به نام خدا

دانشگاه تهران
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

تمرین کامپیوتری ۲

مخابرات بی‌سیم

دکتر صباغیان

عرفان پناهی ۸۱۰۱۹۸۳۶۹

نیمسال دوم ۰۲-۱۴۰۱

فهرست:

***** فایل مربوط به این تمرین کامپیوتری با نام Matlab_810198369.mlx پیوست شده است.**

چکیده : هدف از تمرین کامپیوتری ۲

هدف از انجام این تمرین آشنایی با تأثیرات کانال روی سیگنال دریافتی (اثر محو شوندگی) در گیرنده و تأثیر روی احتمال خطای سیستم است. به همین منظور در قسمت‌های مختلف پروژه راه‌حل های مختلفی که برای رفع این اثر استفاده می‌شود، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در بخش اول تمرین، یک کانال باند باریک در نظر گرفته می‌شود که در خروجی سیستم اثر محوشوندگی محسوس است. ابتدا بررسی می‌کنیم که درحالت عادی احتمال خطا چه مقدار است و سپس راه‌حل های مختلفی که باری رفع اثر محوشوندگی در این کانال استفاده می‌شود از جمله Pulse position modulation، تخمین اطلاعات کانال در گیرنده و فرستنده، دایورسیتی در زمان و کدینگ الموتی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در هر قسمت از این بخش نمودار احتمال خطا را به‌صورت تحلیلی و شبیه‌سازی بدست می‌آوریم و سپس آن‌را با قسمت‌های دیگر مقایسه می‌کنیم.

در بخش دوم تمرین، یک کانال پهن باند در نظر گرفته می‌شود که قصد داریم در آن از سیستم OFDM برای ارسال و دریافت داده‌ها استفاده کنیم. در ابتدا پارامتر های مورد نیاز سیستم OFDM را بدست می‌آوریم و سپس سعی می‌کنیم با استفاده از روش‌های Waterfilling، همسانسازی و دایورسیتی در مکان اثر کانال را از بین ببریم. همچنین در نهایت سعی می‌کنیم اثر Clipping روی احتمال خطای سیستم OFDM را بررسی کنیم.

بخش ۱ : کانال باند باریک

یک سیستم وایرلس درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم کانال باند باریک باشد و پس از نمونه برداری، سیگنال دریافتی در لحظهٔ m به صورت رابطه زیر باشد:

$$y[m] = h[m]x[m] + \omega[m]$$
$$h[m] \sim \mathcal{CN}(0,1)$$
$$\omega[m] \sim \mathcal{CN}(0,N_0)$$

سوال ۱. استفاده از مدولاسیون BPSK برای ارسال داده

قسمت الف. نمودار احتمال خطای بهینه برحسب SNR در بازهٔ $[-20dB, 20dB]$

در این قسمت ابتدا رابطهٔ احتمال خطای بهینه برحسب SNR را بدست می‌آوریم، نکته قابل توجه این است که در سیستم BPSK، تصمیم‌گیری روی بخش حقیقی سیگنال دریافتی صورت می‌گیرد. در نتیجه در این قسمت توزیع‌های $h[m]$ و $\omega[m]$ را نرمال حقیقی درنظر می‌گیریم. با توجه به اینکه برای ارسال از مدولاسیون BPSK استفاده شده است، $E_b = \frac{a^2}{2}$ است.

$$\gamma_b = \frac{E_b}{N_0} = \frac{a^2}{2\left(\frac{N_0}{2}\right)} = \frac{a^2}{N_0}$$

$$\omega_r[m] = Re\{\omega[m]\}, \qquad h_r[m] = Re\{h[m]\}, \qquad y_r[m] = Re\{y[m]\}$$

$$\omega_r[m] \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2}\right), \qquad h_r[m] \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$f_{h_r}(h_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \times \frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{h_r^2}{2 \times \frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-h_r^2)$$

$$P_e = \Pr\left(\underbrace{y_r[m] > 0 \mid x[m] = -a}_{\omega_r[m] > a h_r[m]}\right) \underbrace{\Pr(x[m] = -a)}_{\frac{1}{2}}$$
$$+ \Pr\left(\underbrace{y_r[m] < 0 \mid x[m] = a}_{\omega_r[m] < -a h_r[m]}\right) \underbrace{\Pr(x[m] = a)}_{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\Pr(\omega_r[m] > a h_r[m]) + \frac{1}{2}\Pr(\omega_r[m] < -a h_r[m])$$

$$P_e = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2} \underbrace{\Pr(\omega_r[m] > ah_r)}_{Q\left(\frac{ah_r}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right)} + \frac{1}{2} \underbrace{\Pr(\omega_r[m] < -ah_r)}_{Q\left(\frac{ah_r}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right)} \right] f_{h_r}(h_r)\, dh_r$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} Q\left(\frac{ah_r}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) f_{h_r}(h_r) dh_r = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} Q\left(\frac{ah_r}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) \exp(-h_r^2)\, dh_r$$

$$\rightarrow P_e = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} Q\left(h_r\sqrt{2\gamma_b}\right) \exp(-h_r^2)\, dh_r$$

نتیجه: با توجه به نرخ تغییرات Q-function نسبت به آرگومانش (۹۵٪ احتمال در بازه $-3 < h_r\sqrt{2\gamma_b} < 3$ است) و اینکه $\left|h_r\sqrt{2\gamma_b}\right| > 3$ است مقدار $Q\left(h_r\sqrt{2\gamma_b}\right)$ به ازای $h_r < 0$، ۱ و به ازای $h_r > 0$ خواهد بود. در نتیجه کران انتگرال $-\infty$ تا 0 تبدیل شده و احتمال خطای کل $\frac{1}{2}$ خواهد شد.

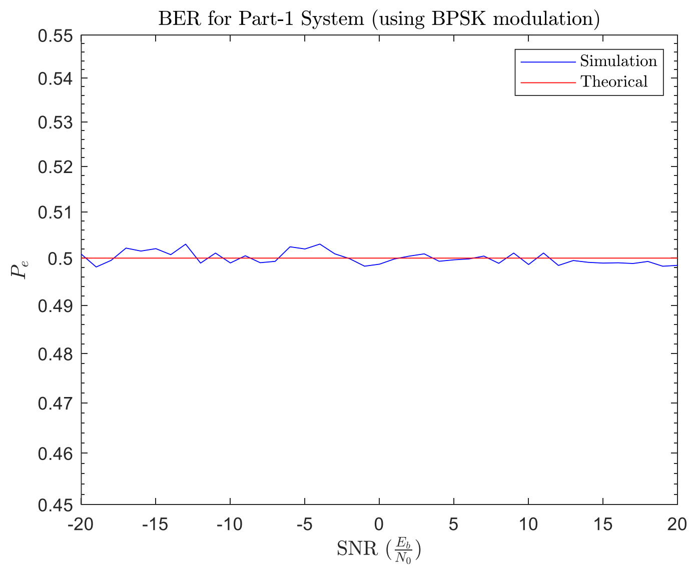
حال می‌خواهیم به روش دیگری توجیه کنیم که چرا احتمال خطای کل $\frac{1}{2}$ است. می‌دانیم که $\omega_r[m] - ah_r[m]$ یا $\omega_r[m] + ah_r[m]$ یک توزیع گوسی با واریانس $\frac{N_0}{2} + a^2$ و میانگین صفر است. پس داریم:

$$P_e = \Pr\left(\underbrace{y_r[m] > 0 \mid x[m] = -a}_{z_1[m]=\omega_r[m]-ah_r[m]>0}\right) \underbrace{\Pr(x[m] = -a)}_{\frac{1}{2}}$$

$$+ \Pr\left(\underbrace{y_r[m] < 0 \mid x[m] = a}_{z_2[m]=\omega_r[m]+ah_r[m]>0}\right) \underbrace{\Pr(x[m] = a)}_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}Q(0) + \frac{1}{2}Q(0) = Q(0) = \frac{1}{2}$$

روند شبیه‌سازی: در این بخش ابتدا به تعداد 10^5 بیت عدد تصادفی 0 و 1 تولید می‌کنیم و با توجه به اینکه مدولاسیون از نوع BPSK است این بیت‌ها را با دامنه های $\pm a$ $(a = 1)$ کدگذاری می‌کنیم. سپس کانالی تصادفی با توزیع $h[m] \sim \mathcal{CN}(0,1)$ تولید کرده و در SNR های مختلف، نویز را تولید کرده و بردار $y[m] = h[m]x[m] + \omega[m]$ را بدست می‌آوریم و در نهایت تصمیم‌گیری را روی بخش حقیقی $y[m]$ انجام می‌دهیم (چون مدولاسیون از نوع BPSK است.)

حال به ازای $SNR = -20:1:20\ (dB)$ نمودار احتمال خطای سیستم را رسم می‌کنیم. تصویر۱-۱ نمودار احتمال خطای این قسمت با استفاده از شبیه‌سازی و روابط تحلیلی را نشان می‌دهد. همانطور که در این نمودار مشاهده می‌شود، با افزایش SNR احتمال خطای سیستم کاهش نمی‌یابد و بازیابی سیستم گیرنده کاملاً رندوم است.



تصویر۱-۱: نمودار احتمال خطای بهینه سیستم در حالتی که از مدولاسیون BPSK استفاده شود.

قسمت ب. نمودار احتمال خطای بهینه برحسب SNR - بدون در نظر گرفتن اثر محوشوندگی

حال مطابق با رابطه بدست آمده در قسمت الف، تنها انتگرال را کنار می‌گذاریم. در این صورت رابطه احتمال خطای سیستم با صرف نظر از اثر محوشوندگی به صورت زیر خواهد بود.

$$y[m] = x[m] + \omega[m]$$

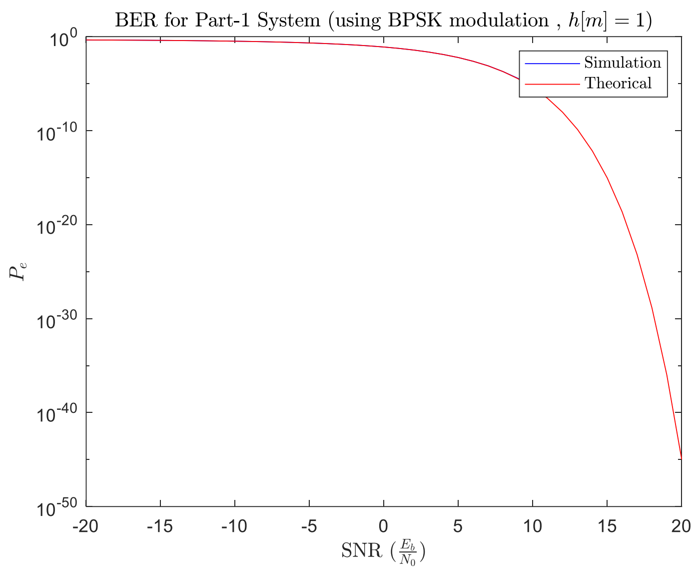
$$P_e = \Pr\left(\underbrace{y_r[m] > 0 \mid x[m] = -a}_{\omega_r[m] > a}\right)\underbrace{\Pr(x[m] = -a)}_{\frac{1}{2}} + \Pr\left(\underbrace{y_r[m] < 0 \mid x[m] = a}_{\omega_r[m] < -a}\right)\underbrace{\Pr(x[m] = a)}_{\frac{1}{2}}$$

$$\rightarrow P_e = \frac{1}{2}\underbrace{\Pr(\omega_r[m] > a)}_{Q\left(\frac{a}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right)} + \frac{1}{2}\underbrace{\Pr(\omega_r[m] < -a)}_{Q\left(\frac{a}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right)} = Q\left(\frac{a}{\sqrt{\frac{N_0}{2}}}\right) = Q\left(\sqrt{2\gamma_b}\right)$$

$$without\ fading \rightarrow \boldsymbol{P_e = Q\left(\sqrt{2\gamma_b}\right)}$$

همچنین در شبیه‌سازی این قسمت کاملاً مشابه با قسمت قبل عمل می‌کنیم با این تفاوت که ضرایب کانال در بردار دریافتی تأثیری ندارند و صرفاً نویز به سیگنال ارسالی اضافه می‌شود تا سیگنال دریافتی تعیین شود.

در نهایت نمودار احتمال خطا مطابق با تصویر ۱-۲ خواهد بود. همانطور که در این نمودار مشاهده می‌شود در نبود اثر محوشوندگی، احتمال خطای کانال با افزایش SNR کاهش یافته است.



تصویر۱-۲: نمودار احتمال خطای بهینه سیستم در حالتی که از مدولاسیون BPSK استفاده شود و کانال محوشوندگی نداشته باشد ($h[m] = 1$).

