به نام خداوند

تمرین شماره ۴ رباتیک

عرفان اعتصامی **۹۶۱۰۶۲۱۴**

پرسش ۱) در گام اول، توابع ژاکوبین سرعت انتقالی و سرعت زاویه‌ای را به صورت سمبولیک از روش تحلیلی و طبق تعاریف موجود در جزوه که در شکل ۱ نمایش داده شده‌اند، به دست می‌آوریم. برای مشاهده‌ی کد، به فایل تابع $Jacob.m$ مراجعه شود (برای جلوگیری از تداخل احتمالی با تابع از پیش تعریف شده‌ی $jacobian$ در $MATLAB$، نام این تابع را به صورت $Jacob$ در نظر گرفتیم).

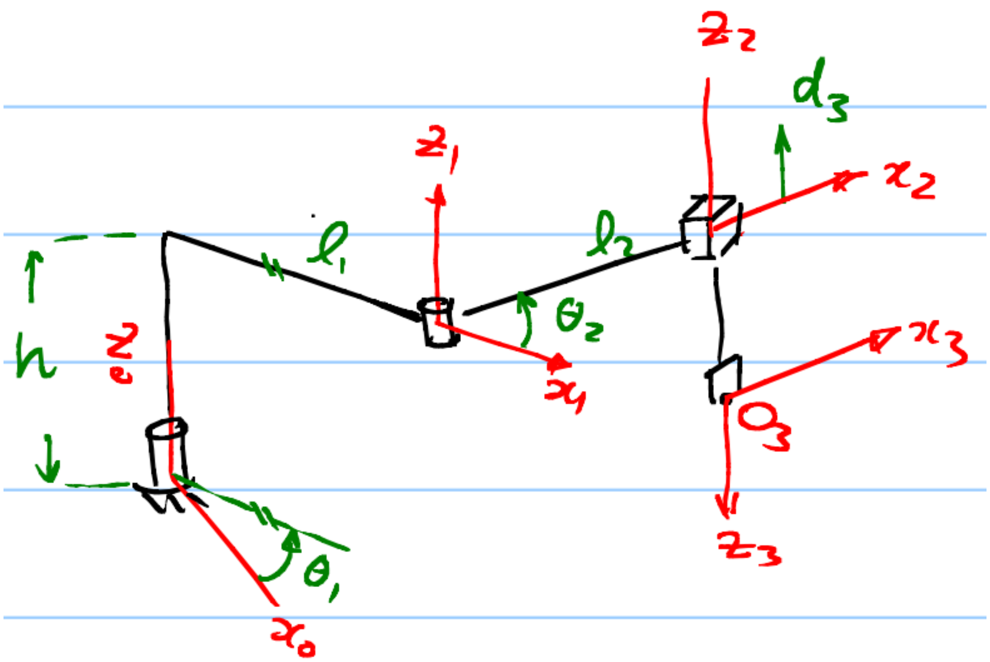
$$\vec{v}_e = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x}{\partial \theta_2} & \cdots & \frac{\partial x}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial y}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial z}{\partial \theta_n} \end{bmatrix}_{3\times n}}_{J_v} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n \end{bmatrix}_{n\times 1}}_{\dot{\Theta}} \Rightarrow \vec{v}_e = J_v \dot{\Theta}$$

$$\vec{\omega}_e = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}_{3\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial r_{3j}}{\partial \theta_1} r_{2j} & \sum \frac{\partial r_{3j}}{\partial \theta_2} r_{2j} & \cdots & \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial r_{3j}}{\partial \theta_n} r_{2j} \\ \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial r_{1j}}{\partial \theta_1} r_{3j} & \cdots & & \sum \frac{\partial r_{1j}}{\partial \theta_n} r_{3j} \\ \sum \frac{\partial r_{2j}}{\partial \theta_1} r_{1j} & \cdots & & \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial r_{2j}}{\partial \theta_n} r_{1j} \end{bmatrix}_{3\times n}}_{} \dot{\Theta}_{n\times 1}$$

$$\vec{\omega}_e = J_\omega \dot{\Theta}$$

شکل ۱: تعریف ژاکوبین سرعت انتقالی و سرعت زاویه‌ای

پرسش ۱ – الف) (فایل $Run.m - Part\ 1 - SCARA$) در ابتدا با در نظر گرفتن دستگاه‌های مختصات تعریف شده در جزوه که در شکل ۲ نمایش داده شده‌اند، تبدیل همگن از دستگاه مختصات مرجع به دستگاه عملگر نهایی را به کمک توابع $Trans.m$ و $Rot.m$ مطابق شکل ۳ می‌یابیم.



