به نام خدا

مباحث ویژه در مخابرات – جداسازی کور منابع (دکتر اخوان)

تمرین سری **دوم**

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱–۱۴۰۰

عرفـان پـنــاهی ۸۱۰۱۹۸۳۶۹

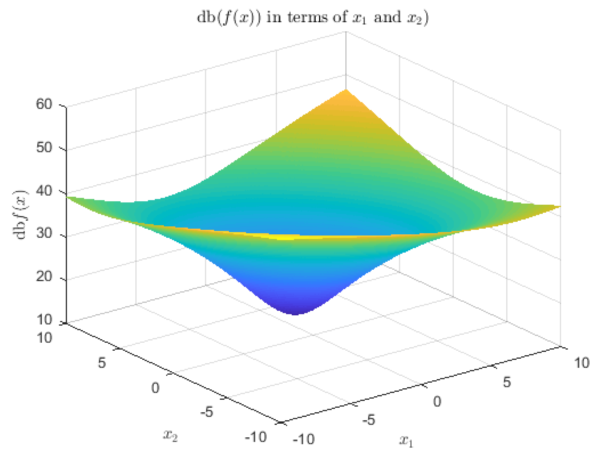
***** فایل متلب مربوط به این تمرین با عنوان panahi.m پیوست شده است.**

ابتدا مطابق با خواسته تمرین، بردار های x_1 و x_2 را (با گام 0.01) در بازهٔ $[-10 \quad 10]$ در محیط متلب تعریف می‌کنیم.

سپس در محیط متلب یک تابع برای تابع هدف $f(\underline{x})$ مینویسیم تا ورودی ها x_1 و x_2 (هر دو بردار یا هر دو اسکالر) را دریافت کرده و خروجی را با اعمال زیر می‌دهد:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad , \qquad f(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 13 + x_1x_2$$

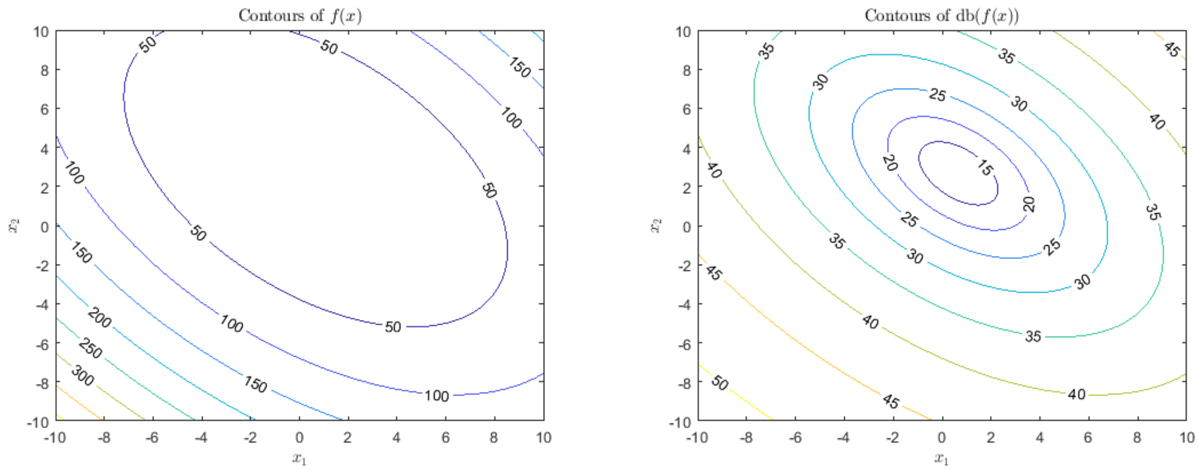
گام ۱ – در این قسمت تابع هدف را برحسب x_1 و x_2 به کمک دستور *mesh* رسم می‌کنیم. برای وضوح تغییرات از مقیاس لگاریتمی تابع هدف در رسم استفاده میکنیم (دستور *db*). تصویر ۱ این نمودار سه بعدی را نشان میدهد. با استفاده از این نمودار تقریباً میتوان بازه بهینه شدن تابع هدف را تخمین زد، اما برای بررسی دقیق تر آن میتوانیم نقاط هم پتانسیل تابع را رسم کنیم.



