به نام خدا

دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

تمرین کامپیوتری ۴

سیگنال ها و سیستم ها

دکتر اخوان

عرفان پناهی ۸۱۰۱۹۸۳۶۹

بهار ۱۴۰۰-۱۳۹۹

فهرســـت سوالات:

سوال ۱ : مدار RLC سری

بخش الف: با جایگذاری و مشتق گرفتن از طرفین معادله دیفرانسیلی را می‌سازیم:

$$v_R(t) = Ri(t), \qquad v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}, \qquad v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$$

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = v_{in}(t)$$

$$\rightarrow v_{in}(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dt} \text{ از دوطرف}} \frac{d}{dt}v_{in}(t) = R\frac{d}{dt}i(t) + L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}i(t)$$

بخش ب: حال از طرفین معادلهٔ دیفرانسیلی تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$i(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} I(s), \qquad \frac{di(t)}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} sI(s), \qquad \frac{d^2i(t)}{dt^2} \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2I(s), \qquad \frac{dv_{in}}{dt} \xrightarrow{\mathcal{L}} sV_{in}(s)$$

$$\frac{d}{dt}v_{in}(t) = R\frac{d}{dt}i(t) + L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C}i(t) \xrightarrow{\mathcal{L} \text{ از دوطرف}} sV_{in}(s) = RsI(s) + Ls^2I(s) + \frac{1}{C}I(s)$$

$$\rightarrow sV_{in}(s) = \left(Rs + Ls^2 + \frac{1}{C}\right)I(s) \rightarrow I(s) = \frac{s}{\left(Rs+Ls^2+\frac{1}{C}\right)}V_{in}(s)$$

بخش ج: ابتدا رابطه بین ورودی و خروجی را بر حسب $I(s)$ و $V_{in}(s)$ بدست می‌آوریم:

$$y(t) = v_C(t) \rightarrow Y(s) = V_C(s) = \frac{1}{sC}I(s) \rightarrow \boldsymbol{I(s) = CsY(s)}$$

$$x(t) = v_{in}(t) \rightarrow \boldsymbol{V_{in}(s) = X(s)}$$

$$I(s) = \frac{s}{\left(Rs + Ls^2 + \frac{1}{C}\right)}V_{in}(s) \rightarrow CsY(s) = \frac{s}{\left(Rs + Ls^2 + \frac{1}{C}\right)}X(s)$$

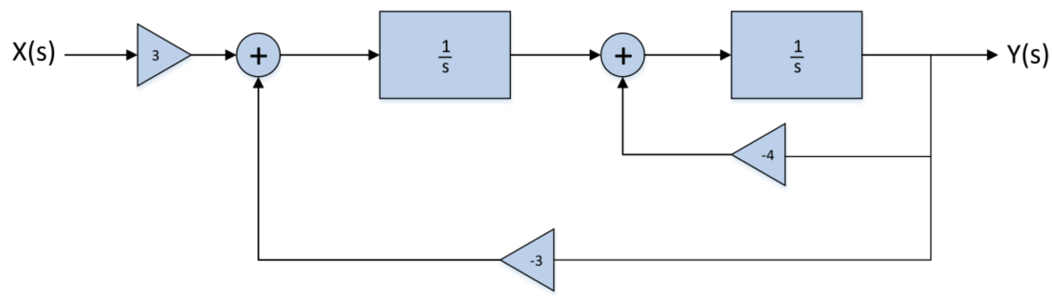
$$\rightarrow Y(s) = \frac{1}{(CRs + CLs^2 + 1)}X(s)$$

بخش د: مقادیر داده شده را جایگذاری کرده و سپس به معادله ای میرسیم که قابل پیاده سازی در بلاک دیاگرام باشد:

$$R=1, L=\frac{1}{4}, C=\frac{4}{3} \rightarrow Y(s)=\frac{1}{\left(\frac{4}{3}s+\frac{1}{3}s^2+1\right)}X(s) \rightarrow Y(s)\left(\frac{4}{3}s+\frac{1}{3}s^2+1\right)=X(s)$$

$$\rightarrow \frac{4}{3}sY(s)+\frac{1}{3}s^2Y(s)+Y(s)=X(s) \rightarrow Y(s)=\frac{1}{s^2}\big(3X(s)-3Y(s)\big)+\frac{1}{s}\big(-4Y(s)\big)$$

