University of Tehran,
College of Engineering

Homework

Stochastic Process – Fall 2024
Instructor: **Dr. Ali Olfat**

Erfan Panahi (*Student Number:* **810103084**)

Problem ۲

a)

$X_n(\omega) = e^{-n\omega}$, $n \geq 0$ $\quad \omega = 0 \longrightarrow X_1(0)\ X_2(0) \dots X_n(0)$ همگرا به ۱

$0 < \omega \leq 1 \longrightarrow x_n(\omega) = e^{-n\omega}$ $\quad e^{-\omega}, e^{-2\omega}, \dots, e^{-n\omega}$. $\lim\limits_{n \to \infty} X_n(\omega) =$

$\lim\limits_{n \to \infty} e^{-n\omega} = 0$ همگرا به ۰

$P(0 < \omega \leq 1) = 1 - 0 = 1$ تعریف

داریم : $x(\omega) = 0$ for all $\omega \in [0, 1]$

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n \longrightarrow x \quad 0 < x < 1$

$x_n \xrightarrow{a.s} x$

پس اگر $x_n(\omega)$ تقریبا همه جا به x همگرا باشد پس مطمئنیم احتمال و توزیع نیز به x همگرا خواهد بود. حال باید همگرایی به مفهوم میانگین مربعات را بررسی می‌کنیم

$\lim E\{|x_n - x|^2\} \overset{?}{=} 0$

$$E\{|x_n - x|^2\} = E\{|x_n|^2\} = \int_0^1 e^{-2n\omega}\, d\omega = -\frac{1}{2n} e^{-2n\omega}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2n}(1 - e^{-2n})$$

$$\longrightarrow \lim_{n \to \infty} E\{|x_n - x|^2\} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1 - e^{-2n}}{2n} \right) = 0 \quad X_n \xrightarrow[m.s]{} X$$

Homework

Erfan Panahi (*Student Number:* **810103084**)

b) $x_n(\omega) = \sin(\omega + \frac{1}{n})$ $n \geq 1$ $\omega = 0 \rightarrow X_n(0) = \sin(\frac{1}{n})$

$$\begin{Bmatrix} x_1(0) & x_2(0) & \dots & x_n(0) \\ \sin(1) & \sin(0.5) & \dots & \sin(\frac{1}{n}) \end{Bmatrix}$$

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n(0) = \lim\limits_{n \to \infty} \sin(\frac{1}{n}) = 0$ همگرا به $0 < \omega \leq 1 \longrightarrow x_n(\omega) =$

$\sin(\omega + \frac{1}{n}) = \sin\omega \cos\frac{1}{n} + \sin\frac{1}{n}\cos\omega$, $\lim\limits_{n \to \infty} X_n(\omega) = \lim\limits_{n \to \infty} (\sin(\omega)\cos\frac{1}{n} + \sin\frac{1}{n}\cos\omega) = \sin(\omega)$

دقت شود که برای حالت $\omega = 0$ نیز عملا می‌توانیم ادعا کنیم که به $\sin\omega$ همگرا شده‌ایم. پس در اینجا ما همگرایی به مصداق همه‌جا داریم. پس همگرایی تقریبا همه‌جا، همگرایی در احتمال و همگرایی در توزیع نیز نتیجه می‌شود. به بررسی همگرایی به مفهوم میانگین مربعات خواهیم پرداخت.

$$E\{|x_n - x|^2\} = E\{(\sin(\omega + \tfrac{1}{n}) - \sin(\omega))^2\}$$

$$= E\{(\sin\omega\cos\tfrac{1}{n} + \sin\tfrac{1}{n}\cos\omega - \sin\omega)^2\} = E\{(\sin\omega(\cos\tfrac{1}{n} - 1) + \sin\tfrac{1}{n}\cos(\omega))^2\}$$

$$= E\{\sin^2\tfrac{1}{n}\cos^2\omega + 2\sin\tfrac{1}{n}\cos\omega\sin\omega(\cos\tfrac{1}{n} - 1) + \sin^2\omega(\cos\tfrac{1}{n} - 1)^2\}$$

$$= E\{\underbrace{\sin^2\tfrac{1}{n}\cos^2\omega}_{E_1} + \underbrace{\sin\tfrac{1}{n}\sin 2\omega(\cos\tfrac{1}{n} - 1)}_{E_2} + \underbrace{\sin^2\omega(\cos\tfrac{1}{n} - 1)^2}_{E_3}\}$$