تصویر ۱ – تابع هدف را برحسب x_1 و x_2

گام ۲ – در این قسمت برای تخمین دقیق تر بازه مینیمم شدن را با رسم سطوح هم پتانسیل نشان دهیم. برای رسم این نمودار دو بعدی از دستور *contour* استفاده میکنیم. در اصل این دستور کمربند هایی از رویه مربوط به تابع هدف را که موازی با صفحه $x_1 - x_2$ (مؤلفه عمودی آنها یکسان) است رسم می‌کند. تصویر ۲ سطوح هم پتانسیل این تابع را نشان میدهد.

برای نمایش مقادیر سطوح هم پتانسیل مد *’ShowText’* را روی *’on’* قرار می‌دهیم. (برای رسم بهتر از مقیاس لگاریتمی نیز استفاده میکنیم.)



تصویر ۲ – سطوح هم پتانسیل تابع هدف را برحسب x_1 و x_2 (مقیاس عادی و لگاریتمی)

همانطور که مشاهده میشود مینیمم مقدار تابع تقریباً در حدود مرکز داخلی ترین بیضی است.

در گام های ۳ و ۴ با حل دستی این مقدار را دقیقاً پیدا میکنیم و مشاهده میکنیم با تصویر ۲ تطابق دارد.

گام ۳ – محاسبه بردار گرادیان: با استفاده از رابطهٔ عادی میتوانیم گرادیان تابع هدف را بدست آوریم:

$$g = \nabla_x f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 4 + x_2 \\ 2x_2 - 6 + x_1 \end{bmatrix}$$

با توجه به متغیر بودن بردار گرادیان نسبت به x_1 و x_2 در محیط متلب ، گرادیان را با تابع G تعریف میکنیم که این تابع تا ورودی های x_1 و x_2 (هر دو بردار یا هر دو اسکالر) را دریافت کرده و بردار گرادیان را در آن نقطه بعنوان خروجی میدهد.

محاسبه ماتریس هسین: با استفاده از رابطهٔ عادی میتوانیم هسین تابع هدف را بدست آوریم:

$$H_x = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

اثبات *convex* بودن تابع هدف: باید ثابت کنیم که نامساوی $\underline{x}^T H \underline{x} > 0$ به ازای تمام مقادیر $\underline{x}$ برقرار باشد:

$$\underline{x}^T H \underline{x} = [x_1 \quad x_2]\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = [2x_1 + x_2 \quad 2x_2 + x_1]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2$$
$$= 2(x_1 + x_2)^2 \geq 0 \to \underline{x}^T H \underline{x} \geq 0 \to f(\underline{x}) \;\; is \;\; convex$$

در نتیجه تابع هدف مدنظر convex است. یعنی میتوان فقط یک مینیمم برای آن متصور شد.

این موضوع در تصاویر ۱ و ۲ در گام های ۱ و ۲ نیز مشاهده شده و تأیید می‌شود.

گام ۴ – حال با صفر قرار دادن گرادیان مقدار بهینهٔ تابع هدف را بدست می‌آوریم:

$$\nabla_x f = \begin{bmatrix}2x_1 - 4 + x_2\\2x_2 - 6 + x_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \to \begin{cases}2x_1 - 4 + x_2 = 0\\2x_2 - 6 + x_1 = 0\end{cases} \to \begin{cases}x_1 = \dfrac{2}{3}\\x_2 = \dfrac{8}{3}\end{cases}$$

$$f\left(\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{8}{3}\end{bmatrix}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{3}\right) - 6\left(\frac{8}{3}\right) + 13 + \left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{11}{3}$$

در نتیجه بهینهٔ تابع هدف ، در نقطه $\underline{x} = \begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{8}{3}\end{bmatrix}$ با مقدار $\frac{11}{3}$ خواهد بود.

در تصاویر ۱ و ۲ نیز مشاهده میشود که مینیمم در همین حدود مشخص میشود.

