

ابتدا مطابق با خواسته تمرین، بردار زمان t را با فرکانس نمونه برداری $f_s = 1 \text{ MHz}$ ، به مدت $T = 1 \text{ ms}$ تعریف می کنیم. سپس سیگنال منابع s_1 و s_2 را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$s_1(t) = e^{j2\pi f_1 t}, \quad f_1 = 20 \text{ kHz}$$

$$s_2(t) = e^{j2\pi f_2 t}, \quad f_2 = 10 \text{ kHz}$$

سپس آنتن ها را که حکم ماتریس مخلوط کننده را دارند تعریف می کنیم. برای این کار ابتدا فاصله هر آنتن با آنتن اول را بصورت بردار $(10 \text{ آنتن} -)$ با فرض اینکه فاصله هر دو آنتن متوالی ۱ متر است، تعریف می کنیم. با فرض اینکه فاصله فرستنده تا آنتن ها به قدری زیاد باشد که بتوانیم فاصله هر آنتن تا فرستنده را موازی در نظر بگیریم، می توانیم تأخیر دریافت سیگنال در هر منبع را برحسب منبع اول بصورت زیر بنویسیم (c سرعت نور (موج) و θ زاویه منبع است).

$$\tau_{m,1} = \frac{d_{m,1} \sin \theta}{c}$$

سیگنال در حدود آنتن بصورت $s(t - \tau)e^{j2\pi f_c(t - \tau)}$ است که چون تأخیر $s(t - \tau)$ به تنهایی مقدار کوچکی است می توان آنرا بصورت $s(t)$ نوشت. سیگنال باند میانی در آنتن به سیگنال باند پایه تبدیل می شود. پس سیگنال خالص دریافتی توسط آنتن در نهایت بصورت $s(t)e^{-j2\pi f_c \tau}$ است. به این سیگنال یک نویز نرمال نیز اضافه می شود و در نهایت $y(t)$ ساخته می شود. برای تعریف نویز نرمال، نویز دریافتی هر آنتن را مستقل از دیگری در نظر می گیریم:

$$k \triangleq \frac{2\pi f_c}{c} : \text{ عدد موج}$$

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_{10}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1(t) + s_2(t) \\ e^{-jkd_{2,1}\sin\theta_1}s_1(t) + e^{-jkd_{2,1}\sin\theta_2}s_2(t) \\ \vdots \\ e^{-jkd_{10,1}\sin\theta_1}s_1(t) + e^{-jkd_{10,1}\sin\theta_2}s_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{noise}_1(t) \\ \text{noise}_2(t) \\ \vdots \\ \text{noise}_{10}(t) \end{bmatrix}$$

الف - ابتدا معادلات بالا را به فرم خطی در می آوریم.

$$Y(t) = a(\theta_1)s_1(t) + a(\theta_2)s_2(t) + \text{Noise} = [a(\theta_1) \quad a(\theta_2)] \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix} + \text{Noise}$$

بدست آوردن A :

$$A = [a(\theta_1) \ a(\theta_2)] , \quad a(\theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-jkd_{2,1}\sin\theta} \\ \vdots \\ e^{-jkd_{10,1}\sin\theta} \end{bmatrix} , \quad S(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix}$$

$$Y(t) = AS(t) + \text{Noise}$$

اگر از مشاهدات $Y(t)$ تبدیل SVD بگیریم:

$$SVD \rightarrow Y = UGV^T$$

ابتدا رتبه ماتریس Y را با استفاده از مقادیر ویژه G مطابق با تصویر ۱ بدست می آوریم. همانطور که مشاهده می شود، از مقدار

ویژه ۳ به بعد شاهد مقادیر یکنواخت هستیم که معرف نویز هستند. پس رتبه ماتریس Y ، ۲ می باشد.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	111.5249	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	96.9036	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	33.4049	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	33.0535	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	31.8516	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	31.1395	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	30.9425	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	30.5088	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	29.3977	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	28.6848	0

