به نام خدا

مباحث ویژه در مخابرات – جداسازی کور منابع (دکتر اخوان)

تمرین سری **سوم**

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱–۱۴۰۰

عرفان پنـــاهی ۸۱۰۱۹۸۳۶۹

***** فایل متلب مربوط به این تمرین با عنوان panahi.m پیوست شده است.**

ابتدا مطابق با خواسته تمرین، منابع s_1 و s_2 را (با طول $T = 1000$) در محیط متلب (با استفاده از دستور *unifrnd*) تعریف می‌کنیم:

$$s_1 \sim U[-3 \quad 3] \qquad , \qquad s_2 \sim U[-2 \quad 2]$$

سپس میانگین این دو منبع را صفر میکنیم. برای این کار میانگین هر منبع را از آن کم میکنیم. تصویر ۱ میانگین منابع جدید را نشان میدهد.

```
E(s1) = 0.000000
E(s2) = -0.000000
```

تصویر ۱ – میانگین منابع s_1 و s_2

حال ماتریس مخلوط کننده A را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

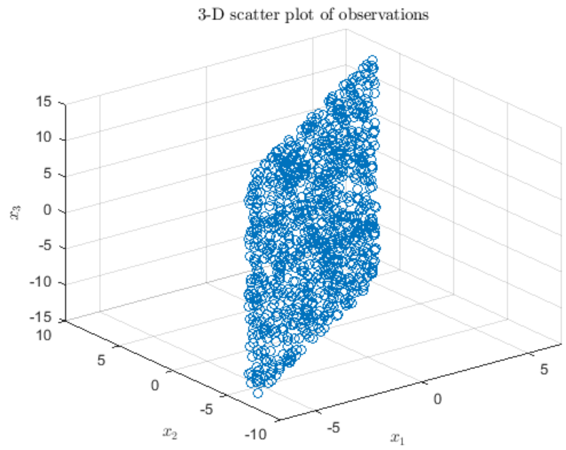
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

در نهایت منابع s_1 و s_2 را بصورت آنی و خطی توسط ماتریس مخلوط کننده A ترکیب کرده و مشاهدات x_1، x_2 و x_3 تولید می‌کنیم.

$$X = AS \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = s_1 - 2s_2 \\ x_2 = 2s_1 - s_2 \\ x_3 = 3s_1 - 2s_2 \end{cases}$$

الف – با استفاده از دستور *scatter3* ، نمودار پراکندگی مشاهدات در فضای سه بعدی رسم میکنیم. تصویر ۲ این نمودار را نشان میدهد. همانطور که در تصویر مشاهده میشود، مشاهدات تقریباً روی یک صفحه دو بعدی پخش شده اند. با توجه به اینکه مشاهدات ناشی از ۲ منبع هستند و درحقیقت یک ترکیب خطی از هر دو منبع هستند، انتظار میرفت که مشاهدات روی دو بعد پخش شوند.

در مرحله بعد ماتریس $R_x = XX^T$ را بدست می‌آوریم. سپس این ماتریس را به دستور *eig* داده و ماتریس بردار های ویژه U و ماتریس قطری مقادیر ویژه D را بعنوان خروجی می‌گیریم. تصویر ۳ ماتریس های U و D را نشان میدهد.



تصویر ۲ – نمودار پراکندگی سه بعدی مشاهدات

```
D =

   1.0e+04 *

   -0.0000         0         0
         0    0.1898         0
         0         0    5.4209
```

```
U =

    0.1961    0.9104    0.3643
    0.7845   -0.3685    0.4988
   -0.5883   -0.1879    0.7865
```

تصویر ۳ – ماتریس بردار های ویژه $\boldsymbol{U}$ و ماتریس قطری مقادیر ویژه $\boldsymbol{D}$

ب – در این قسمت ابتدا، بردار ویژه ها (ستون های ماتریس $\boldsymbol{U}$) را متناظر با مقادیر ویژه از بزرگ به کوچک ، بصورت $\boldsymbol{u_1}$، $\boldsymbol{u_2}$ و $\boldsymbol{u_3}$ در نظر می‌گیریم. حال گزاره های داده شده را تحلیل میکنیم:

۱. یکی از مقادیر ویژه صفر شده است (متناظر با $\boldsymbol{u_3}$). این اتفاق یعنی داده ها در جهت $\boldsymbol{u_3}$ تصویری ندارند یا به عبارت دیگر پراکندگی ندارند. معادل ریاضی این گزاره یعنی $\boldsymbol{u_3^T X = 0}$.

