به نام خدا

مباحث ویژه در مخابرات – جداسازی کور منابع (دکتر اخوان)

تمرین سری **اول**

نیم‌سال دوم ۱۴۰۱-۱۴۰۰

عرفـان پـنـــاهی ۸۱۰۱۹۸۳۶۹

*** فایل متلب مربوط به این تمرین با عنوان **HW1Matlab_BSS_810198369.mlx** پیوست شده است.

ابتدا مطابق با خواسته تمرین، منابع S_1 و S_2 را (با طول $T = 1000$) در محیط متلب تعریف می‌کنیم.

$$S_1 \sim U[-3 \quad 3] \qquad , \qquad S_2 \sim U[-2 \quad 2]$$

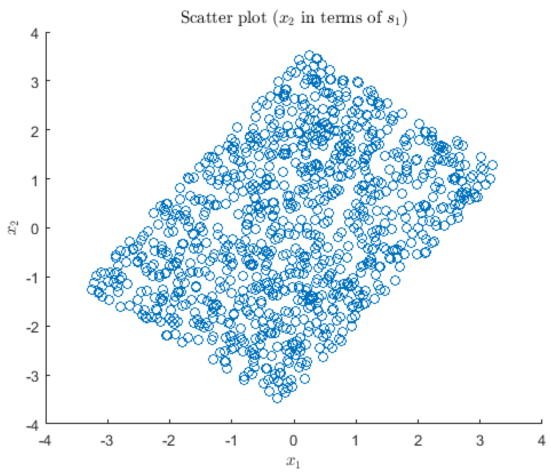
حال ماتریس مخلوط کننده A را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix}$$

در نهایت منابع S_1 و S_2 را بصورت آنی و خطی توسط ماتریس مخلوط کننده A ترکیب کرده و مشاهدات X_1 و X_2 تولید می‌کنیم.

$$\underline{X} = \underline{\underline{A}}.\underline{S} \rightarrow \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{matrix} X_1 = 0.6S_1 + 0.8S_2 \\ X_2 = 0.8S_1 - 0.6S_2 \end{matrix}$$

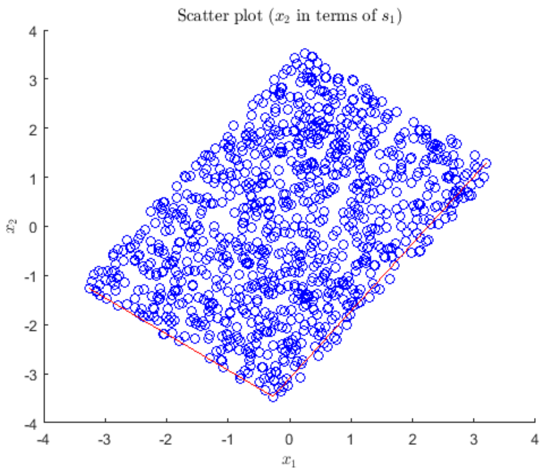
گام ۱ – در این قسمت نمودار پراکندگی X_2 برحسب X_1 را به کمک دستور ***scatter*** رسم می‌کنیم. همانطور که در تصویر ۱ مشاهده می‌شود، به دلیل محدود بودن مقدار منابع و یکنواختی توزیع ها، نمونه ها دارای مرز مشخصی هستند. همچنین ۴ گوشه داریم. هرکدام از گوشه ها بخاطر ماکزیمم و مینیمم منابع به وجود آمده اند. برای مثال گوشه سمت راست در حدود مختصات $(x_1 = 3.4, x_2 = 1.2)$ است. که این نقطه ناشی از ماکزیمم توزیع های یکنواخت ($\begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.4 \\ 1.2 \end{bmatrix}$) است. پس با استفاده از مرز ها میتوانیم بردار های مکانی ماتریس مخلوط کننده را تخمین بزنیم.



تصویر ۱ – نمودار پراکندگی x_2 برحسب x_1

گام ۲ – حال می‌خواهیم روشی ارائه دهیم که بتوان با استفاده از آن به صورت اتوماتیک ماتریس A را بدست آورد.

طبق مطالب گفته شده در قسمت قبلی سعی می‌کنیم مرز نمونه ها را بدست آوریم. برای این کار مطابق به تصویر ۲ و با استفاده از نقاط گوشه (ماکزیمم مشاهدات محور افقی و عمودی)، مرز ها را مشخص می‌کنیم.



