University of Tehran,
College of Engineering

Homework #06

Stochastic Process – Fall 2024
Instructor: **Dr. Ali Olfat**

Erfan Panahi (*Student Number:* **810103084**)

Problem 1. $E\{X(t)\} = 1 \quad , \quad R_X(t_1, t_2) = 1 + \exp(-(|t_1| + |t_2|))\,\delta(t_1 - t_2)$

Part a. $C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - E\{X(t)\} = \exp(-|t_1| - |t_2|)\,\delta(t_1 - t_2)$

$$\text{Mean Ergodic} \Rightarrow \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} C_X(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 \to 0$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} C_X(t_1,t_2)\, dt_1 dt_2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \exp(-|t_1| - |t_2|)\, \delta(t_1 - t_2)\, dt_1 dt_2$$

$t_1 = t_2$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} \exp(-2|t_1|)\, \delta(t_1 - t_2)\, dt_2\, dt_1$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^{T} \exp(-2|t_1|)\, dt_1$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T^2} \int_{0}^{T} \exp(-2t)\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{-1}{4T^2} \exp(-2t)\Big|_0^T$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T^2} \left[1 - \exp(-2T)\right] = 0 \longrightarrow \text{Mean-Ergodic} \checkmark$$

Part b. با توجه به اینکه فرایند تصادفی $X(t)$ ایستان WSS نیست $(R_X(t_1, t_2) \neq R_X(t_1 - t_2))$، نمی‌تواند ارگادیک در خودهمبستگی باشد.

Problem 3. $X(t)$: zero-mean, real-valued, stationary Gaussian RP. $\quad R_X(\tau) = e^{-|\tau|}$

Part a. $E(X_1 X_2 X_3 X_4) = E(X_1 X_2)E(X_3 X_4) + E(X_1 X_3)E(X_2 X_4) + E(X_1 X_4)E(X_2 X_3)$

- با توجه به تابع مشخصه یک بردار تصادفی گوسی خواهیم داشت:

$$\Phi_X(\omega) = e^{j\underline{\omega}^T \underline{m}_X} \cdot e^{-\frac{1}{2}\underline{\omega}^T C \underline{\omega}} = e^{-\frac{1}{2}\underline{\omega}^T C \underline{\omega}} \longrightarrow C_{ij} = E(X_i X_j)$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega}\left(-\frac{1}{2}\omega^T C \omega\right) = \frac{\partial}{\partial \omega}\left[-\frac{1}{2}[\omega_1, \dots, \omega_n]\, C \begin{bmatrix}\omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n\end{bmatrix}\right] = -C\omega$$

- از طرفی اگر نسبت به ω_i مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial \omega_i}\left(\Phi_X(\omega)\right) = \frac{\partial}{\partial \omega_i}\left(-\frac{1}{2}\underline{\omega}^T C \underline{\omega}\right) e^{-\frac{1}{2}\underline{\omega}^T C \underline{\omega}}$$

$$= -[\underset{0}{0} \cdots \underset{i}{1} \cdots \underset{n}{0}]\, C\, \underline{\omega}\, e^{-\frac{1}{2}\underline{\omega}^T C \underline{\omega}} = -\sum_{j=1}^{n} C_{ij}\, \omega_j\, e^{-\frac{1}{2}\omega^T C \omega}$$

در نهایت داریم $\Rightarrow$

$$\underbrace{\frac{\partial^4}{\partial \omega_1 \partial \omega_2 \partial \omega_3 \partial \omega_4} \Phi_X(\omega)\Big|_{\omega = 0}}_{E(X_1 X_2 X_3 X_4)} = \underbrace{C_{21} C_{43} + C_{31} C_{42} + C_{41} C_{32}}_{E(X_1X_2)E(X_3X_4) + E(X_1X_3)E(X_2X_4) + E(X_1X_4)E(X_2X_3)} \Longrightarrow$$

بعد از انجام ساده‌سازی‌ها، به اینجا رسیده شد ✓

$$E(X_1 X_2 X_3 X_4) = E(X_1X_2)E(X_3X_4) + E(X_1X_3)E(X_2X_4) + E(X_1X_4)E(X_2X_3)$$

در نهایت به این شکل حکم ثابت می‌شود.

University of Tehran,
College of Engineering

Homework #6

Stochastic Process – Fall 2024

Instructor: Dr. Ali Olfat

Erfan Panahi (Student Number: 810103084)

Prat b. $\int_{-\infty}^{+\infty} |C_x(\tau)|\, d\tau < \infty$ ⇐ برای بررسی ارگادیک در میانگین بودن کافی است بررسی کنیم

$$\text{zero-mean} \Rightarrow C_x(\tau) = R_x(\tau) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |R_x(\tau)|\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|\tau|}\, d\tau = 2\int_0^{\infty} e^{-\tau}\, d\tau = -2e^{-\tau}\Big|_0^{\infty} = 2 < \infty$$