گام ۵ – در این قسمت میخواهیم با استفاده از روش *Steepest Descend* و نقطهٔ شروع $x_1 = x_2 = 6$ و به ازای μ های 0.1 و 0.01 تابع هدف را بهینه سازی کنیم. در این الگوریتم در هر مرحله از روش *steepest Descend* نقطه جدید را پیدا کرده و تابع هدف را در آن نقطه بدست می‌آوریم. این مراحل را تا وقتی تکرار می‌کنیم که تابع هدف مقدار صعودی پیدا نکرده است. یعنی اگر مقدار $f(\underline{x}_{k+1}) > f(\underline{x}_k)$ شد، $\underline{x}_k$ را بهینه تابع هدف در نظر میگیریم.

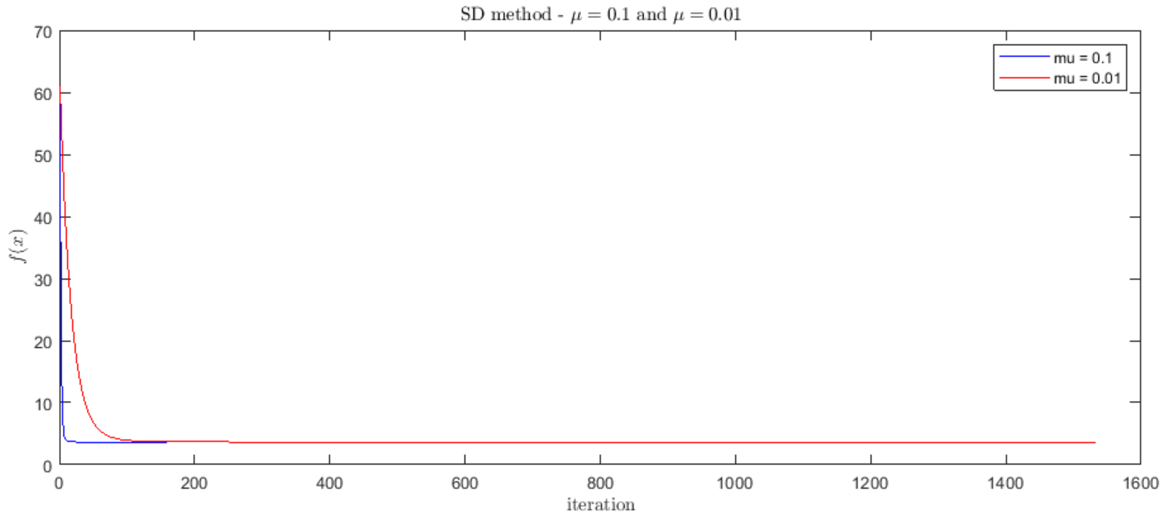
$$\underline{x_{k+1}} = \underline{x_k} - \mu(\nabla_x f)_{\underline{x}=\underline{x}_k} \;\;,\;\; if \; f(\underline{x}_{k+1}) > f(\underline{x}_k) \to \min\{f(\underline{x})\} = f(\underline{x}_k)$$

به ازای هردو μ خواسته شده، بهینه سازی انجام شده و مقدار بهینه با محاسبات دستی نیز یکسان خواهد بود. تصویر ۳ همگرایی این دو الگوریتم را نشان میدهد. تصویر ۴-آبی بهینه سازی *SD* با $\mu = 0.1$ و تصویر ۴-قرمز با $\mu = 0.01$ نشان میدهد. همانطور که در تصویر مشاهده میشود هرچه μ کوچکتر انتخاب شود، در هر مرحله مقدار کمتری (گام کمتری) پیشرفت کرده و در نتیجه دیرتر به نقطه بهینه می‌رسیم. در عین حال دقت با کوچکتر انتخاب کردن μ بیشتر میشود.

```
Steepest Descend Method
Minimum value of f(x) is 3.666667 (x1 = 0.666667 ,x2 = 2.666667)
 Needed iterantions (SD Method - mu = 0.1): 160

Steepest Descend Method
Minimum value of f(x) is 3.666667 (x1 = 0.666667 ,x2 = 2.666666)
 Needed iterantions (SD Method - mu = 0.01): 1532
```

تصویر ۳ – همگرایی بهینه سازی با روش *SD*



تصویر ۴ – بهینه سازی با روش *SD* به ازای آبی) $\mu = 0.1$ ، قرمز) $\mu = 0.01$

گام ۶ – در این قسمت میخواهیم با استفاده از روش *Newton* و نقطهٔ شروع $x_1 = x_2 = 6$ تابع هدف را بهینه سازی کنیم. در این الگوریتم در هر مرحله از روش *Newton* نقطه جدید را پیدا کرده و تابع هدف را در آن نقطه بدست می‌آوریم. این مراحل را تا وقتی تکرار می‌کنیم که تابع هدف مقدار صعودی پیدا نکرده است. یعنی اگر مقدار $f(\underline{x}_{k+1}) > f(\underline{x}_k)$ شد، $\underline{x}_k$ را بهینه تابع هدف در نظر میگیریم.