تصویر ۱ - ماتریس G

مطابق با مطالب گفته شده در جلسات می توان ماتریس $U_{10 \times 10}$ را به صورت زیر نوشت. با توجه به اینکه ماتریس Y رتبه ۲

است، پس می توان آن را با دو بردار ویژه u_1 و u_2 توصیف کرد.

$$U_{10 \times 10} = [U_{sig} \ U_{noise}] , \quad U_{sig} = [u_1 \ u_2]$$

با توجه به اینکه U_{sig} در فضای A قرار دارد و U_{noise} بر فضای A متعامد است می توان گفت:

- متوسط $a^H(\theta)U_{sig}$ باید ماکزیمم شود. (چون U_{sig} و A در فضای هم هستند).

$$\text{Beamforming Method: } g(\theta) = |a^H(\theta)U_{sig}| \Rightarrow \max\{f(\theta)\} \rightarrow \theta = ?$$

- متوسط $a^H(\theta)U_{noise}$ باید مینیمم شود. (چون U_{noise} و A بر هم متعامد هستند).

$$\text{MUSIC Method: } f(\theta) = |a^H(\theta)U_{noise}| \Rightarrow \min\{f(\theta)\} \text{ or } \max\left\{\frac{1}{f(\theta)}\right\} \rightarrow \theta = ?$$

در نهایت در هر روش تابع هدف $f(\theta)$ در دو θ ماکزیمم می شود که آن دو زاویه هر منبع یعنی θ_1 و θ_2 را نشان میدهد.

بدست آوردن منابع S :

$$S(t) = \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{bmatrix}, \quad s(t) = e^{j2\pi f t}, \quad A = [a(\theta_1) \ a(\theta_2)]$$

$$Y(t) = AS(t) + \text{Noise}$$

اگر از مشاهدات $Y(t)$ تبدیل SVD بگیریم:

$$SVD \rightarrow Y = UGV^T$$

مطابق با مطالب گفته شده در جلسات می توان ماتریس $V_{T \times T}$ را به صورت زیر نوشت. با توجه به اینکه ماتریس Y رتبه ۲ است، پس می توان آن را با دو بردار اول متناظر با بردارهای ویژه u_1 و u_2 یعنی v_1 و v_2 توصیف کرد.

$$V_{T \times T} = [V_{sig} \ V_{noise}], \quad V_{sig} = [v_1 \ v_2]$$

با توجه به اینکه V_{sig} در فضای S قرار دارد و V_{noise} بر فضای S متعامد است می توان گفت:

- متوسط $s(f)V_{sig}$ باید ماکزیمم شود. (چون V_{sig} و $s(t)$ در فضای هم هستند).

$$\text{Beamforming Method: } g(f) = |s(f)V_{sig}| \Rightarrow \max\{g(f)\} \rightarrow f = ?$$

- متوسط $s(t)V_{noise}$ باید مینیمم شود. (چون V_{noise} و $s(t)$ بر هم متعامد هستند).

$$\text{MUSIC Method: } g(f) = |s(f)V_{noise}| \Rightarrow \min\{g(f)\} \text{ or } \max\left\{\frac{1}{g(f)}\right\} \rightarrow f = ?$$

در نهایت در هر روش تابع هدف $g(f)$ در دو f ماکزیمم می شود که آن دو فرکانس هر منبع یعنی f_1 و f_2 را نشان میدهد.