بلاک دیاگرام معادلهٔ لاپلاسی بالا بصورت زیر (تصویر ۱) رسم خواهد شد:



تصویر ۱: رسم بلاک دیاگرام سوال ۱

بخش و: ابتدا پاسخ ضربهٔ سیستم را بدست آورده و سپس با استفاده از آن به پاسخ پله میرسیم:

$$Y(s)=\frac{1}{\left(\frac{4}{3}s+\frac{1}{3}s^2+1\right)}X(s) \rightarrow H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{3}{(s^2+4s+3)}=\frac{3}{(s+3)(s+1)}$$

$$x(t)=u(t) \rightarrow U(s)=\frac{1}{s} \rightarrow Y(s)=U(s)H(s)=\frac{3}{s(s+3)(s+1)}=\frac{1}{s}+\frac{-\frac{3}{2}}{s+1}+\frac{\frac{1}{2}}{s+3}$$

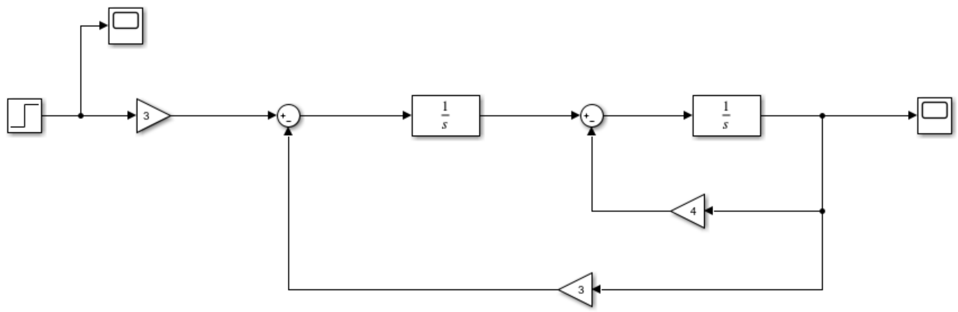
$$Y(s)=\frac{1}{s}+\frac{-\frac{3}{2}}{s+1}+\frac{\frac{1}{2}}{s+3} \rightarrow y(t)=u(t)-\frac{3}{2}e^{-t}u(t)+\frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$$

پاسخ پله $y(t)=\left(1-\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-3t}\right)u(t)$

مطابق عبارت بالا ترم های نمایی پاسخ گذرا و الباقی (۱) پاسخ پایدار را نشان می‌دهد. پس انتظار داریم در ابتدا پاسخ از ۰ شروع شده و در نهایت با گذر زمان به ۱ میل کند.

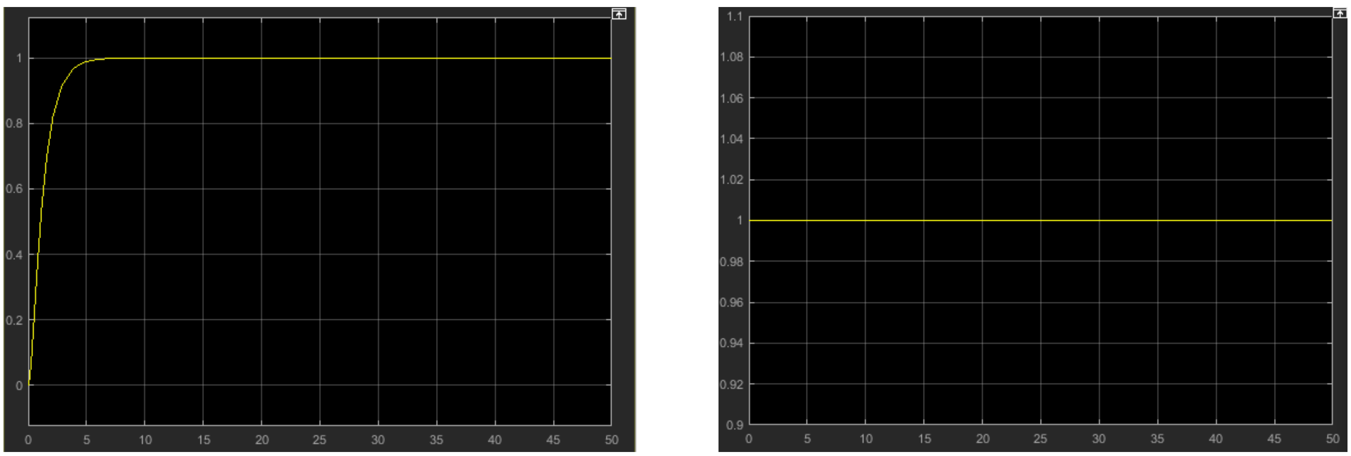
بخش ه: *** فایل سیمولینک مربوط به این قسمت با نام **P1.slx** پیوست شده است.