$= E_1 + E_2 + E_3$

$= \sin^2 \frac{1}{n} \int_0^1 \cos^2 w \, dw + \sin \frac{1}{n} \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right) \int_0^1 \sin 2w \, dw + \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right)^2$

$\int_0^1 \sin^2(w)$

$= \sin^2 \frac{1}{n} \left[\frac{1}{2} + \frac{\sin 2}{4} \right] + \sin \frac{1}{n} \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right) \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos 2}{2} \right]$

$+ \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right)^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{\sin 2}{4} \right]$

$\lim_{n \to \infty} E\{ | \quad |^2 \} = \lim_{n \to \infty} \sin^2 \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sin 2}{4} \right] +$

$\lim_{n \to \infty} \sin \frac{1}{n} \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right) \left[\frac{1}{2} - \frac{\cos 2}{2} \right] + \lim_{n \to \infty} \left(\cos \frac{1}{n} - 1 \right)^2$

$\left[\frac{1}{2} + \frac{\sin 2}{4} \right] = 0 \longrightarrow x_n \xrightarrow{m.s} x$ ✓

c) $x_n(w) = \cos^n(w)$, $n \geq 0$. $w = 0$, $x_n(0) = 1$ → همیشه برابر

$0 < w \leq 1 \rightarrow x_n(w) = \cos^n(w) \qquad \cos 1 \leq \cos^n(w) < 1 \longrightarrow \cos 1 \leq x_n(w) < 1$

$\lim_{n \to \infty} x_n(w) = \lim_{n \to \infty} \cos^n(w) = 0 \qquad x_n(w)$ با توجه به کران

University of Tehran,
College of Engineering

Homework

Stochastic Process – Fall 2024
Instructor: Dr. Ali Olfat

Erfan Panahi (*Student Number:* 810103084)

$P\{0 \leq w \leq 1\} = 1 \xrightarrow{\text{تعریف می‌کنیم}} x(w) = 0$ for all $w \in (0,1]$ $x_n(w) \xrightarrow{m.s} X$

همگرایی به مفهوم تقریبا همه جا داریم. پس همگرایی به مفهوم احتمال، توزیع نیز برقرار می‌شود. حال باید همگرایی به مفهوم میانگین مربعات را بررسی کنیم

$$E\{|x_n - x|^2\} = E\{|x_n|^2\} = E\{\cos^{2n}(w)\}$$

$$= \int_0^1 \cos^{2n}(w)\, dw = \frac{1}{2n+1} \cos^{2n+1}(w) \Big|_0^1 = \frac{1}{2n+1}\left[\cos^{2n+1} - 1\right]$$

$$, \lim_{n \to \infty} E\{|x_n - x|^2\}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\cos x^{2n+1} - 1}{2n - 1} = 0 \quad \lim_{n \to \infty} E\{|x_n - x|^2\} = 0 \ , X_n \xrightarrow{m.s} X$$

Problem 2

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \longrightarrow$ i.i.d $\quad x_i \sim \text{uniform}(0,1) \quad y_n = n(1 - \max(x_1, \dots x_n))$ $\quad n = 1, 2, \dots$

$y \sim \exp(1) = f_y(y) = e^{-y} u(y)$ Prove : $y_n \xrightarrow{d} y \quad \lim_{n \to \infty} F_{y_n}(y) \longrightarrow F_y(y)$

$F_{y_n}(y) = P(y_n \leq y) = P(n(1 - \max(x_1, \dots x_n)) \leq y) = P(\max(x_1 \dots x_n) \geq 1 - y/n)$

اینجا یک متغیر تصادفی $w = \max(x_1, \dots x_n)$ تعریف خواهیم کرد. درباره CDF و PDF آن داریم:

$F_w(w) = P(W \leq w) = P(\max(X_1, \dots X_n) \leq w) = P(X_1 \leq w, X_2 \leq w, \dots x_n \leq w)$

$= P(X_1 \leq w)\,P(X_2 \leq w)\cdots P(X_n \leq w) = [F_X(w)]^n \quad F_W(w) = F_X^n(w)$

$f_W(w) = \frac{\partial}{\partial w} F_W(w) = n F_X^{n-1}(w)\, f_X(w)$

حال به حل مسئله برمی‌گردیم:

$F_{Y_n}(y) = P(W \geq 1 - \frac{y}{n}) = 1 - P(W < 1 - \frac{y}{n})$

$\Rightarrow F_{Y_n}(y) = 1 - F_X^n(1 - \frac{y}{n}) \quad \infty \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$

برای حالتی که آرگومان $F_{Y_n}(y)$ از صفر کمتر باشد یعنی $y < 0$ ∞ $F_X(1-\frac{y}{n})$ آرگومان بزرگتر از یک دارد لذا $F_{Y_n}(y) = 0$ می‌شود برای حالتی که $y > 0$ باشد نیز $1-\frac{y}{n}$ احتمالا مقداری بین ۰ تا ۱ دارد.
برای این حالت خواهیم داشت.

$F_{Y_n}(y) = 1 - (1 - \frac{y}{n})^n, \quad \lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = \lim_{n\to\infty} [1 - (1 - \frac{y}{n})^n] = 1 - e^{-y}$

$y \geq 0$

$\rightarrow \lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = (1 - e^{-y})\,u(y) \quad F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(y)\,dy$

$= \int_{-\infty}^{y} e^{-y} u(y)\,dy = \int_0^y e^{-y}\,dy$

$= 1 - e^{-y}, \quad y \geq 0 \longrightarrow F_Y(y) = (1 - e^{-y})\,u(y) \quad \lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = F_Y(y)$

$\longrightarrow Y_n \xrightarrow{d} Y$

University of Tehran,
College of Engineering

Homework

Stochastic Process – Fall 2024
Instructor: Dr. Ali Olfat

Erfan Panahi (*Student Number:* 810103084)

Problem ۳

a)

$$f_{X_n}(x) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\exp\left[\frac{-1}{2\delta^2}\left(x-\frac{n-1}{n}\delta\right)^2\right] + \frac{1}{n}\delta\exp(-\delta x)U(x)$$

m.s ? $\lim_{n\to\infty} E\{|x_n - x|^2\} = 0$? $E\{(x_n + x)^2\} = E\{x_n^2\} - 2E\{x_n x\} + E\{x^2\}$

$$= E\{x_n^2\} - 2E\{x_n\}E\{x\} + E\{x^2\}$$

بخواهیم مقادیر فوق را حساب کنیم پس محاسبات بسیار سخت می‌شود. لذا از این بخش حذف می‌کنیم.

$$\lim_{n\to\infty} E\{|x_n - x|^2\} = \lim_{n\to\infty} E\{x_n^2\} - 2\lim E\{x_n\}E\{X\}$$

$$+\lim_{n\to\infty} E\{x^2\} = \lim_{n\to\infty} E\{x_n^2\} - 2E\{x\}\lim_{n\to\infty} E\{x_n\} + E\{x^2\}$$

X متغیر تصادفی نرمال با میانگین δ و واریانس δ^2 است پس داریم:

$$\lim E\{|x_n - x|^2\} = 2\delta^2 - 2\delta^2 + 2\delta^2 = 2\delta^2 \neq 0$$

$$\lim_{n\to\infty} E\{|x_n - x|^2\} = 2\delta^2 \neq 0$$

همگرایی بر مفهوم میانگین مربعات نداریم.

b) $\lim_{n\to\infty} P(|x_n - x| \geq \varepsilon) = 0$? or $\lim_{n\to\infty} P(|x_{n-1} - x_n|) = 0$

Markov : $P(|x_n - x| \geq \varepsilon) = P(|x_n - x|^2 \geq \varepsilon^2) \leq E\frac{|x_n - x|^2}{\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{\lim}$

$$\lim_{n\to\infty} P(|x_n - x| \geq \varepsilon) \leq \frac{2\delta^2}{\varepsilon^2} \longrightarrow$$

