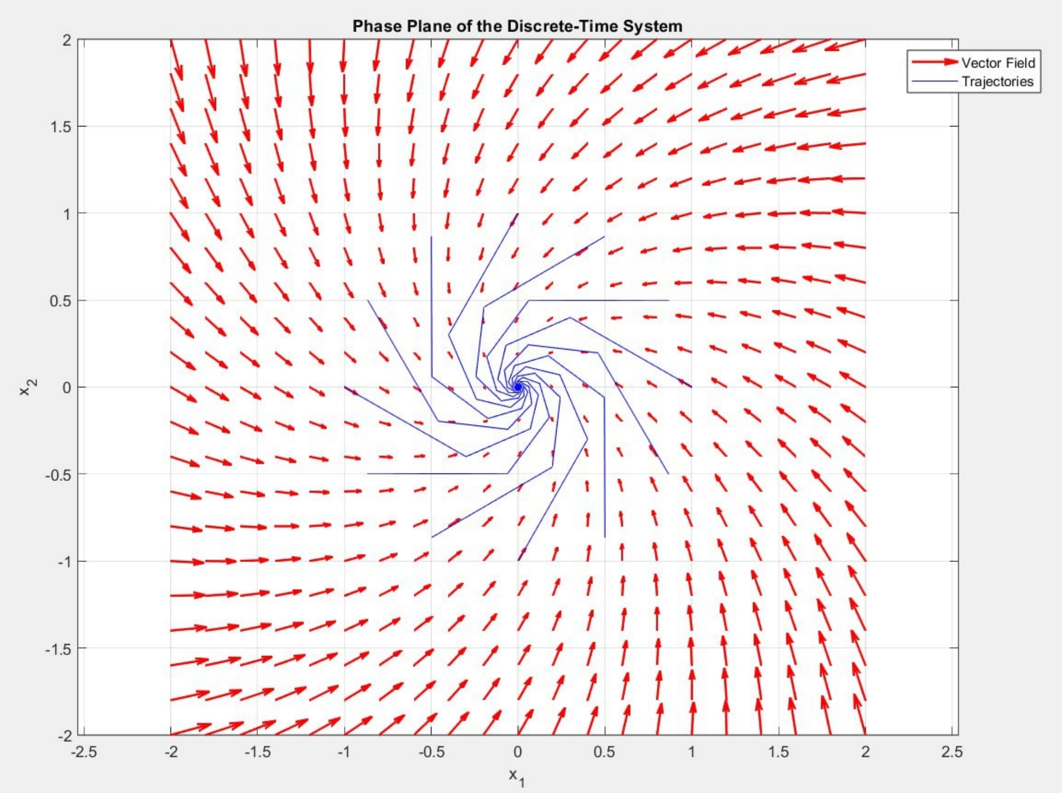
$V(f(x)) - V(x) = (Ax)^T P(Ax) - x^T P x = x^T A^T P A x - x^T P x$

$= x^T(A^T P A - P)x := -x^T Q x$ $\quad$ Q: متقارن مثبت معین $\quad$ $\Longrightarrow (A^T \otimes A^T - I)Vec(P) = -Vec(Q)$

Theorem 3.2 (Lyapunov for linear time invariant systems) *A matrix A is Schur if and only if, for any positive definite matrix Q there exists a positive definite symmetric matrix P that satisfies (11). Moreover if A is Schur, then P is the unique solution of (11).*

سیستم‌های خطی غیرمتغیر با زمان
مثال عددی

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.4 \\ 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} \qquad \lambda_{1,2} = \pm 0.5j \rightarrow |\lambda_{1,2}| < 1$$



$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ -0.4 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 & -0.4 \\ 0.4 & 0.3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} : P.D.$$

$$(A^T \otimes A^T - I) Vec(P) = -Vec(Q)$$

$$\rightarrow Vec(P) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

کدهای MATLAB در [لینک GitHub] موجود است.

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

سیستم‌های خطی غیرمتغیر با زمان
خطی‌سازی

Theorem 3.3 (Linearised asympt stable implies nonlin asympt stable) *Let $x = 0$ be an equilibrium point for the nonlinear autonomous system*

$$x(t+1) = f(x(t))$$

where $f : D \to \mathbb{R}^n$ is locally Lipschitz in $D \subset \mathbb{R}^n$ and $0 \in D$. Let $A = \frac{\partial f_i}{\partial x}(x)\Big|_{x=0}$. Then the origin is asymptotically stable if $|\lambda_i| < 1$ for all the eigenvalues of A. Instead, if there exists at least an eigenvalue such that $|\lambda_i| > 1$, then the origin is unstable.