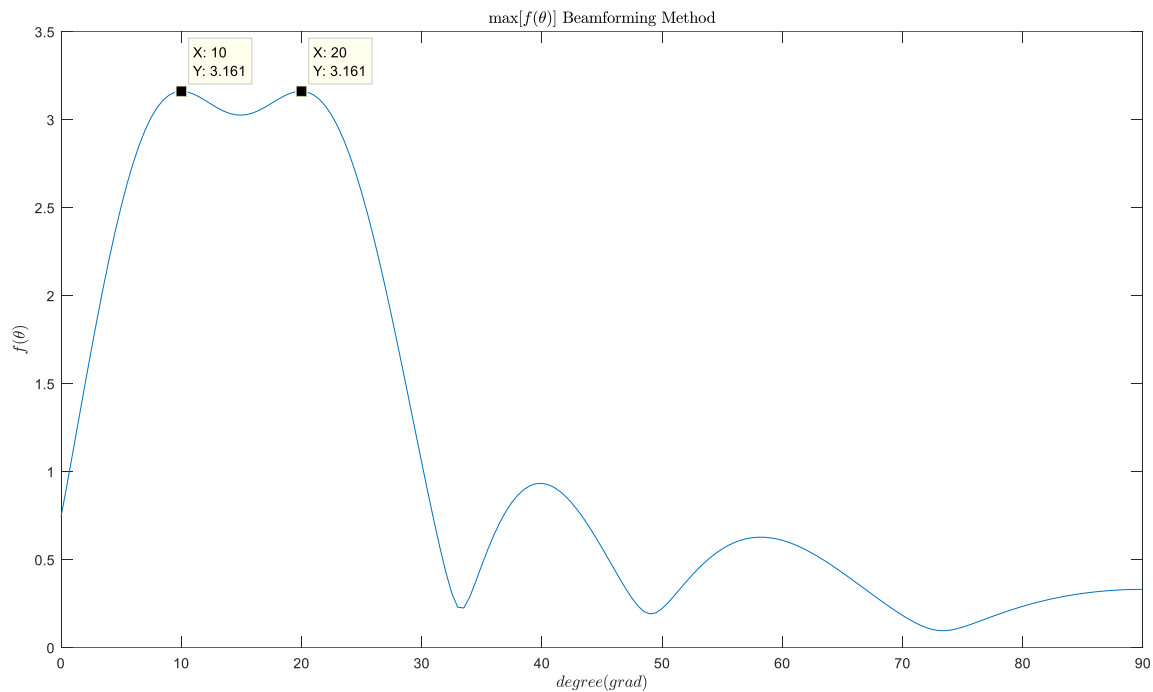
ب - تابع هدف روش $Beamforming$ به صورت $f(\theta) = |a^H(\theta)U_{sig}|$ است.

در محیط متلب ابتدا یک بردار برای متغیر θ از ۰ تا ۹۰ درجه تعریف می کنیم و سپس با استفاده از آن $a(\theta)$ را می سازیم.

$a(\theta)$ یک ماتریس به تعداد ستون θ و تعداد سطر مشاهدات (تعداد آنتن ها یعنی ۱۰) است. همچنین U_{sig} دو ستون اول

ماتریس U می باشد. در نهایت جذر مجموع مربعات هر سطر $a^H(\theta)U_{sig}$ را حساب کرده و رسم می کنیم.

تصویر ۲ این نمودار را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، در ۱۰ و ۲۰ درجه دو ماکزیمم داریم که نشان می‌دهد که $a(20^\circ)$ و $a(10^\circ)$ در فضای U_{sig} بوده و بردار مکانی های ماتریس مخلوط کننده را نشان می‌دهند.



تصویر ۲ - نمودار $f(\theta)$ بر حسب θ ، روش Beamforming

در نهایت نیز با استفاده از دستور *findpeaks* نیز به طور دقیق زاویه دو منبع را بدست می‌آوریم. (تصویر ۳)

Part b:

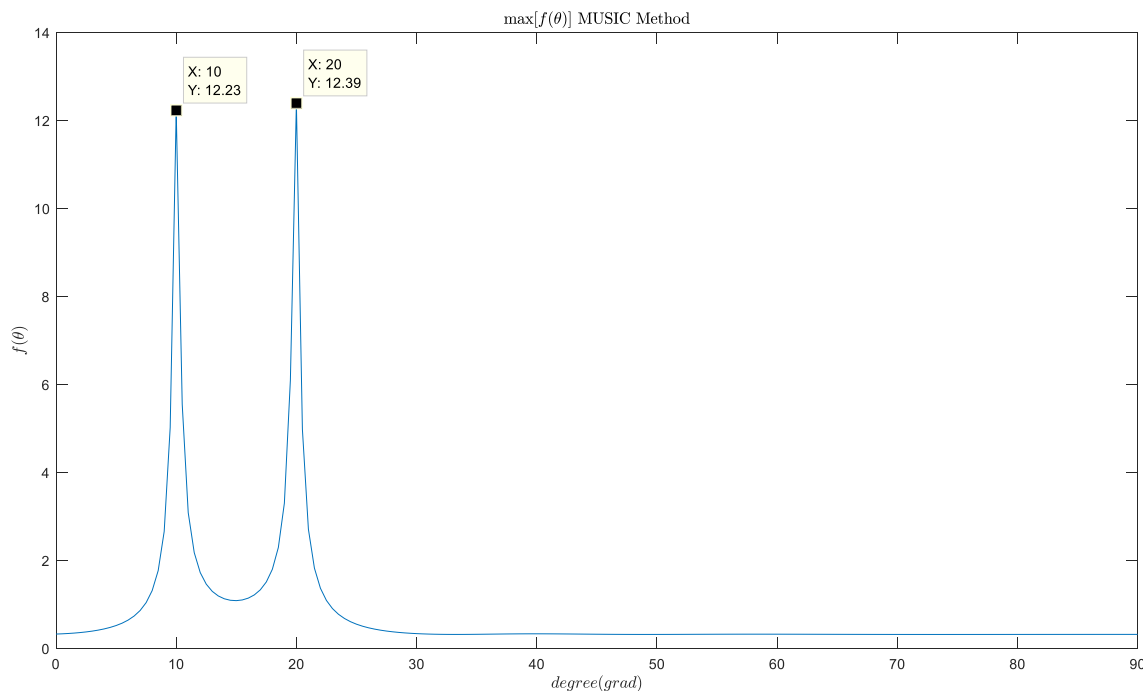
Beamforming Method: $\theta_1 = 10.000000$, $\theta_2 = 20.000000$

تصویر ۳ - محاسبه θ_1 و θ_2 با استفاده از روش Beamforming

ج - تابع هدف روش MUSIC به صورت زیر است.

$$f(\theta) = \frac{1}{|a^H(\theta)U_{noise}|}$$

این روش را نیز همانند قسمت قبلی پیش می‌بریم؛ U_{noise} ستون های ۳ به بعد ماتریس U می‌باشد. در نهایت جذر مجموع مربعات هر سطر $a^H(\theta)U_{noise}$ را حساب کرده و معکوس آن را رسم می‌کنیم. تصویر ۴ این نمودار را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، در ۱۰ و ۲۰ درجه دو ماکزیمم داریم که نشان می‌دهد که $a(20^\circ)$ و $a(10^\circ)$ بر فضای U_{noise} متعامد است و بردار مکانی های ماتریس مخلوط کننده را نشان می‌دهند.



تصویر ۴ - نمودار $f(\theta)$ بر حسب θ ، روش MUSIC

در نهایت نیز با استفاده از دستور *findpeaks* نیز به طور دقیق زاویه دو منبع را بدست می آوریم. (تصویر ۵)

Part c:

MUSIC Method: $\theta_1 = 10.000000$, $\theta_2 = 20.000000$

تصویر ۵ - محاسبه θ_1 و θ_2 با استفاده از روش MUSIC

مقایسه دو روش: همانطور که در تصاویر ۱ و ۳ مشاهده می‌شود، در اینجا تشخیص زاویه منابع در روش MUSIC راحت تر از روش *Beamforming* است. دلیل آن نیز این است که تعداد ستون های U_{noise} بیشتر از ستون ها U_{sig} است. بعبارت دیگر در صورتی که رتبه ماتریس مشاهدات از نصف تعداد آنتن ها کمتر باشد، روش MUSIC برای تخمین زاویه منابع مناسب تر است.