شکل ۲: تعریف دستگاه‌های مختصات برای ربات $SCARA$

```
H_SCARA = Rot('z', theta1) * Trans('z', h) * Trans('x', l1) * ...
          Rot('z', theta2) * Trans('x', l2) * Trans('z', d3) * Rot('x', pi);
```

شکل ۳: محاسبه‌ی تبدیل همگن برای ربات $SCARA$

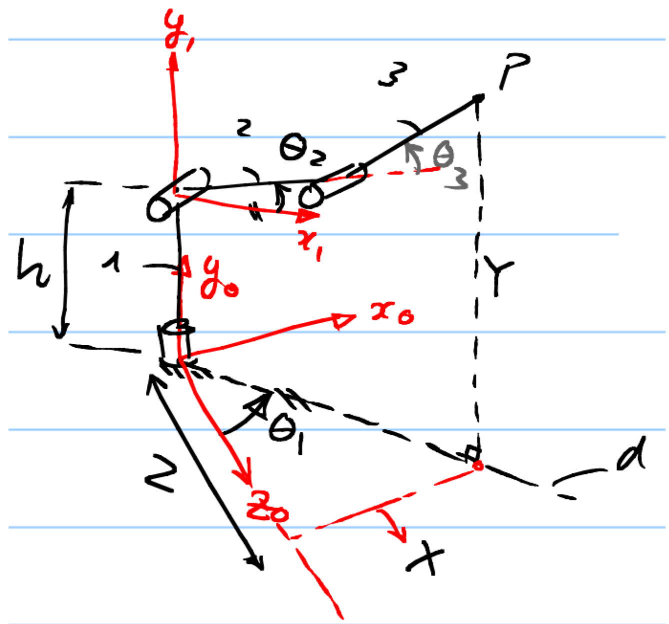
حال به کمک تابع $Jacob.m$، ژاکوبین سرعت انتقالی و سرعت زاویه‌ای ربات $SCARA$ را بر اساس مشخصات داده شده برای آن محاسبه می‌کنیم؛ نتیجه در شکل ۴ نمایش داده شده است.

```
Part 1: SCARA - Jv:
[ - 25.0*sin(theta1 + theta2) - 30.0*sin(theta1), -25.0*sin(theta1 + theta2),    0]
[   25.0*cos(theta1 + theta2) + 30.0*cos(theta1),  25.0*cos(theta1 + theta2),    0]
[                                              0,                           0, 1.0]

Part 1: SCARA - Jw:
[   0,   0, 0]
[   0,   0, 0]
[ 1.0, 1.0, 0]
```

شکل ۴: ژاکوبین سرعت انتقالی و سرعت زاویه‌ای ربات $SCARA$

پرسش ۱ – ب (فایل $Run.m - Part\ 1 - PUMA$) در ابتدا با در نظر گرفتن دستگاه‌های مختصات تعریف شده در جزوه و تمرین ۳ (اضافه گردیدن ثابت d نسبت به جزوه) که در شکل ۵ نمایش داده شده‌اند، تبدیل همگن از دستگاه مختصات مرجع به دستگاه عملگر نهایی را به کمک توابع $Trans.m$ و $Rot.m$ مطابق شکل ۶ می‌یابیم.



شکل ۵: تعریف دستگاه‌های مختصات برای ربات $PUMA$

```
H_PUMA = Rot('y', -(pi/2-theta1)) * Trans('y', h) * Trans('z', d) * ...
         Rot('z', theta2) * Trans('x', l1) * Rot('z', theta3) * ...
         Trans('x', l2);
```

شکل ۶: محاسبه‌ی تبدیل همگن برای ربات $PUMA$

حال به کمک تابع $Jacob.m$، ژاکوبین سرعت انتقالی و سرعت زاویه‌ای ربات $PUMA$ را بر اساس مشخصات داده شده برای آن در تمرین ۳ محاسبه می‌کنیم. از آن‌جا که پس از ساده‌سازی به کمک توابع $MATLAB$، ژاکوبین سرعت انتقالی همچنان عبارتی طولانی است، تنها ژاکوبین سرعت زاویه‌ای در شکل ۷ نمایش داده شده است (عدد 1.571 در این شکل و خروجی $MATLAB$، همان $\frac{\pi}{2}$ می‌باشد).

```
Part 1: PUMA - Jw:
[   0, sin(theta1 - 1.571), sin(theta1 - 1.571)]
[ 1.0,                   0,                   0]
[   0, cos(theta1 - 1.571), cos(theta1 - 1.571)]
```