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

سیستم‌های خطی غیرمتغیر با زمان
قضیهٔ یکتایی پاسخ معادله لیاپانوف

Lemma 3.4 *B The Lyapunov equation* (11) *admits a solution if and only if the eigenvalues* λ_i *of matrix* A *are such that*

$$\lambda_i \lambda_j \neq 1 \text{ for all } i, j = 1, \ldots, n \tag{13}$$

Moreover given a positive definite matrix Q, *the corresponding solution* P *is positive definite if and only if* $|\lambda_i| < 1$ *for all* $i = 1, \ldots, n$.

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

سیستم‌های متغیر با زمان (Nonautonomous)

$$\boldsymbol{x(t+1) = f\big(t, x(t)\big)}$$

$f: (T \times D) \to \mathbb{R}^n \quad (D \subset \mathbb{R}^n, T = \{t_0, t_0 + 1, \dots\})$
$f: locally\ Lipschitz$
$x = 0 \ \to equilibrium\ point$
$f(t, 0) = 0 \quad \forall t \in T$

- نقطهٔ تعادل
  - پایدار (Stable) ← پایدار مجانبی (Asymptotically)
  - پایدار یکنواخت (Uniformly Stable) ← پایدار مجانبی یکنواخت (Uniformly Asymptotically) ← پایدار مجانبی جامع یکنواخت (Globally Uniformly Asymptotically)
  - نا پایدار (Unstable)

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

سیستم‌های متغیر با زمان (Nonautonomous)
تعاریف پایداری

uniformly asymptotically stable *if it is uniformly stable and there is a positive constant* c*, independent of* t_0*, such that* $x(t) \to 0$ *as* $t \to \infty$*, for all* $\|x(t_0)\| < c$ *uniformly in* t_0*; that is, for each* $\eta > 0$*, there is* $T = T(\eta) > 0$ *such that*

$$\|x(t)\| < \eta, \ \forall \ t > t_0 + T(\eta), \ \forall \|x(t_0)\| < c$$

سیستم‌های متغیر با زمان (Nonautonomous)
قضیهٔ لیاپانوف

Theorem 5.4 (Lyapunov function implies stability for nonautonomous)
Let $x = 0$ be an equilibrium point for the nonautonomous system

$$x(t+1) = f(t, x(t))$$

with $f\colon (\mathbb{T} \times D) \to \mathbb{R}^n$, $0 \in D \subset \mathbb{R}^n$ locally Lipschitz in x on $\mathbb{T} \times D$. Let $V\colon \mathbb{T} \times D \to \mathbb{R}$ be a continuous function such that

$$W_1(x) \leq V(t, x) \leq W_2(x)$$

$$V(t+1, f(t,x)) - V(t,x) \leq 0$$

for all $t \geq 0$ and for all $x \in D$, where $W_1(x)$ and $W_2(x)$ are continuous positive definite functions on D. Then $x = 0$ is uniformly stable.

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

سیستم‌های متغیر با زمان (Nonautonomous)
قضیۀ پایداری مجانبی

Theorem 5.5 (Lyapunov function for asymptotically stable nonautonomous systems) *Suppose the assumptions of Theorem 5.4 are satisfied and that it also holds*

$$V(t+1, f(x,t)) - V(t,x) \leq -W_3(x), \ \forall \ t \geq 0, x \in D$$

where $W_3(x)$ is a continuous positive definite function on D. Then, $x = 0$ is uniformly asymptotically stable.

سیستم‌های خطی متغیر با زمان
بررسی معادلهٔ لیاپانوف

$$\boldsymbol{x(t+1) = A(t)\,x(t)}$$

$A: n \times n$

- در حالت خطی متغیر با زمان صرفاً با بررسی مقادیر ویژهٔ $A(t)$ نمی‌توان نظری داد.

Theorem 5.9 (Lyapunov function for linear time variant syst) *Consider the system (18). If there exists a continuous, symmetric, bounded positive definite matrix $P(t), 0 < p_1 I \leq P(t) \leq p_2 I,\ \forall t \geq 0$, which satisfies the equation*

$$A(t)^\top P(t+1) A(t) - P(t) = -Q(t) \tag{19}$$

with $Q(t)$ continuous, symmetric, positive definite matrix, $Q(t) \geq q_1 I > 0$, then the equilibrium point $x = 0$ is globally exponentially stable.