د - برای بدست آوردن فرکانس منابع می‌توانیم از دو روش پیش برویم. می‌توان همانند قسمت ب این بار برای منابع روش *beamforming* را پیاده سازی کرد. همچنین می‌توانیم از نتیجه قسمت ب استفاده کنیم و منابع را تخمین بزنیم.

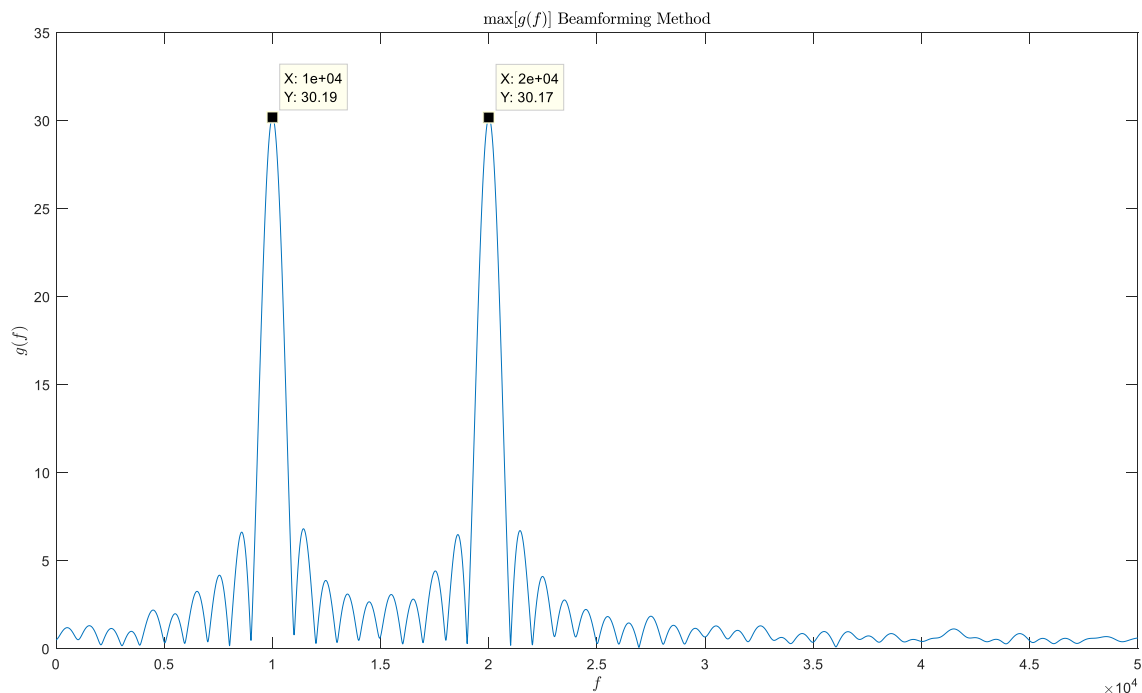
روش اول: در این روش برای تابع هدف g ماکزیمم را بدست می‌آوریم:

$$g(f) = |s(f)V_{sig}|$$

در محیط متلب ابتدا یک بردار برای متغیر f از 0 تا 50kHz تعریف می‌کنیم و سپس با استفاده از آن $s(f)$ را می‌سازیم.

$s(f)$ یک ماتریس به تعداد ستون f و تعداد سطر زمانی است. همچنین V_{sig} دو ستون اول ماتریس V می‌باشد. در نهایت

جذر مجموع مربعات هر سطر $s(f)V_{sig}$ را حساب کرده و رسم می‌کنیم. تصویر ۶ این نمودار را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، در $10kHz$ و $20kHz$ دو ماکزیمم داریم که نشان می‌دهد که $s(10k)$ و $s(20k)$ در فضای V_{sig} بوده و منابع را نشان می‌دهند.



