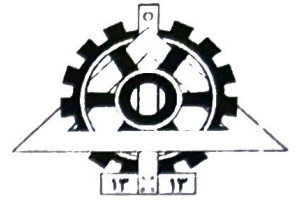


## Homework #06

Stochastic Process – Fall 2024

Instructor: Dr. Ali Olfat

Erfan Panahi (Student Number: 810103084)



**Problem 1.**  $E\{X(t)\} = 1$  ,  $R_X(t_1, t_2) = 1 + \exp(-(t_1 + t_2)) \delta(t_1 - t_2)$

**Part a.**  $C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - E\{X(t)\}^2 = \exp(-(t_1 + t_2)) \delta(t_1 - t_2)$

Mean Ergodic  $\Rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T C_X(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \rightarrow 0$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T C_X(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \exp(-(t_1 + t_2)) \delta(t_1 - t_2) dt_1 dt_2$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \exp(-2t_1) \delta(t_1 - t_2) dt_2 dt_1$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \exp(-2t_1) dt_1$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T^2} \int_0^T \exp(-2t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{-1}{4T^2} \exp(-2t) \Big|_0^T$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} [1 - \exp(-2T)] = 0 \rightarrow \text{Mean-Ergodic} \checkmark$$

**Part b.** با توجه به اینکه فرایند تصادفی  $X(t)$  ایستادن WSS نیست  $(R_X(t_1, t_2) \neq R_X(t_1 - t_2))$  نمی تواند ارگادیک در خود همگنی باشد.

**Problem 3.**  $X(t)$ : zero-mean, real-valued, stationary Gaussian RP.  $R_X(\tau) = e^{-|\tau|}$

**Part a.**  $E(X_1 X_2 X_3 X_4) = E(X_1 X_2) E(X_3 X_4) + E(X_1 X_3) E(X_2 X_4) + E(X_1 X_4) E(X_2 X_3)$

$\Phi_X(\omega) = e^{j\omega^T \underline{m}_X} \cdot e^{-\frac{1}{2} \omega^T C \omega} = e^{-\frac{1}{2} \omega^T C \omega} \rightarrow C_{ij} = E(X_i X_j)$  - با توجه به تابع مشخصه یک بردار تصادفی گوسی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left( -\frac{1}{2} \omega^T C \omega \right) = \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ -\frac{1}{2} [\omega_1, \dots, \omega_n] C \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} \right] = -C \omega$$

$\frac{\partial}{\partial \omega_i} (\Phi_X(\omega)) = \frac{\partial}{\partial \omega_i} \left( -\frac{1}{2} \omega^T C \omega \right) e^{-\frac{1}{2} \omega^T C \omega}$  - از طرفی اگر نسبت به  $\omega_i$  مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$= -[0 \dots 1 \dots 0] C \omega e^{-\frac{1}{2} \omega^T C \omega} = -\sum_{j=1}^n C_{ij} \omega_j e^{-\frac{1}{2} \omega^T C \omega}$$

در نهایت داریم  $\Rightarrow \frac{\partial^4}{\partial \omega_1 \partial \omega_2 \partial \omega_3 \partial \omega_4} \Phi_X(\omega) \Big|_{\omega=0} = C_{21} C_{43} + C_{31} C_{42} + C_{41} C_{32} \Rightarrow$  بعد از جایگذاری و ساده سازی - حاصل می شود ✓

$$E(X_1 X_2 X_3 X_4) = E(X_1 X_2) E(X_3 X_4) + E(X_1 X_3) E(X_2 X_4) + E(X_1 X_4) E(X_2 X_3)$$

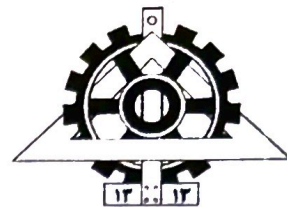
که در نهایت به این شکل حکم ثابت می شود.

## Homework #6

Stochastic Process – Fall 2024

Instructor: Dr. Ali Olfat

Erfan Panahi (Student Number: 810103084)



Prat b.

برای بررسی ارجحیت در میان بودن کافی است بررسی کنیم  $\int_{-\infty}^{+\infty} |C_X(z)| dz < \infty$

Zero-mean  $\Rightarrow C_X(z) = R_X(z) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |R_X(z)| dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|z|} dz = 2 \int_0^{\infty} e^{-z} dz = -2e^{-z} \Big|_0^{\infty} = 2 < \infty$

در نتیجه ما می‌توانیم بگوییم که فرایند ارجحیت در میان خواهد بود. (✓ ME)

Part c. (برای سوال)

\* برای بررسی CE بودن فرایند باید در شرط زیر بررسی کنیم:

①  $\rightarrow R_X(t+z, t) = R_X(z)$

②  $\rightarrow \langle \langle E(X(t_1+z)X^*(t_1)X(t_2)X(t_2+z)) \rangle \rangle_{t_1, t_2} = |R_X(z)|^2$

برای بررسی:  $\langle \langle E(X(t_1+z)X^*(t_1)X(t_2)X(t_2+z)) \rangle \rangle_{t_1, t_2} = \langle \langle e^{-2|z|} + e^{-|t_1-t_2+z|}e^{-|t_1-t_2-z|} + e^{-2|t_1-t_2|} \rangle \rangle_{t_1, t_2} = |R_X(z)|^2 = e^{-2|z|}$

ساده‌سازی  $\Rightarrow \langle \langle e^{-|t_1-t_2+z|}e^{-|t_1-t_2-z|} + e^{-2|t_1-t_2|} \rangle \rangle_{t_1, t_2} = 0$

$\rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T (e^{-|t_1-t_2+z|}e^{-|t_1-t_2-z|} + e^{-2|t_1-t_2|}) dt_1 dt_2$

\*  $\rightarrow \int_{-T}^T \int_{-T}^T C(t_1-t_2) dt_1 dt_2 = \int_{-2T}^{2T} (2T-|z|) C(z) dz$

$\rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-2T}^{2T} (2T-|z|) (e^{-|z+z|} + e^{-2|z|}) dz$   
 $= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T^2} \int_0^{2T} (2T-|z|) (e^{-|z+z|} + e^{-2|z|}) dz$

$\approx \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T^2} (P(T)) = 0 \rightarrow$  فرایند CE نخواهد بود  
 (شامل درجه دوم T نخواهد بود)

Part a.  $Y(t) + \frac{d}{dt} Y(t) = X(t), \forall t > 0 \xrightarrow{\mathcal{L}} (s+1)Y(s) = X(s) \rightarrow H(s) = \frac{1}{s+1}$

$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(t) = e^{-t} u(t)$

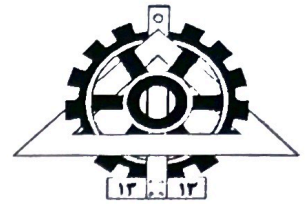
$R_Y(z) = R_X(z) * h^*(-z) * h(z) = e^{-|z|} * e^z u(-z) * e^{-z} u(z)$   
 $= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{1-s^2} \cdot \frac{2}{1-s^2} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{(1-s^2)^2} \right\}$   
 $= \frac{1}{2} e^{-z} (1+z) - \frac{1}{2} e^z (1-z)$

## Homework #6

Stochastic Process – Fall 2024

Instructor: Dr. Ali Olfat

Erfan Panahi (Student Number: 810103084)



**Problem 2.**  $\{A_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  : i.i.d ;  $P(A_k = 1) = P(A_k = -1) = \frac{1}{2}$

$X(t) = A_i$  ;  $t_i < t < t_{i+1}$  ;  $t_i$ : time of occurrence of  $i$ -th poisson point

**Part a.** Mean and Auto-Correlation of  $X(t)$ :

$$E(X(t)) = m_X(t) = E(A_i) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times (-1) = 0$$

$$R_X(t_1, t_2) = E(X(t_1) \cdot X^*(t_2)) = E(X(t_1) X(t_2)) = E(A_i A_j) \equiv \begin{cases} E(A_i^2) = 1 & ; i=j \\ E(A_i A_j) = 0 & ; i \neq j \end{cases}$$

$Z$ : Number of poisson points in  $(t_1, t_2)$

$$P(Z = k) = e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^k}{k!} \longrightarrow P(Z = 0) = e^{-\lambda(t_2 - t_1)}$$

$$\Rightarrow R_X(t_1, t_2) = P(Z = 0) = e^{-\lambda|t_2 - t_1|} \longrightarrow R_X(z) = e^{-\lambda|z|}$$

**Part b.** is  $X(t)$  IIP?

IIP def.  $X(t_1) \cup X(t_2) - X(t_1) \cup \dots \cup X(t_n) - X(t_{n-1})$  مستقل نیست  $\Leftarrow$  IIP نیست.

$$\textcircled{1} \text{ حالت: } X(t_2) = -1, X(t_1) = 1 \Rightarrow X(t_2) - X(t_1) = -2 \Rightarrow X(t_2) - X(t_1) \not\perp X(t_1)$$

$$\textcircled{2} \text{ حالت: } X(t_2) = -1, X(t_1) = -1 \Rightarrow X(t_2) - X(t_1) = 0$$

**Part c.** در فرایند مورد نظر تعداد فرایندها در هر  $t$  هیچ وابستگی ای به تعداد فرایندها در  $t$  قبلی ندارد و کاملاً ایزان مستقل است  $\Leftarrow$  فرایند  $X(t)$  مارکوف است.

$$t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n \Rightarrow P_{X_n}(X_n | X(t_1) = X_1, \dots, X(t_{n-1}) = X_{n-1}) = P_{X_n}(X_n | X_{n-1} = X(t_{n-1}))$$

**Part d.** SSS R.P  $\Rightarrow P_X(X_1, X_2, \dots, X_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P_X(X_1, X_2, \dots, X_n; t_1 + c, t_2 + c, \dots, t_n + c)$

که با توجه به اینکه  $c$  را هر مقدار تغییر دهیم تفاوتی در احتمال ایجاد نمی کند  $\Leftarrow$  SSS است.