همانطور که در نمودار پراکندگی در قسمت الف نیز دیده شده، مشاهدات در دو راستای عمود بر هم پخش شده اند و تقریباً روی یک صفحه (دو بعد) قرار گرفته اند. مقدار ویژه متناظر با $\boldsymbol{u_3}$ نیز صفر شده است. همچنین برای بررسی درستی این عبارت میتوانیم واریانس تصویر مشاهدات در جهت $\boldsymbol{u_3}$ را بدست آوریم تا متوجه میزان پراکندگی شویم. همانطور که در تصویر ۴ مشاهده می‌شود، این واریانس تقریباً مقدار صفر دارد و یعنی داده ها در جهت $\boldsymbol{u_3}$ پراکندگی ندارند. (به طور شهودی اگر از بالا به نمودار پراکندگی نگاه کنیم، مشاهدات تقریباً روی یک نقطه جمع شده و پراکندگی ندارند.)

```
var_u3X =

   1.1703e-30
```

تصویر ۴ – واریانس تصویر داده ها در جهت $\boldsymbol{u_3}$

۲. $\boldsymbol{u_3}$ بر ستون های ماتریس $\boldsymbol{A}$ عمود است. زیرا این ستون ها هستند که داده ها را تولید کرده اند و در واقع داده ها در فضای این ستون ها هستند. معادل ریاضی این گزاره یعنی $\boldsymbol{u_3^T A = 0}$.

در حقیقت با توجه به مسئله *BSS* میدانیم هر ستون ماتریس مخلوط کننده اثر یک منبع روی مشاهدات را نشان میدهد و در نتیجه مشاهدات در فضای این ستون ها هستند. اینجا دو منبع داریم و نیاز به دو ستون و یک فضای دو بعدی برای اثرگذاری روی مشاهدات داریم. در نتیجه بعد سومی وجود ندارد و مشاهدات تماماً روی یک صفحه دو بعدی پخش شده اند و در نتیجه میتوان گفت $\boldsymbol{u_3}$ بر ستون های ماتریس $\boldsymbol{A}$ یعنی $\boldsymbol{a_1}$ و $\boldsymbol{a_2}$ عمود است. در محیط متلب نیز این تعامد را با استفاده از محاسبه $\boldsymbol{u_3^T A}$ بدست می‌اوریم. همانطور که درتصویر ۵ مشاهده میشود، میتوان گفت $\boldsymbol{u_3^T A = 0}$.

```
u3TA =

   1.0e-15 *

  -0.4441    0.4441
```

تصویر ۵ – بررسی تعامد $\boldsymbol{u_3}$ بر ستون های ماتریس $\boldsymbol{A}$ ($\boldsymbol{a_1}$ و $\boldsymbol{a_2}$)

۳. $\boldsymbol{u_1}$ و $\boldsymbol{u_2}$ در همان فضای ستون های ماتریس $\boldsymbol{A}$ یعنی $\boldsymbol{a_1}$ و $\boldsymbol{a_2}$ قرار دارند. معادل ریاضی این گزاره یعنی:

$$\boldsymbol{A = [u_1 \quad u_2] C_{2\times2}}$$

همانطور که در مورد قبل اشاره شد، بخاطر اینکه ماتریس $\boldsymbol{A}$ دو ستون دارد (به عبارت دیگر وجود ۲ منبع) ، داده ها تماماً روی یک صفحه پخش شده است و این صفحه دو بعدی همان فضای ستون های ماتریس $\boldsymbol{A}$ است. برای اثبات ریاضی این موضوع میخواهیم یک $\boldsymbol{C_{2\times2}}$ پیدا کنیم تا رابطه خطی ماتریس های $[\boldsymbol{u_1} \quad \boldsymbol{u_2}]$ و $\boldsymbol{A}$ را نشان دهد. برای این کار میتوانیم از اپراتور "\" در محیط متلب استفاده کنیم. در این صورت ماتریس $\boldsymbol{C_{2\times2}}$ مطابق با تصویر ۶ خواهد بود.

```
C =

    3.7212   -2.8002
   -0.3905   -1.0764
```