قسمت ج. SNR مورد نیاز برای احتمال خطای 10^{-6}؛ در حالت بدون در نظر گرفتن اثر محوشوندگی

رابطه مورد نیاز در این قسمت، در قسمت ب بدست آورده شد. حال می‌خواهیم SNR مورد نیاز (برحسب dB) را برای رسیدن به احتمال خطای 10^{-6} بدست آوریم.

$$P_e = Q\left(\sqrt{2\gamma_b}\right) = 10^{-6} \rightarrow \gamma_b = \frac{Q^{-1}(10^{-6})^2}{2} = 11.2975 = \mathbf{10.5298\ dB}$$

سوال ۲. استفاده از مدولاسیون Pulse Position برای ارسال داده

قسمت الف. نمودار احتمال خطای بهینه برحسب SNR در بازهٔ $[-20dB, 20dB]$ با استفاده از رابطهٔ تئوری

در این مدولاسیون برای ارسال ۰ و ۱ در دو بازهٔ زمانی متوالی دو سمبل ارسال می‌کنیم. برای ارسال ۱، به ترتیب پالس‌های 0 و α و برای ارسال ۰، به ترتیب پالس‌های α و 0 ارسال می‌شود. به‌عبارت دیگر یک بردار به‌جای هر بیت ۰ و ۱ ارسال می‌کنیم. این

بردار برای بیت‌های ۰ و ۱ به‌صورت زیر است. (دقت شود با توجه به اینکه واریانس اثر محوشوندگی ۱ است، تأثیری در واریانس $y[0]$ و $y[1]$ ندارد.)

$$x = 0 \rightarrow \underline{y} = [\alpha, 0] \rightarrow y[0] \sim \mathcal{CN}(0, \alpha^2 + N_0)\,, \qquad y[1] \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$$

$$x = 1 \rightarrow \underline{y} = [0, \alpha] \rightarrow y[1] \sim \mathcal{CN}(0, N_0)\,, \qquad y[1] \sim \mathcal{CN}(0, \alpha^2 + N_0)$$

همچنین برای تعیین آستانه تصمیم‌گیری به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$f\left(\underline{y}\middle|x=0\right) \underset{\hat{x}=0}{\overset{\hat{x}=1}{\lesseqgtr}} f\left(\underline{y}\middle|x=1\right) \rightarrow \ln\left(\frac{f\left(\underline{y}\middle|x=0\right)}{f\left(\underline{y}\middle|x=1\right)}\right) \underset{\hat{x}=0}{\overset{\hat{x}=1}{\lesseqgtr}} 0$$

$$\Delta \triangleq \ln\left(\frac{f\left(\underline{y}\middle|x=0\right)}{f\left(\underline{y}\middle|x=1\right)}\right) = \ln\left(\frac{f(y[0]||x=0).f(y[1]||x=0)}{f(y[0]||x=1).f(y[1]||x=1)}\right) = \ln\left(\frac{e^{-\frac{(y[0])^2}{\alpha^2+N_0}}.e^{-\frac{(y[1])^2}{N_0}}}{e^{-\frac{(y[0])^2}{N_0}}.e^{-\frac{(y[1])^2}{\alpha^2+N_0}}}\right)$$

$$= \ln\left(e^{\frac{\alpha^2((y[0])^2-(y[1])^2)}{N_0(\alpha^2+N_0)}}\right) = \alpha^2\frac{(y[0])^2-(y[1])^2}{N_0(\alpha^2+N_0)}$$

در نتیجه تصمیم‌گیری بر اساس $y[0]$ و $y[1]$ قابل تطبیق است.

$$(y[0])^2 \underset{\hat{x}=0}{\overset{\hat{x}=1}{\lesseqgtr}} (y[1])^2$$

با توجه به اینکه $y[0]$ و $y[1]$ توزیع‌های گوسی مختلط دارند، $(y[0])^2$ و $(y[1])^2$ توزیع‌های نمایی دارند. (چون بخش حقیقی و موهومی توزیع های گوسی مختلط از هم مستقل و گوسی هستند، مجموع مربعات آن‌ها توزیع نمایی دارند.)

$$x = 0 \rightarrow \underline{y} = [\alpha, 0] \rightarrow \begin{cases} y[0] \sim \mathcal{CN}(0, \alpha^2 + N_0) \rightarrow (y[0])^2 \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{\alpha^2 + N_0}\right) \\ y[1] \sim \mathcal{CN}(0, N_0) \rightarrow (y[1])^2 \sim \ Exp\left(\lambda = \frac{1}{N_0}\right) \end{cases}$$

$$x = 1 \rightarrow \underline{y} = [0, \alpha] \rightarrow \begin{cases} y[0] \sim \mathcal{CN}(0, N_0) \rightarrow (y[0])^2 \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{N_0}\right) \\ y[1] \sim \mathcal{CN}(0, \alpha^2 + N_0) \rightarrow (y[1])^2 \sim Exp\left(\lambda = \frac{1}{\alpha^2 + N_0}\right) \end{cases}$$

حال با استفاده از توزیع‌های بالا احتمالا خطا را بدست می‌آوریم:

$$P_e = \Pr(\hat{x}=0 \mid x=1)\Pr(x=1) + \Pr(\hat{x}=1 \mid x=0)\Pr(x=0)$$
$$= \frac{1}{2}\Pr\left((y[1])^2 - (y[0])^2 > 0 \mid x=1\right) + \frac{1}{2}\Pr\left((y[1])^2 - (y[0])^2 < 0 \mid x=0\right)$$

برای بدست آوردن احتمال بالا نیاز داریم توزیع اختلاف دو توزیع نمایی را بدانیم. لینک زیر احتمال این توزیع را به ما نشان می‌دهد.

- [probability - Pdf of the difference of two exponentially distributed random variables - Mathematics Stack Exchange]

تصویر۱-۳ تابع توزیع اختلاف دو توزیع نمایی را نشان می‌دهد.

Given that we know $P(Z<0) = P(Y<X) = \frac{\mu}{\mu+\lambda}$, and correspondingly $P(Y>X) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}$, the above implies that the pdf for $Y-X$ is

$$f(x) = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\begin{cases} e^{\lambda x} & \text{if } x<0 \\ e^{-\mu x} & \text{if } x \geq 0\,. \end{cases}$$

تصویر۱-۳: تابع توزیع اختلاف دو توزیع نمایی، $\mu = \frac{1}{E(Y)}$ و $\lambda = \frac{1}{E(X)}$

$$\Pr\left(\underbrace{(y[1])^2}_{X} - \underbrace{(y[0])^2}_{Y} > 0 \mid x=1\right) = \frac{N_0}{N_0+\alpha^2+N_0} = \frac{N_0}{\alpha^2+2N_0}$$

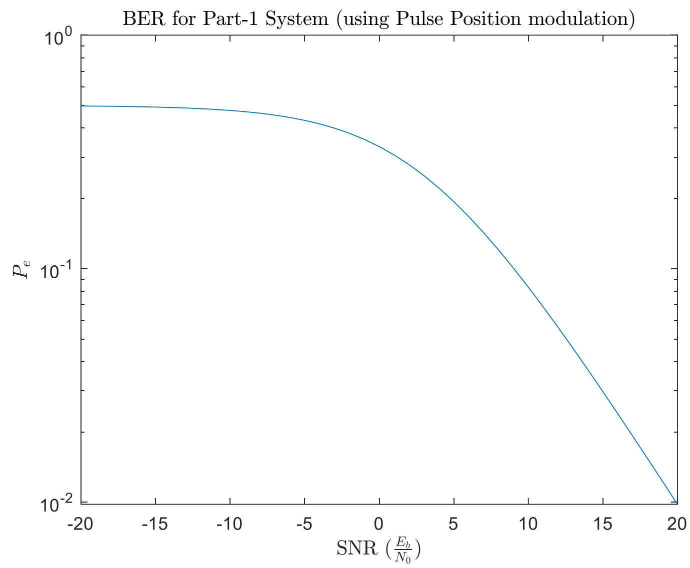
$$\Pr\left(\underbrace{(y[0])^2}_{X} - \underbrace{(y[1])^2}_{Y} > 0 \mid x=0\right) = \frac{2N_0}{N_0+\alpha^2+N_0} = \frac{N_0}{\alpha^2+2N_0}$$

در نهایت احتمال خطا به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$\to P_e = \frac{1}{2}\frac{N_0}{\alpha^2+2N_0} + \frac{1}{2}\frac{N_0}{\alpha^2+2N_0} = \frac{N_0}{\alpha^2+2N_0} = \frac{1}{2+\frac{\alpha^2}{N_0}} = \frac{1}{2+SNR}$$

حال به ازای $SNR = -20{:}20$ نمودار احتمال خطا را با استفاده از رابطهٔ تئوری بالا را مطابق با تصویر۱-۴ رسم می‌کنیم.

همانطور که در نمودار مشاهده می‌شود علی رغم وجود اثر محوشوندگی، سیستم در برابر این اثر نامطلوب عملکرد بهتری از قسمت قبل دارد و احتمال خطا با افزایش SNR کاهش می‌یابد.

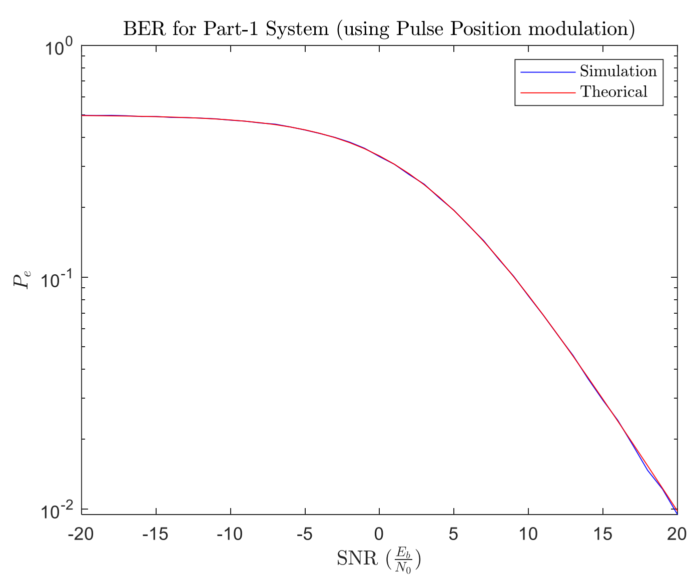


تصویر۱-۴: نمودار احتمال خطای سیستم در حالتی که از مدولاسیون *Pulse Position* استفاده شود (تئوری)

قسمت ب. نمودار احتمال خطای بهینه برحسب SNR در بازهٔ $[-20dB, 20dB]$ با استفاده از شبیه‌سازی

در این قسمت می‌خواهیم با استفاده از شبیه‌سازی سیستم تصمیم‌گیری قسمت الف را پیاده‌سازی کنیم و نتایج را با نمودار ناشی از روابط تئوری مقایسه کنیم.

روند شبیه‌سازی: در این قسمت مطابق با توضیحات داده شده، سمبل‌های ارسالی یک بردار خواهد بود. برای ارسال ۱، به ترتیب پالس‌های 0 و α و برای ارسال ۰، به ترتیب پالس‌های α و 0 ارسال می‌شود. سپس مشابه با قسمت قبل این سمبل‌های ارسالی از کانال عبور می‌کنند و در نهایت تصمیم‌گیری $(y[0])^2 \underset{\hat{x}=0}{\overset{\hat{x}=1}{\lessgtr}} (y[1])^2$ انجام شده و بیت ارسالی تشخیص داده می‌شود.



تصویر۱-۵: نمودار احتمال خطای سیستم در حالتی که از مدولاسیون *Pulse Position* استفاده شود (شبیه‌سازی)

همانطور که در تصویر ۱-۵ مشاهده می‌شود نمودار های احتمال خطای هر دو بخش مشابه هم شده است.

قسمت ج. SNR مورد نیاز برای احتمال خطای 10^{-6}؛ در حالت بدون در نظر گرفتن اثر محوشوندگی

رابطه احتمال خطای سیستم این قسمت، در قسمت الف بدست آورده شد. حال می‌خواهیم SNR مورد نیاز (برحسب dB) را برای رسیدن به احتمال خطای 10^{-6} بدست آوریم.

$$P_e = \frac{1}{2+SNR} = 10^{-6} \rightarrow SNR = 999998 \cong \boldsymbol{60\ dB}$$

که این مقدار با قسمت ج سوال ۱، $60 - 10.5298 = 49.4702dB$ تفاوت دارد. از این موضوع نتیجه می‌گیریم اگر در حضور fading از کدینگ استفاده کنیم، نیاز به SNR خیلی بزرگی برای رسیدن به احتمال خطاب دلخواه داریم.

سوال ۳. استفاده از مدولاسیون BPSK برای ارسال داده در حالت CSI available

قسمت الف. نمودار احتمال خطای بهینه برحسب SNR در بازهٔ $[-20dB, 20dB]$ با استفاده از رابطهٔ تئوری

در این حالت با دانستن $h[m]$ در گیرنده، می‌توانیم اثر آن را روی سیگنال دریافتی از بین ببریم. نکته قابل توجه در این حالت این است که همراه با از بین رفتن اثر محوشوندگی کانال روی $x[m]$، نویز تقویت می‌شود. با توجه به اینکه بعد از دریافت $y[m]$ مقدار $h[m]$ در گیرنده مشخص می‌شود، دیگر $h[m]$ متغیر تصادفی نیست و به شکل یک عدد به آن نگاه می‌شود.

$$y[m] = h[m]x[m] + \omega[m] \xrightarrow{\times \frac{h^*[m]}{|h[m]|^2}} z[m] = x[m] + \underbrace{\frac{h^*[m]}{|h[m]|^2}\omega[m]}_{\text{نویز معادل } \widetilde{\omega}[m]}$$

$$\text{توان بخش مطلوب} = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{توان نویز معادل} = \frac{|h[m]|^2}{|h[m]|^4}N_0 = \frac{1}{|h[m]|^2}N_0$$

در نتیجه SNR دریافتی به صورت زیر خواهد شد.

$$SNR = \frac{a^2}{2} \times \frac{|h[m]|^2}{N_0} = \frac{a^2|h[m]|^2}{2N_0}$$

$$\gamma_b = \frac{E_b}{N_0} = \frac{a^2}{2N_0} \rightarrow SNR = \gamma_b|h[m]|^2$$

در نهایت با توجه به اینکه از مدولاسیون $BPSK$ استفاده می‌شود، احتمال خطا به‌صورت زیر خواهد بود.

$$P_e = \int_{-\infty}^{+\infty} Q\left(\sqrt{2\gamma_b |h_m|^2}\right) f_{h_m}(h_m)\, dh_m$$

$$h_m \sim \mathcal{CN}(0,1) \ \rightarrow h_m = \sqrt{h_r^2 + h_i^2}\,, \qquad h_r, h_i \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \times \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q\left(\sqrt{2\gamma_b (h_r^2 + h_i^2)}\right) e^{-h_r^2} e^{-h_i^2}\, dh_r dh_i$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Q\left(\sqrt{2\gamma_b (h_r^2 + h_i^2)}\right) e^{-(h_r^2 + h_i^2)}\, dh_r dh_i$$

با استفاده از قطبی کردن انتگرال دوگانه، آن‌را ساده‌تر می‌کنیم.

$$r = \gamma_b\left(h_r^2 + h_i^2\right)$$

$$P_e = \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\gamma_b} Q\left(\sqrt{2r}\right) e^{-\frac{r}{\gamma_b}} dr = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\gamma_b}{1+\gamma_b}}\right)$$

در نهایت نمودار احتمال خطای سیستم با استفاده از رابطهٔ تئوری مطابق با تصویر ۱-۶ خواهد بود.