تصویر ۶ - نمودار $g(f)$ بر حسب f ، روش *Beamforming*

در نهایت نیز با استفاده از دستور *findpeaks* نیز فرکانس دو منبع را بدست می‌آوریم. (تصویر ۷)

Part d:

Beamforming Method: f1 = 20000.000000 , f2 = 10000.000000

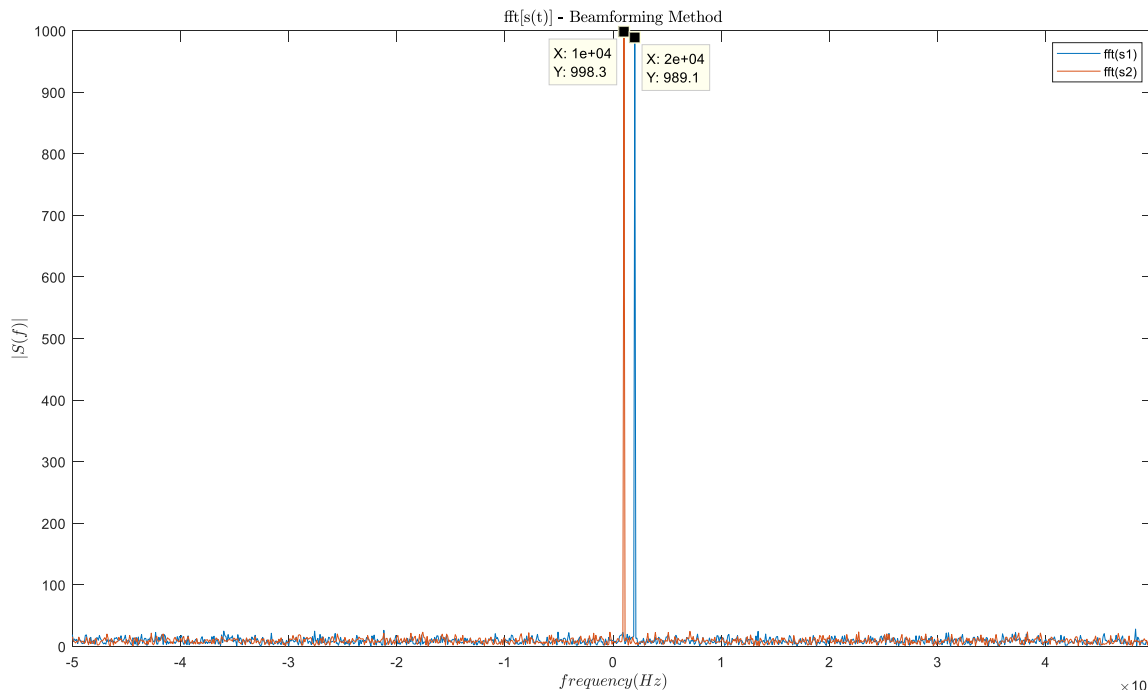
تصویر ۷ - محاسبه f_1 و f_2 با استفاده از روش *Beamforming*

روش دوم: در این روش برای تخمین فرکانس سیگنال منابع، ابتدا باید خود منابع را تخمین بزنیم. برای اینکار باید *psuudo inverse* ماتریس مخلوط کننده را از سمت چپ در مشاهدات ضرب کنیم. در این صورت منابع تخمین زده شده بدست می‌آید. برای محاسبه *psuudo inverse* از دستور *pinv* متلب استفاده می‌کنیم.

$$Y_{10 \times 1} = A_{10 \times 2} S_{2 \times 1} + Noise_{10 \times 1} \rightarrow Noise \approx 0 \rightarrow \hat{S} = (A^T A)^{-1} A^T Y$$

راه های متعددی از جمله بدست آوردن همبستگی، رسم تبدیل فوریه و ... برای بدست آوردن فرکانس منبع از روی منبع وجود دارد. با توجه به اینکه منبع فرم $e^{j2\pi ft}$ دارد، می‌دانیم تبدیل فوریه بصورت یک ضربه در فرکانس f خواهد بود، با رسم تبدیل فوریه، می‌توانیم به راحتی فرکانس منابع را تخمین بزنیم. (در اینجا با توجه به وجود نویز، استفاده از تبدیل فوریه روش مناسبی است. زیرا نویز گوسی یک دامنه تقریباً ثابت و کوچک در حوزه طیف دارد.)