ابتدا بلاک دیاگرام این قسمت را به شکل زیر (تصویر ۲) در محیط سیمولینک رسم میکنیم:



تصویر ۲: رسم بلاک دیاگرام در محیط سیمولینک

در نهایت نیز ورودی پله و پاسخ به آن نیز بصورت زیر (تصویر ۳) خواهد بود:



الف ب

تصویر ۳: الف) ورودی پله ، ب) پاسخ پله سیستم

سوال ۲ : سیستم تعلیق اتومبیل

بخش الف: معادله را با مقدار دهی گفته شده بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$K\big(x(t)-y(t)\big)+B\left(\frac{dx(t)}{dt}-\frac{dy(t)}{dt}\right)=M\frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

$$M=K=1\rightarrow\frac{d^2y(t)}{dt^2}+B\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=B\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$$

بخش ب: ابتدا تابع تبدیل را بصورت زیر بدست می‌آوریم:

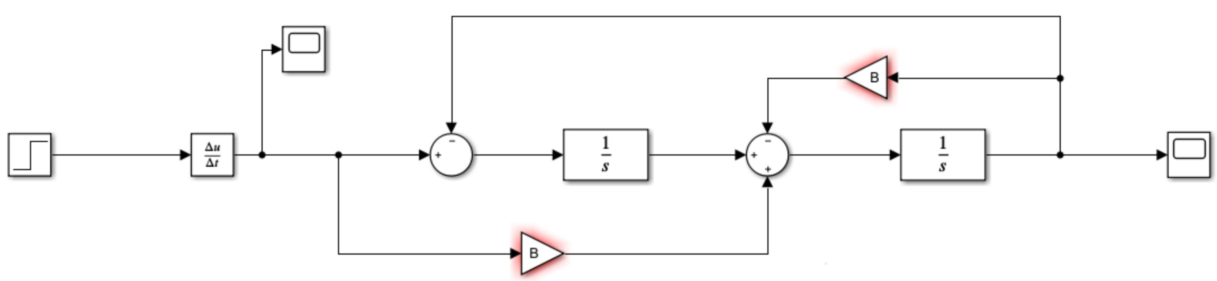
$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}+B\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=B\frac{dx(t)}{dt}+x(t)\rightarrow s^2Y(s)+BsY(s)+Y(s)=BsX(s)+X(s)$$

$$(s^2+Bs+1)Y(s)=(Bs+1)X(s)\rightarrow H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{Bs+1}{s^2+Bs+1}\rightarrow H(s)=\frac{Bs+1}{s^2+Bs+1}$$

همچنین با استفاده از معادله زیر میتوانیم بلاک دیاگرام را نیز رسم نمائیم:

$$s^2Y(s)+(Bs+1)Y(s)=(Bs+1)X(s)\rightarrow Y(s)=\frac{1}{s^2}\big(X(s)-Y(s)\big)+\frac{1}{s}\big(BX(s)-BY(s)\big)$$

حال این معادله را در سیمولینک پیاده سازی میکنیم (تصویر۴):

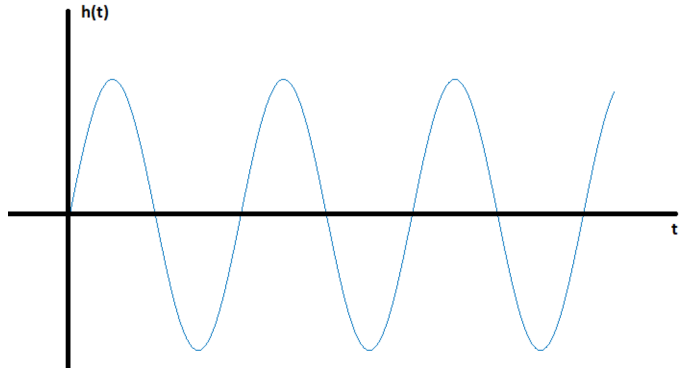


تصویر ۴: باتوجه به اینکه مقدار B مجهول است، با رنگ قرمز هایلایت شده است.