حال می‌خواهیم SNR مورد نیاز برای رسیدن به احتمال خطای 10^{-6} را بدست آوریم. با توجه به اینکه احتمال خطای بدست آمده فرم بسته ندارد، از نمودار در بازه $SNR = 50{:}1{:}60$ استفاده می‌کنیم تا ببینیم احتمال خطا در چه محدوده‌ای 10^{-6} می‌شود. همانطور که در تصویر ۱-۷ مشاهده می‌شود به ازای $SNR = 54dB$ به احتمال خطای 10^{-6} می‌رسیم.

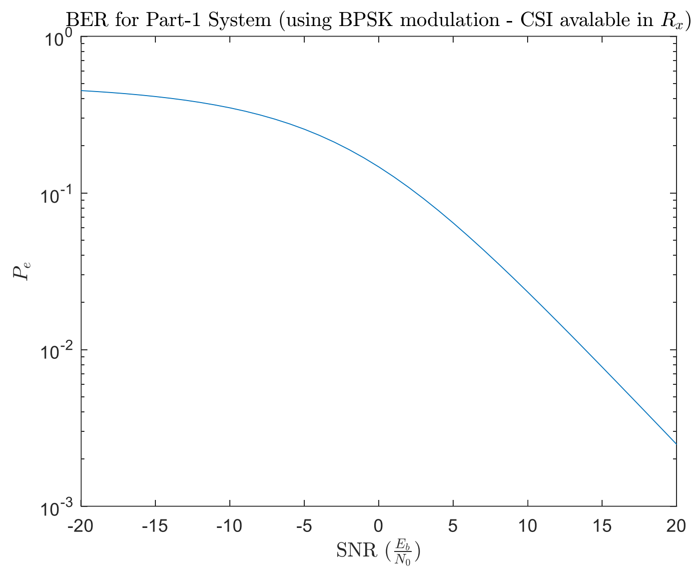
قسمت ب. نمودار احتمال خطای بهینه برحسب SNR در بازهٔ $[-20dB, 20dB]$ با استفاده از شبیه‌سازی

در این قسمت می‌خواهیم با استفاده از شبیه‌سازی سیستم تصمیم‌گیری قسمت الف را پیاده‌سازی کنیم و نتایج را با نمودار ناشی از روابط تئوری مقایسه کنیم.

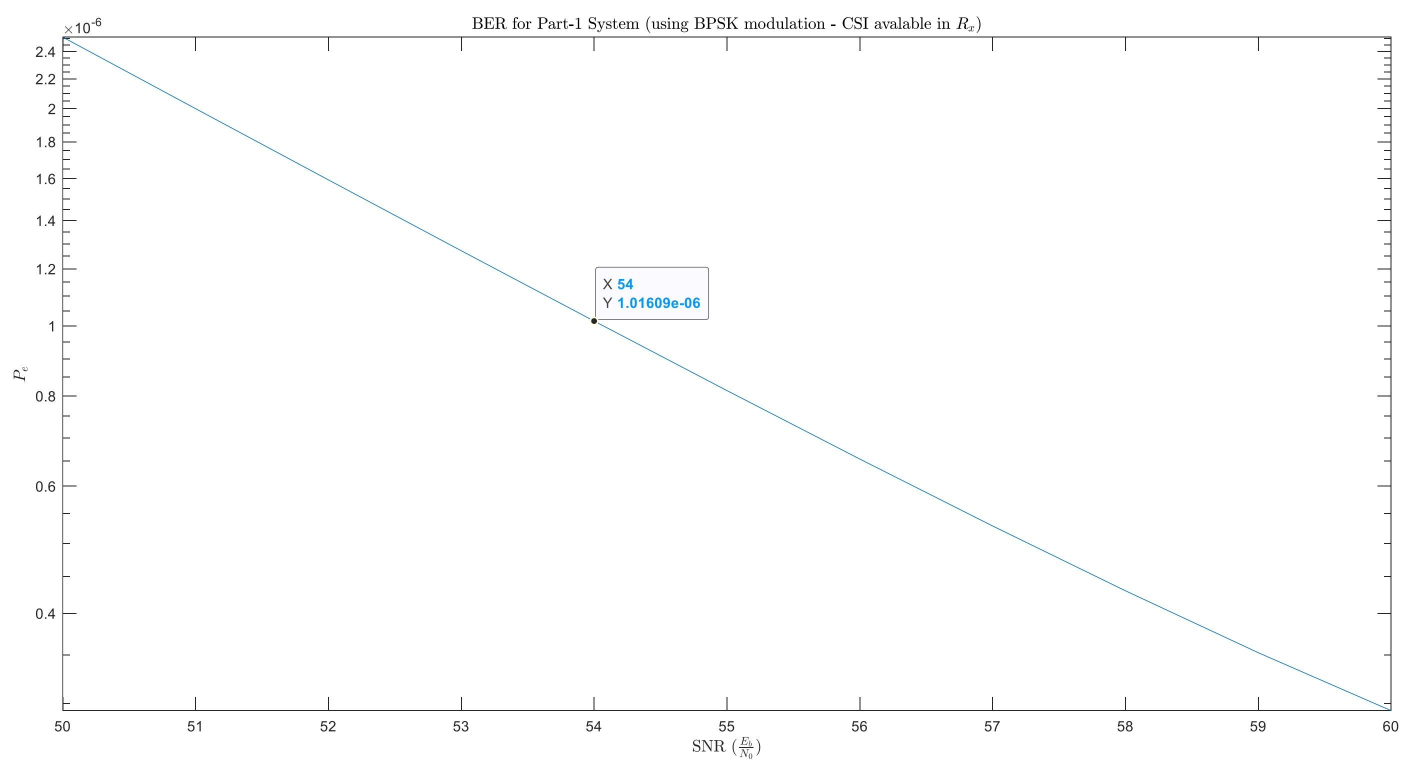
روند شبیه‌سازی: در این قسمت مطابق با توضیحات داده شده، فرایند ارسال و دریافت مشابه با سوال ۱ خواهد بود. با این تفاوت که در این قسمت کانال در گیرنده برای ما مشخص است. بنابراین می‌توانیم با تکنیک های ریاضی اثر کانال روی تصمیم گیری را

از بین ببریم. به این منظور مطابق با توضیحات داده شده در قسمت تئوری، سیگنال دریافتی را در $\frac{h^*[m]}{|h[m]|^2}$ ضرب می‌کنیم. سپس تصمیم‌گیری را روی بخش حقیقی این بردار انجام می‌دهیم.

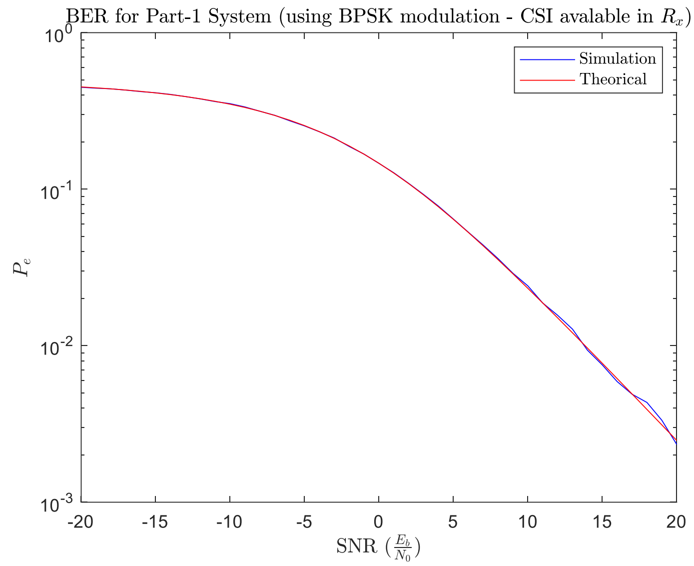
همانطور که در تصویر ۱-۸ مشاهده می‌شود نمودارهای احتمال خطای هر دو بخش مشابه هم شده است.



تصویر۱-۶: نمودار احتمال خطای سیستم در حالتی که از مدولاسیون *BPSK* استفاده شود و مقادیر $h[m]$ درگیرنده معلوم باشد (تئوری)

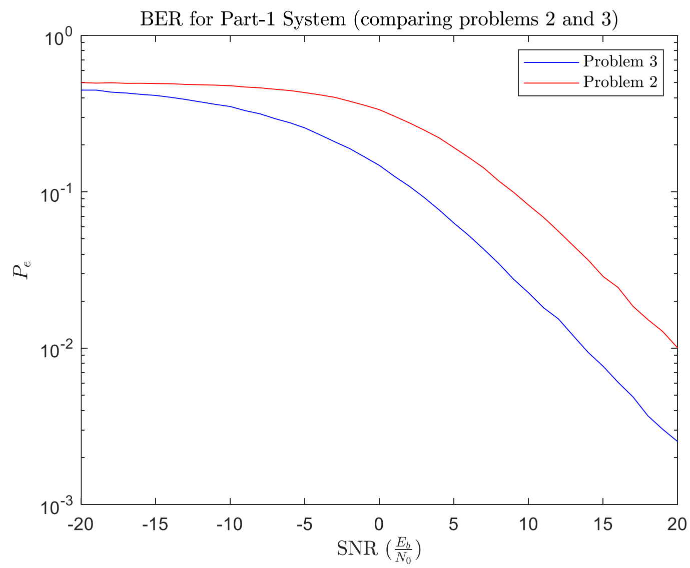


تصویر۱-۷: *SNR* مورد نیاز برای رسیدن به احتمال خطای 10^{-6}



تصویر۱-۸: نمودار احتمال خطای سیستم در حالتی که از مدولاسیون *BPSK* استفاده شود و مقادیر $h[m]$ درگیرنده معلوم باشد (شبیه‌سازی)

تصویر ۱-۹ مقایسه نمودار احتمال خطای سوال ۲ (Pulse Position Modulation) و سوال ۳ (BPSK Modulation – CSI available in receiver) را نشان می‌دهد.



تصویر۱-۹: مقایسه نمودار احتمال خطای سوال ۲ (*Pulse Position Modulation*) و سوال ۳ (*BPSK Modulation – CSI available in receiver*) (شبیه‌سازی)

همانطور که در تصویر ۱-۱۰ مشاهده می‌شود این دو نمودار احتمال خطای سوالات ۲ و ۳ در SNR های بزرگ ($20dB$) حدوداً $6dB$ تفاوت دارند.

```
ratio = BER_sim_p2(end) / BER_sim_p3(end);
ratio_dB = 10*log10(ratio)
```

```
ratio_dB = 5.9905
```

تصویر۱-۱۰: اختلاف احتمال خطای سوال ۲ (*Pulse Position Modulation*) و سوال ۳ (*BPSK Modulation – CSI available in receiver*) در $SNR = 20dB$

قسمت ج. مقایسه سیستم‌های سوال ۲ و ۳

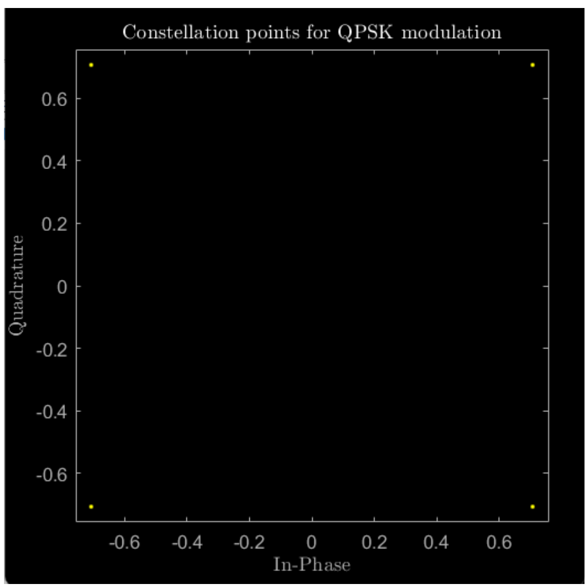
همانطور که در تصویر ۱-۹ مشاهده می‌شود در سیستم سوال ۳ (وقتی اطلاعات گیرنده را داریم) نیاز به *SNR* کمتری برای رسیدن به راحتمال خطای دلخواه داریم. اما این تفاوت *SNR* آنقدری قابل توجه نیست.

