به نام خدا

دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

تمرین کامپیوتری ۳

سیگنال ها و سیستم ها

دکتر اخوان

عرفان پناهی ۸۱۰۱۹۸۳۶۹

بهار ۱۴۰۰

فهرست

*** **Live script** مربوط به این پروژه با نام **CA3_MatlabFile.mlx** پیوست شده است.

*** کدها و خروجی های مربوط به این پروژه با نام **CA3_Report.html** پیوست شده است.

بخش اول

بخش دوم

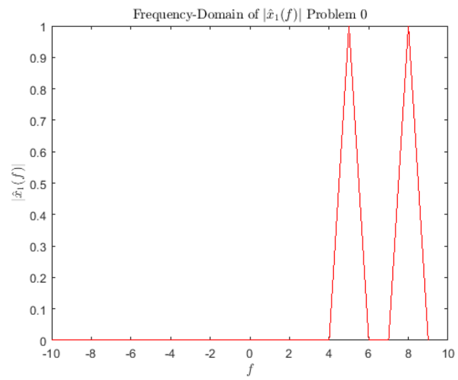
بخش اول:

تمرین ۰ : رزولوشن فرکانسی

همانطور که در دستور کار نیز گفته شده، با مقدار فرکانس نمونه برداری و بردار زمان و سپس به کمک آن تعداد سمپل ها را محاسبه نموده و درنهایت نیز با در دست داشتن تعداد سمپل ها بردار فرکانس را تولید میکنیم.

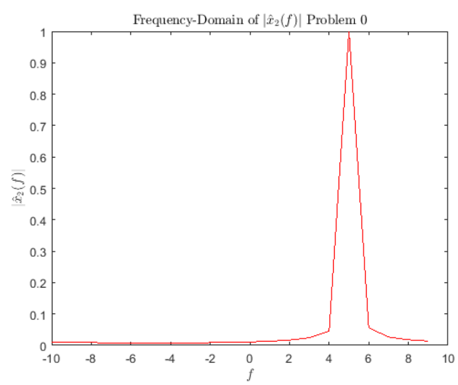
حال تبدیل فوریه دو سیگنال داده شده را با شبیه سازی محاسبه مینماییم:

$x_1(t) = e^{j2\pi(5)t} + e^{j2\pi(8)t}$



تصویر ۱ : اندازه $\widehat{x_1}(f)$ در حوزه فرکانس

$x_2(t) = e^{j2\pi(5)t} + e^{j2\pi(5.1)t}$



تصویر ۲ : اندازه $\widehat{x_2}(f)$ در حوزه فرکانس

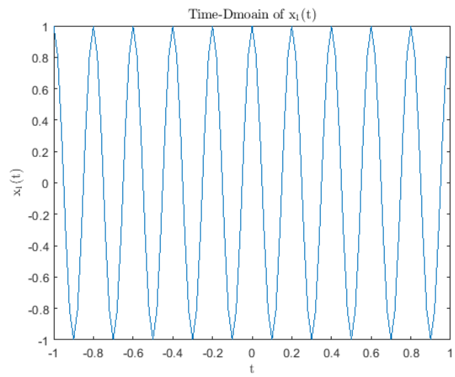
همانطور که در تصاویر ۱و ۲ مشاهده میشود در سیگنال x_1 دو قله در فرکانس های ۵ و ۸ هرتز وجود دارد، اما در سیگنال $X_2(t)$ بخاطر اینکه رزوالوشن فرکانسی دقت در حد ۱ دارد، دو قله روی هم افتاده اند و گویا یک قله فقط در فرکانس ۵ هرتز وجود دارد و تفاوتی بین ۵.۱ و ۵ وجود ندارد.