که با آنقدر بزرگ است که نقاط را جایی نمی کند یا هیچ اتفاقی نمی افتد.

**Part e.** ME  $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |C_X(z)| dz < \infty$

$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |R_X(z)| dz = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-\lambda|z|}| dz = 2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} dz = \frac{2}{\lambda} < \infty$$

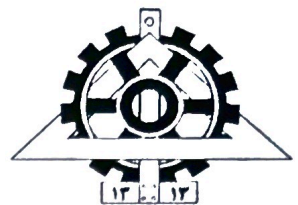


## Homework #6

Stochastic Process – Fall 2024

Instructor: Dr. Ali Olfat

Erfan Panahi (Student Number: 810103084)



**Problem 4.**  $X(t)$ : Wiener process with parameter  $N_0$ .

$$X(t) = \int_0^t W(\alpha) d\alpha, \quad E(X(t)) = m_X = 0, \quad W(t): \text{white noise} \Rightarrow R_W(z) = N_0 \delta(z)$$

WSS R.P.

$$\textcircled{*} \rightarrow R_X(t_1, t_2) = N_0 \min(t_1, t_2) = C_X(t_1, t_2)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T C_X(t_1, t_2) dt_1 dt_2 = 0$$

برای بررسی ME بودن، باید بررسی کنیم:

$$\Rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T N_0 \min(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \stackrel{\text{if } t_1 < t_2}{=} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^{t_2} N_0 t_1 dt_1 dt_2$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_0}{8T^2} \int_{-T}^T (t_2^2 - T^2) dt_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_0}{8T^2} \left( \frac{2T^3}{3} - 2T^3 \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{-N_0 T}{6} = \infty$$

در نتیجه این فرایند ME نخواهد بود.

**Problem 5.**  $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ : SSS & Ergodic.  $Y_n = \frac{1}{M+1} X_n$  ( $M \sim \text{Poisson}(\lambda=1) \cup X_n$ )

**Part a.**

$M \cup X_n$

$$f_M(m) = \frac{e^{-1}}{m!}$$

$$E(Y_n) = E\left(\frac{X_n}{M+1}\right) \stackrel{MUX_n}{=} E(X_n) \cdot E\left(\frac{1}{M+1}\right) = m_X E\left(\frac{1}{M+1}\right)$$

$$= m_X \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m+1} \frac{e^{-1}}{m!} = m_X e^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} = m_X e^{-1} (e - 1) = m_X (1 - e^{-1})$$

$$R_Y(t_1, t_2) = E(Y(t_1) Y^*(t_2)) = E\left(\left(\frac{1}{M+1}\right)^2\right) E(X(t_1) X^*(t_2)) = E\left(\left(\frac{1}{M+1}\right)^2\right) R_X(t_1, t_2)$$

$$= R_X(z) \cdot \underbrace{E\left(\left(\frac{1}{M+1}\right)^2\right)}_A = A R_X(z) \rightarrow R_Y(z) = A R_X(z)$$

همانطور که مشاهده می شود  $m_Y$  ضریب از  $m_X$  است.  $R_X(z)$  است.

با توجه به اینکه  $X(t)$  فرایند SSS است  $\Leftarrow Y_n(t)$  نیز فرایند SSS خواهد بود.

**Part b.**  $ME \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} E((Y_n - m_Y)^2) = 0$

① برای ME بودن باید بررسی کنیم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E((Y_n - m_Y)^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\left(\frac{X_n}{M+1} - m_X (1 - e^{-1})\right)^2\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\left(\frac{X_n}{M+1}\right)^2 - 2m_X (1 - e^{-1}) \frac{X_n}{M+1} + m_X^2 (1 - e^{-1})^2\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} E\left(\frac{X_n^2}{(M+1)^2}\right) - m_X^2 (1 - e^{-1})^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n^2) \cdot E\left(\frac{1}{(M+1)^2}\right) - m_X^2 (1 - e^{-1})^2 \neq 0$$

در نتیجه فرایند ME نخواهد بود  $\Leftarrow$  فرایند  $Y_n(t)$  ارگودیک نیست.