سوال ۴. استفاده از مدولاسیون QPSK برای ارسال داده

قسمت الف. نمودار احتمال خطای بهینه برحسب SNR در بازهٔ $[-10dB, 10dB]$

در این بخش می‌خواهیم از مدولاسیون $QPSK$ برای ارسال داده استفاده کنیم. به این منظور از ۴ سمبل نشان داده شده در تصویر۱-۱۱ برای ارسال داده استفاده می‌کنیم.

$$x_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}(1 + j1)\,, \qquad x_2 = \frac{a}{\sqrt{2}}(-1 + j1)\,, \qquad x_3 = \frac{a}{\sqrt{2}}(1 - j1)\,, \qquad x_4 = \frac{a}{\sqrt{2}}(-1 - j1)$$



تصویر۱-۱۱: نقاط *constellation* برای مدولاسیون *QPSK*

رابطهٔ تئوری احتمال خطا: ابتدا تعاریف مسئله را بازنویسی می‌کنیم.

$$y[m] = h[m]x[m] + \omega[m]$$

$$h[m] \sim \mathcal{CN}(0,1)$$

$$\omega[m] \sim \mathcal{CN}(0, N_0)$$

$$x[m] \in \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

مشابه سوال۳، با فرض اینکه در گیرنده مقادیر $h[m]$ را می‌دانیم پیش می‌رویم.

$$y[m] = h[m]x[m] + \omega[m] \xrightarrow{\times \frac{h^*[m]}{|h[m]|^2}} z[m] = x[m] + \underbrace{\frac{h^*[m]}{|h[m]|^2}\omega[m]}_{\text{نویز معادل } \widetilde{\omega}[m]} = x[m] + \widetilde{\omega}[m]$$

باتوجه به اینکه احتمال ارسال هر ۴ سمبل یکسان است، ناحیه های تصمیم‌گیری $Re\{z\} = 0$ و $Im\{z\} = 0$ است. یعنی داریم:

$$if\ Re\{z\} > 0\ \ \&\ \ Im\{z\} > 0 \rightarrow \hat{x} = x_1$$
$$if\ Re\{z\} < 0\ \ \&\ \ Im\{z\} > 0 \rightarrow \hat{x} = x_2$$
$$if\ Re\{z\} > 0\ \ \&\ \ Im\{z\} < 0 \rightarrow \hat{x} = x_3$$
$$if\ Re\{z\} < 0\ \ \&\ \ Im\{z\} < 0 \rightarrow \hat{x} = x_4$$

برای محاسبه احتمال خطا، از احتمال دریافت درست استفاده می‌کنیم. یعنی ابتدا P_c را بدست آورده و با استفاده از آن به P_e می‌رسیم. ($P_e = 1 - P_c$)

$$\begin{aligned}
P_c = {} & \Pr(\hat{x} = x_1 \mid x = x_1)\Pr(x = x_1) + \Pr(\hat{x} = x_2 \mid x = x_2)\Pr(x = x_2) \\
& + \Pr(\hat{x} = x_3 \mid x = x_3)\Pr(x = x_3) + \Pr(\hat{x} = x_4 \mid x = x_4)\Pr(x = x_4) \\
& = \frac{1}{4}\Pr(Re\{z\} > 0\ \ \&\ \ Im\{z\} > 0 \mid x = x_1) \\
& + \frac{1}{4}\Pr(Re\{z\} < 0\ \ \&\ \ Im\{z\} > 0 \mid x = x_2) \\
& + \frac{1}{4}\Pr(Re\{z\} > 0\ \ \&\ Im\{z\} < 0 \mid x = x_3) \\
& + \frac{1}{4}\Pr(Re\{z\} < 0\ \ \&\ Im\{z\} < 0 \mid x = x_4) \\
& = \frac{1}{4}\Pr(Re\{x_1 + \widetilde{\omega}[m]\} > 0\ \ \&\ \ Im\{x_1 + \widetilde{\omega}[m]\} > 0) \\
& + \frac{1}{4}\Pr(Re\{x_2 + \widetilde{\omega}[m]\} < 0\ \ \&\ \ Im\{x_2 + \widetilde{\omega}[m]\} > 0) \\
& + \frac{1}{4}\Pr(Re\{x_3 + \widetilde{\omega}[m]\} > 0\ \ \&\ Im\{x_3 + \widetilde{\omega}[m]\} < 0) \\
& + \frac{1}{4}\Pr(Re\{x_4 + \widetilde{\omega}[m]\} < 0\ \ \&\ Im\{x_4 + \widetilde{\omega}[m]\} < 0)
\end{aligned}$$

با توجه به تقارن مسئله، همه ۴ احتمال بالا یکسان هستند پس برای ساده کردن محاسبات یکی از احتمال ها را در نظر می‌گیریم.

نهایتاً احتمال ساده شده به صورت زیر خواهد شد.

$$P_c = \Pr\left(Re\{\widetilde{\omega}[m]\} < \frac{a}{\sqrt{2}}\ \&\ Im\{\widetilde{\omega}[m]\} < \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \Pr\left(Re\left\{\frac{h^*[m]}{|h[m]|^2}\omega[m]\right\} < \frac{a}{\sqrt{2}}\ \&\ Im\left\{\frac{h^*[m]}{|h[m]|^2}\omega[m]\right\} < \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\omega_r, \omega_i \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2}\right), \qquad h_r, h_i \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{h^*[m]}{|h[m]|^2}\omega[m] = \frac{h_r - jh_i}{h_r^2 + h_i^2}(\omega_r + j\omega_i) = \frac{h_r\omega_r + h_i\omega_i + j(h_r\omega_i - h_i\omega_r)}{h_r^2 + h_i^2}$$

$$\rightarrow P_c = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Pr\left(h_r\omega_r + h_i\omega_i < a\frac{h_r^2 + h_i^2}{\sqrt{2}}\ \&\ h_r\omega_i - h_i\omega_r < a\frac{h_r^2 + h_i^2}{\sqrt{2}}\right) f_{h_r}(h_r) f_{h_i}(h_i)\, dh_r dh_i$$

با توجه به اینکه $h_r\omega_r + h_i\omega_i$ و $h_r\omega_i - h_i\omega_r$ دو توزیع گوسی با واریانس های یکسان هستند و همچنین اینکه ω_i و ω_r از هم مستقلند ($cov(\omega_r, \omega_i) = 0$)، می‌توانیم با استفاده از خاصیت کواریانس ترکیب خطی بنویسیم:

$$h_r\omega_r + h_i\omega_i\,, h_r\omega_i - h_i\omega_r \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{N_0}{2}\left(h_r^2 + h_i^2\right)\right)$$

$$cov(h_r\omega_r + h_i\omega_i\,, h_r\omega_i - h_i\omega_r)$$

$$= h_r^2 \underbrace{cov(\omega_i, \omega_r)}_{=0} - h_r h_i \underbrace{cov(\omega_r, \omega_r)}_{var(\omega_r) = \frac{N_0}{2}} + h_r h_i \underbrace{cov(\omega_i, \omega_i)}_{var(\omega_i) = \frac{N_0}{2}} - h_i^2 \underbrace{cov(\omega_r, \omega_i)}_{0} = 0$$

در نتیجه دو توزیع $h_r\omega_i - h_i\omega_r$ و $h_r\omega_r + h_i\omega_i$ از هم مستقل هستند و می‌توانیم احتمال خطا را به‌صورت زیر بدست آوریم.

$$P_c = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Pr\left(h_r\omega_r + h_i\omega_i < a\frac{h_r^2 + h_i^2}{\sqrt{2}}\right) \Pr\left(h_r\omega_i - h_i\omega_r < a\frac{h_r^2 + h_i^2}{\sqrt{2}}\right) f_{h_r}(h_r) f_{h_i}(h_i)\, dh_r dh_i$$

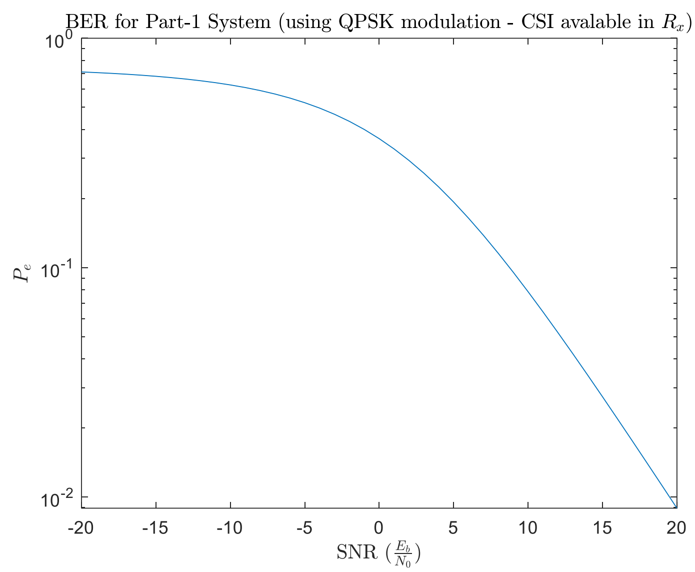
$$P_c = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-Q\left(a\frac{\sqrt{h_r^2+h_i^2}}{\sqrt{N_0}}\right)\right)^2 f_{h_r}(h_r)f_{h_i}(h_i)\,dh_r dh_i$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-Q\left(\gamma_b\left(h_r^2+h_i^2\right)\right)\right)^2 e^{-\left(h_r^2+h_i^2\right)}\,dh_r dh_i$$

$$P_e = 1-P_c = 1-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-Q\left(\sqrt{\gamma_b\left(h_r^2+h_i^2\right)}\right)\right)^2 e^{-\left(h_r^2+h_i^2\right)}\,dh_r dh_i$$

$$\rightarrow P_e = 1-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-Q\left(\sqrt{\gamma_b(h_r^2+h_i^2)}\right)\right)^2 e^{-(h_r^2+h_i^2)}\,dh_r dh_i$$

در نهایت نمودار احتمال خطای سیستم با استفاده از رابطهٔ تئوری مطابق با تصویر ۱-۱۲ خواهد بود.

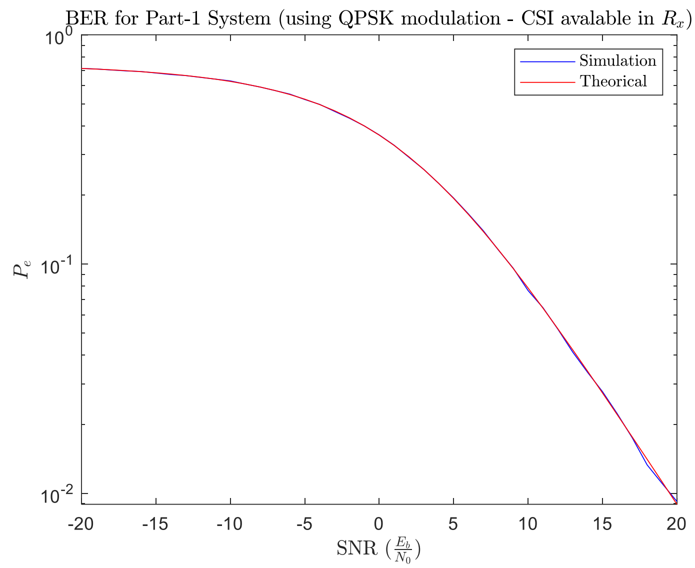


تصویر۱-۱۲: نمودار احتمال خطای سیستم در حالتی که از مدولاسیون *QPSK* استفاده شود و مقادیر $h[m]$ درگیرنده معلوم باشد (تئوری)

رسم نمودار احتمال خطا با استفاده از شبیه‌سازی: حال می‌خواهیم با استفاده از شبیه‌سازی احتمال خطای سیستم این قسمت را رسم می‌کنیم و نتایج را با نمودار ناشی از روابط تئوری مقایسه کنیم. همانطور که در تصویر ۱-۱۳ مشاهده می‌شود نمودارهای احتمال خطای هر دو بخش مشابه هم شده است.

روند شبیه‌سازی: شبیه‌سازی این قسمت مشابه با قسمت قبل خواهد بود با این تفاوت که سمبل های ارسالی دیگر دو نوع نیستند و از مدولاسیون *QPSK* استفاده می‌کنیم. پس از تولید سمبل‌های تصادفی ارسالی کانال را روی سمبل ها اثر داده و به آن نویز

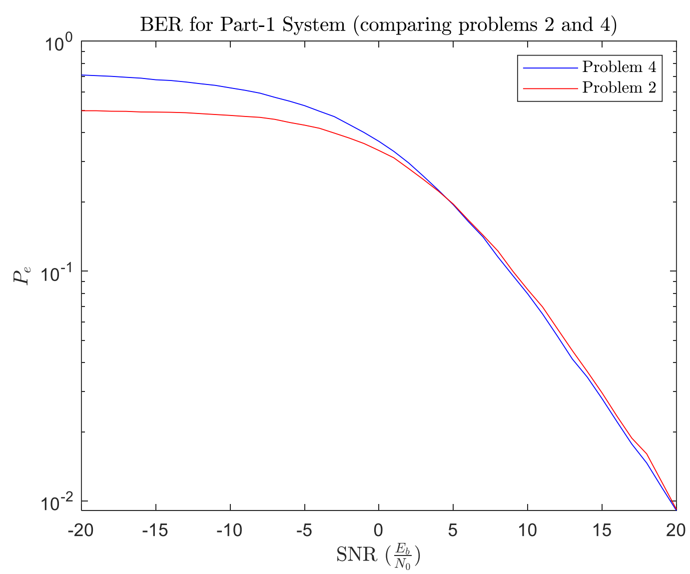
اضافه می‌کنیم. در نهایت مشابه قسمت قبل با ضرب $\frac{h^*[m]}{|h[m]|^2}$ در $y[m]$ اثر کانال را از بین برده و تصمیم‌گیری را روی این سیگنال انجام می‌دهیم. برای تصمیم گیری مطابق با ناحیه بندی توضیح داده شده در ابتدای این سوال استفاده می‌کنیم.



