به نام خدا

دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

تمرین کامپیوتری ۱

اصول سیستم های مخابراتی

دکتر صباغیان

عرفان پناهی ۸۱۰۱۹۸۳۶۹

نیمسال اول ۰۱-۱۴۰۰

فهرســـت:

*** فایل مربوط به این تمرین کامپیوتری با نام Matlab_CA1_810198369.mlx پیوست شده است.

چکیده : هدف از تمرین کامپیوتری ۱

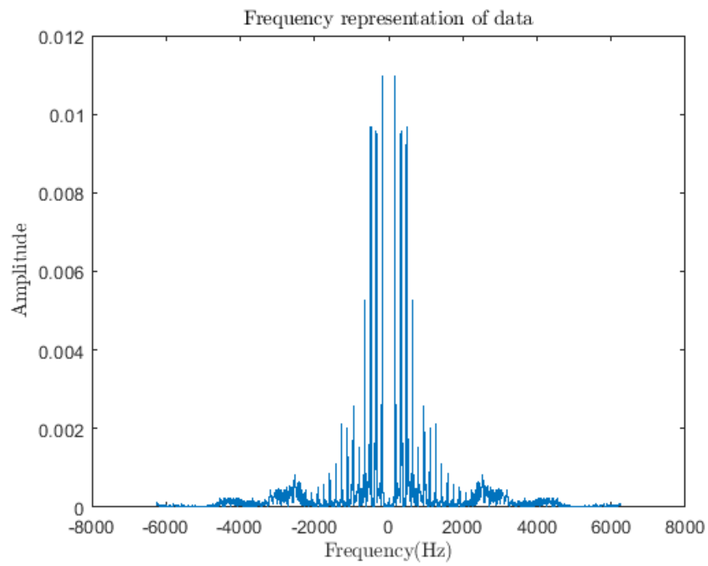
هدف از انجام این پروژه بررسی **اعوجاج فازی** ایجاد شده در یک سیگنال صوتی و طراحی **همسانساز** و پیدا کردن سیگنال اولیه و واقعی است. به این منظور می‌خواهیم یک سیگنال حاوی دو پژواک را بررسی کنیم و پژواک آنرا حذف کنیم و به سیگنال اولیه برسیم. در پایان کار نیز سعی می‌کنیم در یک پردازش عددی درک بهتری نسبت به روابط مربوط به همبستگی در طول عبور از یک سیستم LTI پیدا کنیم.

سوال ۱ : رسم تبدیل فوریه فایل صوتی data.wav

اندازه : نمودار اندازه تبدیل فوریه فایل صوتی data.wav در تصویر۱ نشان داده شده است. در حقیقت چون متلب به هر سیگنالی به عنوان سیگنال گسسته نگاه می‌کند، پس از ورودی تبدلی فوریه گسسته میگیرد. درنتیجه خروجی تابع fft() ، حاصل ضرب طول سیگنال ورودی در تبدیل فوریه سیگنال ورودی است. یعنی:

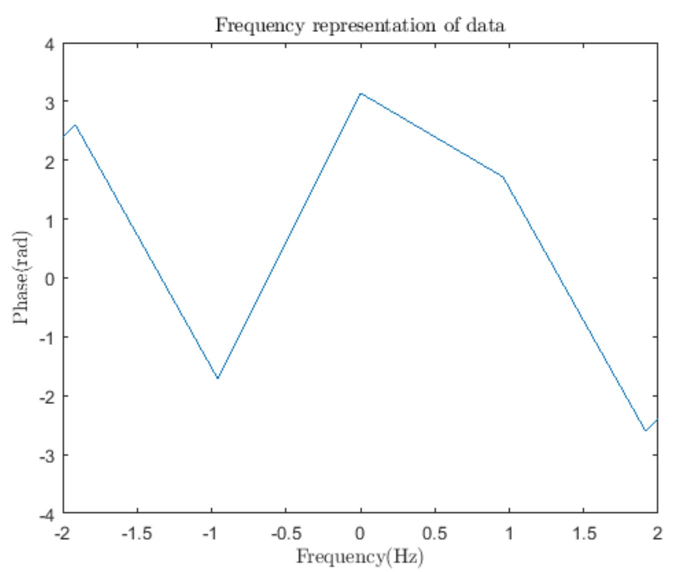
$$\mathrm{fft}(x) = \mathrm{length}(x).X(f)$$

پس خروجی تابع fft() باید نرمالیزه شود (بر طول سیگنال تقسیم شود) تا تبدیل فوریه را به ما بدهد.



تصویر۱ – **اندازه** تبدیل فوریه فایل صوتی data.wav

فاز : نمودار فاز تبدیل فوریه فایل صوتی data.wav در تصویر۲ نشان داده شده است.



تصویر۲ – **فاز** تبدیل فوریه فایل صوتی data.wav

سوال ۲ : خواندن سیگنال y.wav

همانند قسمت قبل از دستور ()audioread برای بدست آوردن فرکانس نمونه برداری و بردار فایل صوتی استفاده می‌کنیم.