تصویر ۸ تبدیل فوریه منابع و تصویر ۹ فرکانس منابع را به روش *Beamforming* نشان می‌دهد. همانطور که در تصویر مشاهده می‌شود، دو ضربه در تبدیل فوریه اتفاق افتاده است که یکی مربوط به فرکانس منبع اول و دیگری مربوط به فرکانس منبع دوم می‌باشد.



تصویر ۸ - تبدیل فوریه منابع ، با استفاده از روش *Beamforming*

Part d-2:

Beamforming Method (fft): f1 = 20000.000000 , f2 = 10000.000000

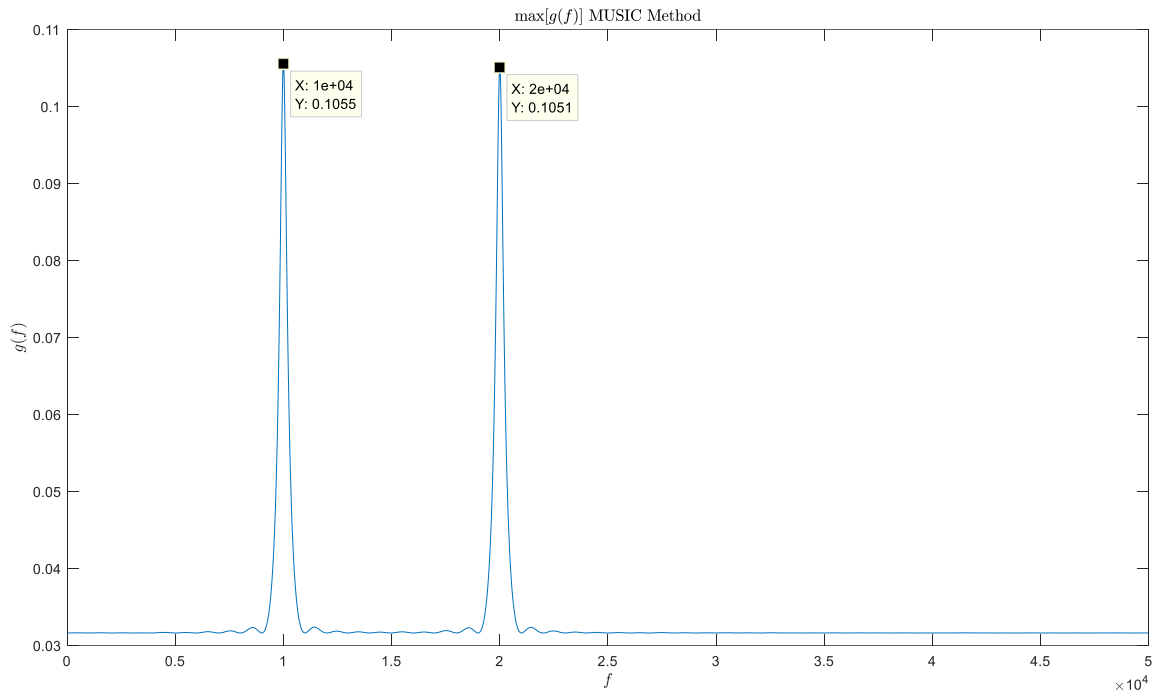
تصویر ۹ - فرکانس منابع ، با استفاده از روش *Beamforming* و تبدیل فوریه

۵- مشابه قسمت قبل دو روش را برای این قسمت می‌نویسیم:

روش اول: در این روش برای تابع هدف g ماکزیمم را بدست می‌آوریم:

$$g(f) = \frac{1}{|s(f)V_{noise}|}$$

در محیط متلب ابتدا یک بردار برای متغیر f از 0 تا 50kHz تعریف می‌کنیم و سپس با استفاده از آن $s(f)$ را می‌سازیم. $s(f)$ یک ماتریس به تعداد ستون f و تعداد سطر زمانی است. همچنین V_{noise} ستون‌های ۳ به بعد ماتریس V می‌باشد. در نهایت جذر مجموع مربعات هر سطر $s(f)V_{noise}$ را حساب کرده و رسم می‌کنیم. تصویر ۱۰ این نمودار را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، در 10kHz و 20kHz دو ماکزیمم داریم که نشان می‌دهد که $s(10k)$ و $s(20k)$ در فضای V_{sig} بوده و منابع را نشان می‌دهند.