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

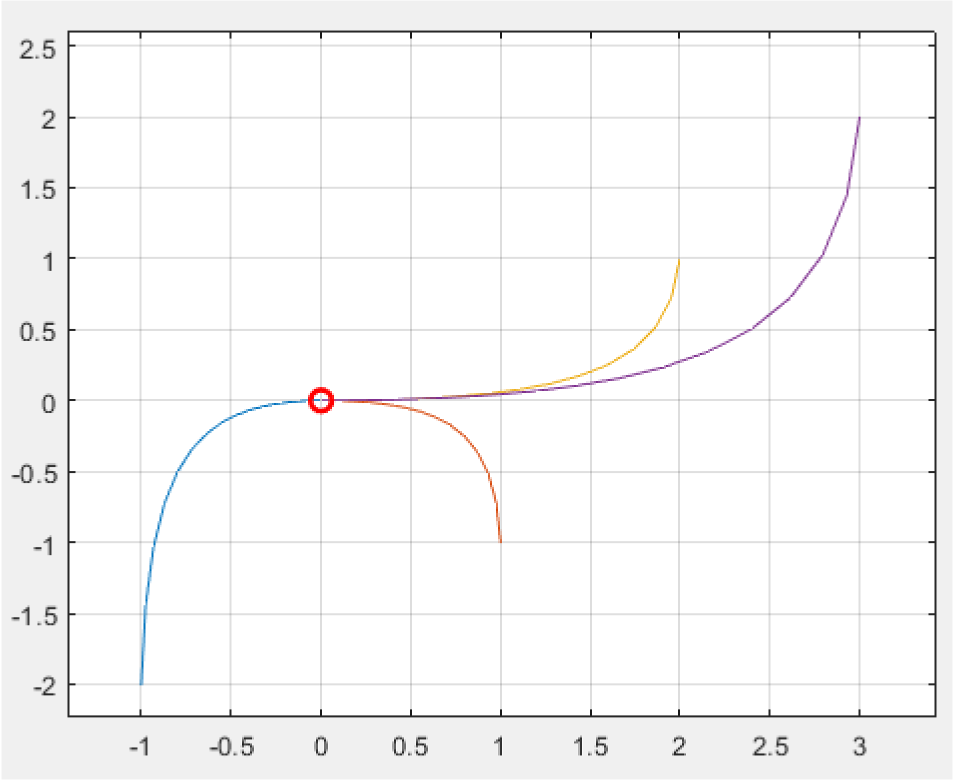
سیستم‌های خطی متغیر با زمان
یک مثال

$$x(t+1)=\begin{bmatrix}0.5+\dfrac{1}{t+2} & 0\\ 0 & 0.4+\dfrac{1}{t+3}\end{bmatrix}x(t)$$

$$A^T(t)P(t+1)A(t)-P(t)=-Q(t)$$

$$P(t)=I{:}\,P.D.\rightarrow$$

$$Q(t)=I-A^T(t)A(t)=\begin{bmatrix}1-\left(0.5+\dfrac{1}{t+2}\right)^2 & 0\\ 0 & 1-\left(0.4+\dfrac{1}{t+3}\right)^2\end{bmatrix}\geq 0$$



کدهای MATLAB در لینک GitHub موجود است.

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

سیستم‌های خطی متغیر با زمان
پایداری بر اساس ماتریس انتقال حالت

Theorem 5.10 (Condition on the transition matrix to have exp stab)
The equilibrium point $x = 0$ of the linear time variant system

$$x(t+1) = A(t)x(t)$$

is uniformly asymptotically stable if and only if the state transition matrix satisfies

$$\|\Phi(t,t_0)\| \leq ke^{-\lambda(t-t_0)}, \ \forall\ t \geq t_0 \geq 0$$

for some positive constants k and λ.

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x(t_0)$$

$$\Phi(t,t_0) = A(t-1)A(t-2)\ldots A(t_0)$$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

سیستم‌های خطی متغیر با زمان
شرطی خوش‌دست‌تر برای ماتریس انتقال حالت

Lemma 5.12 *The following statements are equivalent*

(i) *System* (18) *is uniformally asymptotically stable*

(ii) *System* (18) *is globally uniformly asymptotically stable*

(iii) $\|\Phi(t, t_0)\| \to 0$ *as* $t \to \infty$ *uniformly in* t_0

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

سیستم‌های خطی متغیر با زمان
خطی‌سازی

Theorem 5.14 (If lin system is exp stable than the nonlin is exp stabl)
Let $x = 0$ be an equilibrium point for the nonlinear system

$$x(t+1) = f(t, x)$$

where $f\colon \mathbb{T} \times D \to \mathbb{R}^n$ is locally Lipschitz in x on $\mathbb{T} \times D$, and $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$. Suppose that the Jacobian matrix $[\frac{\partial f}{\partial x}]$ is bounded and Lipschitz on D, uniformly in t. Let

$$A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\bigg|_{x=0}$$

Then the origin is an exponentially stable equilibrium point for the nonlinear system if it is an exponentially stable equilibrium point for the linear system $x(t+1) = A(t)x(t)$.