تصویر ۲ – مرز های نمودار پراکندگی x_2 برحسب x_1

این مرز ها، نسبت دو عنصر بردار مکانی را نشان میدهند. به همین خاطر سعی میکنیم آنرا نرمالیزه کنیم (به اندازه بردار تقسیم کنیم). تصویر ۳ ، ماتریس مخلوط کننده بازیابی شده را نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده میشود با تقریب خوبی این ماتریس با ماتریس اولیه برابر است.

```
Beta = [a1 a2]

Beta = 2×2
    0.5892    0.8053
    0.8080   -0.5928
```

تصویر ۳ – تخمین ماتریس مخلوط کننده

گام ۳ – در این قسمت، ابتدا توزیع x_1 ، را با استفاده از روابط ریاضی و آماری بدست می‌آوریم:

$$X_1 = 0.6S_1 + 0.8S_2$$

$$F_{X_1}(x_1) = \Pr(X_1 \le x_1) = \Pr(0.6S_1 + 0.8S_2 \le x_1) = \Pr(S_2 \le 1.25x_1 - 0.75S_1)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pr(S_2 \le 1.25x_1 - 0.75s_1) f_{S_1}(s_1) ds_1$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F_{S_2}(1.25x_1 - 0.75s_1) f_{S_1}(s_1) ds_1$$

$$\rightarrow f_{X_1}(x_1) = \frac{dF_{X_1}(x_1)}{dx_1} = 1.25 \int_{-\infty}^{+\infty} f_{S_2}(1.25x_1 - 0.75s_1) f_{S_1}(s_1) ds_1$$

از طرفی می‌دانیم:

$$S_1 \sim U[-3 \quad 3] \to F_{S_1}(s_1) = \begin{cases} 0 & , \quad s_1 \le -3 \\ \dfrac{s_1+3}{6} & , \quad -3 \le s_1 \le 3 \\ 1 & , \quad 3 \le s_1 \end{cases}$$

$$S_2 \sim U[-2 \quad 2] \to f_{S_2}(s_2) = \begin{cases} 0 & , \quad 2 \ge s_2 \;\; or\; s_2 \le -2 \\ \dfrac{1}{4} & , \quad -2 \le s_2 \le 2 \end{cases}$$

حال باید حالت (بازه) های مختلف در نظر بگیریم:

$$f_{X_1}(x_1) = 1.25 \int_{-\infty}^{+\infty} f_{S_2}(1.25x_1 - 0.75s_1) f_{S_1}(s_1) ds_1$$

حالت اول) $1.25x_1 - 0.75s_1 \ge 2$ یا $\le -2 \to f_{S_2}(1.25x_1 - 0.75s_1) = 0 \to f_{X_1}(x_1) = 0$

حالت دوم) $-2 \le 1.25x_1 - 0.75s_1 \le 2 \to f_{S_2}(1.25x_1 - 0.75s_1) = \frac{1}{4}$

$$-2 \le 1.25x_1 - 0.75s_1 \le 2 \to \frac{5x_1 - 8}{3} \le s_1 \le \frac{5x_1+8}{3}$$

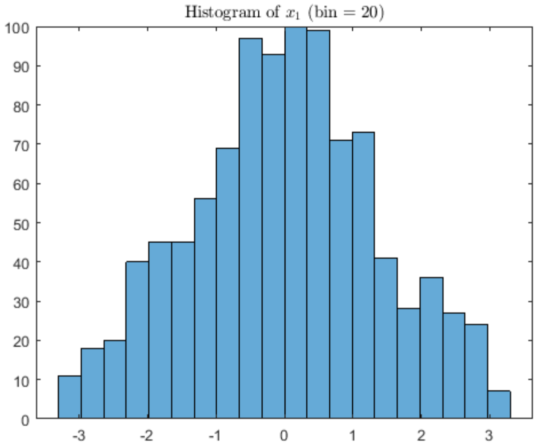
$$\to f_{X_1}(x_1) = 1.25 \int_{\frac{5x_1-8}{3}}^{\frac{5x_1+8}{3}} \frac{1}{4} f_{S_1}(s_1) ds_1 = \frac{5}{16}\left(F_{S_1}\left(\frac{5x_1+8}{3}\right) - F_{S_1}\left(\frac{5x_1-8}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{5}{16}\begin{cases} 0 & , \quad x_1 \le -3.4 \\ \dfrac{5x_1+17}{18} & , \quad -3.4 \le x_1 \le 0.2 \\ 1 & , \quad 0.2 \le x_{1_1} \end{cases} - \frac{5}{16}\begin{cases} 0 & , \quad x_1 \le -0.2 \\ \dfrac{5x_1+1}{18} & , \quad -0.2 \le x_1 \le 3.4 \\ 1 & , \quad 3.4 \le s_1 \end{cases}$$

$$= \frac{5}{16}\begin{cases} 0 & , \quad x_1 \le -3.4 \\ \dfrac{5x_1+17}{18} & , -3.4 \le x_1 \le -0.2 \\ \dfrac{8}{9} & , \quad -0.2 \le x_1 \le 0.2 \\ \dfrac{17-5x_1}{18} & , \quad 0.2 \le x_1 \le 3.4 \\ 0 & , \quad 3.4 \le x_1 \end{cases}$$

$$\to f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} 0 & , \quad x_1 \le -3.4 \\ \dfrac{25x_1+85}{288} & , -3.4 \le x_1 \le -0.2 \\ \dfrac{5}{18} & , -0.2 \le x_1 \le 0.2 \\ \dfrac{85-25x_1}{288} & , \quad 0.2 \le x_1 \le 3.4 \\ 0 & , \quad 3.4 \le x_1 \end{cases}$$