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k - (H_x^{-1}\nabla_x f)_{\underline{x}=\underline{x}_k} \quad , \quad if\ f(\underline{x}_{k+1}) > f(\underline{x}_k) \to \min\{f(\underline{x})\} = f(\underline{x}_k)$$

همانطور که در تصویر ۵ مشاهده میشود در *iteration* دوم الگوریتم همگرا شده و نقطه بهینه تابع هدف بدست می‌آید. با توجه به اینکه در روش *Newton* سهمی هایی را با رویه موازی میکنیم تا مینیمم را بدست آوریم و درجه دو بودن تابع هدف، این الگوریتم به سرعت همگرا میشود. (در کل سرعت همگرایی روش *Newton* از *SD* بیشتر است.)

```
Newton Method
Minimum value of f(x) is 3.666667 (x1 = 0.666667 ,x2 = 2.666667)
 Needed iterantions (Newton Method): 2
```

تصویر ۵ – بهینه سازی با روش *Newton*

$$H_x = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow H_x^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$itr1{:}\ \underline{x_k} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \rightarrow \underline{x_{k+1}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{16}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

$$Check{:}\ f\left(\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix}\right) = \frac{11}{3} \leq f\left(\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}\right) = 61$$

$$itr2{:}\ \underline{x_k} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \underline{x_{k+1}} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

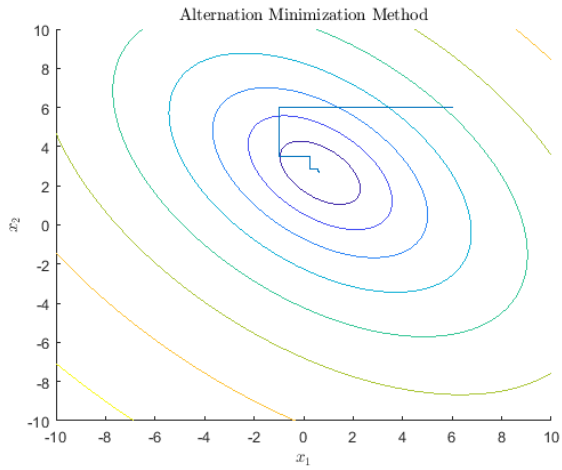
$$Check{:}\ f\left(\begin{bmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}\right) = \frac{23}{3} > f\left(\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix}\right) = \frac{11}{3}$$

در نتیجه مقدار مینیمم تابع هدف در *iteration* دوم مشخص میشود و این موضوع نشان میدهد که روش *Newton* برای تابع هدف های سهموی بسیار مناسب است.

گام ۷– در این قسمت میخواهیم با استفاده از روش *Alternation Minimization* و نقطهٔ شروع $x_1 = x_2 = 6$ تابع هدف را بهینه سازی کنیم. در این الگوریتم در هر *Alternation* یک متغیر را ثابت در نظر گرفته و متغیر دیگر را برحسب آن بدست می‌آوریم و مسئله را بهینه سازی میکنیم.

$$\begin{cases} x_2 \ \ is \ \ fixed \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - 6 + x_2 \rightarrow x_1 = \dfrac{6 - x_2}{2} \\ x_1 \ \ is \ \ fixed \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 - 4 + x_1 \rightarrow x_2 = \dfrac{4 - x_1}{2} \end{cases}$$

تصویر ۶ مسیر همگرایی از مقدار اولیه تا مقدار بهینه را به همراه *contour* ها نمایش می‌دهد.