تصویر ۱۰ - نمودار $g(f)$ بر حسب f ، روش MUSIC

در نهایت نیز با استفاده از دستور *findpeaks* نیز فرکانس دو منبع را بدست می آوریم. (تصویر ۱۱)

Part e:

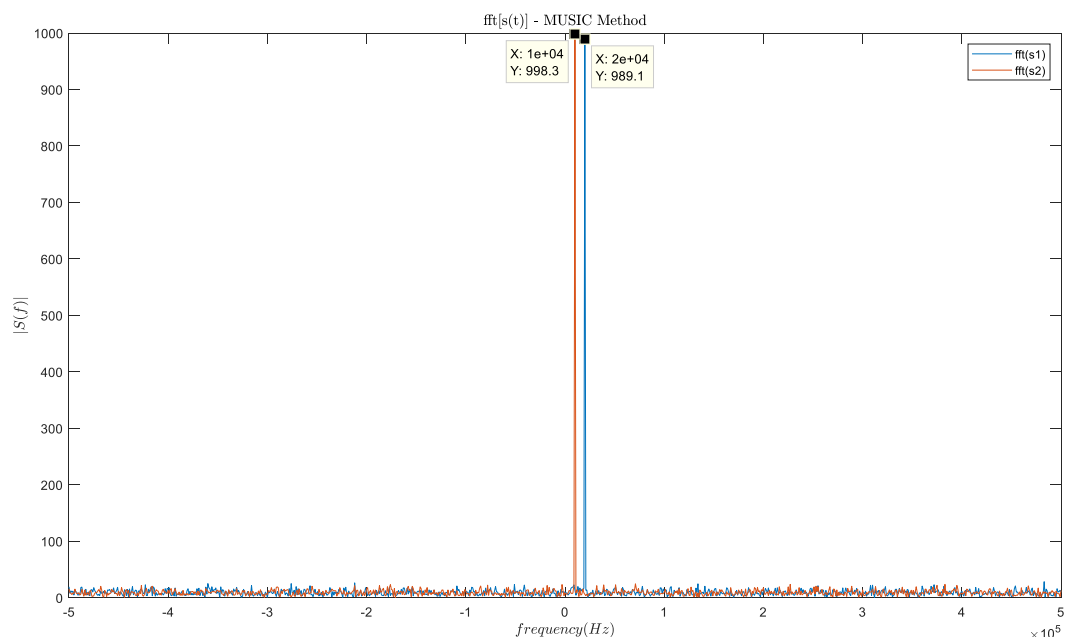
MUSIC Method: $f_1 = 20000.000000$, $f_2 = 10000.000000$

تصویر ۱۱ - محاسبه f_1 و f_2 با استفاده از روش MUSIC

روش دوم: تصویر ۱۲ تبدیل فوریه منابع و تصویر ۱۳ فرکانس منابع را به روش MUSIC نشان میدهد. همانطور که در تصویر

مشاهده می شود، دو ضربه در تبدیل فوریه اتفاق افتاده است که یکی مربوط به فرکانس منبع اول و دیگری مربوط به فرکانس

منبع دوم می باشد.



تصویر ۱۲ - تبدیل فوریه منابع ، با استفاده از روش MUSIC

Part e-2:

MUSIC Method (fft): $f1 = 20000.000000$, $f2 = 10000.000000$

تصویر ۱۳ - فرکانس منابع ، با استفاده از روش *MUSIC*