در نتیجه با توجه به محدود بودن انتگرال $C_x(\tau) = R_x(\tau)$ ⇐ فرایند ارگادیک در میانگین خواهد بود. (✓ ME)

Part c. ★ برای بررسی CE بودن فرایند باید دو شرط زیر را بررسی کنیم:

① → $R_x(t+\tau, t) = R_x(\tau)$ برقرار است. (صورت سوال)

② → $\langle\langle E\left(X(t_1+\tau)X^*(t_1)X(t_2)X(t_2+\tau)\right)\rangle_{t_1}\rangle_{t_2} = |R_x(\tau)|^2$

برای ②: $\langle\langle E\left(X(t_1+\tau)X^*(t_1)X(t_2)X(t_2+\tau)\right)\rangle_{t_1}\rangle_{t_2} = \langle\langle e^{-2|\tau|} + e^{-|t_1-t_2+\tau|}e^{-|t_1-t_2-\tau|} + e^{-2|t_1-t_2|}\rangle_{t_1}\rangle_{t_2}$

$$= |R_x(\tau)|^2 = e^{-2|\tau|}$$

ساده‌سازی $\Rightarrow \langle\langle e^{-|t_1-t_2+\tau|}e^{-|t_1-t_2-\tau|} + e^{-2|t_1-t_2|}\rangle_{t_1}\rangle_{t_2} = 0$

$$\to \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}\left(e^{-|t_1-t_2+\tau|-|t_1-t_2-\tau|} + e^{-2|t_1-t_2|}\right) dt_1\, dt_2$$

$$* \to \int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} C(t_1-t_2)\, dt_1\, dt_2 = \int_{-2T}^{2T} (2T-|z|)\, C(z)\, dz$$

$$\to \lim_{T\to\infty} \frac{1}{4T^2}\int_{-2T}^{2T} (2T-|z|)\left(e^{-|z+\tau|-|z-\tau|} + e^{-2|z|}\right) dz$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T^2}\int_{0}^{2T} (2T-|z|)\left(e^{-|z+\tau|-|z-\tau|} + e^{-2|z|}\right) dz$$

$$\simeq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T^2}\left(f(T)\right) = 0 \longrightarrow$$ فرایند CE خواهد بود

شامل درجه دوم T نخواهد بود

Part e. $Y(t) + \frac{d}{dt}Y(t) = X(t)$, $\forall t > 0$ $\xrightarrow{\mathcal{L}} (s+1)Y(s) = X(s) \longrightarrow H(s) = \frac{1}{s+1}$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} h(t) = e^{-t}u(t)$$

$$R_Y(\tau) = R_x(\tau) * h^*(-\tau) * h(\tau) = e^{-|\tau|} * e^{\tau}u(-\tau) * e^{-\tau}u(\tau)$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{1-s^2}\cdot\frac{2}{1-s^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(1-s^2)^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-\tau}(1+\tau) - \frac{1}{2}e^{\tau}(1-\tau)$$

University of Tehran,
College of Engineering

Homework #6

Stochastic Process – Fall 2024
Instructor: Dr. Ali Olfat

Erfan Panahi (*Student Number:* 810103084)

Problem 2. $\{A_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$: i.i.d ; $P(A_k = 1) = P(A_k = -1) = \frac{1}{2}$

$X(t) = A_i$; $t_i < t < t_{i+1}$; t_i: time of occurance of i-th poisson point

Part a. Mean and Auto-Correlation of $X(t)$:

$$E(X(t)) = m_X(t) = E(A_i) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times (-1) = 0$$

$$R_X(t_1, t_2) = E(X(t_1) \cdot X^*(t_2)) = E(X(t_1)X(t_2)) = E(A_i A_j) \equiv \begin{cases} E(A_i^2) = 1 & ; \ i = j \\ E(A_i A_j) = 0 & ; \ i \neq j \end{cases}$$

Z : Number of poisson points in (t_1, t_2)

$$P(Z = k) = e^{-\lambda(t_2 - t_1)} \frac{(\lambda(t_2 - t_1))^k}{k!} \longrightarrow P(Z = 0) = e^{-\lambda(t_2 - t_1)}$$

$$\Rightarrow R_X(t_1, t_2) = P(Z = 0) = e^{-\lambda|t_2 - t_1|} \longrightarrow R_X(\tau) = e^{-\lambda|\tau|}$$

Part b. is $X(t)$ IIP?

IIP def. $X(t_1) \perp\!\!\!\perp X(t_2) - X(t_1) \perp\!\!\!\perp \cdots \perp\!\!\!\perp X(t_n) - X(t_{n-1})$

① حالت : $X(t_2) = -1$, $X(t_1) = 1 \Rightarrow X(t_2) - X(t_1) = -2$

② حالت : $X(t_2) = -1$, $X(t_1) = -1 \Rightarrow X(t_2) - X(t_1) = 0$

$\Rightarrow X(t_2) - X(t_1) \not\!\perp\!\!\!\perp X(t_1)$

مستقل نیست ⇐ IIP نیست .