همگرایی در احتمال ندارد

University of Tehran,
College of Engineering

Homework

Stochastic Process – Fall 2024
Instructor: Dr. Ali Olfat

Erfan Panahi (*Student Number:* 810103084)

---

c) $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) \to F_X(x) \xrightarrow{d/dx} \lim_{n\to\infty} f_{X_n}(x) \to f_X(x)$

$$\lim_{n\to\infty} f_{X_n}(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right) \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-1}{2\sigma^2}\left(x - \frac{n-1}{n}\sigma\right)^2\right\}$$

$$+ \frac{1}{n}\sigma \exp(-\sigma x) u(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\sigma)^2}{2\sigma^2}\right\} \sim N(\sigma, \sigma^2)$$

$X_n \xrightarrow{d} X$

Problem ٧ $F_{X_n}(x) = \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}}$ $x = -\infty \to F_{X_n}(x) = \to F_X(x) = 0$

a)

$$F_X(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}} = \lim \frac{e^{nx}}{e^{nx}} = 1 \quad F_X(x) = 1$$

$F_X(x)$ که صعودی است ادعا کرد ویژگی های یک CDF را دارد. به ازای $x>0$ مقدار ۱ را اختیار می‌کند و به ازای $x<0$ هم مقدار F آن صفر است. پس یکی از CDF بودن نقض می‌شود.

if $x<0$ $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) = 0$

b) درصورتی که نتوانیم دریابیم به چه چیزی همگرا می‌شود. از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$\lim\left(F_{X_{n+k}}(x) - F_{X_n}(x)\right) \to 0 \,? \quad \forall k>0 \quad \lim_{n\to\infty} \left|F_{X_{n+k}}(x) - F_{X_n}(x)\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{e^{(n+k)x}}{1+e^{(n+k)x}} - \frac{e^{nx}}{1+e^{nx}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{(n+k)x}(1+e^{nx}) - e^{nx}(1+e^{(n+k)x})}{(1+e^{(n+k)x})(1+e^{nx})}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{nx}e^{kx} + e^{2nx}e^{kx} - e^{nx} - e^{2nx}e^{kx}}{(1+e^{nx}e^{kx})(1+e^{nx})} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{nx}e^{kx} - e^{nx}}{(1+e^{nx}e^{kx})(1+e^{nx})}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{nx}(e^{kx}-1)}{(1+e^{nx}e^{kx})(1+e^{nx})} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(F_{X_{n+k}}(x) - F_{X_n}(x) \right) = 0 \quad \forall k > 0 : x_n \xrightarrow{d} x$$

پس همگرایی در توزیع برقرار است

متغیر تصادفی X را به گونه‌ای تعریف می‌نماییم که باشد.

$$X : F_X(x) = 1 \quad x > 0$$
$$F_X(x) = 0 \quad x < 0$$

Problem 7

$\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ independent Gaussian $m_{w_i} = 0$ $\mathrm{Var}(w_i) = \sigma^2 > 0$

$$x_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + w_k) \quad x_0 = 0 \quad x_1 = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}w_1 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2}w_1$$

$$x_2 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}w_2 = \frac{1}{4}w_1 + \frac{1}{2}w_2 \;,\; x_3 = \frac{1}{2}x_2 + w_3 = \frac{1}{8}w_1 + \frac{1}{4}w_2 + \frac{1}{2}w_3$$

$$\rightarrow x_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i+1} w_i$$

حال به بررسی همگرایی ها خواهیم پرداخت. نمی‌دانیم به چه همگرا می‌شویم، از شروط کوشی استفاده می‌کنیم

$$\text{m.s} : \lim_{n\to\infty} E\{|x_{n+k} - x_n|^2\} \longrightarrow 0 !$$

Erfan Panahi (*Student Number:* **810103084**)

$$E\{|x_{n+k}-x_n|^2\} = E\left\{\left(\sum_{i=1}^{n+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-i+1} w_i - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i+1} w_i\right)^2\right\}$$