تصویر ۶ – محاسبه ماتریس $\boldsymbol{C_{2\times2}}$

ج – ابتدا ماتریس های $\boldsymbol{U}$ و $\boldsymbol{D}$ جدید را با حذف بعد مربوط به $\boldsymbol{u_3}$ به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{u_1} \quad \boldsymbol{u_2}] \quad , \quad \boldsymbol{D} = [d_1 \quad d_2]\boldsymbol{I}$$

مطابق با آموخته های درس برای سفید سازی ، نیاز است داده ها را *uncorrelated* کنیم و همچنین واریانس آنها را برابر ۱ کنیم. به عبارت دیگر اگر بخواهیم مشاهدات را به فضای $\boldsymbol{Z}$ منتقل کنیم، باید $\boldsymbol{R_z} = \boldsymbol{I}$ باشد تا این دو خواسته در سفید سازی ارضا شود. به این منظور باید ماتریس $\boldsymbol{B}$ را بصورتی بدست آوریم تا داده ها در فضای جدید سفید شده باشند.

$$\boldsymbol{Z_{2\times T}} = \boldsymbol{B_{2\times 3}X_{2\times T}} \rightarrow \boldsymbol{R_z} = \boldsymbol{ZZ^T} = (\boldsymbol{BX})(\boldsymbol{BX})^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{BXX^TB^T} = \boldsymbol{BR_xB^T} = \boldsymbol{BUDU^TB^T} = \boldsymbol{I}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{BU} = \boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{U^TB^T} = \boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{U^T} \\ \boldsymbol{B^T} = \boldsymbol{UD}^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \rightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{U^T}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{U^T} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} [\boldsymbol{u_1} \quad \boldsymbol{u_2}]^{\boldsymbol{T}} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{u_1^T} \\ \boldsymbol{u_2^T} \end{bmatrix}$$

با انجام محاسبات بالا در محیط متلب، ماتریس $\boldsymbol{B_{2\times 3}}$ به صورت تصویر ۷ در می‌آید.

```
B =

    0.0016    0.0022    0.0035
    0.0204   -0.0081   -0.0040
```

تصویر ۷ – محاسبه ماتریس $\boldsymbol{B_{2\times 3}}$

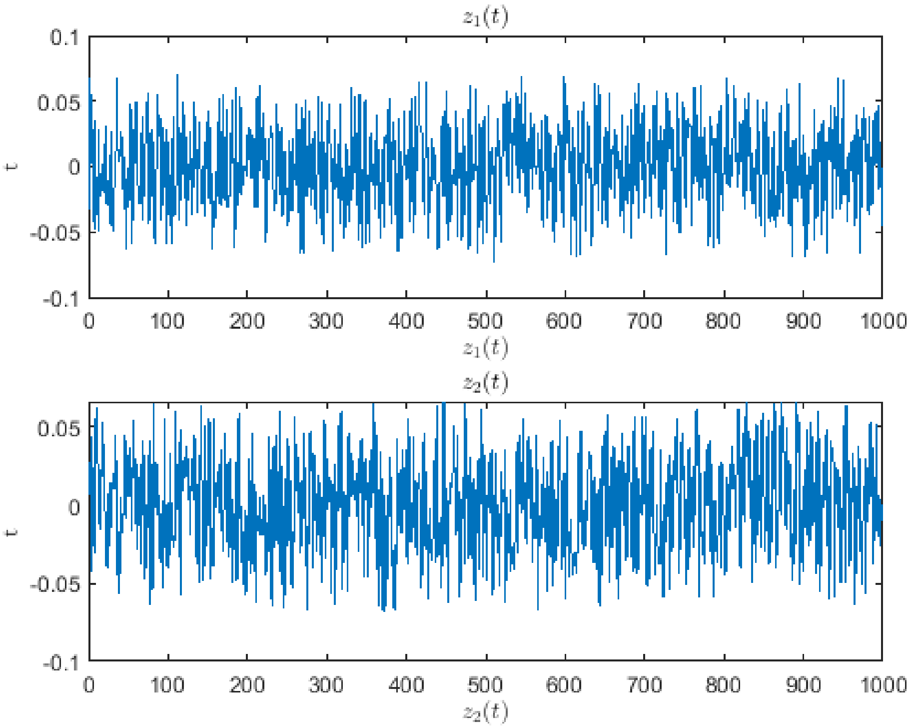
برای اینکه از ماتریس بدست آمده اطمینان حاصل نمائیم ، $\boldsymbol{R_z} = \boldsymbol{ZZ^T}$ را بدست می آوریم. همانطور که در تصویر ۸ مشاهده میشود رابطه $\boldsymbol{R_z} = \boldsymbol{I}$ برقرار بوده در نتیجه سفید سازی به درستی صورت گرفته است.

```
Rz =

    1.0000    0.0000
    0.0000    1.0000
```