تصویر۱-۱۳: نمودار احتمال خطای سیستم در حالتی که از مدولاسیون *QPSK* استفاده شود و مقادیر $h[m]$ درگیرنده معلوم باشد (شبیه‌سازی)

قسمت ب. مقایسه سیستم‌های سوال ۲ و ۴

تصویر ۱-۱۴ مقایسه نمودار احتمال خطای سوال ۲ (Pulse Position Modulation) و سوال ۴ (QPSK Modulation – CSI available in receiver) را نشان می‌دهد.



تصویر۱-۱۴: مقایسه نمودار احتمال خطای سوال ۲ (*Pulse Position Modulation*) و سوال ۳ (*QPSK Modulation – CSI available in receiver*) (شبیه‌سازی)

همانطور که در تصویر ۱-۱۵ مشاهده می‌شود این دو نمودار احتمال خطای سوالات ۲ و ۴ در SNR های بزرگ ($20dB$) تقریباً مشابه عمل می‌کنند و تفاوت آن‌ها در حدودا $0dB$ تا $1dB$ است.

```
ratio = BER_sim_p2(end) / BER_sim_p4(end);
ratio_dB = 10*log10(ratio)
```

```
ratio_dB = 0.0522
```

تصویر۱-۱۵: اختلاف احتمال خطای سوال ۲ (*Pulse Position Modulation*) و سوال ۴ (*QPSK Modulation – CSI available in receiver*) در $SNR = 20dB$

سوال ۵. استفاده از دایورسیتی در زمان برای ارسال داده

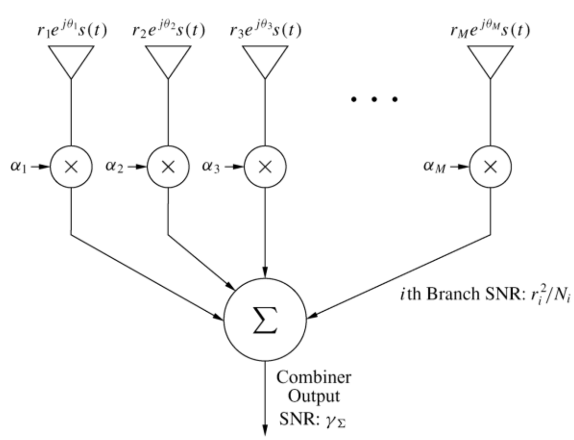
قسمت الف. فاصلهٔ زمانی بین ارسال سمبل‌ها

برای ارسال درست و بدون تداخل حداقل فاصلهٔ زمانی بین ارسال سمبل‌ها باید به اندازه زمان همدوسی باشد تا کانال (آثار محوشوندگی) نسبت به حالت قبلی‌اش مستقل شود.

قسمت ب. رسم نمودار احتمال خطای بهینه به‌صورت تئوری و شبیه‌سازی برحسب SNR در بازهٔ $[-10dB, 10dB]$

رابطهٔ تئوری احتمال خطا: در این قسمت با توجه به اینکه از روش دایورسیتی در زمان استفاده می‌کنیم، هر سمبل را به تعداد L بار ارسال می‌کنیم. برای ارسال از مدولاسیون BPSK استفاده می‌کنیم. تصویر۱-۱۶ دیاگرام مربوط به ترکیب کننده را نشان می‌دهد. در این دیاگرام فرض کنید در M بازهٔ زمانی سیگنال پیام وارد کانال می‌شود. (یعنی هر شاخه دیاگرام بیانگر یک بازهٔ زمانی مجزا است.)

باتوجه به اینکه می‌خواهیم احتمال خطای بهینه را برحسب SNR بدست آوریم، از روش Maximal Ratio Combining استفاده می‌کنیم. در این روش به شاخه هایی که SNR بزرگتری دارند، $|a_i|$ بزرگتری داده می‌شود.



تصویر۱-۱۶: دیاگرام ترکیب کننده

خروجی Combiner را با $z(t)$ نشان می‌دهیم.

$$\alpha_i = a_i e^{-j\theta_i}$$

$$z(t) = \left(\sum_{i=1}^{M} r_i a_i\right) x(t) + \sum_{i=1}^{M} a_i e^{-j\theta_i} n_i(t)$$

پس SNR در خروجی به صورت زیر خواهد بود.

$$\gamma_\Sigma = \frac{\left(\sum_{i=1}^{M} r_i a_i\right)^2 E_s}{N_0 \sum_{i=1}^{M} a_i^2}$$

در روش ترکیب MRC، با توجه به اینکه می‌خواهیم SNR خروجی بیشینه شود داریم:

$$\max_{a_i} \gamma_\Sigma \to \frac{\partial \gamma_\Sigma}{\partial a_i} = 0 \to a_i^2 = \frac{r_i^2}{N_0} = \gamma_i$$

$$\to \gamma_\Sigma = \frac{\left(\sum_{i=1}^{M} r_i a_i\right)^2 E_x}{N_0 \sum_{i=1}^{M} a_i^2} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}} \sum_{i=1}^{M} r_i^2\right)^2 E_x}{N_0 \sum_{i=1}^{M} \frac{r_i^2}{N_0}} = \sum_{i=1}^{M} \frac{r_i^2}{N_0} = \sum_{i=1}^{M} \gamma_i$$

که در معادلات ما $r_i = |h_i|$ است.

$$\gamma_i = \frac{r_i^2}{N_0} E_x = \frac{|h_i|^2}{N_0} E_x \to \gamma_\Sigma = \sum_{i=1}^{M} \gamma_i = \sum_{i=1}^{M} \frac{|h_i|^2}{N_0} E_x = \frac{a^2}{N_0} \sum_{i=1}^{M} |h_i|^2$$

$$|h_i|^2 = h_{i_{real}}^2 + h_{i_{imag}}^2$$

$$h_i \sim \mathcal{CN}(0,1) \to h_{i_{real}}, h_{i_{imag}} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

$$H = \sum_{i=1}^{L} |h_i|^2 = \sum_{i=1}^{L} \left(h_{i_{real}}^2 + h_{i_{imag}}^2\right) \to \gamma_\Sigma = \frac{a^2}{N_0} H$$

در نتیجه H دارای توزیع chi-squared با $2L$ درجه آزادی است.

❄❄❄ یادآوری توزیع chi-squared با k درجه آزادی:

$$Z = \sum_{i=1}^{k} z_i^2 \ , var(z_i) = \sigma^2 \to f_Z(z) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) \sigma^k} z^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{z}{2\sigma^2}}$$

که در اینجا پارامترهای توزیع به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$k = 2L, \qquad \overline{h_\iota} = E\{|h_i|^2\} = 2\sigma^2 = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \to 2\sigma^2 = 1$$

$$f_H(h) = \frac{1}{2^L\,\Gamma(L)\sigma^{2L}} h^{L-1} e^{-\frac{h}{2\sigma^2}} = \frac{h^{L-1}e^{-h}}{(L-1)!}$$

در این صورت با توجه به اینکه از مدولاسیون BPSK استفاده می‌شود، احتمال خطا به‌صورت زیر خواهد بود.

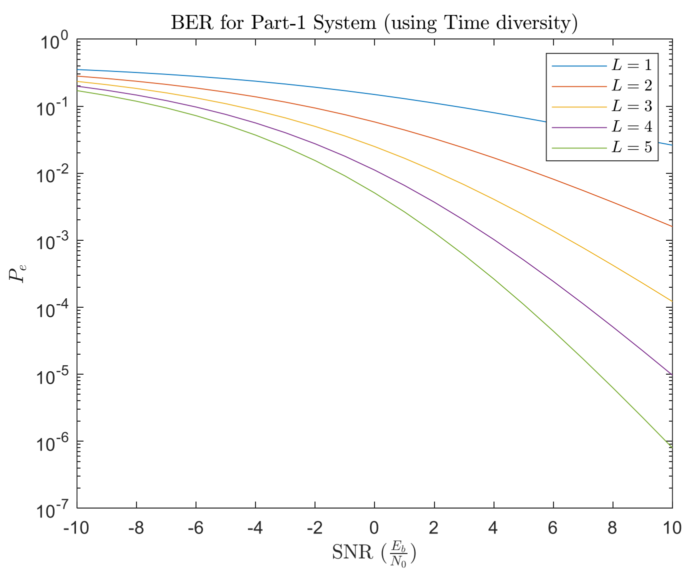
$$P_{e|\gamma} = Q\left(\sqrt{2\gamma_\Sigma}\right) \to P_{e|H} = Q\left(\sqrt{2\frac{a^2}{N_0}H}\right) = Q\left(\sqrt{2SNR.H}\right)$$

در نهایت احتمال خطا به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$P_e = \int_0^\infty P_{e|H}\, f_H(h)dh = \frac{1}{(L-1)!}\int_0^\infty Q\left(\sqrt{2SNR.H}\right) h^{L-1}e^{-h}d\gamma$$

حال با استفاده از رابطهٔ بالا نمودار احتمال خطای بدست آمده با استفاده از روابط ریاضی را مطابق با تصویر ۱-۱۷ رسم می‌کنیم.

همانطور که در این نمودار مشاهده می‌شود، احتمال خطا با افزایش تعداد تکرارهای ارسال (L) کاهش می‌یابد.



تصویر۱-۱۷: نمودار احتمال خطای سیستم در حالتی که از دایورستی در زمان استفاده شود (تئوری)

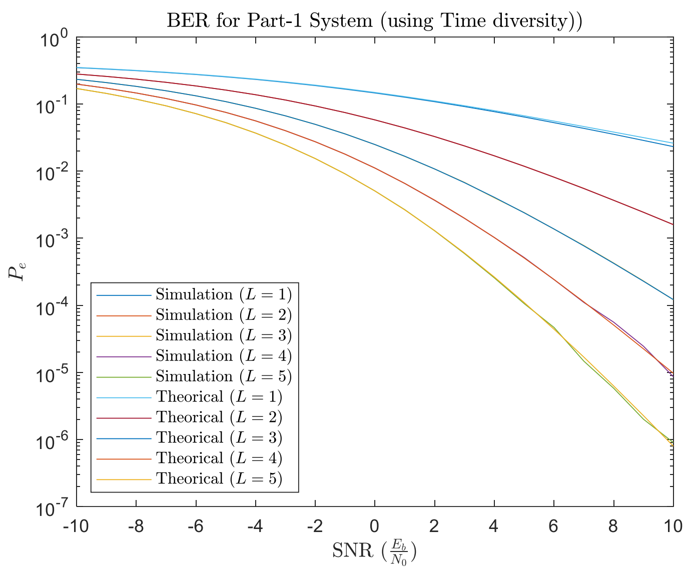
رسم نمودار احتمال خطا با استفاده از شبیه‌سازی: حال می‌خواهیم با استفاده از شبیه‌سازی احتمال خطای سیستم این قسمت را رسم می‌کنیم و نتایج را با نمودار ناشی از روابط تئوری مقایسه کنیم.

روند شبیه‌سازی: در این قسمت برای دایورسیتی در زمان تابعی به نام P5_sim() نوشته شده است. در شبیه‌سازی این بخش ب توجه به اینکه در L بازهٔ زمانی سمبل تکرار می‌شود، L کانال متفاوت و موازی در نظر می‌گیریم و ارسال به سمت گیرنده را از طریق این L کانال انجام می‌دهیم. سپس با استفاده از روش MRC ضرایب $\alpha_i = a_i e^{-j\theta_i}$ را در هر شاخه ضرب می‌کنیم و در نهایت خروجی همه شاخه ها را باهم جمع می‌کنیم. در روابط صفحهٔ پیش ثابت کردیم که $a_i^2 = \frac{r_i^2}{N_0} = \gamma_i$ است و با توجه به اینکه $r_i = h_i$ است می‌توانیم بنویسیم:

$$\alpha_i = a_i e^{-j\theta_i} = \sqrt{\frac{r_i^2}{N_0}} e^{-j\angle h_i}$$

در انتها تصمیم‌گیری را روی خروجی ترکیب کننده انجام می‌دهیم.

همانطور که در تصویر ۱-۱۸ مشاهده می‌شود نمودارهای احتمال خطای هر دو بخش مشابه هم شده است.



تصویر۱-۱۸: نمودار احتمال خطای سیستم در حالتی که از دایورسیتی در زمان استفاده شود (شبیه‌سازی)

سوال ۶. استفاده از دایورسیتی در مکان برای ارسال داده

در این قسمت می‌خواهیم برای ارسال داده ها دایورسیتی در مکان استفاده کنیم. به این منظور فرض می‌کنیم در فرستنده M آنتن و در فرستنده ۱ آنتن داریم. در این صورت سیگنال دریافتی در هر بازهٔ زمانی به‌صورت زیر خواهد بود.

$$y[m] = h_1[m]x_1[m] + h_2[m]x_2[m] + \omega[m]$$

قسمت الف. پیاده سازی سیستم با دایورسیتی در زمان با استفاده از سیستم با دایورسیتی مکان (در گیرنده)

حالتی که M آنتن گیرنده و یک آنتن فرستنده داشته باشیم، با حالتی که از دایورسیتی زمانی استفاده کنیم یکسان خواهد بود. به این معنی که در آنتن‌های گیرنده یک سیگنال که کانال‌های مختلف (که از هم مستقل هستند) روی آن تأثیر مستقل می‌گذارند و این تأثیر مشابه حالتی است که در M بازهٔ زمانی مختلف که کانال از حالت قبلی‌اش مستقل است، سیگنال را ارسال کنیم.