$$= E\left\{\sum_{i=1}^{n+k}\sum_{j=1}^{n+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-j+1} w_i w_j\right\} +$$

$$E\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j+1} w_i w_j\right\}$$

$$-2E\left\{\sum_{i=1}^{n+k}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j+1} w_i w_j\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+k}\sum_{j=1}^{n+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-j+1} E\{w_i w_j\}$$

$$-2E\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j+1} w_i w_j \}$$

$$= \sum_{i=1}^{n+k}\sum_{j=1}^{n+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-j+1} E\{w_i w_j\}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j+1} E\{w_i w_j\}$$

$$-2\sum_{i=1}^{n+k}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-i+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-j+1} E\{w_i w_j\}$$

پس داریم. می‌دانیم : $E\{w_i w_j\} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ E\{w_i^2\} = \sigma^2 & i = j \end{cases}$

$$E\{|x_{n+k} - x_n|^2\} = \sum_{i=1}^{n+k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n+k-i+1)} \sigma^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-i+1)} \sigma^2$$

$$- 2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-i+1)} \sigma^2$$

معادل به ازای $i = n+1$ تا $i = n+k$

چون $E\{w_i w_j\}$ صفر می‌شود از آن صرف نظر کرد

$$\lim_{n\to\infty} E\{|x_{n+k} - x_n|^2\} = \sigma^2 \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n+k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n+k-i+1)} - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2(n-i+1)} \right)$$

$$= \sigma^2 \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n+k+1} \sum_{i=1}^{n+k} 4^i - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \sum_{i=1}^{n} 4^i \right] \neq 0$$

همگرایی در m.s نداریم

حال به بررسی همگرایی در احتمال خواهیم پرداخت.

$$\lim_{n\to\infty} P\{|x_{n+k} - x_n| \geq \varepsilon\} \to 0$$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n+k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-i+1} w_i - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i+1} w_i \geq \varepsilon \right)$$

$$P\left(\sum_{i=1}^{n+k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-i+1} w_i - \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i+1} w_i \geq \varepsilon \right)$$

$$P = \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-i} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{k} - 1 \right) w_i + \sum_{j=n+1}^{n+k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k-i-1} \geq e \right.$$

University of Tehran,
College of Engineering

Homework

Stochastic Process – Fall 2024
Instructor: **Dr. Ali Olfat**

Erfan Panahi (*Student Number:* **810103084**)

$\rightarrow \lim_{n\to\infty} P\{|x_{n+k}-x_n| \geq e\} \neq 0 \rightarrow$ همگرایی در احتمال نیز نداریم

به بررسی همگرایی در توزیع می‌پردازیم :

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i+1} w_i$$

می‌دانیم که مجموع متغیرهای تصادفی گاوسی خود نیز گاوسی خواهند بود. لذا می‌توانیم بنویسیم :

$$m_{x_n} = E\left\{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-i+1} w_i\right\} = 0 \quad \text{if} \Rightarrow Z = ax_1 + bx_2 + \dots + Zx_n$$

$$\rightarrow Var(Z) = a^2 Var(x_1) + b^2 Var(x_2) + \dots + Z Var(x_n)$$

$$\rightarrow Var(x_n) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-i+1}\right)^2 = 8 = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{-2n} \cdot 2^{2i} \rightarrow$$

$$Var(x_n) = 2^{-2n} \left(\frac{1-4^n}{-3}\right) \sigma^2 = \frac{-2^{-2n}}{3} (1-4^n) \sigma^2$$

$$x_n \sim \left(0, \frac{-4^{-n}}{3}(1-4^n)\sigma^2\right) \quad \lim_{n\to\infty} Var(x_n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{3}(4^{-n}-1)\sigma^2 = -\frac{\sigma^2}{3} \quad . \lim_{n\to\infty} x_n \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{3}\right)$$

پس x_n هنگامی که $n \to \infty$ به یک متغیر تصادفی نرمال با میانگین ۰ و واریانس $\frac{\sigma^2}{3}$ همگرا می‌شود لذا داریم :

$$X_n \xleftrightarrow{d} X$$

University of Tehran,
College of Engineering

Homework

Stochastic Process – Fall 2024
Instructor: Dr. Ali Olfat

Erfan Panahi (*Student Number:* 810103084)