همانطور که در تصویر ۳ نشان داده شده است، فرکانس نمونه برداری سیگنال خروجی **۴۴۱۰۰** خواهد بود.

```
[y,fs_y]=audioread('y.wav');
fs_y
```

```
fs_y = 44100
```

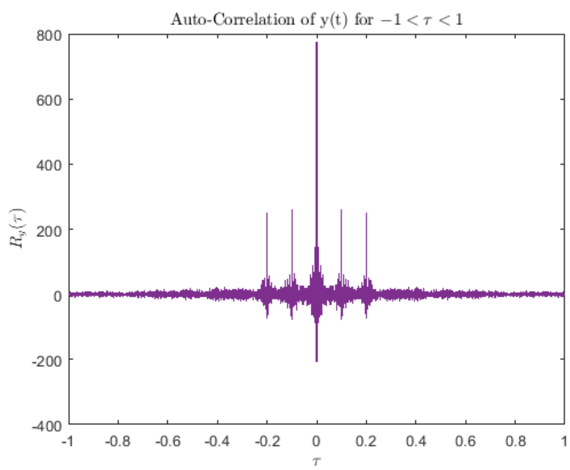
تصویر ۳ – فرکانس نمونه برداری سیگنال خروجی $y(t)$

سوال ۳ : محاسبه ضرایب α, β و تأخیرهای k_1, k_2

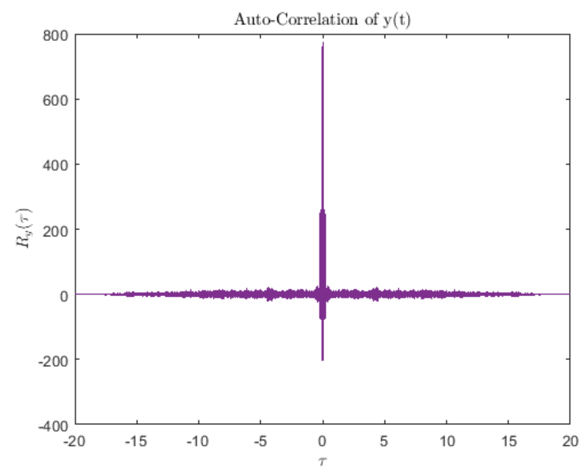
نکته: همبستگی دو سیگنال $x(t)$ و $y(t)$ از حاصلضرب شیفت یافته سیگنال $x(t)$ در سیگنال $y(t)$ بدست می آید، پس هرچه سیگنال شیفت یافته $x(t)$ به $y(t)$ شبیه تر باشد، ضریب همبستگی به ازای آن مقدار شیفت بزرگتر خواهد شد. در نتیجه شبیه ترین سیگنال $x(t-\tau)$ به $y(t)$ به ازای مقداری از τ است که همبستگی را ماکزیمم کند.

– **راه حل پیدا کردن تأخیر های k_2 و k_1:** با توجه به حقیقی بودن سیگنال صوتی میتوان دریافت که این سیگنال زوج است. (البته بدون توجه به این موضوع نیز مسأله قابل حل خواهد بود.) با استفاده از تصاویر۴ میتوان دریافت که ماکزیمم همبستگی به ازای $\tau = 0$ و بعد $\tau = 0.1$ و در نهایت $\tau = 0.2$ خواهد بود. بیشترین شباهت ($\tau = 0$) مشخصاً بخاطر وجود ترم $x(t)$ در رابطه سیگنال خروجی است. در نتیجه دو تأخیر بدست آمده دیگر 0.1 و $\tau = 0.2$ مربوط به ترم های $\alpha x(t-k_1)$ و $\beta x(t-k_2)$ خواهد بود. پس مقادیر k_1 و k_2 بصورت زیر تعیین می‌شود:

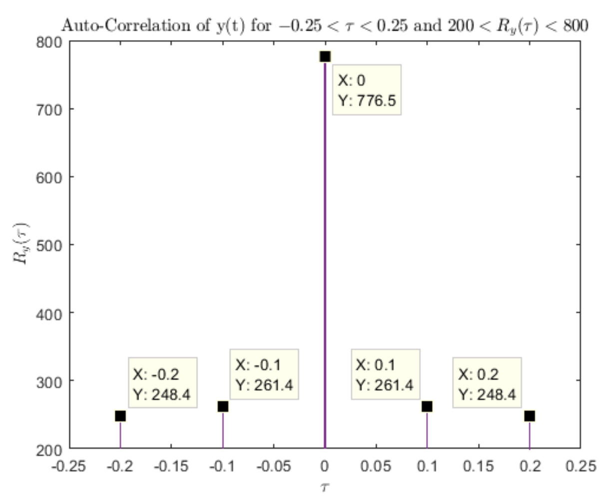
$$k_1 = 0.1 \text{ و } k_2 = 0.2$$



ب



الف



ج

تصویر ۴ – خود همبستگی سیگنال $y(t)$ ($R_y(\tau)$)

- **راه حل پیدا کردن ضرایب β و α:** ابتدا خودهمبستگی را برای سیگنال خروجی $y(t)$ بدست می آوریم.