قسمت ب. پیاده سازی سیستم با دایورسیتی در زمان با استفاده از $M = 2$ آنتن در فرستنده

در این قسمت می‌خواهیم برای پیاده‌سازی دایورسیتی در مکان از کدینگ الموتی استفاده کنیم. مطابق با توضیحات داده شده در صورت گزارش، در دو بازهٔ زمانی متوالی دو سمبل u_1 و u_2 را به‌صورت زیر ارسال می‌کنیم.

$$\left[y[m], y[m+1]\right] = [h_1, h_2]\begin{bmatrix} u_1 & -u_2^* \\ u_2 & u_1^* \end{bmatrix} + [\omega_1, \omega_2]$$

که در این رابطه $\omega_1, \omega_2 \sim \mathcal{N}(0, N_0)$ بوده و از هم مستقل هستند. همچنین فرض می‌کنیم در دو بازهٔ زمانی متوالی h_1 و h_2 تغییر نمی‌کند.

*** **طراحی Detector**: در دو بازهٔ زمانی متوالی سیگنال دریافتی به‌صورت زیر می‌باشد.

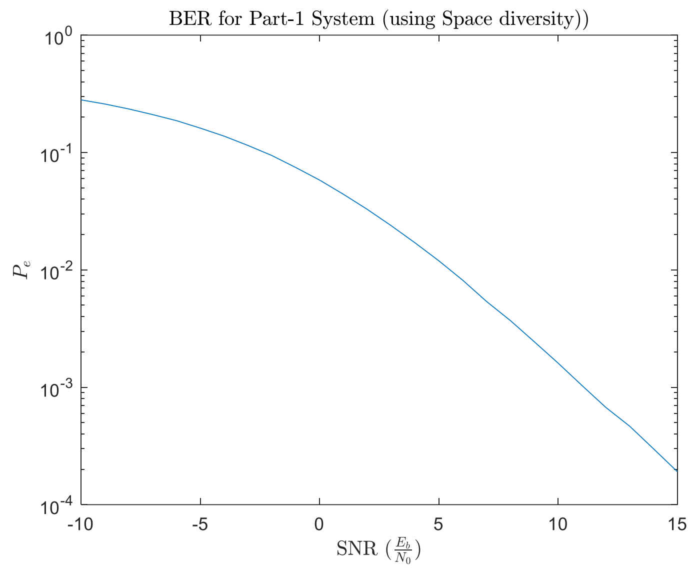
$$y_1 = y[m] = h_1 u_1 + h_2 u_2 + \omega_1$$
$$y_2 = y[m] = -h_1 u_2^* + h_2 u_1^* + \omega_2$$

مطابق با مطالب درس یک Detector باید طراحی کنیم تا با انجام یک عملیات روی سیگنال دریافتی بتوانیم سیگنال ارسالی را بازیابی کنیم. به این منظور متریک های m_1 و m_2 را به صورتی تعریف می‌کنیم که هرکدام فقط وابسته به یکی از سیگنال‌های ارسالی باشد.

$$m_1 = h_1^* y_1 + h_2 y_2^* = (|h_1|^2 + |h_2|^2)u_1 + \underbrace{h_1^*\omega_1 + h_2\omega_2^*}_{\widetilde{\omega}_1}$$
$$m_2 = h_2^* y_1 - h_1 y_2^* = (|h_1|^2 + |h_2|^2)u_2 + \underbrace{h_2^*\omega_1 - h_1\omega_2^*}_{\widetilde{\omega}_2}$$

از m_1 برای تشخیص u_1 و از m_2 برای تشخیص u_2 استفاده می‌کنیم. به این صورت که بخش حقیقی این دو متریک استفاده می‌کنیم و در صورت مثبت یا منفی بودن نتیجه می‌گیریم سمبل ارسالی به‌ترتیب ۱ یا ۰ بوده است.

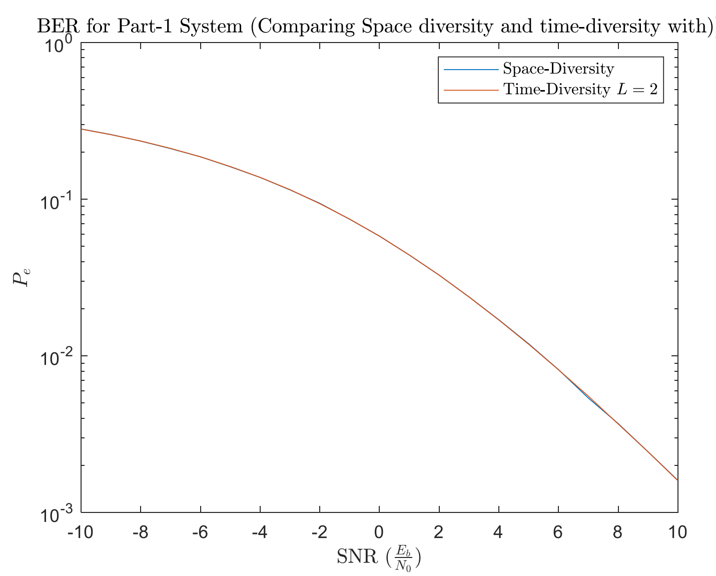
تصویر۱-۱۹ نمودار احتمال خطای سیستم در حالتی که از دایورسیتی در مکان استفاده کنیم، برحسب SNR در بازهٔ $[-10dB, 15dB]$ را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود این احتمال خطا به مراتب از سایر روش ها کمتر بوده و یعنی دایورسیتی در مکان و استفاده از کدینگ الموتی عملکرد بهتری دارد.



تصویر۱-۱۹: نمودار احتمال خطای سیستم در حالتی که از دایورسیتی در مکان استفاده شود (شبیه‌سازی)

قسمت ج. مقایسه دایورسیتی در مکان و زمان

تصویر ۱-۲۰ مقایسه نمودار های احتمال خطا برای دایورسیتی در مکان و زمان (برای $L = 2$) را نشان می‌دهد.



تصویر۱-۲۰: مقایسه نمودار های احتمال خطا برای دایورسیتی در مکان و زمان (برای $L = 2$) (شبیه‌سازی)

همانطور که در نمودار مشاهده می‌شود این دو حالت کاملاً احتمال خطای یکسانی دارند.

مزیت‌های دایورسیتی در مکان نسبت به زمان: علی‌رغم هزینه بر بودن افزایش تعداد فرستنده، در روش دایورسیتی در زمان، نرخ (rate) کانال افت می‌کند و هرچه دقت بالاتری بخواهیم نرخ بیشتر کاهش پیدا می‌کند.

سوال ۲ : کانال فرکانس گزین

در این بخش فرض می‌کنیم کانال ما فرکانس گزین (پهن باند) است. در صورتی که تعداد تپ های کانال را L در نظر بگیریم، سیگنال دریافتی در لحظه kاُم به‌صورت زیر است.

$$y[k]=\sum_{i=0}^{L-1} h_i[k]x[k-i]+\omega[k], \qquad h[k]\sim\mathcal{CN}(0,1), \qquad \omega[k]\sim\mathcal{CN}(0,N_0)$$

همچنین داده های کانال مطابق با جدول ۲-۱ است. (در صورت تمرین طول پیام 10^8 بیت در نظر گرفته می‌شود اما به‌منظور افزایش سرعت شبیه‌سازی طول پیام را کوتاه‌تر (2×10^6 بیت) در نظر می‌گیریم.)

پهنای باند کانال ($\boldsymbol{W}$)	$\mathbf{20MHz}$
زمان همدوسی کانال ($\boldsymbol{T_c}$)	$5ms$
گستردگی تأخیر کانال ($\boldsymbol{T_d}$)	$10\mu s$
طول پیام ($\boldsymbol{N}$)	2×10^6 بیت
تعداد تپ‌های کانال ($\boldsymbol{L}$)	-
تعداد زیر حامل ها ($\boldsymbol{n_c}$)	-
طول پیشوند گردشی ($\boldsymbol{CP}$)	-

جدول ۲-۱: داده‌های کانال فرکانس گزین برای طراحی سیستم *OFDM*

همچنین مدولاسیون استفاده شده برای ارسال بیت های پیام $BPSK$ است. (احتمال ارسال 0 و 1 برابر است.)

سوال ۱. تعداد تپ‌های کانال (L) و طول پیشوند گردشی (CP)

برای محاسبهٔ تعداد تپ‌های کانال باید به این موضوع دقت کنیم که کانال فرکانس گزین است. یعنی داریم $T_d \ll T$. در نتیجه تعداد تپ‌ها را با توجه به نرخ نایکوئیست می‌توانیم به صورت زیر انتخاب کنیم.

$$T_s=\frac{T}{L}, \qquad nyquist\ rate: W=\frac{1}{T_s}\rightarrow W=\frac{L}{T}$$

$$T\approx T_d\rightarrow L=W\times T_d=20MHz\times10\mu s=200$$

برای محاسبهٔ طول پیشوند گردشی باید به این نکته دقت کنیم که می‌خواهیم پیشوندی به هر بلاک *OFDM* اضافه کنیم که با استفاده از آن بتوانیم کانولوشن خطی را به کانولوشن گردشی تبدیل کنیم. در نتیجه طول پیشوند گردشی باید از تعداد تپ های کانال بزرگتر باشد؛ به همین منظور طول پیشوند گردشی به‌صورت زیر تعیین می‌شود.

$$CP\geq L-1\rightarrow CP=200$$

سوال ۲. تعداد زیرحامل‌های (n_c) هر بلاک *OFDM*

برای محاسبهٔ تعداد زیرحامل‌های هر بلاک *OFDM* باید به دو نکته دقت کنیم.

۱- تعداد زیر حامل‌های هر بلاک باید طوری تعیین شود که نرخ ارسال پایین نیاید. به همین منظور با استفاده از طول پیشوند گردشی یک حد پایین برای n_c به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$n_c \geq 8 \times CP = 1600$$

۲- باید دقت شود که کانال در طول ارسال هر بلوک، کانال باید ثابت بماند. بنابراین اگر n_c از یک حد بزرگتر در نظر گرفته شود، ممکن است کانال در طول ارسال بلوک تغییر پذیر باشد. همانطور که می‌دانیم کانال به طور میانگین پس از گذشت T_c تغییر کرده و نسبت به حالت قبلی‌اش مستقل می‌شود. بنابراین یک حد پایین برای تعداد زیر حامل‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$n_c \leq W \times T_c = 20MHz \times 5ms = 10^5$$

در نتیجه $1600 < n_c \leq 10^5$ می‌باشد و ما مقدار $n_c = 10^4$ را برای تعداد زیرحامل‌ها اتخاذ می‌کنیم.

سوال ۳. تعداد بلاک‌های *OFDM* برای ارسال کل پیام

برای محاسبهٔ تعداد بلاک‌های *OFDM* باید تعداد کل بیت های ارسالی را به طول هر بلاک تقسیم کنیم. در نتیجه داریم.

$$number\ of\ OFDM\ blocks = \frac{2 \times 10^6}{10^4} = 200$$

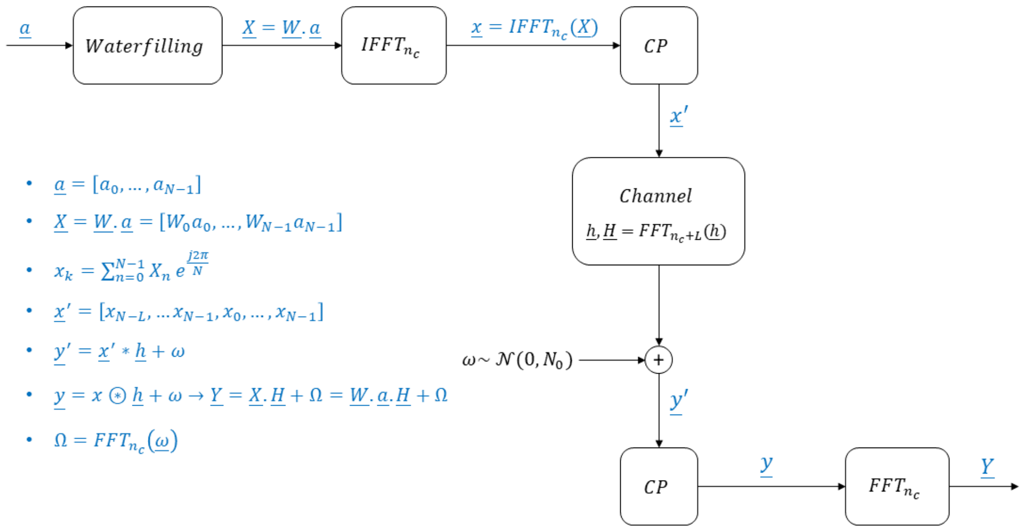
در نهایت جدول ۲-۲ مشخصات سیستم *OFDM* طراحی شده را نشان می‌دهد.

سوال ۴. بلاک دیاگرام سیستم در فرستنده و گیرنده

تصویر ۲-۱ بلوک دیاگرام فرستنده و گیرندهٔ سیستم را نشان می‌دهد.