حال مطابق با تصویر ۴، هیستوگرام x_1 را با درنظر گرفتن ۲۰ بین رسم می‌کنیم.



تصویر ۴ – هیستوگرام x_1

همانطور که مشاهده می‌شود، به ازای x_1 حدود صفر ($-0.2 \leq x_1 \leq 0.2$) توزیع تقریباً یکنواخت است. از طرفی مجموعاً ۱۰۰ تا ۱۵۰ نمونه در این بازه قرار دارد که تقریباً با احتمال $\frac{1}{9} = \frac{5}{18} \times 0.4$ نیز برابر است. به ازای مقادیر بزرگتر ($0.2 \leq x_1 \leq 3.4$ و $-3.4 \leq x_1 \leq -0.2$) ، توزیع با افزایش اندازه x_1 نزولی میشود تا اینکه تقریباً در 3.4 به صفر می‌رسد.

پس توزیع بدست آمده با هیستوگرام تطابق دارد.

گام ۴ – حال توزیع x_2 ، را با استفاده از روابط ریاضی و آماری بدست می‌آوریم:

$$X_2 = 0.8S_1 - 0.6S_2$$

$$F_{X_2}(x_2) = \Pr(X_2 \leq x_2) = \Pr(0.8S_1 - 0.6S_2 \leq x_2) = \Pr(S_1 \leq 1.25x_2 + 0.75S_2)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pr(S_1 \leq 1.25x_2 + 0.75s_2) f_{S_2}(s_2) ds_2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} F_{S_1}(1.25x_2 + 0.75s_2) f_{S_2}(s_2) ds_2$$

$$\rightarrow f_{X_2}(x_2) = \frac{dF_{X_2}(x_2)}{dx_2} = 1.25 \int_{-\infty}^{+\infty} f_{S_1}(1.25x_2 + 0.75s_2) f_{S_2}(s_2) ds_2$$

از طرفی می‌دانیم:

$$S_1 \sim U[-3 \quad 3] \rightarrow f_{S_1}(s_1) = \begin{cases} 0 \quad , \quad 3 \geq s_2 \;\; or \; s_2 \leq -3 \\ \dfrac{1}{6} \quad , \qquad -3 \leq s_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$S_2 \sim U[-2 \quad 2] \rightarrow F_{S_2}(s_2) = \begin{cases} 0 \quad , \quad s_2 \leq -2 \\ \dfrac{s_2 + 2}{4} \quad , \quad -2 \leq s_2 \leq 2 \\ 1 \quad , \quad 3 \leq s_2 \end{cases}$$

حال باید حالت (بازه) های مختلف در نظر بگیریم:

$$f_{X_2}(x_2) = \frac{dF_{X_2}(x_2)}{dx_2} = 1.25\int_{-\infty}^{+\infty} f_{S_1}(1.25x_2 + 0.75s_2) f_{S_2}(s_2) ds_2$$

حالت اول) $1.25x_2 + 0.75s_2 \geq 3$ یا $\leq -3 \rightarrow f_{S_1}(1.25x_2 + 0.75s_2) = 0 \rightarrow f_{X_2}(x_2) = 0$

حالت دوم) $-3 \leq 1.25x_2 + 0.75s_2 \leq 3 \rightarrow f_{S_1}(1.25x_2 + 0.75s_2) = \frac{1}{6}$

$$-3 \leq 1.25x_2 + 0.75s_2 \leq 3 \rightarrow \frac{-5x_2 - 12}{3} \leq s_2 \leq \frac{-5x_2 + 12}{3}$$

$$\rightarrow f_{X_2}(x_2) = 1.25\int_{\frac{-5x_2-12}{3}}^{\frac{-5x_2+12}{3}} \frac{1}{6} f_{S_2}(s_2) ds_2 = \frac{5}{24}\left(F_{S_2}\left(\frac{-5x_2 + 12}{3}\right) - F_{S_2}\left(\frac{-5x_2 - 12}{3}\right)\right)$$