$$y(t) = x(t) + \alpha x(t - k_1) + \beta x(t - k_2)$$

$$R_y(\tau) = (1 + \alpha^2 + \beta^2)R_x(\tau) + \alpha R_x(\tau - k_1) + \beta R_x(\tau - k_1) + \alpha\beta R_x(\tau + k_1 - k_2)$$
$$+ \alpha R_x(\tau + k_1) + \beta R_x(\tau + k_1) + \alpha\beta R_x(\tau + k_2 - k_1)$$

حال با فرض $k_2 = 0.2$ و $k_1 = 0.1$ و به ازای $\tau > 0$ داریم:

$$\rightarrow R_y(\tau) = (1 + \alpha^2 + \beta^2)R_x(\tau) + (\alpha + \alpha\beta)R_x(\tau - 0.1) + \beta R_x(\tau - 0.2)$$

حال اینجا برای ساده تر شدن یک تقریب میزنیم و در پایان محاسبات تقریب خود را بررسی می‌کنیم.

تقریب (*): هرکدام از تأخیر ها بر همبستگی دیگر تأخیر بی تأثیر است. در نتیجه میتوانیم بنویسیم:

$$R_y(0) = (1 + \alpha^2 + \beta^2)R_x(0) + (\alpha + \alpha\beta)R_x(-0.1) + \beta R_x(-0.2)$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} R_y(0) = (1 + \alpha^2 + \beta^2)R_x(0)$$

$$R_y(0.1) = (1 + \alpha^2 + \beta^2)R_x(0.1) + (\alpha + \alpha\beta)R_x(0) + \beta R_x(-0.1)$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} R_y(0.1) = (\alpha + \alpha\beta)R_x(0)$$

$$R_y(0.2) = (1 + \alpha^2 + \beta^2)R_x(0.2) + (\alpha + \alpha\beta)R_x(0.1) + \beta R_x(0)$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} R_y(0.2) = \beta R_x(0)$$

و با توجه به تصویر ۴ - ج خواهیم داشت:

$$R_y(0) = 776.5 \rightarrow (1 + \alpha^2 + \beta^2)R_x(0) = 776.5$$

$$R_y(0.1) = 261.4 \rightarrow (\alpha + \alpha\beta)R_x(0) = 261.4$$

$$R_y(0.2) = 248.4 \rightarrow \beta R_x(0) = 248.4$$

حال با استفاده از نسبت عبارات بالا میتوانیسم بنویسیم:

$$\frac{\beta}{\alpha(1+\beta)} = \frac{R_y(0.2)}{R_y(0.1)} = \frac{248.4}{261.4} \rightarrow 248.4\alpha + 248.4\alpha\beta - 261.4\beta = 0$$

$$\frac{\beta}{(1+\alpha^2+\beta^2)} = \frac{R_y(0.2)}{R_y(0)} = \frac{248.4}{776.5} \rightarrow 248.4\alpha^2 + 248\beta^2 - 776.5\beta = -248.4$$

با حل دستگاه معادلات بالابه چند جواب خواهیم رسید که با توجه به محدوده های α و β ، تنها مقادیر زیر قابل قبول خواهد بود:

$$0 < \alpha, \beta < 1 \rightarrow \ \alpha = 0.301\ , \beta = 0.4001 \overset{(*)'}{\Longrightarrow} \alpha = 0.3\ , \beta = 0.4$$

سوال ۴ : بدست آوردن پاسخ فرکانسی و تأخیر گروه

با توجه به مقادیر بدست آمده در سوال قبل می‌توانیم **سیگنال $\boldsymbol{y(t)}$** را باز نویسی کنیم:

$$y(t) = x(t) + 0.3x(t - 0.1) + 0.4x(t - 0.2)$$

برای بدست آوردن **پاسخ ضربه** قرار میدهیم $x(t) = \delta(t)$:

$$h(t) = \delta(t) + 0.3\delta(t - 0.1) + 0.4\delta(t - 0.2)$$

با تبدیل فوریه گرفتن از رابطه بالا به **پاسخ فرکانسی** خواهیم رسید:

$$H(f) = 1 + 0.3e^{-j0.2\pi f} + 0.4e^{-j0.4\pi f}$$

تأخیر گروه: برای محاسبهٔ این مقدار ابتدا فاز پاسخ فرکانسی را بدست می‌آوریم:

$$\measuredangle H(f) = \tan^{-1}\left(\frac{0.3\sin(0.2\pi f) + 0.4\sin(0.4\pi f)}{1 + 0.3\cos(0.2\pi f) + 0.4\cos(0.4\pi f)}\right)$$

$$\tau_g = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\left(\measuredangle H(f)\right)}{df}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}(\frac{\pi(160\cos(0.8\pi f) + 252\cos(0.6\pi f) + 1063\cos(0.4\pi f) + 1035\cos(0.2\pi f) + 669)}{5(160\cos(0.8\pi f) + 288\cos(0.6\pi f) + 1426\cos(0.4\pi f) + 1503\cos(0.2\pi f) + 1536)}$$