Part c. در فرایند مورد نظر مقدار فرایند در هر t هیچ وابستگی ای به مقدار فرایند در t قبلی ندارد و کاملاً از آن مستقل است ⇐ فرایند $X(t)$ مارکوف است .

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n \Rightarrow f_{X_n}(x_n \mid X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}) = f_{X_n}(x_n \mid x_{n-1} = X(t_{n-1}))$$

Part d. $SSS \ R.P \Rightarrow f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = f_X(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1 + c, t_2 + c, \ldots, t_n + c)$

با توجه به اینکه c را هر چقدر تغییر بدهیم تفاوتی در احتمال ایجاد نمی کند ⇐ SSS است .

یا انقدر بزرگ است که نقاط را جابجا کند یا هیچ اتفاقی نمی افتد .

Part e. $ME \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |C_X(\tau)| \, d\tau < \infty$

$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |R_X(\tau)| \, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-\lambda|\tau|}| \, d\tau = 2\int_0^{\infty} e^{-\lambda\tau} \, d\tau = \frac{2}{\lambda} < \infty$$

University of Tehran,
College of Engineering

Homework #6

Stochastic Process – Fall 2024

Instructor: **Dr. Ali Olfat**

Erfan Panahi (*Student Number:* **810103084**)

Problem 4. $X(t)$: Wiener process with parameter N_0.

$$X(t)=\int_0^t W(\alpha)\,d\alpha \quad , \quad E(X(t))=m_X=0 \quad , \quad W(t): \text{white noiss WSS R.P.} \Rightarrow R_W(\tau)=N_0\,\delta(\tau)$$

$$\circledast \longrightarrow R_X(t_1,t_2)=N_0\min(t_1,t_2)=C_X(t_1,t_2)$$

برای بررسی ME بودن، باید بررسی کنیم که :

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}C_X(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2=0$$

$$\Rightarrow \lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}N_0\min(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2 \overset{\text{if } t_1<t_2}{=} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{t_2}N_0 t_1\,dt_1\,dt_2$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{N_0}{8T^2}\int_{-T}^{T}(t_2^2-T^2)\,dt_2=\lim_{T\to\infty}\frac{N_0}{8T^2}\left(\frac{2T^3}{3}-2T^3\right)=\lim_{T\to\infty}\frac{-N_0T}{6}=\infty$$

در نتیجه این فرایند ME نخواهد بود.

Problem 5. $\{X_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$: SSS & Ergodic. $Y_n=\frac{1}{M+1}X_n$ $\left(\underbrace{M\sim\text{Poisson}(\lambda=1)}_{f_M(m)=\frac{e^{-1}}{m!}} \perp X_n\right)$

Part a.

$$E(Y_n)=E\left(\frac{X_n}{M+1}\right)\overset{M\perp X_n}{=}E(X_n)\cdot E\left(\frac{1}{M+1}\right)=m_X\,E\left(\frac{1}{M+1}\right)$$

$$=m_X\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m+1}\frac{e^{-1}}{m!}=m_Xe^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+1)!}=m_Xe^{-1}(e-1)=m_X(1-e^{-1})$$

$$R_Y(t_1,t_2)=E(Y(t_1)Y^*(t_2))=E\left(\left(\frac{1}{M+1}\right)^2\right)E(X(t_1)X^*(t_2))=E\left(\left(\frac{1}{M+1}\right)^2\right)R_X\overset{t_1-t_2=\tau}{(t_1,t_2)}$$

$$=R_X(\tau)\cdot\underbrace{E\left(\left(\frac{1}{M+1}\right)^2\right)}_{A}=A\,R_X(\tau)\longrightarrow R_Y(\tau)=A\,R_X(\tau)$$

★ همانطور که مشاهده می شود m_Y ، $R_Y(\tau)$ ضریبی از m_X ، $R_X(\tau)$ است.

$\Leftarrow$ با توجه به اینکه $X(t)$ یک فرایند SSS است $\Leftarrow$ $Y_n(t)$ نیز یک فرایند SSS خواهد بود.

Part b. $ME\Rightarrow \lim_{n\to\infty}E((Y_n-m_Y)^2)=0$

① شرط ME بودن را برای فرایند $Y_n(t)$ بررسی می کنیم:

$$\lim_{n\to\infty}E((Y_n-m_Y)^2)=\lim_{n\to\infty}E\left(\left(\frac{X_n}{M+1}-m_X(1-e^{-1})\right)^2\right)=\lim_{n\to\infty}E\left(\left(\frac{X_n}{M+1}\right)^2-2m_X(1-e^{-1})\frac{X_n}{M+1}+m_X^2(1-e^{-1})^2\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}E\left(\frac{X_n^2}{(M+1)^2}\right)-m_X^2(1-e^{-1})^2=\lim_{n\to\infty}E(X_n^2)\cdot E\left(\frac{1}{(M+1)^2}\right)-m_X^2(1-e^{-1})^2\neq 0$$

در نتیجه فرایند ME نخواهد بود $\Leftarrow$ فرایند $Y_n(t)$ ارگودیک نیست.