تصویر ۷ – محاسبه ماتریس $\boldsymbol{R_z}$

در نهایت سطر های ماتریس Z بدست آمده (یعنی $\boldsymbol{z_1}(t)$ و $\boldsymbol{z_2}(t)$) را در حوزهٔ زمان رسم می‌کنیم (تصویر ۸). همانطور که مشاهده می‌شود دامنه این دو نسبت به مشاهدات در حالت اولیه کاهش یافته است.



تصویر ۸ – حوزه زمانی $z_1(t)$ و $z_2(t)$

د – رنک ماتریس X : رتبه یک ماتریس به معنای تعداد سطر ها یا ستون هایی از ماتریس است که از هم استقلال خطی دارند (اینجا سطر های X مدنظر است.). از طرف دیگر میتوان با استفاده از تعداد مقادیر ویژه غیر صفر نیز رنک ماتریس را بدست آورد. در حقیقت تعداد مقادیر ویژه غیر صفر نشان میدهد مشاهدات را حداکثر میتوان در چند بعد تصویر کرد. به عبارت دیگر مشاهدات را به چه تعداد بعد مستقل از هم میتوانیم تصویر کنیم. در این مسئله چون فقط دو مقدار ویژه غیر صفر داریم (زیرا دو منبع داریم و مشاهدات در دو بعد هستند) ، رنک ماتریس برابر ۲ است.

$$Rank(\boldsymbol{X}) = 2$$

با توجه به اینکه در تبدیل SVD ($\boldsymbol{X} = \boldsymbol{QGV^T}$) ، $\boldsymbol{Q^T} = \boldsymbol{Q^{-1}}$ و $\boldsymbol{V^T} = \boldsymbol{V^{-1}}$ است، داریم:

(منظور از $\boldsymbol{U}$ و $\boldsymbol{D}$ ، ماتریس های مرتب شده از مقدار ویژه بزرگتر به کوچکتر است.)

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{QGV^T} \rightarrow \boldsymbol{R_x} = \boldsymbol{XX^T} = (\boldsymbol{QGV^T})(\boldsymbol{QGV^T})^{\boldsymbol{T}} = (\boldsymbol{QGV^T})(\boldsymbol{VG^TQ^T}) = \boldsymbol{QGV^TVG^TQ^T}$$
$$= \boldsymbol{QGIG^TQ^T} = \boldsymbol{QGG^TQ^T}$$

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{D^{-\frac{1}{2}}U^TX} \rightarrow \boldsymbol{X} = \boldsymbol{UD^{\frac{1}{2}}Z}$$

حال با برابر قرار دادن عبارات بالا و $\boldsymbol{R_x} = \boldsymbol{UDU^T}$ و $\boldsymbol{UD^{\frac{1}{2}}Z} = \boldsymbol{QGV^T}$ داریم:

$$UD^{\frac{1}{2}}Z = QGV^T, R_x = UDU^T = QGG^TQ^T \rightarrow \begin{cases} Q = \pm U \\ GG^T \equiv D \\ V^T \equiv \pm Z \end{cases}$$