$$= \frac{160\cos(0.8\pi f) + 252\cos(0.6\pi f) + 1063\cos(0.4\pi f) + 1035\cos(0.2\pi f) + 669}{1600\cos(0.8\pi f) + 2880\cos(0.6\pi f) + 14260\cos(0.4\pi f) + 15030\cos(0.2\pi f) + 15360}$$

$$\to \tau_g \neq cte = Z(f)$$

در نتیجه در این سیستم **اعوجاج از نوع فازی خواهیم داشت.**

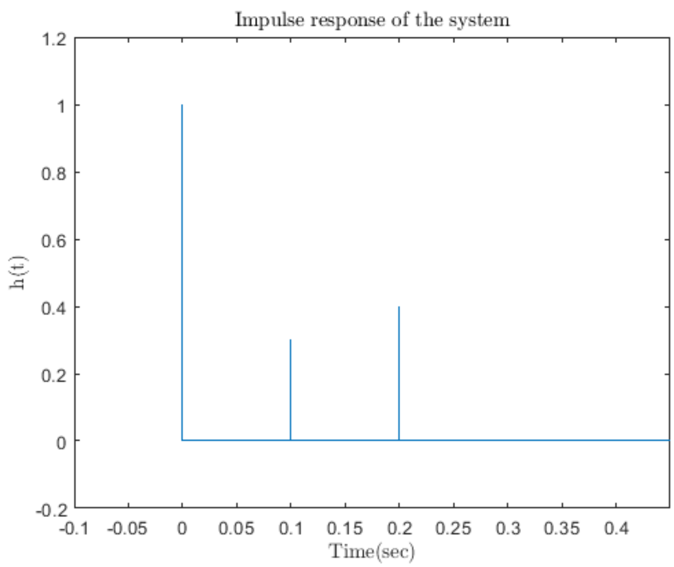
سوال ۵ : مقایسه پاسخ ضربه (حوزه زمان) ناشی از محاسبات دستی و دستور ifft

محاسبه دستی پاسخ ضربه: همانطور که در قسمت قبل محاسبه شد، پاسخ ضربه سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$y(t) = x(t) + 0.3x(t-0.1) + 0.4x(t-0.2)$$

$$x(t) = \delta(t) \rightarrow h(t) = \delta(t) + 0.3\delta(t-0.1) + 0.4\delta(t-0.2)$$

بدست آوردن پاسخ ضربه با دستور ifft: همانطور که در تصویر ۵ نشان داده شده است، پاسخ ضربه تنها شامل سه ضربه در ثانیه های 0 ، 0.1 و 0.2 است که به محاسبات دستی همخوانی دارد.



تصویر۵ – بدست آوردن پاسخ ضربه ($h(t)$) با دستور ifft

سوال ۶ : بدست آوردن سیگنال ورودی $x(t)$

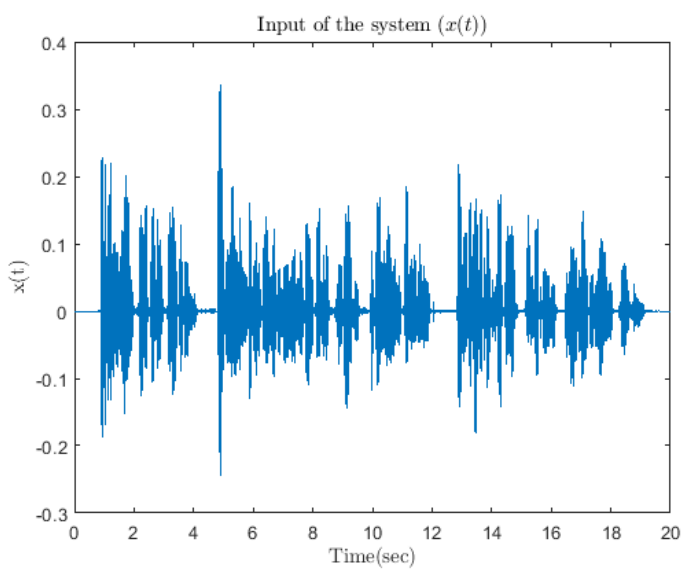
برای بدست آوردن سیگنال ورودی از دستور filter استفاده میکنیم. آرگومان های اول و دوم این دستور نشاندهده ضرایب صورت و مخرج پاسخ ضربه هستند.

*** برای افزایش سرعت ، نیاز نیست کل پاسخ ضربه را به دستور filter بدهیم و فقط بخشی از پاسخ ضربه که شامل ۳ تا ضربه در ثانیه های 0 ، 0.1 و 0.2 باشد، کفایت می‌کند.