تمرین ۱-۱ : بررسی سیگنال $x_1(t) = \cos(10\pi t)$

قسمت الف) برای رسم نمودار های حوزه زمان از یک قالب خاص استفاده میکنیم. ابتدا با استفاده از فرکانس نمونه برداری رزولوشن زمانی را میسازیم و سپس به کمک آن بردار زمان را تعریف میکنیم.

```
fs = 50;
Ts = 1 / fs;
t = -1:Ts:1-Ts;
```

در نهایت نیز این سیگنال را به شکل زیر رسم میکنیم:

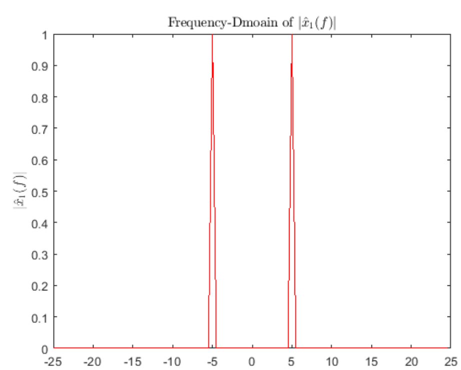


تصویر ۳ : سیگنال $x_1(t)$ در حوزه زمان

قسمت ب) در رسم نمودار های تبدیل فوریه (اندازه و فاز) حوزه فرکانس ابتدا باید تعداد سمپل ها (N) را مشخص نماییم. سپس با استفاده N بردار فرکانس را بسازیم. همانطور که در دستورکار پروژه نیز گفته شده با در دست داشتن فرکانس نمونه برداری و مقدار N این بردار بصورت زیر ساخته میشود:

```
N = length(t);
f = -fs/2:fs/N:fs/2-fs/N;
```

در نهایت نیز اندازه تبدیل فوریه این سیگنال را به شکل زیر رسم میکنیم:



تصویر ۴ : اندازه $\widehat{x_1}(f)$ در حوزه فرکانس

قسمت ج) با توجه به متناوب بودن سیگنال $x_1(t)$ ، از ضرایب سری فوریه آن برای محاسبه تبدیل فوریه محاسبه میکنیم.

$$f = \frac{10\pi}{2\pi} = 5 \rightarrow f_k = 5k$$

$$x_1(t) = \cos(10\pi t) = \cos(2\pi f t) = \frac{1}{2}e^{-j10\pi t} + \frac{1}{2}e^{j10\pi t} \rightarrow a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}\,, \qquad a_k = 0\ (k \neq 1. -1)$$

$$\widehat{x_1}(f) = \sum_k a_k \delta(f - f_k) = \frac{1}{2}\delta(f-5) + \frac{1}{2}\delta(f+5)$$

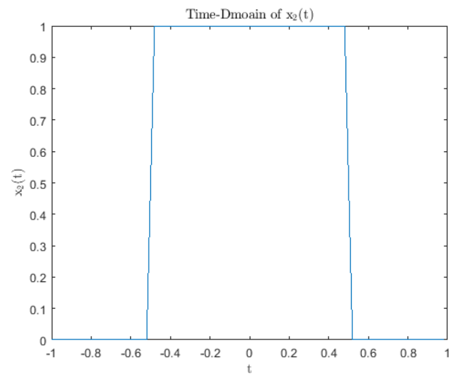
$$\rightarrow |\widehat{x_1}(f)| = \frac{1}{2}\delta(f-5) + \frac{1}{2}\delta(f+5)$$

که این فرم تبدیل فوریه با نتیجه قسمت ب تطابق دارد. یعنی باید دو ضربه در فرکانس های 5 و -5 هرتز اتفاق بیفتد.

تمرین ۱-۲ : بررسی سیگنال $x_2(t) = \Pi(t)$

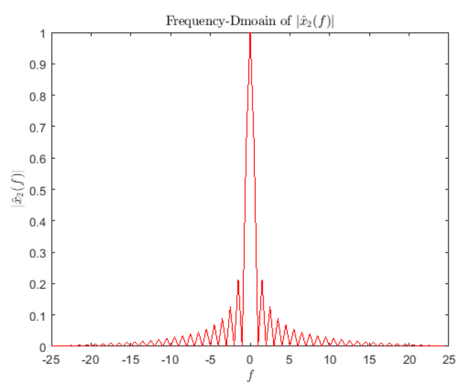
قسمت الف) این سیگنال در متلب با عنوان $rectangularPulse(t)$ شناخته میشود.