* منظور از $\pm$ میتواند این باشد که مثلاً در عبارت $Q = \pm U$ علامت بعضی ستون های هر کدام قرینه دیگری باشد. (صرفاً راستای تصویر مهم است و علامت اهمیتی ندارد). همانطور که در تصویر ۹ مشاهده میشود ستون های ۱ و ۲ این دو ماتریس قرینه هم هستند. (این قرینگی در V^T جبران میشود.)

* همانطور که مشاهده میشود از علامت $\equiv$ برای رابطه بین هر دو ماتریس استفاده میشود. دلیل این امر این است که تعداد سطر و ستون های دو طرف یکسان نیست اما چون سطر و ستون های اضافه مقدار صفر دارند یا متعامد بر سطر و ستون های دیگر ماتریس ها هستند، میتوانیم بگوییم با هم متناسب هستند.

$$\begin{cases} Q = \pm U \\ (G_{1:2,1:2})(G_{1:2,1:2})^T = G_{sig}G_{sig}^T = D \\ (V_{1:2,:})^T = V_1 = V_{sig} = \pm Z \end{cases}$$

```
Q =

  -0.3549   -0.9141    0.1961
  -0.5026    0.3634    0.7845
  -0.7884    0.1798   -0.5883
```

```
U_ =

   0.3549    0.9141    0.1961
   0.5026   -0.3634    0.7845
   0.7884   -0.1798   -0.5883
```

الف) ارتباط ماتریس های Q و U

G: 3x1000 double

	1	2	3	4	5	6	7
1	226.5429	0	0	0	0	0	0
2	0	44.7562	0	0	0	0	0
3	0	0	2.3070e-14	0	0	0	0
4							

D_: 3x3 double

	1	2	3
1	5.1322e+04	0	0
2	0	2.0031e+03	0
3	0	0	-4.0681e-12
4			

ب) ارتباط ماتریس های G و D

Z: 2x1000 double

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.0294	0.0469	-0.0500	-0.0480	-0.0235	0.0043	-0.0332	0.0347	-0.0240
2	0.0021	0.0011	-0.0341	-0.0023	0.0233	0.0485	-0.0114	-0.0320	0.0650
3									

V: 1000x1000 double

	1	2	3
1	-0.0294	-0.0021	-0.2025
2	-0.0469	-0.0011	0.8386
3	0.0500	0.0341	-0.0491
4	0.0480	0.0023	-0.0186
5	0.0235	-0.0233	-0.0013
6	-0.0043	-0.0485	0.0170
7	0.0332	0.0114	-0.0012
8	-0.0347	0.0320	-5.9729e-04
9	0.0240	-0.0650	-0.0135

ج) ارتباط ماتریس های V و Z

تصویر ۹ – رابطه ماتریس های Q, G, V و U, D, Z

ه – در صورتی که بتوانیم یک ارتباط خطی بین ماتریس منابع S و تصویر مشاهدات $(V_{1:2,:})^T = Z$ بدست آوریم، میتوانیم بگوییم این دو ماتریس در فضای هم هستند. با توجه به اینکه $R_Z = ZZ^T = I$ است:

$$S_{2\times T} = F_{2\times 2}Z_{2\times T} \rightarrow SZ^T = FZZ^T = FI = F \rightarrow F = SZ^T$$

تصویر ۱۰ مقدار درایه های ماتریس F را نشان میدهد.