پس دستور filter را به صورت زیر وارد می‌کنیم.

```
x = filter(1 ,real(h_t(1:0.2*fs_y+1)) ,y);
```

تصویر ۶ نمودار ورودی$x(t)$ برحسب زمان را نشان می‌دهد:



تصویر۶ – بدست آوردن ورودی ($x(t)$) با دستور filter

سوال ۷ : بررسی تفاوت ایجاد شده در سیگنال $x(t)$

***** فایل صوتی مربوط به این قسمت با نام x.wav پیوست شده است.**

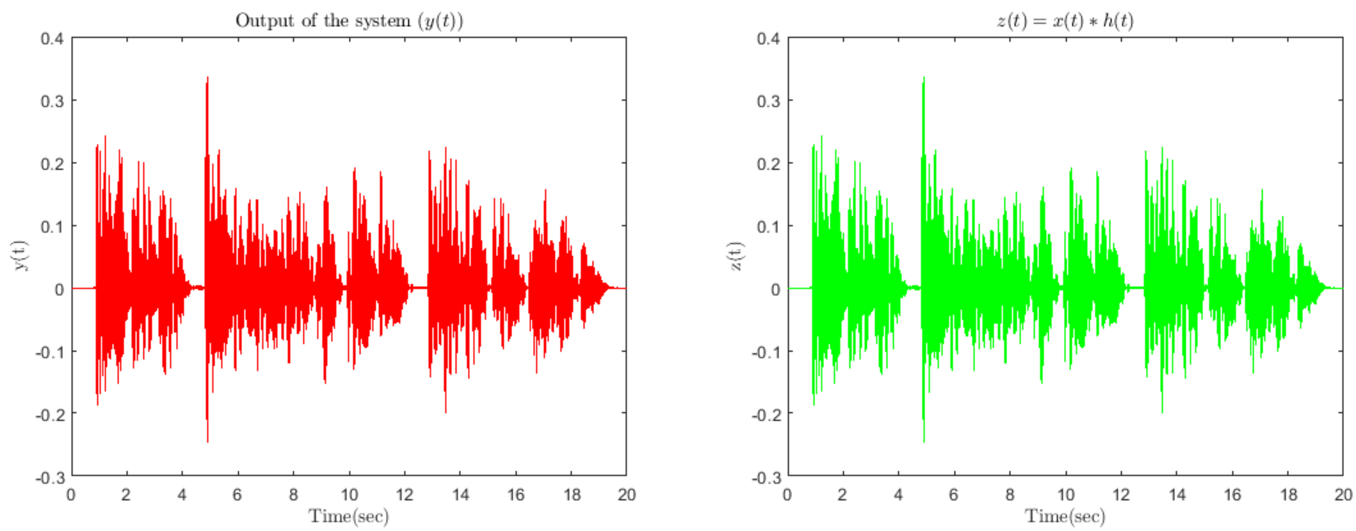
تفاوت: همانطور که انتظار داشتیم سیگنال $x(t)$ همان صدای خالص و بدون پژواک سیگنال $y(t)$ است. به عبارت دیگر با حذف پژواک سیگنال $y(t)$ به سیگنال $x(t)$ می‌رسیم.

سوال ۸ : بدست آوردن خروجی سیستم اکو با دستور conv و رابطهٔ $x(t) * h(t)$

برای بدست آوردن سیگنال $z(t) = x(t) * h(t)$ از دستور conv استفاده می‌کنیم.

*** برای افزایش سرعت ، نیاز نیست کل پاسخ ضربه را به دستور conv بدهیم و فقط بخشی از پاسخ ضربه که شامل ۳ تا ضربه در ثانیه های 0 ، 0.1 و 0.2 باشد، کفایت می‌کند.

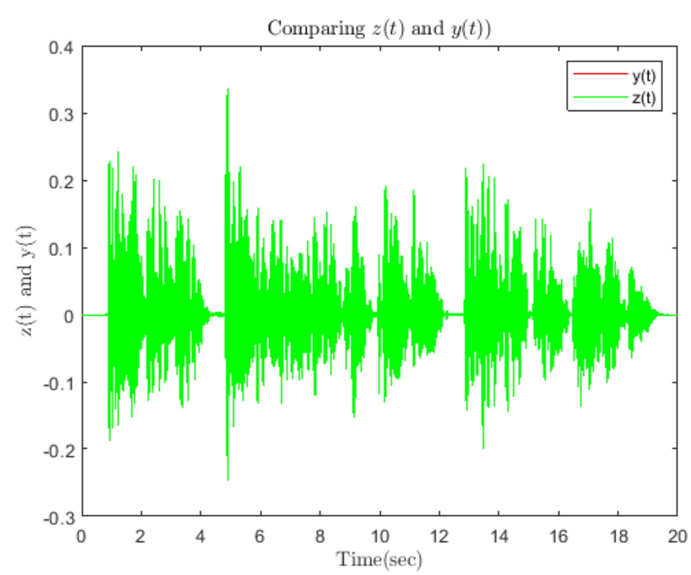
تصویر ۷- الف نمودار $z(t)$ و تصویر ۷- ب نمودار $y(t)$ برحسب زمان را نشان می‌دهد.



ب الف

تصویر۷ – الف) نمودار $z(t)$ ، ب) نمودار $y(t)$ برحسب زمان

برای مقایسه دو سیگنال و آنها را روی یک نمودار (مطابق تصویر ۸) رسم می‌کنیم و همانطور که مشاهده می‌شود هر دو سیگنال روی هم سوار شده اند و تفاوت چندانی ندارند.