برای رسم سیگنال در حوزه زمان مشابه تمرین ۱-۱ عمل میکنیم و در نهایت نیز این سیگنال را به شکل زیر رسم میکنیم:



تصویر ۵ : سیگنال $x_2(t)$ در حوزه زمان

قسمت ب) برای رسم اندازه تبدیل فوریه این سیگنال در حوزه فرکانس مشابه تمرین ۱-۱ عمل میکنیم و در نهایت نیز این سیگنال را به شکل زیر رسم میکنیم: (نتیجه خاصیت سینوسی و میرا دارد، پس زیرمجموعه ای از سیگنال $sinc(f)$ است.)



تصویر ۶ : اندازه $\widehat{x_2}(f)$ در حوزه فرکانس

قسمت ج) از روابط تبدیل فوریه برای محاسبه تئوری تبدیل فوریه سیگنال $x_2(t) = \Pi(t)$ استفاده می‌کنیم:

$$x_2(t) = \Pi(t) \rightarrow \widehat{x_2}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1}{-j2\pi f}\left(e^{-j\pi f} - e^{j\pi f}\right) = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f} = sinc(f)$$

$\rightarrow |\widehat{x_2}(f)| = |sinc(f)|$

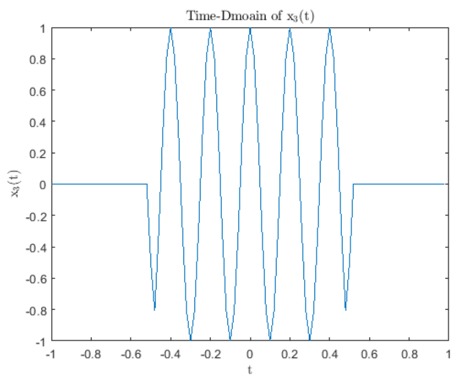
که این تبدیل با نمودار رسم شده در تصویر شماره ۴ که سینوسی میراست تطبیق دارد.

تمرین ۱–۳ : بررسی سیگنال $x_3(t) = \Pi(t)\cos(10\pi t)$

قسمت الف) این سیگنال از ضرب دو سیگنال $x_1(t)$ و $x_2(t)$ بدست می‌آید. در متلب نیز با دستور زیر میتوان در حوزه زمان به سیگنال مدنظر رسید: $x_3(t) = x_1(t)x_2(t)$

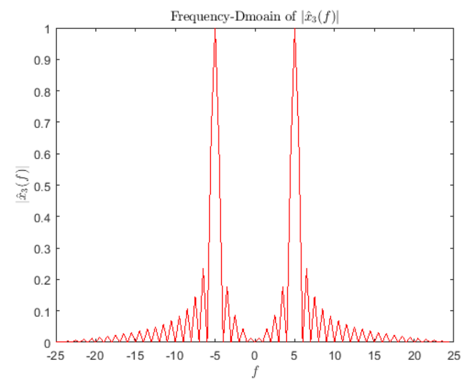
```
x3 = x1.*x2;
```

برای رسم سیگنال در حوزه زمان مشابه تمرین ۱-۱ عمل میکنیم و در نهایت نیز این سیگنال را به شکل زیر رسم میکنیم:



تصویر ۷ : سیگنال $x_3(t)$ در حوزه زمان

قسمت ب) برای رسم اندازه تبدیل فوریه این سیگنال در حوزه فرکانس مشابه تمرین ۱-۱ عمل میکنیم و در نهایت نیز این سیگنال را به شکل زیر رسم میکنیم:



تصویر ۸ : اندازه $\widehat{x_3}(f)$ در حوزه فرکانس

قسمت ج) از خاصیت کانولوشن تبدیل فوریه برای محاسبه تبدیل فوریه سیگنال $x_3(t) = \Pi(t)\cos(10\pi t)$ استفاده میکنیم:

$$x_3(t) = \Pi(t)\cos(10\pi t) \rightarrow \widehat{x_3}(f) = \left(\widehat{x_1}(f) * \widehat{x_2}(f)\right)$$

$$\rightarrow \widehat{x_3}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\widehat{x_1}(\rho)\widehat{x_2}(f-\rho)\right) d\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\delta(\rho-5)+\delta(\rho+5)\right)sinc(f-\rho)\right) d\rho$$

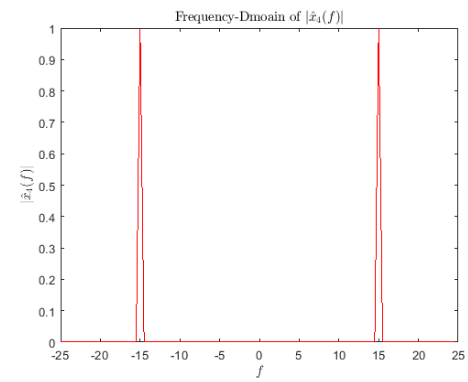
$$= \frac{1}{2}sinc(f+5) + \frac{1}{2}sinc(f-5)$$

$$\rightarrow |\widehat{x_3}(f)| = \frac{1}{2}|sinc(f+5) + sinc(f-5)|$$

که این تبدیل با نمودار رسم شده در تصویر شماره ۶ که شمال دو سینوسی میرا با شیفت های 5- و 5 است تطبیق دارد.

تمرین ۱-۴ : بررسی سیگنال $x_4(t) = \cos\left(30\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$

قسمت الف) برای رسم اندازه تبدیل فوریه این سیگنال در حوزه فرکانس مشابه تمرین ۱-۱ عمل میکنیم و در نهایت نیز اندازه تبدیل فوریه این سیگنال را به شکل زیر رسم میکنیم:

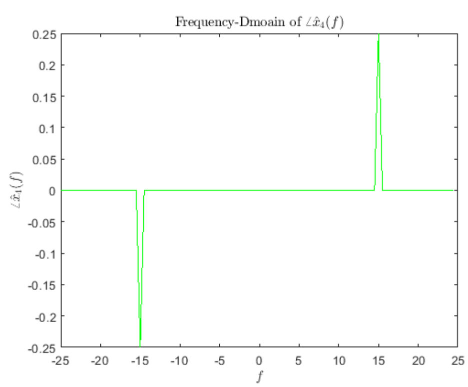


تصویر ۹ : اندازه $\widehat{x_4}(f)$ در حوزه فرکانس

قسمت ب) برای رسم فاز تبدیل فوریه این سیگنال ابتدا فرکانس هایی که اندازه ناچیز دارند را با استفاده از دستورات زیر صفر می‌کنیم:

```
to1=1e-6;
x4f(abs(x4f)<to1)=0;
```

در نهایت نیز فاز تبدیل فوریه این سسگنال را به شکل زیر رسم می‌کنیم:



تصویر ۱۰ : فاز $\widehat{x_4}(f)$ در حوزه فرکانس

قسمت ج) با توجه به متناوب بودن سیگنال $x_1(t)$ ، از ضرایب سری فوریه آن برای محاسبه تبدیل فوریه محاسبه میکنیم.