تصویر ۶ – مسیر همگرایی به روش *Alternation Minimization*

همچنین تصویر ۷ نیز تعداد *Alternaition* ها و مقدار بهینه برای همگرایی را نشان میدهد.

```
Alternation Minimization Method
Minimum value of f(x) is 3.666667 (x1 = 0.666667 ,x2 = 2.666667)
 Needed alterantions (AM Method): 29
```

تصویر ۷ – بهینه سازی به روش *Alternation Minimization*

گام ۸– در این قسمت میخواهیم بهینه سازی را با قید $x_1^2 + x_2^2 = 1$ یعنی $|x|^2 = 1$ و با استفاده از رویکرد *Gradient Projection* و نقطهٔ شروع $x_1 = x_2 = 6$ انجام دهیم. در این الگوریتم در کل روش در هر مرحله از روش *SD* با $\mu = 0.1$ استفاده میکنیم و بعد از بدست آوردن $\underline{x_{k+1}}$ آنرا روی صفحه قید تصویر میکنیم (یعنی آنرا نرمالیزه می‌کنیم). تصویر ۸ مقدار بهینه به روش *Gradient Projection* را نمایش می‌دهد.

```
Gradient Projection Method
Minimum value of f(x) is 7.236742 (x1 = 0.494305 ,x2 = 0.869289)
 Needed iterantions (GP Method): 39
```

تصویر ۸ – مقدار بهینه به روش *Gradient Projection*

گام ۹– در این قسمت میخواهیم بهینه سازی را با قید $x_1^2 + x_2^2 = 1$ یعنی $|x|^2 = 1$ و با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ انجام دهیم.

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + 13 + x_1x_2$$
$$g(x_1, x_2) \equiv x_1^2 + x_2^2 = 1$$

معادلهٔ ناشی از ضرایب لاگرانژ:

$$\nabla f = \lambda \nabla g \rightarrow \begin{bmatrix} 2x_1 - 6 + x_2 \\ 2x_2 - 4 + x_1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 6 + x_2 = 2\lambda x_1 \\ 2x_2 - 4 + x_1 = 2\lambda x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 + 2x_2(\lambda - 1) \\ x_2 = 6 + 2x_1(\lambda - 1) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 + 2\big(6 + 2x_1(\lambda - 1)\big)(\lambda - 1) \\ x_2 = 6 + 2\big(4 + 2x_2(\lambda - 1)\big)(\lambda - 1) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{12\lambda - 8}{1 - 4(\lambda - 1)^2} \\ x_2 = \dfrac{8\lambda - 2}{1 - 4(\lambda - 1)^2} \end{cases}$$

با جایگذاری این دو معادله در قید $x_1^2 + x_2^2 = 1$ داریم:

$$\left(\frac{12\lambda - 8}{1 - 4(\lambda - 1)^2}\right)^2 + \left(\frac{8\lambda - 2}{1 - 4(\lambda - 1)^2}\right)^2 = 1$$

$$\rightarrow (12\lambda - 8)^2 + (8\lambda - 2)^2 = (1 - 4(\lambda - 1)^2)^2$$

$$\rightarrow 16\lambda^4 - 64\lambda^3 - 120\lambda^2 + 176\lambda - 59 = 0$$

با حل معادله بالا دو مقدار حقیقی برای λ نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2.166782 \\ \lambda_2 = 5.078469 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = -2.166782 \rightarrow \begin{cases} x_1 \cong 0.8693 \\ x_2 \cong 0.4943 \end{cases} \quad , \quad \lambda_2 = 5.078469 \rightarrow \begin{cases} x_1 \cong -0.8078 \\ x_2 \cong -0.5894 \end{cases}$$

حال مقدار تابع هدف را به ازای این دو حساب می‌کنیم:

$f(0.8693, 0.4943) = 7.9867$ ***T***

$f(-0.8078, -0.5894) = 21.244$ ***F***

در نتیجه بهینه تابع هدف روی قید $x_1^2 + x_2^2 = 1$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} x_1 \cong 0.8693 \\ x_2 \cong 0.4943 \end{cases} \rightarrow f(0.8693, 0.4943) = 7.2367$$

که این مقدار با بهینه سازی به روش *Gradient Projection* در گام ۸ یکسان است. پس جواب بدست آمده در قسمت ۸ جواب مسئله است.