تصویر۸ – رسم سیگنال های $z(t)$ و $y(t)$ روی یک نمودار

همچنین می‌توانیم از دستور immse برای محاسبه میانگین مربعات خطا و تفاوت استفاده کنیم. همانطور که در تصویر ۹ مشاهده می‌شود، تفاوت این دو سیگنال صفر است.

Comparing $y(t)$ ***and*** $z(t)$ ***using*** **immse:**

```
immse(y,z)
```

```
ans = 0
```

تصویر۹ – میانگین مربعات تفاوت دو سیگنال $z(t)$ و $y(t)$

تنها تفاوتی در دو سیگنال که می‌توانیم به آن اشاره کنیم طول بردار سیگنال هاست. چون بردار سیگنال $x(t)$ هم اندازه با بردار $y(t)$ در نظر گرفته شده است، طول $z(t)$ ممکن است بیشتر شود. (البته در کد متلب بخش اضافه بردار $z(t)$ حذف شده است.)

سوال ۹ : فرایند ایجاد پژواک

*** فایل صوتی ورودی مربوط به این قسمت با نام P9_input.wav پیوست شده است.

*** فایل صوتی خروجی مربوط به این قسمت با نام my_voice.wav پیوست شده است.

می‌خواهیم دو پژواک به یک صوت استفاده کنیم. یکی با ضریب تضعیف 0.5 و فاصله زمانی 0.2 ثانیه و دیگری با ضریب تضعیف 0.2و فاصله زمانی 0.4 ثانیه. به این منظور از فایل صوتی **P9_input.wav** با محتوای شعر زیر استفاده می‌کنیم:

چه سرنوشت غم انگیزی که کرم کوچک ابریشم   تمام عمر قفس میبافت، ولی به فکر پریدن بود   «حسین منزوی»

پس می‌خواهیم خروجی ما شامل دو پژواک با ویژگی های گفته شده باشد یعنی:

$$y(t) = x(t) + 0.5x(t-0.2) + 0.2x(t-0.4)$$

در نتیجه پاسخ ضربه سیستم مدنظر را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$h(t) = \delta(t) + 0.5\delta(t-0.2) + 0.2\delta(t-0.4)$$

- برای ایجاد پژواک روی یک صوت می‌توانیم به روش های زیر عمل کنیم:

الف) استفاده از دستور filter برای عبور ورودی از یک سیستم

ب) استفاده از دستورات fft و ifft برای ایجاد پژواک به کمک تبدیل فوریه ورودی و پاسخ فرکانسی سیستم

ج) استفاده از دستور conv و محاسبه کانولوشن $x(t) * h(t)$

از روش "ج" برای بدست آوردن فایل صوتی خروجی **my_voice.wav** استفاده می‌کنیم.

سوال ۱۰ : بررسی روابط مربوط به همبستگی در طول عبور از یک سیستم LTI

ابتدا با استفاده از پاسخ فرکانسی داده شده پاسخ ضربه را محاسبه می‌کنیم و آنرا بصورت دستی در متلب وارد میکنیم.

$$H(f) = 1 + 0.5e^{-j2\pi f 0.2} \rightarrow h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = \delta(t) + 0.5\delta(t - 0.2)$$

با استفاده از دستور conv ورودی $x(t)$ و پاسخ ضربه بدست آمده ، خروجی $y(t)$ را بدست می آوریم:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

حال با استفاده از خروجی ، می‌توانیم همبستگی سیگنال های $x(t)$ و $y(t)$ و خودهمبستگی هرکدام را بدست آوریم:

$$R_x(\tau) = xcorr\big(x(t)\big)$$

$$R_y(\tau) = xcorr\big(y(t)\big)$$

$\boldsymbol{a}$ سمت چپ قسمت : $\boldsymbol{R_{yx}(\tau) = xcorr(x(t), y(t))}$

با استفاده از دستور fft و fftshift از خودهبستگی های $R_x(\tau)$ و $R_y(\tau)$ تبدیل فوریه گرفته و چگالی طیف هر سیگنال را بدست می‌آوریم:

$$G_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}$$

$\boldsymbol{b}$ سمت چپ قسمت : $\boldsymbol{G_y(f) = \mathcal{F}\{R_y(\tau)\}}$

به همین ترتیب با دستور های fft و fftshift پاسخ فرکانسی سیستم را محاسبه می‌کنیم. سپس به استفاده از دستور abs و اپراتور مجذور ".^" بردار $|H(f)|^2$ را بدست می‌آوریم:

$$|H(f)| = abs^2[\mathcal{F}\{h(t)\}]$$

سمت راست قسمت a : با استفاده از دستور conv میتوانیم همبستگی سیگنال های ورودی و خروجی را بدست آوریم:

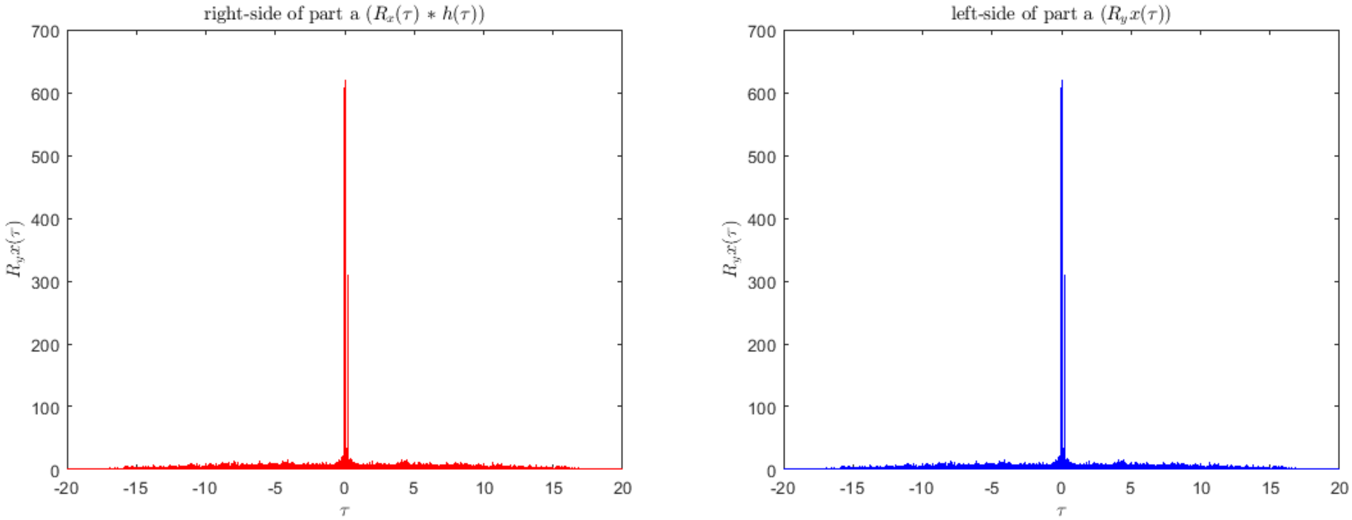
$\boldsymbol{a}$ سمت راست قسمت : $\boldsymbol{R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau)}$

سمت راست قسمت b : با استفاده از اپراتور ضرب ".*" می‌توانیم چگالی طیف خروجی را محاسبه نماییم:

$\boldsymbol{b}$ سمت راست قسمت : $\boldsymbol{G_y(f) = G_x(f).|H(f)|^2}$

❄ رابطه قسمت a و محاسبه میانگین مربعات خطای دو طرف:

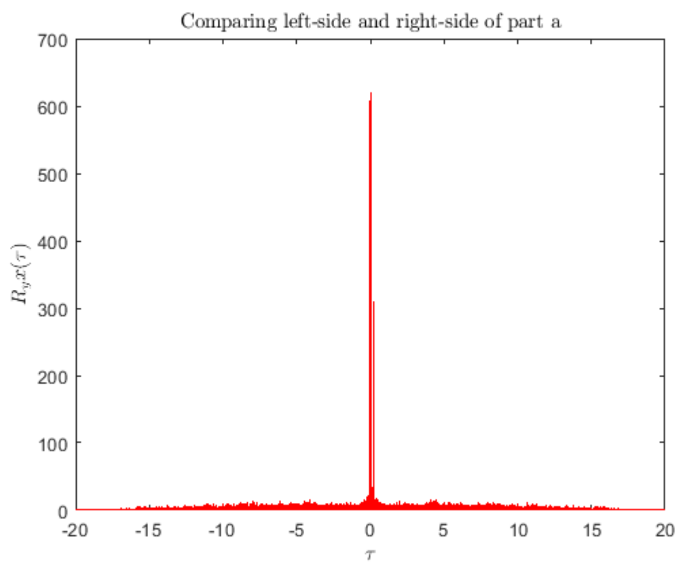
تصویر ۱۰- الف نمودار سمت چپ قسمت a و تصویر ۱۰-ب نمودار سمت راست این قسمت را نشان میدهد. همانطور که انتظار میرفت این دو قسمت با دقت زیادی شبیه به هم هستند.



ب الف

تصویر ۱۰ – الف) سمت چپ، ب) سمت راست رابطه قسمت a

همچنین تصویر ۱۱ نمودار سمت چپ و راست قسمت a را نشان میدهد. همانطور که مشاهده می‌شود این دو بخش کاملاً همدیگر را می‌پوشانند و تفاوت آنها قابل رؤیت نیست.



تصویر۱۱ – سمت چپ و راست رابطه قسمت a در یک نمودار

همچنین می‌توانیم از دستور immse برای محاسبه میانگین مربعات خطای دو طرف استفاده کنیم. همانطور که در تصویر ۱۲ مشاهده می‌شود، تفاوت دو طرف قسمت a خیلی ناچیز و در حد صفر است.