$$f = \frac{30\pi}{2\pi} = 15 \rightarrow f_k = 15k$$

$$x_4(t) = \cos\left(30\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi f t + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}e^{-j\left(30\pi t + \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{1}{2}e^{j\left(30\pi t + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j30\pi t} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j30\pi t}$$

$$\rightarrow a_1 = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}, \qquad a_{-1} = \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}, \qquad a_k = 0\ (k \neq 1.-1)$$

$$\widehat{x_4}(f) = \sum_k a_k \delta(f - f_k) = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\delta(f - 15) + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\delta(f + 15)$$

$$\rightarrow |\widehat{x_4}(f)| = \frac{1}{2}\delta(f - 15) + \frac{1}{2}\delta(f + 15)$$

$$\rightarrow \measuredangle\widehat{x_4}(f) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & f = 15 \\ -\frac{\pi}{4}, & f = -15 \\ 0, & o.w. \end{cases}$$

که فرم اندازه و فاز تبدیل فوریه در محاسبات تئوری (بخش هایلایت شده) با نتایج قسمت های الف و ب تطابق دارد.

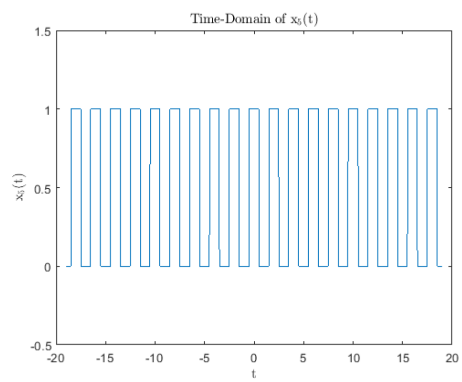
همانطور که مشاهده میشود اندازه تبدیل دو ضربه در فرکانس های 15 و -15 هرتز و فاز تبدیل نیز در همین فرکانس ها به ترتیب مقادیر $\frac{\pi}{4}$ و $-\frac{\pi}{4}$ دارد.

تمرین ۱-۵ : بررسی سیگنال $x_5(t) = \sum_{k=-9}^{9} \Pi(t-2k)$

قسمت الف) این سیگنال را در متلب بکمک تابع $square()$ تعریف می‌کنیم؛ این تابع یک دامنه را بعنوان ورودی میگیرد و در آن دامنه یک موج مربی میسازد. این موج در فاصله ۰ تا ۱ ، مقدار ۱ دارد و در فاصله ۱ تا ۲ مقدار ۱-. پس ما باید دو تغییر ایجاد کنیم تا بتوانیم $x_5(t)$ را بسازیم. ابتدا باید سیگنال مورد نظر را به اندازه ۰.۵ ثانیه به سمت چپ شیفت دهیم و سپس دامنه را که از ۱- تا ۱ است به ۰ تا ۱ تبدیل کنیم. برای این کار میتوانیم سیگنال را ۱ واحد بالاتر برده و آنرا بر ۲ تقسیم کنیم. جمع بندی موارد گفته شده بصورت زیر در متلب وارد میشود:

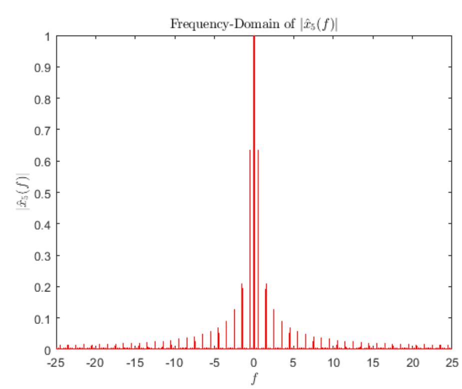
```
x5 = square((t+0.5)*pi);
x5 = (x5+1)/2;
```

برای رسم سیگنال در حوزه زمان مشابه تمرین ۱-۱ عمل میکنیم و در نهایت نیز این سیگنال را به شکل زیر رسم میکنیم:



تصویر ۱۱ : سیگنال $x_5(t)$ در حوزه زمان

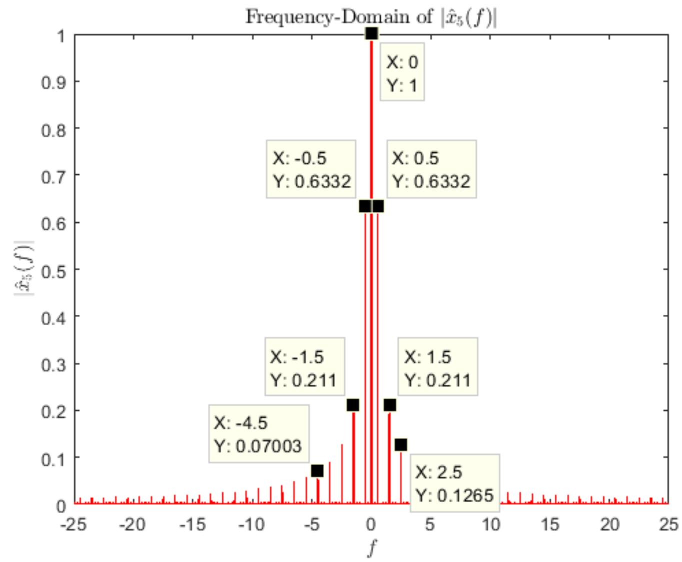
قسمت ب) برای رسم اندازه تبدیل فوریه این سیگنال در حوزه فرکانس مشابه تمرین ۱-۱ عمل میکنیم و در نهایت نیز اندازه تبدیل فوریه این سیگنال را به شکل زیر رسم میکنیم:



تصویر ۱۲ : اندازه $\widehat{x_5}(f)$ در حوزه فرکانس

با دقیق تر بررسی کردن نمودار تصویر ۱۲ میخواهیم ببینیم که ضربه های مشخص شده در چه فرکانس هایی اتفاق می‌افتند:

همانطور که در تصویر ۱۳ مشاهده میشود، در فرکانس صفر بزرگترین ضربه و باقی ضربه های در $f = \pm 0.5, \pm 1.5, \pm 2.5, \ldots$ اتفاق می‌افتند، که این ضربه ها میرا هستند و در بینهایت به صفر میل میکند.



تصویر ۱۳ : فرکانس های ضربه $\widehat{x_5}(f)$

قسمت ج) همانطور که در تصویر ۱۲ نیز مشاهده شد، ضربه ها درحقیقت هرکدام ناشی از یک سیگنال $\Pi(t-2k)$ هستند. با توجه به خاصیت شیفت زمانی در تبدیل فوریه بیشترین مقدار اندازه تبدیل فوریه بین $\Pi(t-2k)$ ها به ازای $k=0$ است. میتوانیم با ارجاع به سری فوریه این سیگنال و تبدیل فوریه یک سیگنال متناوب نیز این موضوع را بررسی کنیم. همانطور که میدانیم سری فوریه یک سیگنال متناوب مربعی تابعی از $sinc(k)$ است. با استفاده از رابطه تبدیل فوریه یک سیگنال متناوب یعنی $\sum_k a_k \delta(f-f_k)$ مشاهده میکنیم که بخاطر تناوب $T=2$ در فرکانس های 0.5 پله پله و به ازای k های مختلف ضربه وجود دارد.

با استفاده از ضرایب سری فوریه این سیگنال سعی میکنیم تبدیل فوریه را نیز بدست آوریم:

$$T = 2 \rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} = \rightarrow f_k = \frac{k}{2}$$

$$x_5(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Pi(t-2k) \rightarrow \ a_0 = \frac{1}{2}, \qquad a_k(k \neq 0) = \frac{1}{2} sinc\left(\frac{k}{2}\right)$$

$$\widehat{x_5}(f) = \sum_k a_k \delta(f-f_k) = \frac{1}{2}\delta(f) + \sum_k \frac{1}{2} sinc\left(\frac{k}{2}\right)\delta(f-\frac{k}{2})$$

$$|\widehat{x_5}(f)| = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{2}\sum_k \left|sinc\left(\frac{k}{2}\right)\right| \delta(f-\frac{k}{2})$$