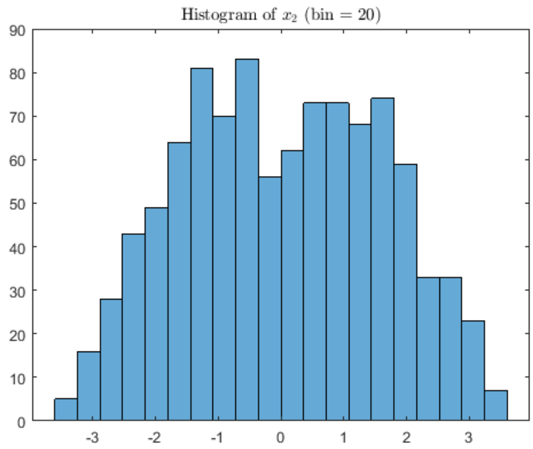
$$= \frac{5}{24}\begin{cases} 0 & , \quad x_2 \leq 1.2 \\ \frac{-5x_2 + 6}{12} & , 1.2 \leq x_2 \leq 3.6 \\ 1 & , \quad 3.6 \leq x_2 \end{cases} - \frac{5}{24}\begin{cases} 0 & , \quad x_2 \leq -3.6 \\ \frac{-5x_2 - 18}{12} & , -3.6 \leq x_2 \leq -1.2 \\ 1 & , \quad -1.2 \leq x_2 \end{cases}$$

$$= \frac{5}{24}\begin{cases} 0 & , \quad x_2 \leq -3.6 \\ \frac{5x_2 + 18}{12} & , -3.6 \leq x_1 \leq -1.2 \\ 1 & , \quad -1.2 \leq x_1 \leq 1.2 \\ \frac{-5x_2 + 18}{12} & , \quad 1.2 \leq x_2 \leq 3.6 \\ 0 & , \quad 3.6 \leq x_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} 0 & , \quad x_2 \leq -3.6 \\ \frac{25x_2 + 90}{288} & , -3.6 \leq x_1 \leq -1.2 \\ \frac{5}{24} & , \quad -1.2 \leq x_1 \leq 1.2 \\ \frac{-25x_2 + 90}{288} & , \quad 1.2 \leq x_2 \leq 3.6 \\ 0 & , \quad 3.6 \leq x_2 \end{cases}$$

حال مطابق با تصویر ۵، هیستوگرام x_2 را با درنظر گرفتن ۲۰ بین رسم می‌کنیم.

همانطور که مشاهده می‌شود، به ازای x_2 زیر ۱٫۲ ($-1.2 \leq x_1 \leq 1.2$) توزیع تقریباً یکنواخت است. از طرفی مجموعاً ۲۰۰ تا ۲۵۰ نمونه در این بازه قرار دارد که تقریباً با احتمال $\frac{5}{24}$ نیز برابر است. به ازای مقادیر بزرگتر ($1.2 \leq x_1 \leq 3.6$ و $-3.6 \leq x_1 \leq -1.2$) ، توزیع با افزایش اندازه x_2 نزولی میشود تا اینکه تقریباً در 3.6 به صفر می‌رسد. پس توزیع بدست آمده با هیستوگرام تطابق دارد.



تصویر ۵ – هیستوگرام x_2

گام ۵ – درحقیقت در این بخش می‌خواهیم برعکس عملیات دو گام قبلی را طی کنیم. به بیان ساده تر میخواهیم بررسی کنیم آیا با داشتن دو نوع متغیر تصادفی (مشاهدات) که ترکیب خطی دو متغیر تصادفی دیگر (منابع) است، آیا می‌توان نوع (ضرایب ترکیب خطی) را تخمین زد؟ با داشتن نوع توزیع X_2 و X_1 ، میتوانیم به *PDF* و درنهایت به *CDF* آن برسیم. پس داریم:

$$X_1 = aS_1 + bS_2$$

$$F_{X_1}(x_1) = \Pr(X_1 \le x_1) = \Pr(aS_1 + bS_2 \le x_1) = \Pr\left(S_1 \le \frac{x_1 - bS_2}{a}\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \Pr\left(S_1 \le \frac{x_1 - bs_2}{a}\right) f_{S_2}(s_2)ds_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{F}_{S_1}\left(\frac{x_1 - bs_2}{a}\right) f_{S_2}(s_2)ds_2$$

با فرض اینکه توزیع دقیق منابع را داریم، در رابطه بالا فقط ضرایب (عناصر) ماتریس مخلوط کننده یعنی *a* و *b* مجهول خواهند بود و با بررسی بازه های مختلف می‌توانیم به طور دقیق این ضرایب را بدست آوریم.

پس می‌توانیم با در دست داشتن هیستوگرام مشاهدات و اطلاعات دقیق از توزیع منابع ، مسئله *BSS* را حل کنیم.