Problem 1

a.) $\{Z_k\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow$ i.i.d Rando Variables $Z_k \sim N(0,1)$

$X_k = 0.5 X_{k-1} + Z_k \qquad X_0$

$X_1 = 0.5\, x_0 + Z_1 \qquad X_2 = 0.5\, x_1 + Z_2 = \frac{1}{4} x_0 + \frac{1}{2} Z_1 + Z_2$

$x_3 = \frac{1}{2} x_2 + Z_3 = \frac{1}{8} x_0 + \frac{1}{4} Z_1 + \frac{1}{2} Z_2 + Z_3$

$$X_k = f(x_0, Z_1, \ldots Z_k) = \frac{1}{2^k} x_0 + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-i} Z_i$$

$$\rightarrow x_k = \frac{1}{2^k} x_0 + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-i} Z_i$$

به سادگی می‌توانیم استنتاج کنیم که اگر x_0 را گاوسی بگیریم با توجه به این که Z_i ها نیز گاوسی بوده و از هم
مستقل اند و از x_0 هم مستقل خواهند بود. لذا x_k ها نیز دارای توزیع یکسان و نرمال خواهند بود

$$m_{x_k} = E\{x_k\} = \frac{1}{2^k} E\{x_0\} + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} E\{Z_i\} \rightarrow m_{x_k} = \frac{1}{2^k} E\{x_0\}$$

$$Var(x_k) = \sigma_{x_k}^2 = E\{x_k^2\} - m_{x_k}^2$$

به محاسبه $E(x_k)$ خواهیم پرداخت.

$$E(x_k^2) = E\left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^k x_0 + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-i} Z_i \right\}^2$$

$$= E\{ (\tfrac{1}{2})^k x_0 + (\tfrac{1}{2})^{k-1} z_1 + (\tfrac{1}{2})^{k-2} z_2 + \dots z_k \}^2$$

$$\to E(x_k^2) = (\tfrac{1}{2})^{2k} E\{x_0^2\} + (\tfrac{1}{2})^{2(k-1)} E\{z_1^2\} + \dots + (\tfrac{1}{4}) E\{z_{k-1}^2\} + (\tfrac{1}{2}) E\{z_k^2\}$$

$$\to E(x_k^2) = (\tfrac{1}{4})^k E\{x_0^2\} + (\tfrac{1}{4})^{k-1} + \dots + \tfrac{1}{4} + 1 \longrightarrow$$

$$E(x_k^2) = (\tfrac{1}{4})^k E(x_0^2) + \sum_{i=0}^{k-1} (\tfrac{1}{4})^i = (\tfrac{1}{4})^k E(x_0^2) + \frac{1-(\tfrac{1}{4})^k}{\tfrac{3}{4}} = (\tfrac{1}{4})^k E(x_0^2) + \tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^{k-1}$$

$$= (\tfrac{1}{4})^k E(x_0^2) + \tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^{k-1} = \tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^{k-1} + (\tfrac{1}{4})^k E(x_0^2)$$

$$\to E(x_k^2) = \tfrac{4}{3} - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4})^{k-1} + (\tfrac{1}{4})^k E(x_0^2)$$

برای اینکه همه چیز همگوس یک توزیع شود فرض زیر را می‌کنیم.

$$m_{x_0} = E\{x_0\} = 0 \longrightarrow E\{x_k\} = m_k = 0 \qquad k = 1, 2, \dots$$

$$E(x_0^2) = \sigma_{x_0}^2 = \tfrac{4}{3} \longrightarrow \sigma_{x_k}^2 = \tfrac{4}{3} \to X_k \sim N(0, \tfrac{4}{3})$$

$$X_0 \sim N(0, \tfrac{4}{3})$$

$$x_1 = \tfrac{1}{2} x_0 + z_1 \longrightarrow m_{x_1} = 0 \quad Var(x_1) = \sigma_{x_1}^2 = \tfrac{1}{4}\sigma_{x_0}^2 + \sigma_{z_1}^2 = \tfrac{1}{4} \times \tfrac{4}{3} + 1 = \tfrac{4}{3}$$