طبق رابطه بالا در فرکانس صفر، یک ضربه رخ می‌دهد و به ازای k های زوج $\left|sinc\left(\frac{k}{2}\right)\right|$ صفر میشود، پس در فرکانس های صحیح تبدیل فوریه صفر است. به ازای k های فرد، ضربه ها در $\frac{k}{2} = \frac{2m\pm1}{2} = m \pm 0.5, (m \in Z)$ رخ میدهند که هر چقدر اندازه m بزرگتر باشد، $\left|sinc\left(\frac{k}{2}\right)\right|$ مقدار کوچکتری خواهد داشت و در نتیجه اندازه تبدیل فوریه با افزایش فرکانس کاهش خواهد یافت. که این موارد با نمودار تصویر ۱۲ و ۱۳ ، مطابقت دارد.

همچنین بکمک تبدیل فوریه سیگنال تمرین ۱-۲ سعی میکنیم تبدیل فوریه سیگنال این تمرین را پیدا کنیم.

$$x_5(t) = \sum_{k=-9}^{9} \Pi(t-2k) \rightarrow \widehat{x_5}(f) = \sum_{k=-9}^{9} e^{-j4\pi fk} sinc(f) = sinc(f) + 2\sum_{k=1}^{9} \cos(4\pi fk)\, sinc(f)$$

$$|\widehat{x_5}(f)| = sinc(f) + 2\sum_{k=1}^{9} |\cos(4\pi fk)| sinc(f)$$

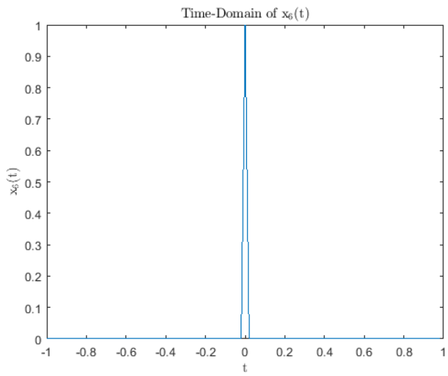
که میتوان ثابت کرد دو مورد محاسبه شده معادل همدیگر هستند.

بخش دوم:

تمرین ۲-۱ : بررسی سیگنال $x_6(t) = \delta(t)$

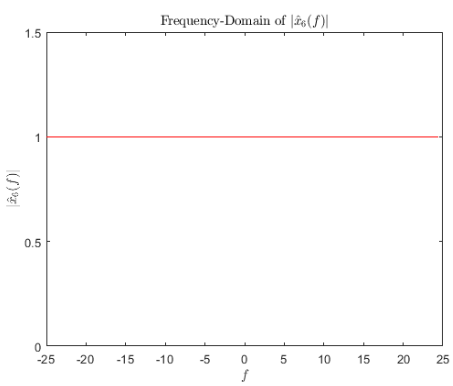
قسمت الف) این سیگنال را در متلب بصورت $dirac(t) > 0$ تعریف می‌کنیم.

برای رسم سیگنال در حوزه زمان مشابه تمرین ۱-۱ عمل میکنیم و در نهایت نیز این سیگنال را به شکل زیر رسم میکنیم:



تصویر ۱۴ : سیگنال $x_6(t)$ در حوزه زمان

قسمت ب) برای رسم اندازه تبدیل فوریه این سیگنال در حوزه فرکانس مشابه تمرین ۱-۱ عمل میکنیم و در نهایت نیز اندازه تبدیل فوریه این سیگنال را به شکل زیر رسم میکنیم:



تصویر ۱۵ : اندازه $\widehat{x_6}(f)$ در حوزه فرکانس

قسمت ج) از روابط تبدیل فوریه برای محاسبه تئوری تبدیل فوریه سیگنال $x_6(t) = \delta(t)$ استفاده می‌کنیم:

$$x_6(t) = \delta(t) \rightarrow \widehat{x_6}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi f0} = e^0 = 1$$