توجه داریم که در این حالت برای ناپایداری قضیه نداریم.

معادلهٔ لیاپانوف برای سیستم حالت کلی

$$Ex(t+1) = Ax(t)$$

$$V\big(x(t)\big) = x^T E^T P E x$$

$$V\big(x(t+1)\big) - V\big(x(t)\big) = \big(x(t+1)\big)^T E^T P E\big(x(t+1)\big) - x(t)^T E^T P E x(t)$$

$$= \big(Ex(t+1)\big)^T P\big(Ex(t+1)\big) - x(t)^T E^T P E x(t)$$

$$= \big(Ax(t)\big)^T P\big(Ax(t)\big) - x(t)^T E^T P E x(t)$$

$$= x^T A^T P A x - x^T E^T P E x$$

$$\Longrightarrow A^T P A - E^T P E = -Q \qquad \Longrightarrow (A^T \otimes A^T - E^T \otimes E^T) Vec(P) = -Vec(Q)$$

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

سیستم‌های خطی متغیر با زمان Perturbated
قضیهٔ پایداری

$$z(t+1) = \big(A(t) + E(t)\big)z(t) \qquad \forall t \in J$$

فرض کنید سیستم $x(t+1) = A(t)x(t)$ UES باشد.

اگر به ازای هر $t \geq t_0 \in J$ یک ε به اندازهٔ کافی کوچک و $\beta(t_0,\varepsilon)$ یافت شود به طوری که:

$$\sum_{t_0}^{t-1} \|E(t)\| \leq \varepsilon(t-t_0) + \beta(t_0,\varepsilon)$$

آنگاه سیستم ES است. (اگر β مستقل از t_0 باشد آنگاه UES است.)

سیستم‌های خطی متغیر با زمان Perturbated
برخی نتایج قضیه

فرض کنید $J = Z$.

اگر $\lim_{t\to\infty} \|E(t)\| = 0$

و

سیستم غیر Perturbated به صورت UES باشد؛

آنگاه سیستم ES است.

اگر $\lim_{|t|\to\infty, t\in J} \|E(t)\| = 0$

آنگاه سیستم UES است

اگر و تنها اگر

سیستم غیر UES Perturbated باشد.

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

سیستم‌های خطی متغیر با زمان Perturbated
برخی نتایج قضیه

Corollary 3: Assume that the limit $\lim_{t\to\infty} A(t)$ exists and let $\lim_{t\to\infty} A(t) = A_\infty$.

1) Let $J = \mathbf{Z}^+$. Then the DLTV system (1) is UES if and only if A_∞ is Schur stable.
2) Let $J = \mathbf{Z}$. Then the DLTV system (1) is ES if A_∞ is Schur stable.
3) Let $J = \mathbf{Z}$ and, moreover, $\lim_{t\to-\infty} A(t) = A_\infty$. Then the DLTV system (1) is UES if and only if A_∞ is Schur stable.

جمع بندی

Continuous-time	Discrete-time
$\dot{V} \coloneqq \dfrac{\partial}{\partial x} V(t,x) + \nabla V(t,x) f(t,x)$	$\dot{V} \coloneqq V\Big(t+1, f\big(x(t)\big)\Big) - V\big(t, x(t)\big)$
$Re\{\lambda_i\} < 0$	$\lvert\lambda_i\rvert < 1$
$A^T P + AP = -Q$	$A^T PA - P = -Q$
$\lambda_i + \lambda_j^* \neq 0$	$\lambda_i \lambda_j \neq 1$
$A^T(t)P(t) + \dot{P}(t) + P(t)A(t) = -Q(t)$	$A^T(t)P(t+1)A(t) - P(t) = -Q(t)$
$\lim_{t\to\infty} \lVert\Phi(t,t_0)\rVert = 0 \ , \ \lVert\Phi(t,t_0)\rVert \leq k.\, e^{-\lambda(t-t_0)}$	

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)

منابع

- “*Lyapunov Theory for Discrete Time Systems*”, Nicoletta Bof, Ruggero Carli, Luca Schenato
- “*Nonlinear Systems Analysis*”, M. Vidyasagar
- “*On Asymptotic Stability of Discrete-Time Linear Time-Varying Systems*”, Bin Zhou, Tianrui
- “*Discretization of Linear Time-Varying Systems*”, Gagan Deep Meena, S. Janardhanan
- “*Nonlinear Systems*”, Hassan K. Khalil
- “*On the Discrete Generalized Lyapunov Equation*”, Vassilis L. Syrmos, Pradeep Misra, Ravi Aripirala
- https://github.com/ErfanAmKh/eakmatlab/tree/main/nonlinear%20control%20project

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)