$x_2 = \frac{1}{4}x_0 + \frac{1}{2}z_1 + z_2 \to m_{x_2} = 0$

$\mathrm{Var}(x_2) = \sigma_{x_2}^2 = \frac{1}{18}\sigma_{x_0}^2 + \frac{1}{4}\sigma_{z_1}^2 + \sigma_{z_2}^2 = \frac{4}{3}$ ✓

سپس توانستیم کاری کنیم که x_k ها توزیع یکسان شود:

$x_0 \sim N(0, \frac{4}{3})$

b) $E\{X_{n+k}X_k\} = E\{(\frac{1}{2}x_{n+k-1} + z_{n+k})X_k\} = \frac{1}{2}E\{x_{n+k-1}X_k\} + E\{X_k z_{n+k}\} = \frac{1}{2}E\{X_{n+k-1}X_k\} = \frac{1}{2}E\{(\frac{1}{2}x_{n+k-2} + z_{n+k-1})x_k\}$

$= \frac{1}{4}E\{x_{n+k-2}X_k\}$

مشاهده می‌شود که یک حالت loop مانند داریم و همینطور ضرایب $\frac{1}{2}$ پشت سر E ها ضرب خواهند شد

لذا می‌توانیم بنویسیم.

$E\{x_{n+k}x_k\} = (\frac{1}{2})^n E\{X_k^2\} = (\frac{1}{2})^n \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2})^{n-2}$

Problem 4

در درس اثبات کردیم که همگرایی در مفهوم m.s به همگرایی در مفهوم احتمال را نتیجه می‌دهد. این اثبات به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$x_n \xrightarrow{m.s} x: \quad \lim_{n\to\infty} E\{(x_n - x)^2\} \to 0$

$x_n \xrightarrow{P} x \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n\to\infty} P\{|x_n - x| \geq \varepsilon\} \to 0$

Erfan Panahi (*Student Number:* **810103084**)

$P(|x_n - x| \geq \varepsilon) = P(|x_n - x|^2 \geq \varepsilon) \leq \frac{E\{|x_n - x|^2\}}{\varepsilon^2}$

$\lim_{n\to\infty} P(|x_n - x| \geq \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P(|x_n - x|^2 \geq \varepsilon^2) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{E\{|x_n - x|^2\}}{\varepsilon^2} = 0$

$= \lim_{n\to\infty} P(|x_n - x| \geq \varepsilon) \leq 0 \longrightarrow 0$ ✓

در این مسئله می‌خواهیم عکس این موضوع را برای شرایط خاص حساب کنیم.

$f_{x_n}(x) = 0$ for all $n \geq N$, $|x| > x_0$ and for some $N > 0$

داریم: $\lim_{n\to\infty} P(|x_n - x| \geq \varepsilon) = 0$ or $\lim_{n\to\infty} P(|x_{n+k} - x_n| \geq \varepsilon) = 0$

We must show: $\lim_{n\to\infty} E\{|x_n - x|^2\} = 0$ or $\lim_{n\to\infty} E\{|x_{n+k} - x_n|^2\} = 0$

فرض کنیم: $P(|x_n| < \eta) = 0$ در اینجا η یک ثابت و مستقل از n می‌باشد

$E\{|x_n - x|^2\} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_n - x|^2 \xrightarrow{\varepsilon > 0} \int_{|x_n - x| > \varepsilon} |x_n - x|^2 + \int_{|x_n - x| < \varepsilon} |x_n - x|^2$

$\leq \int_{|x_n - x| > \varepsilon} |x_n - x|^2 + \leq P(|x_n - x| > \varepsilon)\, \varepsilon \eta^2 + \varepsilon^2 \longrightarrow \varepsilon^2$

$\varepsilon > 0 \longrightarrow \lim_{n\to\infty} E\{|x_n - x|^2\} \longrightarrow 0 \longrightarrow x_n \xrightarrow{m.s} X$

QED ✓