پهنای باند کانال (W)	$20MHz$
زمان همدوسی کانال (T_c)	$5ms$
گستردگی تأخیر کانال (T_d)	$10\mu s$
طول پیام (N)	2×10^6 بیت
تعداد تپ‌های کانال (L)	200 بیت
تعداد زیر حامل ها (n_c)	10^4 بیت
طول پیشوند گردشی (CP)	200 بیت
تعداد بلوک‌های **OFDM**	200 بلوک

جدول ۲-۲: داده‌های کانال فرکانس گزین سیستم طراحی‌شده *OFDM*



تصویر ۲-۱: بلوک دیاگرام سیستم در فرستنده و گیرنده

مقادیر W در بلوک دیاگرام، همان مقادیر $\sqrt{P_i^*}$ را نشان می‌دهد که به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$x^+ = \max(x, 0)$$

$$P_i^* = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{N_0}{|H_i|^2}\right)^+ \rightarrow W_i = \sqrt{P_i^*}$$

$$P_{max} = \sum_{i=0}^{n_c-1} P_i^*$$

هدف این است که ظرفیت کانال باید بیشینه شود. پس مقادیر λ با حل مسئله بهینه سازی زیر بدست می‌آید.

$$C = \sum_{i=0}^{n_c-1} \log_2\left(1 + \frac{P_i|H_i|^2}{N_0}\right)$$

$$\hat{\lambda} = \max_{\lambda}(C) = \max_{\lambda}\left(\sum_{i=0}^{n_c-1} \log_2\left(1 + \frac{P_i|H_i|^2}{N_0}\right)\right) = \max_{\lambda}\left(\sum_{i=0}^{n_c-1} \log_2\left(1 + \left(\frac{|H_i|^2}{\lambda N_0} - 1\right)^+\right)\right)$$

$$\rightarrow \hat{\lambda} = \max_{\lambda}\left(\sum_{i=0}^{n_c-1} \log_2\left(1 + \left(\frac{|H_i|^2}{\lambda N_0} - 1\right)^+\right)\right), \qquad subject\ to\ P_{max} = \sum_{i=0}^{n_c-1} P_i^*$$

سوال ۵. شبیه‌سازی سیستم سوال ۴ و رسم نمودارهای احتمال خطا و ظرفیت کانال برحسب $SNR = \frac{P_{max}}{n_c N_0}$

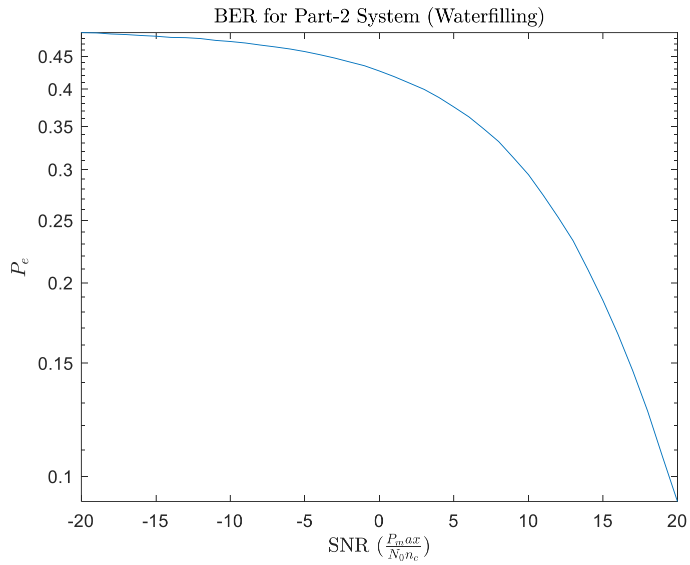
حال می‌خواهیم در مرحله اول با حل مسئله بهینه‌سازی و یافتن مقادیر λ (زیرا کانال بعد از هر $T_c = 5ms$ تغییر می‌کند) ضرایب Waterfilling را بدست آورده و سیستم OFDM را پیاده‌سازی نمائیم. به این منظور مسئله بهینه سازی که در سوال قبل به آن اشاره شد را با استفاده از دستور fmincon حل کرده و مقادیر λ بهینه را بدست می‌آوریم. این دستور برای حل مسائل بهینه سازی با قید های خطی یا دلخواه غیرخطی استفاده می‌شود. برای تعریف قید غیرخطی دلخواه یک تابع در متلب تعریف می‌کنیم و آن را به‌عنوان یکی از آرگومان‌های ورودی به دستور fmincon می‌دهیم. (دقت شود با توجه به اینکه مسئله بهینه‌سازی یک مسئله maximization است اما دستور fmincon مسائل minimization را حل می‌کند، تابع هدفی که قرار است بیشینه شود را قرینه می‌کنیم.) مجدداً تابع هدفی که قرار است کمینه کنیم را به‌همراه قید با ادبیات زیر می‌نویسیم.

$$C = \sum_{i=0}^{n_c-1} \log_2\left(1 + \frac{P_i|H_i|^2}{N_0}\right) = \sum_{i=0}^{n_c-1} \log_2\left(1 + \left(\frac{|H_i|^2}{\lambda N_0} - 1\right)^+\right)$$

$$\hat{\lambda} = \max_{\lambda} C = \min_{\lambda} -C\,, \qquad subject\ to\ P_{max} = \sum_{i=0}^{n_c-1} P_i^*$$

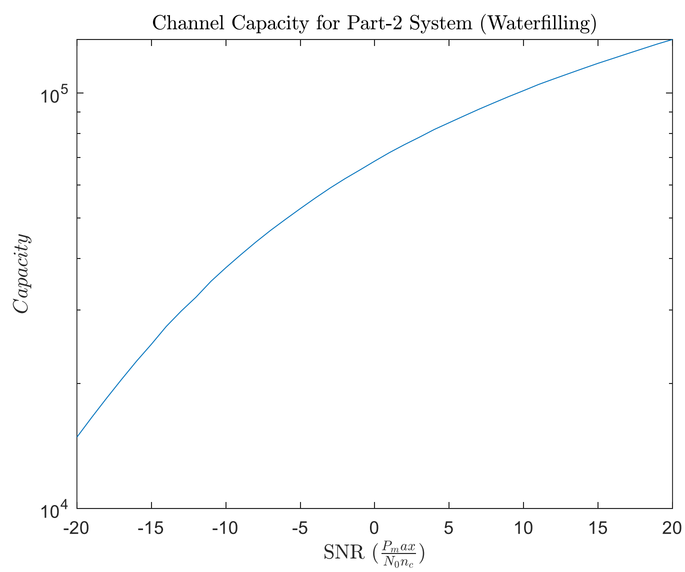
درنهایت پس از حل مسئله بهینه‌سازی و بدست آمدن λ های بهینه و محاسبهٔ P_i^* ها، ضرایب $W_i = \sqrt{P_i^*}$ را بدست آورده و سپس سیستم ارسالی فرستنده را پیاده‌سازی می‌کنیم ($X_i = W_i.A_i$). برای پیاده‌سازی سیستم ارسالی فرستنده نیاز به بلوک‌های $IFFT_{n_c}$ و افزودن CP داریم. سپس بلوک ارسالی در گیرنده با توجه به تأثیر کانال (مطابق با تصویر ۲-۱) به صورت $y' = x' * h$ تعریف می‌شود که در نهایت بعد از بلوک حذف CP خروجی به صورت $y = x \circledast h$ می‌شود که بعد از FFT_{n_c} ($H = FFT_{n_c}(h)$) در نهایت روی $Y = X.H$ تصمیم گیری را انجام می‌دهیم. (دقت شود به توضیحات بالا باید نویز هم اضافه شود.)

در نهایت نمودار احتمال خطای سیستم برحسب $SNR = \frac{P_{max}}{N_0 n_c}$ در حالتی که از $Waterfilling$ استفاده می‌کنیم مطابق با تصویر ۲-۲ خواهد بود.



تصویر۲-۲: نمودار احتمال خطا برحسب $SNR = \frac{P_{max}}{N_0 n_c}$ – در حالتی که از بلوک *Waterfilling* استفاده کنیم

همچنین نمودار ظرفیت کانال سیستم برحسب $SNR = \frac{P_{max}}{N_0 n_c}$ در حالتی که از $Waterfilling$ استفاده می‌کنیم مطابق با تصویر ۲-۳ خواهد بود.



تصویر۲-۳: نمودار ظرفیت کانال سیستم برحسب $SNR = \frac{P_{max}}{N_0 n_c}$ – در حالتی که از بلوک Waterfilling استفاده کنیم

حال می‌خواهیم با روش دیگری این قسمت را پیاده‌سازی کنیم. به این خاطر مسئله بازنویسی می‌کنیم.

$$P_i^* = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{N_0}{|H_i|^2}\right)^+ = max\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{N_0}{|H_i|^2}, 0\right)$$

$$P_{max} = \sum_{i=0}^{n_c-1} P_i^* = \sum_{i=0}^{n_c-1} max\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{N_0}{|H_i|^2}, 0\right)$$

حال تابع هدف را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

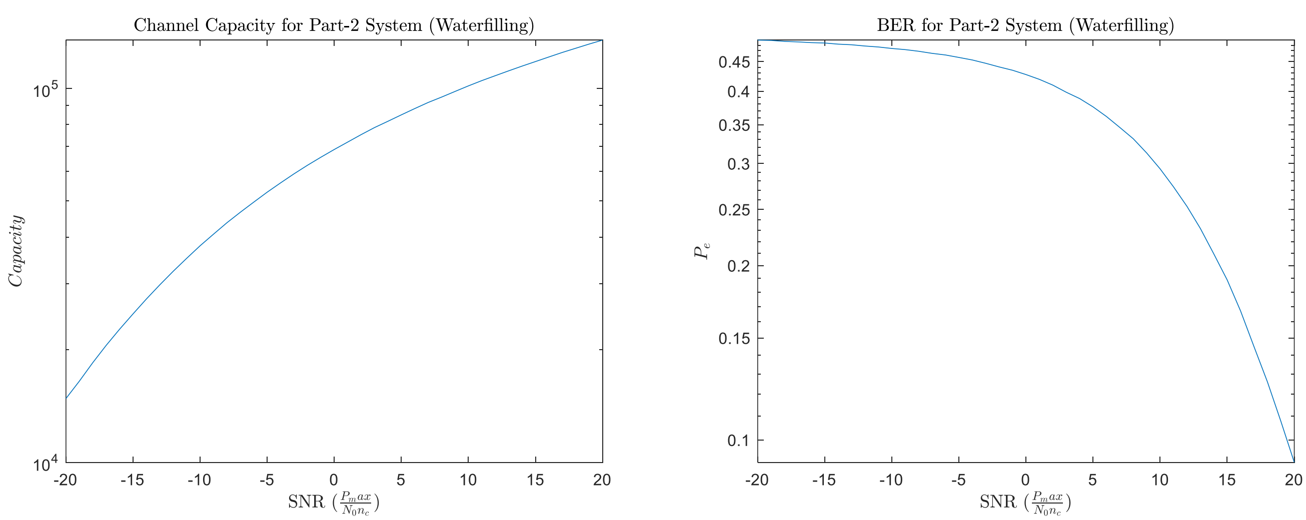
$$f(\lambda) = P_{max} - \sum_{i=0}^{n_c-1} max\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{N_0}{|H_i|^2}, 0\right)$$
$$= P_{max} - max\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{N_0}{|H_0|^2}, 0\right) - max\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{N_0}{|H_1|^2}, 0\right) - \cdots$$
$$- max\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{N_0}{\left|H_{n_c-1}\right|^2}, 0\right)$$

حال می‌خواهیم این تابع هدف را کمینه کنیم پس مسئله بهینه‌سازی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\hat{\lambda} = \min_{\lambda} f(\lambda) = \min_{\lambda}\left(P_{max} - \sum_{i=0}^{n_c-1} max\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{N_0}{|H_i|^2}, 0\right)\right)$$

با توجه به اینکه قید ما $P_{max} = \sum_{i=0}^{n_c-1} P_i^*$ است پس نتیجه می‌گیریم، λ بهینه همان ریشه های تابع $f(\lambda)$ است.

در نهایت با استفاده از دستور fzero می‌خواهیم λ های بهینه (ریشه های $f(\lambda)$) را بدست آوریم. تصاویر ۲-۴ نمودارهای احتمال خطا و ظرفیت کانال را برای این روش پیاده‌سازی نیز نشان می‌دهد.