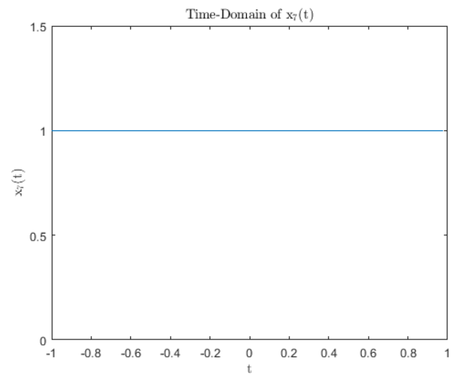
$\rightarrow |\widehat{x_6}(f)| = 1$

دلیل اینکه تبدیل فوریه سیگنال $\delta(t)$ برابر ۱ شد این است که گویا در این سیگنال در $t = 0$ یک ناپیوستگی وجود دارد و شدیدترین تغییرات در حوزه زمان رخ داده است. پس همانطور که در صورت پروژه نیز گفته شده حوزه فرکانسی تبدیل فوریه باید تا بینهایت و منفی بینهایت مقدار داشته باشد که این خواسته را یک تابع ثابت میتواند ارضا کند.

تمرین ۲-۲ : بررسی سیگنال $x_7(t) = 1$

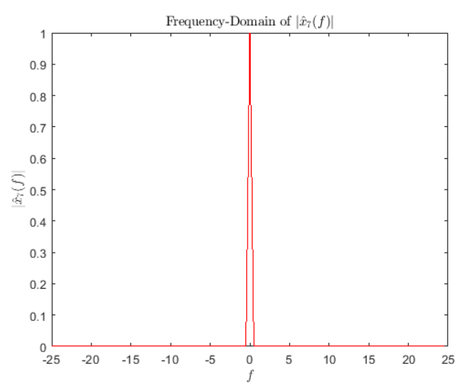
قسمت الف) این سیگنال را در متلب بصورت $ones(1, N)$ تعریف می‌کنیم. (چون میخواهیم نمونه برداری درست باشد.)

برای رسم سیگنال در حوزه زمان مشابه تمرین ۱-۱ عمل میکنیم و در نهایت نیز این سیگنال را به شکل زیر رسم میکنیم:



تصویر ۱۶ : سیگنال $x_7(t)$ در حوزه زمان

قسمت ب) برای رسم اندازه تبدیل فوریه این سیگنال در حوزه فرکانس مشابه تمرین ۱-۱ عمل میکنیم و در نهایت نیز اندازه تبدیل فوریه این سیگنال را به شکل زیر رسم میکنیم:



تصویر ۱۷ : اندازه $\widehat{x_7}(f)$ در حوزه فرکانس

قسمت ج) از روابط تبدیل فوریه برای محاسبه تئوری تبدیل فوریه سیگنال $x_7(t) = 1$ استفاده می‌کنیم:

$$x_7(t) = 1 \rightarrow \widehat{x_7}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1e^{-j2\pi ft}dt = \delta(f)$$

$$\rightarrow |\widehat{x_7}(f)| = \delta(f)$$

(میتوانستیم از خاصیت دوگانی برای پیدا کردن تبدیل این سیگنال نیز استفاده کنیم. به طوری که اگر از سیگنال تمرین قبل یعنی $x_6(t) = \delta(t)$ دوبار تبدیل فوریه پیوسته بگیریم خروجی مشابه خود $\delta(t)$ خواهد شد.

دلیل اینکه تبدیل فوریه سیگنال ثابت ۱ برابر $\delta(t)$ شد این است که گویا در این سیگنال در $t = 0$ یک ناپیوستگی وجود دارد و کندترین تغییرات در حوزه زمان رخ داده است. پس همانطور که در صورت پروژه نیز گفته شده تبدیل فوریه فرکانس های بالایی ندارد و برای اینکه در فرکانس های پایین قابل بیان باشد در صفر میتواند شامل یک ضربه باشد. در نهایت فقط $\delta(t)$ این شرایط دارد.