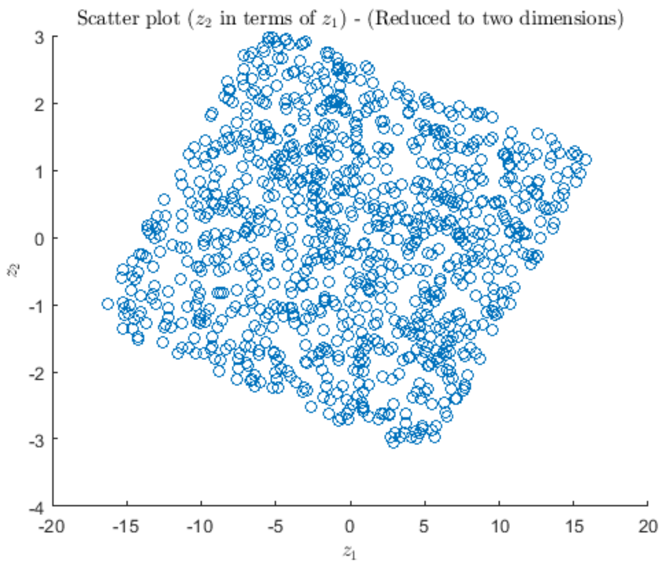
```
F =

   49.1516  -23.9248
  -17.8288  -31.7937
```

تصویر ۱۰ – مقدار درایه های ماتریس F

تعبیر شهودی: در قسمت ب متوجه شدیم که U در فضای ستون های A است. با توجه به اینکه Z ناشی از U و X بوده و ستون های ماتریس A ارتباط منابع و X را می‌سازند، میتوانیم نتیجه بگیریم که S و Z در فضای هم هستند. همچنین از طرفی ماتریس Z بیانگر دو سطر اول ماتریس V است. در نتیجه دیگر سطر های V (سطر سوم تا T اُم) بر X و نهایتا منابع S متعامدند.

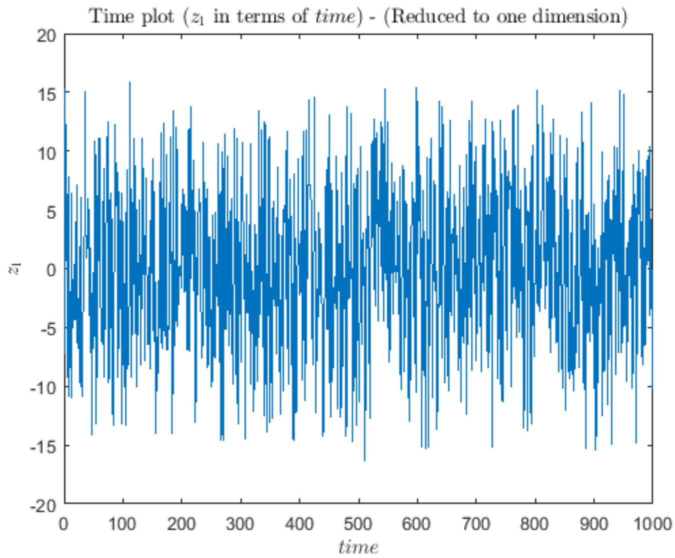
و – برای کاهش بعد مشاهدات میتوانیم تصویر ماتریس X را روی بردار های ویژه ای که مقدار ویژه مجموع آنها از ۰٫۹ برابر مجموع مقادیر ویژه بزرگتر باشد را بدست آوریم. به این منظور در این مسئله میتوانیم ماتریس مشاهدات را به ۱ یا ۲ بعد کاهش دهیم. در صورتی که مشاهدات را به ۲ بعد کاهش دهیم انرژی کل مشاهدات ٪۱۰۰ حفظ شده است. تصویر ۱۱ نمودار پراکندگی مشاهدات در دو بعد را نشان میدهد.




```
Energy Ratio (Reduced to two dimensions): 100.000000%
```

تصویر۱۱ – کاهش بعد مشاهدات به ۲ بعد

در صورتی که مشاهدات را به ۱ بعد کاهش دهیم، حدوداً ۹۶٪ انرژی کل مشاهدت حفظ میشود. تصویر ۱۲ نمودار حوزه زمان تنها بعد مشاهدات را نشان میدهد. این نمودار مشابه نمودار تصویر ۸ (قسمت ج) است با این تفاوت که دامنه آن متفاوت است.




```
Energy Ratio (Reduced to one dimension): 96.617304%
```

تصویر ۱۲ – کاهش بعد مشاهدات به ۱ بعد