Mean squared error of Part a:

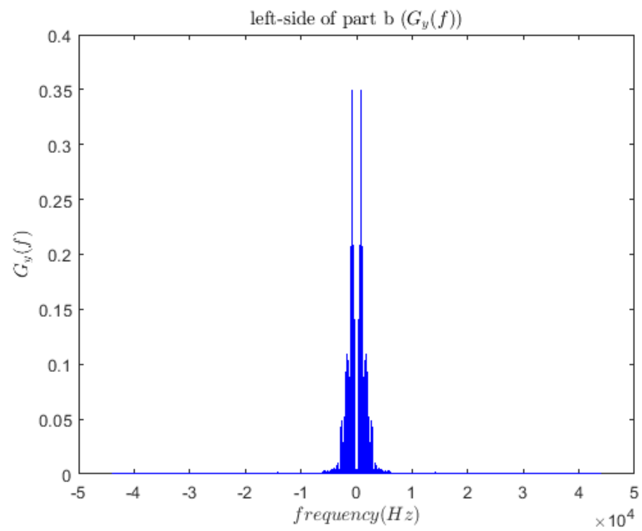
```
mse_part_a=immse(RRyx,Ryx)
```

```
mse_part_a = 1.9137e-09
```

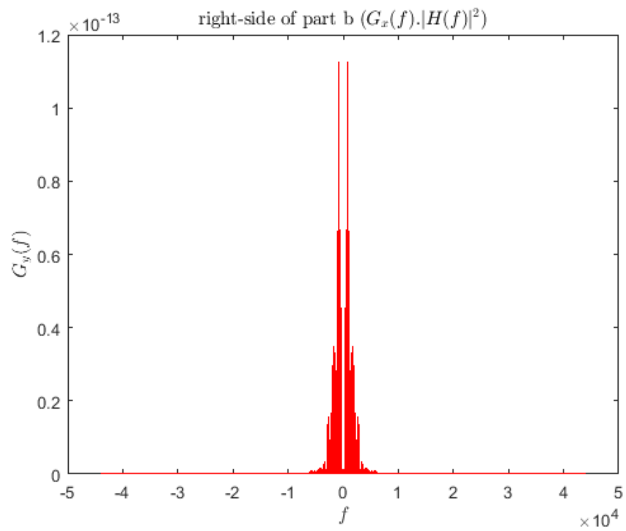
تصویر۱۲ – میانگین مربعات خطای دو طرف رابطه قسمت a

❋ رابطه قسمت b و محاسبه میانگین مربعات خطای دو طرف:

تصویر ۱۳- الف نمودار سمت چپ قسمت a و تصویر ۱۳-ب نمودار سمت راست این قسمت را نشان میدهد. همانطور که انتظار میرفت این دو قسمت با دقت زیادی شبیه به هم هستند.



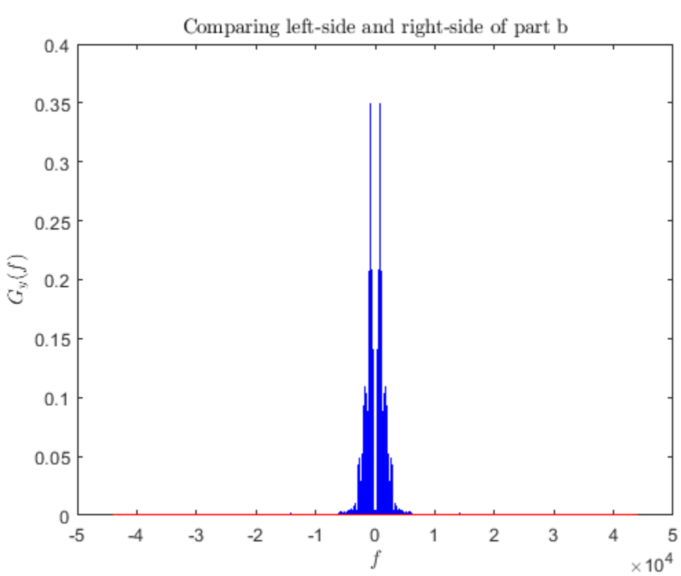
الف



ب

تصویر۱۳ – الف) سمت چپ، ب) سمت راست رابطه قسمت b

همچنین تصویر ۱۴ نمودار سمت چپ و راست قسمت a را نشان میدهد. همانطور که مشاهده می‌شود این دو بخش کاملاً همدیگر را می‌پوشانند و تفاوت آنها قابل رؤیت نیست.



تصویر۱۴ – سمت چپ و راست رابطه قسمت b در یک نمودار

همچنین می‌توانیم از دستور immse برای محاسبه میانگین مربعات خطای دو طرف استفاده کنیم. همانطور که در تصویر ۱۵ مشاهده می‌شود، تفاوت دو طرف قسمت a خیلی ناچیز و در حد صفر است.

Mean squared error of Part b:

```
mse_part_b=immse(GGy,Gy)
```

```
mse_part_b = 1.2578e-05
```

تصویر۱۵ – میانگین مربعات خطای دو طرف رابطه قسمت b

نتیجه: با توجه به ناچیز شدن خطای دو سمت هر دو قسمت a و b میتوانیم به این نتیجه برسیم که معادله ها درست خواهند بود و تساوی برقرار است.