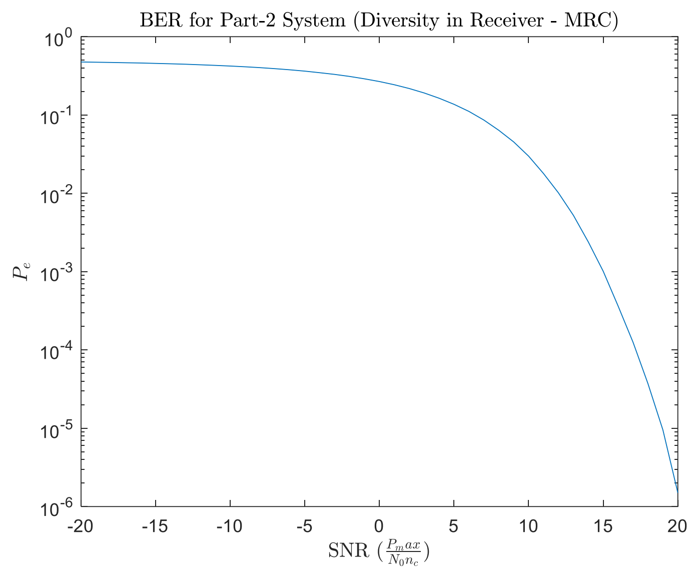


تصویر ۲-۴: نمودارهای احتمال خطا ظرفیت کانال سیستم برحسب $SNR = \frac{P_{max}}{N_0 n_c}$ – در حالتی که از بلوک Waterfilling استفاده کنیم – با استفاده از fzero

سوال ۶. استفاده از روش دایورسیتی در مکان در گیرنده برای جبران محوشدگی در گیرنده

در این سوال می‌خواهیم با استفاده از ۱۰ آنتن در گیرنده، اثر محوشدگی کانال را جبران کنیم. به این منظور فرستنده سیستم جدید مشابه با فرستنده سیستم سوال قبل است با این تفاوت که بلوک Waterfilling نداریم. در نهایت پس از ارسال بلوک

OFDM، هر آنتن گیرنده از طریق یک کانال مستقل این بلوک را دریافت می‌کند و در هر آنتن بلوک دریافتی با یک نویز مستقل جمع می‌شود. حال می‌خواهیم از روش MRC در سیستم گیرنده استفاده کنیم. به این منظور ضرایب دایورسیتی (مشابه با دیاگرام تصویر ۱-۱۶) را $\alpha_i = \frac{|H_i|^2}{N_0 nc} e^{-j\angle H_i}$ در نظر می‌گیریم. در نهایت همه خروجی‌های ۱۰ آنتن را ترکیب (جمع) می‌کنیم و تصمیم‌گیری را روی خروجی ترکیب کننده انجام می‌دهیم.



تصویر۲-۴: نمودار احتمال خطای سیستم برحسب $SNR = \frac{P_{max}}{N_0 n_c}$ – در حالتی که از دایورسیتی در مکان استفاده کنیم

تصویر ۲-۴ نمودار احتمال خطای سیستم را برای حالتی که از دایورسیتی در مکان استفاده می‌کنیم نشان می‌دهد.

همانطور که مشاهده می‌شود با استفاده از این روش با توجه به اینکه اثر محوشدگی در ۱۰ کانال مستقل است، احتمال خطای کمتری نسبت به حالتی داریم که از روش Waterfilling استفاده می‌شود.

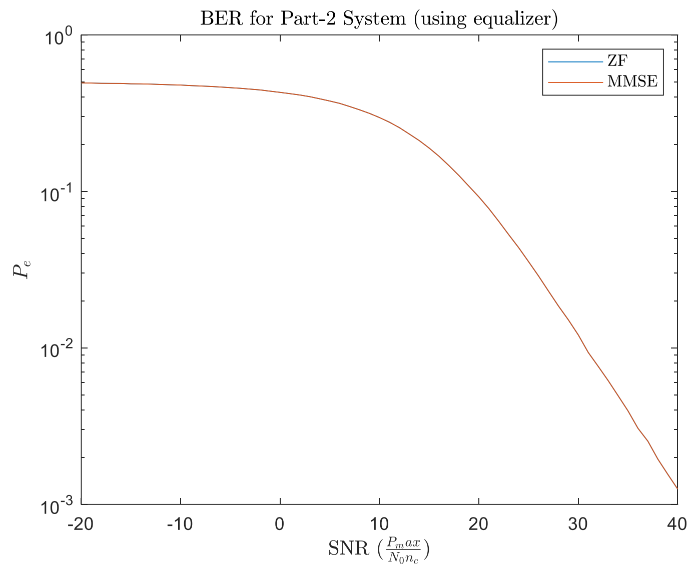
سوال ۷. استفاده از همسانسازهای ZF و MMSE در گیرنده برای جبران محوشدگی در گیرنده

در این بخش سیستم فرستنده مشابه با سیستم فرستنده سوال ۶ است. با این تفاوت که در اینجا فقط یک گیرنده داریم و پس از دریافت بلوک ارسالی در گیرنده با فرض اینکه کانال را در گیرنده تخمین زده‌ایم همسانساز را طراحی کرده و روی خروجی سیستم گیرنده پیاده‌سازی می‌کنیم. برای طراحی همسانساز ZF صرفاً خروجی را در $\frac{1}{H}$ ضرب می‌کنیم. برای طراحی همسانساز MMSE صرفاً خروجی را در $\frac{H^*}{|H|^2+\frac{\sigma_n^2}{\sigma_s^2}}$ ضرب می‌کنیم.

$$\boldsymbol{ZF\ equalizer}:\ W_i = \frac{1}{H_i}$$

$$\boldsymbol{MMSE\ equalizer}:\ W_i = \frac{H^*}{|H|^2 + \frac{\sigma_n^2}{\sigma_s^2}}$$

در نهایت تصویر ۲-۵ نمودار احتمال خطای سیستم برای همسانساز ZF و MMSE را نشان می‌دهد.

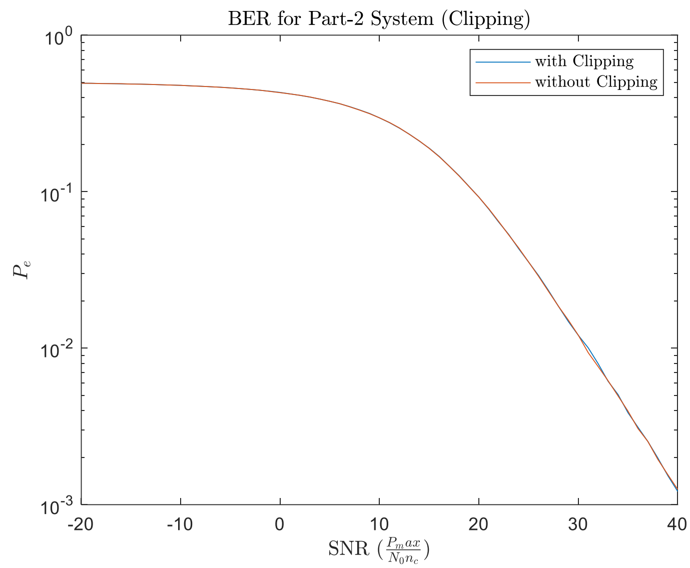


تصویر۲-۵: نمودار احتمال خطای سیستم برحسب $SNR = \frac{P_{max}}{N_0 n_c}$ – در حالتی که از همسانساز استفاده کنیم

همانطور که در این نمودار مشاهده می‌شود همسانساز های ZF و MMSE نتایج مشابهی دارند. همچنان انتظار داریم نتایج این همسانسازها با نتایج استفاده از Watrefilling یکسان باشد.

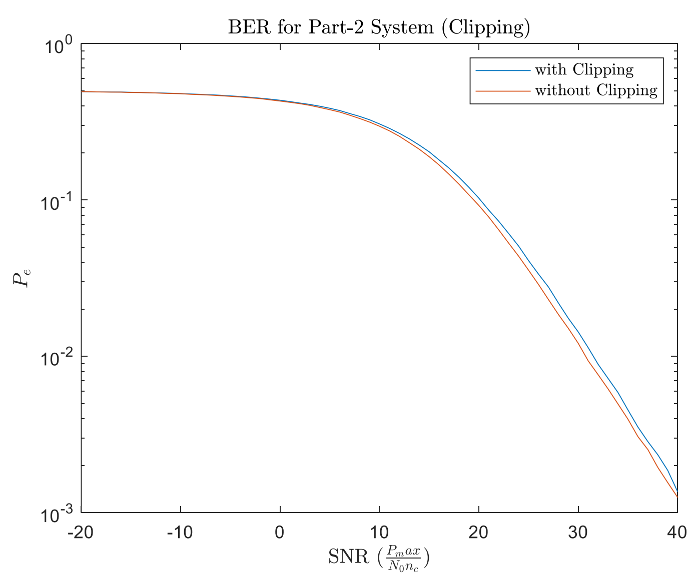
سوال ۸. تأثیر اثر *Clipping* در نمودار احتمال خطا

همانطور که می‌دانیم به علت غیرخطی بودن تقویت کننده موجود در فرستنده و همچنین زیاد شدن دامنه به دلیل استفاده از IFFT، در دامنه‌های خیلی بزرگ بلوک ارسالی دچار Clipping می‌شود. به این منظور در پیاده سازی‌ها فاز همه سمبل ها را ثابت نگه می‌داریم و اندازه سمبل‌های بزرگ‌تر از $0.8 \max|X_k|$ را برابر $0.8 \max|X_k|$ قرار می‌دهیم. همچنین در خروجی گیرنده از همسانساز MMSE برای حذف اثر محوشدگی استفاده می‌کنیم. تصویر ۲-۶ نمودار احتمال‌خطا سیستم در حالتی که اثر Clipping در فرستنده داریم را نشان می‌دهد.



تصویر۲-۶: نمودار احتمال خطای سیستم برحسب $SNR = \frac{P_{max}}{N_0 n_c}$ – در حالتی که در فرستنده اثر Clipping استفاده کنیم (برای $0.8\max|X_k|$)

همچنین تصویر ۲-۷ نمودار احتمال‌خطا سیستم در حالتی که اثر Clipping برای $0.5\max|X_k|$ در فرستنده داریم را نشان می‌دهد. همانطور که در این تصویر مشاهده می‌شود احتمال خطا در حالتی که اثر Clipping در $0.5\max|X_k|$ بیشتر شده است. دلیل این امر این است که بلوک ارسالی تغییر کرده است و مشخص نیست چه تغییری در سمبل‌های دریافتی ایجاد شود. در نتیجه در گیرنده شاهد خطا خواهیم بود.

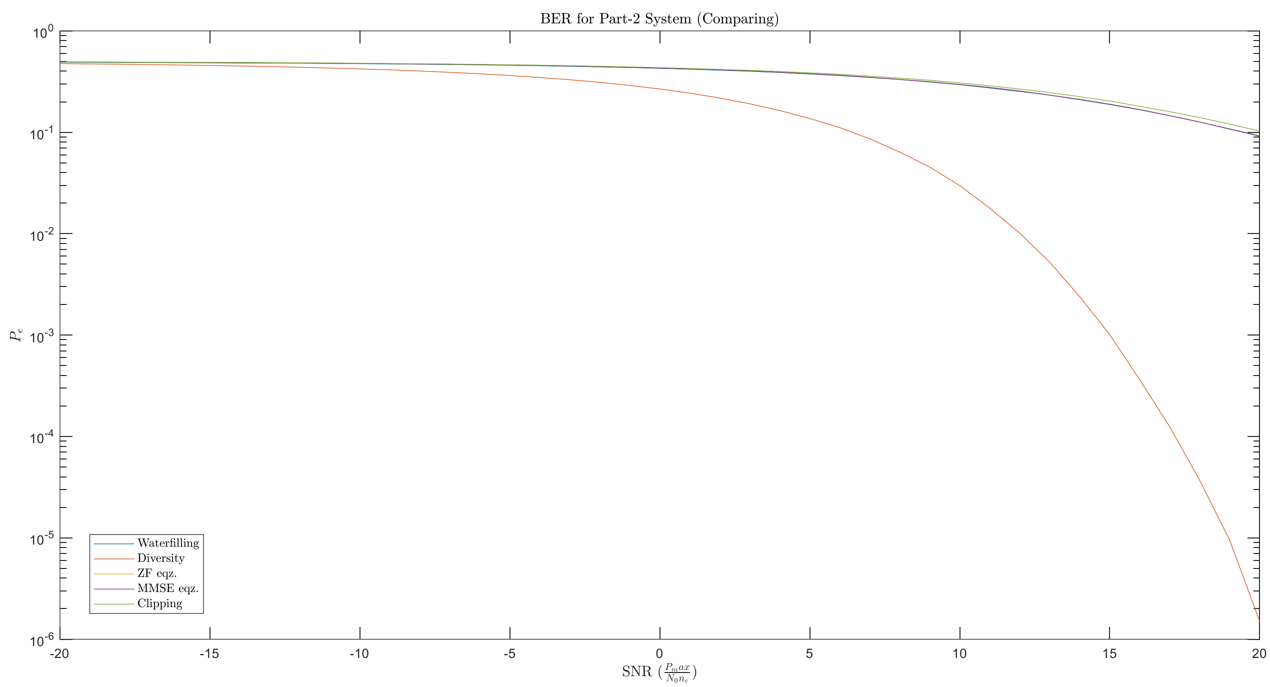


تصویر۲-۷: نمودار احتمال خطای سیستم برحسب $SNR = \frac{P_{max}}{N_0 n_c}$ – در حالتی که در فرستنده اثر Clipping استفاده کنیم (برای $0.5\max|X_k|$)

در نهایت تصویر ۲-۸ نمودار احتمال خطا برای سوالات ۵ تا ۸ را در یک تصویر نشان می‌دهد. می‌توانیم برداشت های زیر را از این بخش داشته باشیم:

۱- نمودارهای احتمال خطا هنگامی که از MMSE، ZF یا Waterfilling استفاده می‌کنیم کاملاً یکسان است (چون در هر دو صورت اثر کانال حذف می‌شود).

۲- هنگامی که اثر Clipping داریم احتمال خطا افزایش پیدا می‌کند.



تصویر ۲-۸: مقایسه نمودار احتمال خطای سیستم‌های سوالات ۵ تا ۸ برحسب $SNR = \frac{P_{max}}{N_0 n_c}$

۳- هنگامی که از دایورسیتی در مکان استفاده کنیم، احتمال خطا به‌شدت کاهش می‌یابد. دلیل این امر این است که وقتی از چند آنتن گیرنده استفاده کنیم علاوه بر حذف شدن اثر محوشدگی، اثر نویز نیز کاهش پیدا می‌کند و در نهایت احتمال خطای کل کاهش می‌یابد.