بخش ج: با استفاده از تابع تبدیل بخش ب و جایگذاری $B=0$ پاسخ ضربه سیستم به صورت زیر نوشته و رسم می‌شود:

$$H(s)=\frac{Bs+1}{s^2+Bs+1}\rightarrow H(s)=\frac{1}{s^2+1}\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}h(t)=\sin(t)\,u(t)$$

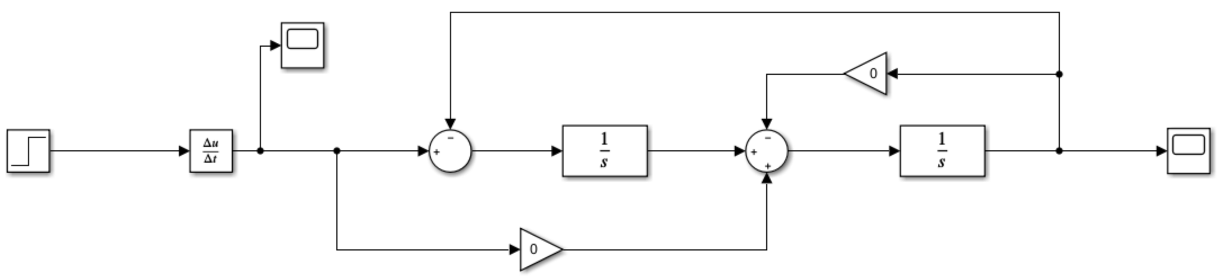
بنابراین انتظار داریم پاسخ ضربه سیستم شکل سینوسی داشته باشد: (تصویر ۵)



تصویر ۵: پاسخ ضربه سیستم به ازای $B = 0$

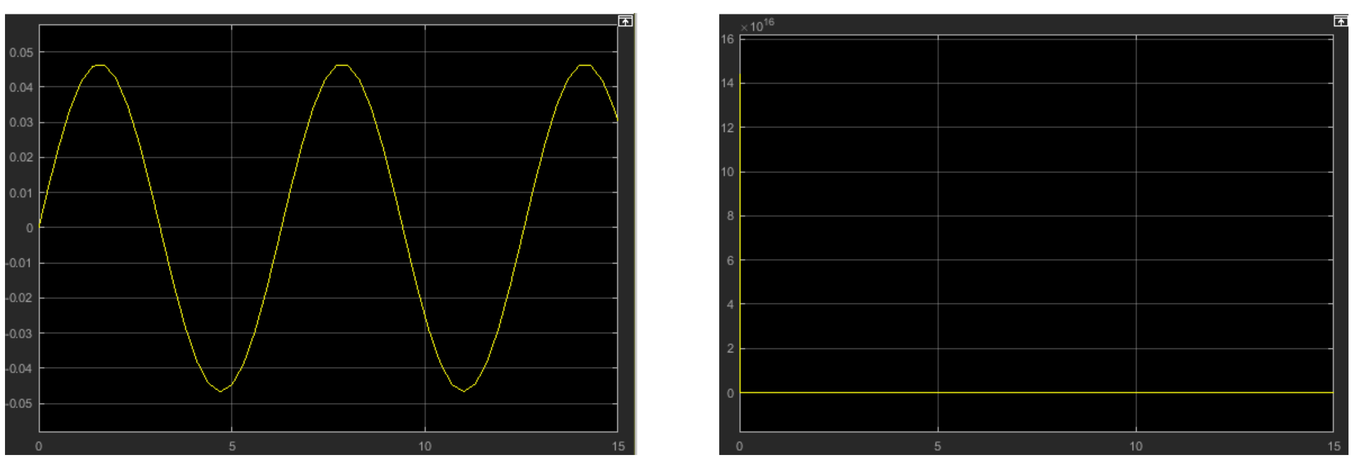
***** فایل سیمولینک مربوط به این قسمت با نام P2_B0.slx پیوست شده است.**

حال در محیط سیمولینک این دیاگرام را شبیه سازی میکنیم. تصویر ۶ بلاک دیاگرام مربوط به این بخش را نشان می‌دهد:



تصویر ۶: بلاک دیاگرام سیستم به ازای $B = 0$

در نهایت نیز ورودی ضربه و پاسخ به آن نیز مطابق تصویر ۶ خواهد بود. در این حالت کابین اتوموبیل با یک ضربه دچار نوسان میشود و دیگر به حالت اولیه و پایدار برنمیگردد.