شکل ۷: ژاکوبین سرعت زاویه‌ای ربات $PUMA$

پرسش ۲) (فایل $Run.m - Part\ 2$) اگر معکوس ماتریس ژاکوبین سرعت انتقالی را از سمت چپ در دو طرف رابطه‌ی میان ژاکوبین سرعت انتقالی و سرعت متغیرهای مفصلی ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$\overrightarrow{V_e} = J_V\dot{\theta} \xrightarrow{\times J_v^{-1}} \dot{\theta} = {J_V}^{-1}\overrightarrow{V_e}$$

حال باید با استفاده از معادله‌ی فوق، مقدار $\dot{\theta}$ (سرعت موتورهای مفاصل دورانی و کشویی) را به ازاء مقادیر مختلف متغیرهای مفصلی محاسبه می‌کنیم. همان‌طور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، ژاکوبین سرعت انتقالی ربات $SCARA$ مستقل از مقدار متغیر مفصلی $d3$ (مفصل کشویی) می‌باشد؛ پس مطابق شکل ۸، تنها برای دو مفصل دورانی، گام $0.1°$ را در نظر می‌گیریم. لازم به ذکر است که نقاط تکینگی ربات $SCARA$، مطابق آن‌چه که در جزوه تعریف شد، به ازاء $\theta_2 = 0°, 180°$ رخ می‌دهند که خارج از محدوده $5°$ تا $175°$ می‌باشد؛ در نتیجه استفاده از رابطه‌ی فوق در این دامنه، معتبر می‌باشد.

```
th1 = [0:0.1:360] * (pi/180);       % degree
th2 = [5:0.1:175] * (pi/180);       % degree
```

شکل ۸: تعریف گام برای مفاصل دورانی ربات $SCARA$

از آن‌جا که سرعت محاسبات سمبولیک در $MATLAB$ پایین می‌باشد، محاسبات لازم را مطابق شکل ۹، با استفاده از تابع $matlabFunction$ برای تبدیل یک عبارت سمبولیک به یک تابع انجام داده‌ایم.

```
Q_dot = zeros(length(th1), length(th2), 3);
% To increase computation speed significantly
Q_dot_temp = Jv_SCARA \ Ve;       % = inv(Jv_SCARA) * Ve
Q_dot_fun = matlabFunction(Q_dot_temp);

for i = 1:length(th1)
    for j = 1:length(th2)
        Q_dot(i, j, :) = Q_dot_fun(th1(i), th2(j));
    end
end
```

شکل ۹: محاسبه‌ی سرعت متغیرهای مفصلی به ازاء موقعیت‌های مختلف مفاصل در ربات $SCARA$

حال مقادیر نظیر $\dot{\theta}_1$، $\dot{\theta}_2$ و $\dot{d}_3$ را جدا کرده و بیشینه‌ی هر یک را پس از گرفتن قدر مطلق (برای در نظر گرفتن مقادیر منفی) بیابیم. حداکثر سرعت مورد نیاز برای هر یک از موتورها در ادامه نمایش داده شده است. لازم به ذکر است که در تمام فضای کاری، سرعت موتور مفصل کشویی برابر با $15\,\frac{cm}{s}$ بوده و محل وقوع سرعت بیشینه‌ی موتورها، فارغ از متغیر مکانی مفصل کشویی می‌باشد.

$$Maximum\ of\ \dot{\theta}_1 = 27.5794\frac{rad}{s}$$

$$@\ \theta_1 = 0.8954\, rad = 51.3°, \theta_2 = 0.0873\, rad = 5°$$

$$Maximum\ of\ \dot{\theta}_2 = 60.6173\frac{rad}{s}$$

$$@\ \theta_1 = 0.9425\, rad = 54°, \theta_2 = 0.0873\, rad = 5°$$

$$Maximum\ of\ \dot{d}_3\ (Constant) = 15\frac{cm}{s}$$

$$@\ Everywhere\ in\ the\ workspace$$