ب الف

تصویر ۷: الف) ورودی ضربه ، ب) پاسخ ضربه سیستم به ازای $B = 0$

بخش د: از تابع تبدیل بخش ب استفاده می‌کنیم و قطب های تبدیل را بدست می‌آوریم:

$$H(s) = \frac{Bs+1}{s^2+Bs+1} \to s^2+Bs+1=0 \to s = \frac{-B \pm \sqrt{B^2-4}}{2}$$

برای اینکه عبارت بالا حقیقی شود باید $B^2 - 4 > 0$ شود.

$$B^2-4>0 \to B^2>4 \to B>2 \text{ یا } B<-2 \xrightarrow{B>0} \min\{B>0\}=2$$

حال به ازای $B = 2$ پاسخ ضربه را محاسبه مینمائیم:

$$H(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+1} = \frac{2s+1}{(s+1)^2} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+1}\right)\right\}$$

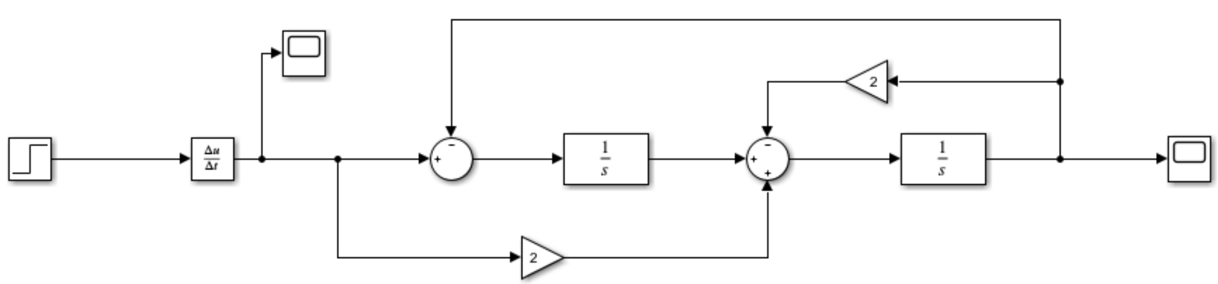
$$\to h(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - t\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = (2-t)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = (2-t)e^{-t}u(t)$$

$$h(t) = (2-t)e^{-t}u(t)$$

طبق پاسخ بالا، پاسخ ضربه سیستم کاملاً میراست. به تا قبل از $t = 2$ مقدار پاسخ مثبت و نزولی است و بعد از آن منفی شده و در نهایت به صفر میل می‌کند.

***** فایل سیمولینک مربوط به این قسمت با نام P2_Bmin.slx پیوست شده است.**

حال در محیط سیمولینک این دیاگرام را شبیه سازی میکنیم. تصویر ۸ بلاک دیاگرام مربوط به این بخش را نشان می‌دهد:

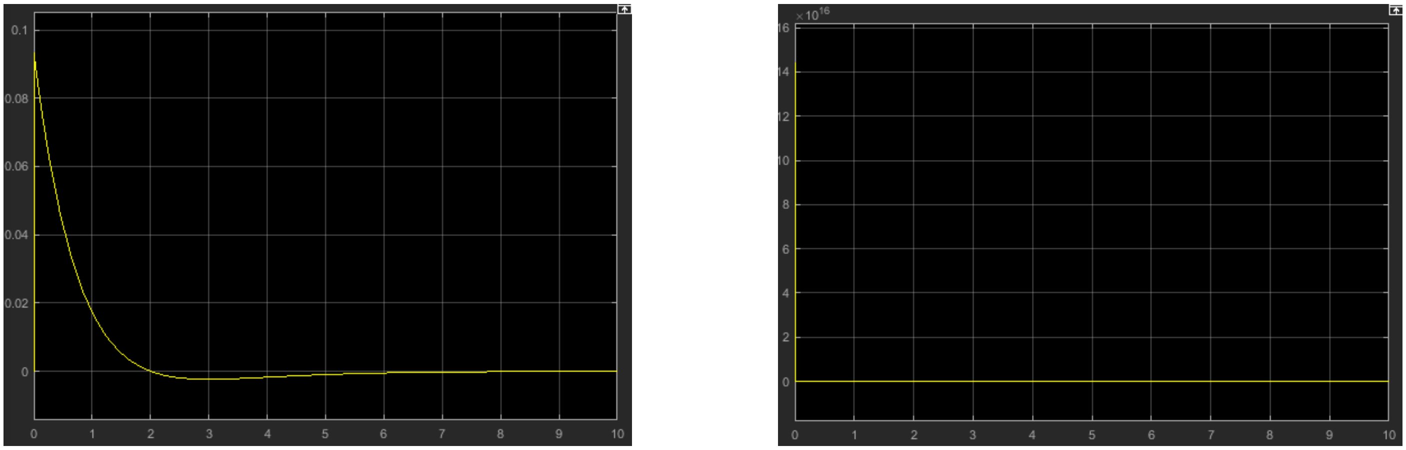


تصویر ۸: بلاک دیاگرام سیستم به ازای $B = 2$

در نهایت نیز ورودی ضربه و پاسخ به آن به ازای $B = 2$ مطابق تصویر ۹ خواهد بود:

همانطور که انتظار میرفت ابتدا پاسخ ضربه مقدار مثبتی داشته و سپس در $t = 2$ به صفر رسیده و بعد منفی میشود و در نهایت به گذر زمان به صفر میل میکند.

در این حالت اتوموبیل برای مدتی از تعادل خارج شده و دوباره به حالت اول برمیگردد.



الف ب

تصویر ۹: الف) ورودی ضربه ، ب) پاسخ ضربه سیستم به ازای $B = 2$

بخش و: حال به ازای $B = 100$ پاسخ ضربه را محاسبه مینمائیم:

$$H(s) = \frac{100s + 1}{s^2 + 100s + 1} \approx \frac{100s + 1}{(s + 100)(s + 0.01)} = \frac{100}{s + 100}$$

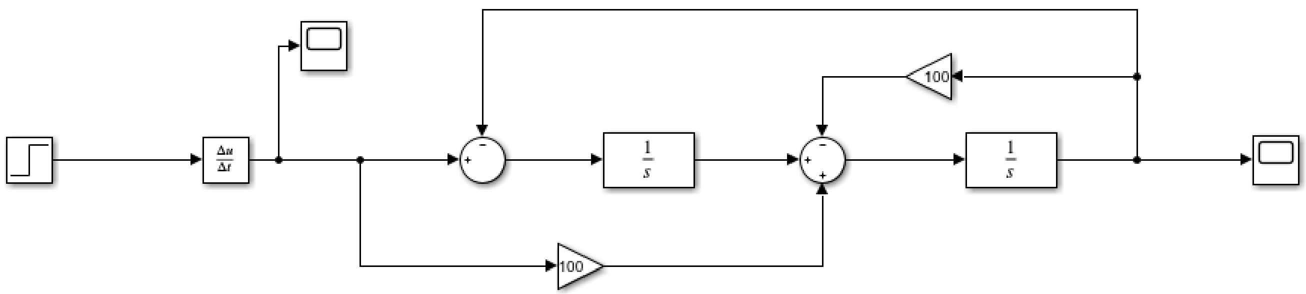
$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{100}{s + 100}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{(s + 1)^2}\right\} = 100\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s + 100}\right\} = 100e^{-100t}u(t)$$

$$h(t) = 100e^{-100t}u(t)$$

طبق پاسخ بالا، پاسخ ضربه سیستم کاملاً میراست. انتظار داریم ابتدا از مقدار ۱۰۰ شروع شده و با سرعت زیاد به حالت پایدار برسد.

***** فایل سیمولینک مربوط به این قسمت با نام P2_B100.slx پیوست شده است.**

حال در محیط سیمولینک این دیاگرام را شبیه سازی میکنیم. تصویر ۱۰ بلاک دیاگرام مربوط به این بخش را نشان می‌دهد:

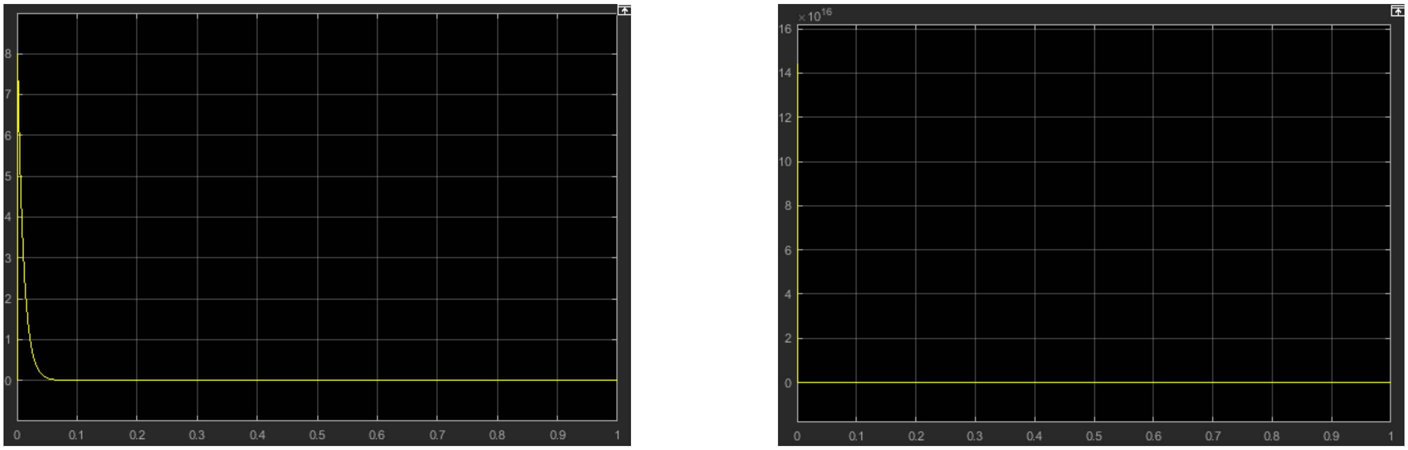


تصویر ۱۰: بلاک دیاگرام سیستم به ازای $B = 100$

در نهایت نیز ورودی ضربه و پاسخ به آن به ازای $B = 100$ مطابق تصویر ۱۱ خواهد بود.

همانطور که انتظار میرفت ابتدا از مقدار ۱۰۰ شروع شده و با سرعت خیلی زیاد (قبل از ۱ ثانیه) به حالت پایدار میرسد.

در این حالت اتوموبیل برای مدت بسیار کوتاه خیلی از تعادل خارج شده و بلافاصله به حالت اول برمیگردد.



الف ب

تصویر ۱۱: الف) ورودی ضربه ، ب) پاسخ ضربه سیستم به ازای $B = 100$

بخش ه:

حالت ج: در این حالت کابین اتوموبیل با یک ضربه دچار نوسان میشود و دیگر به حالت اولیه و پایدار برنمیگردد.

حالت د: در این حالت اتوموبیل برای مدتی از تعادل خارج شده و اثر کمی روی کابین اوتومبیل گذاشته (یعنی ضربه خیلی ضعیف نشان داده میشود) و دوباره به حالت اول برمیگردد.

حالت و: در این حالت اتوموبیل برای مدت بسیار کوتاه خیلی از تعادل خارج شده (یعنی اثر ضربه تماماً روی کابین احساس میشود) و بلافاصله به حالت اول برمیگردد.

هرچقدر که کابین اتومبیل ۱. زودتر به حالت پایدار برسد و ۲. اثر ضربه را کاهش دهد بهتر است. مطابق سه حالت گفته شده میتوان فهمید حالت "د" تعدیل کننده بهتری نسبت به دومورد دیگر است.

سوال ۳ : حل معادلهٔ دیفرانسیلی با تبدیل لاپلاس یک طرفه

بخش الف: به کمک خاصیت لاپلاس یک طرفه خواهیم داشت:

$$u\mathcal{L}\{y'(t)\} = sY(s) - y(0^-) = sY(s) - 1$$

$$u\mathcal{L}\{y''(t)\} = s(u\mathcal{L}\{y'(t)\}) - y'^{(0^-)} = s(sY(s) - 1) - 1 = s^2Y(s) - s - 1$$

حال از دو طرف معادلهٔ دیفرانسیلی داده شده تبدیل لاپلاس یک طرفه میگیریم:

$$y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} s^2Y(s) - s - 1 + 3sY(s) - 3 + 2Y(s) = X(s)$$

$$\rightarrow Y(s) = \frac{X(s)}{s^2 + 3s + 2} + \frac{s + 4}{s^2 + 3s + 2} = \frac{X(s) + s + 4}{(s + 2)(s + 1)}$$

$\frac{X(s)}{s^2+3s+2}$ پاسخ ناشی از ورودی را نشان میدهد.

$\frac{s+4}{s^2+3s+2}$ پاسخ ناشی از شرایط اولیه را نشان میدهد.

حال مقدار $x(t) = 5u(t)$ را جایگذاری می‌کنیم:

$$x(t) = 5u(t) \rightarrow X(s) = \frac{5}{s}$$

$$\rightarrow Y(s) = \frac{\frac{5}{s} + s + 4}{s^2 + 3s + 2} = \frac{s^2 + 4s + 5}{s(s + 2)(s + 1)} = \frac{\frac{5}{2}}{s} - \frac{2}{s + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{s + 2}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = \frac{5}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} = \frac{5}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

$$y(t) = \frac{5}{2} - 2e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}$$

طبق پاسخ بالا انتظار داریم پس از مدتی ترم نمایی (میرا) حذف شود و در نهایت پاسخ به $\frac{5}{2}$ میل کند.

***** m-file مربوط به این قسمت با نام P3.m پیوست شده است.**

بخش ب: کد متلب زیر برای حل معادلهٔ داده شده و ترسیم پاسخ آن بدست نوشته شده است:

```
function P3
    syms y(t);
    Dy = diff(y);
```

```
    D2y = diff(y,t,2);
    eqn = D2y + 3*Dy + 2*y == 5;
    conds = [y(0) == 1 , Dy(0) == 1];
    ysol(t) = dsolve(eqn,conds)
    t=0:0.1:10;
    plot(t,ysol(t));
    ylim([0 3]);
    title('Problem 3 of CA4: $D^2y+3Dy+2y=5u(t)$','Interpreter','latex');
    xlabel('t','Interpreter','latex');
    ylabel('y(t)','Interpreter','latex');
end
```

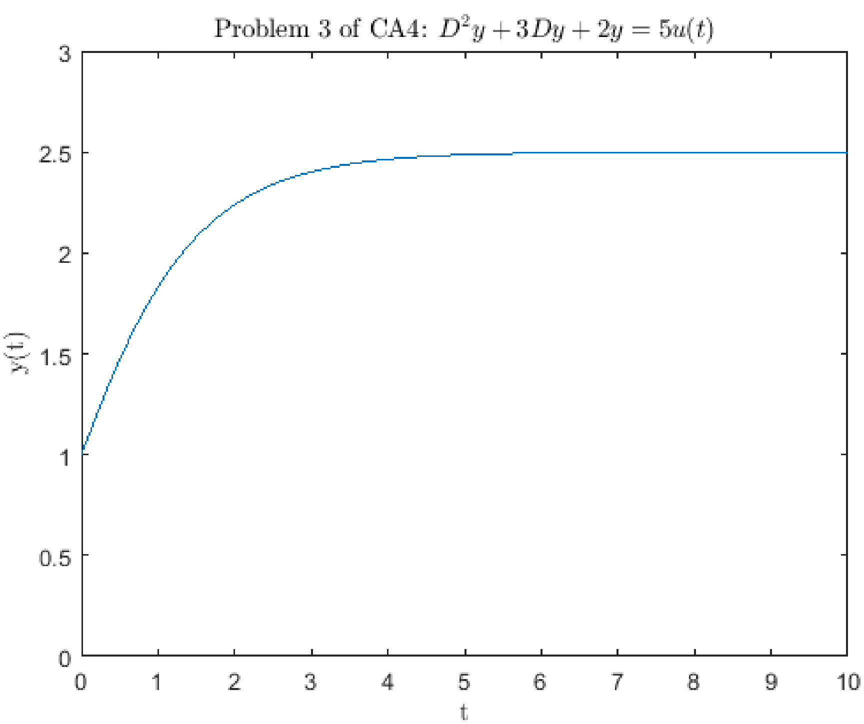
با استفاده از صدا زدن نام تابع، خروجی ها را بصورت زیر مشاهده می‌کنیم:

```
>> P3

ysol(t) =

exp(-2*t)/2 - 2*exp(-t) + 5/2
```

همانطور که مشاهده میشود، خروجی تابع همانند حالت دستی بوده و $y(t)$ نیز در بازه ۰ تا ۱۰ ثانیه مطابق تصویر ۱۲ رسم می‌شود:



تصویر ۱۲: رسم $y(t)$ در بازه ۰ تا ۱۰ ثانیه