عرفـان پـنــاهی ۸۱۰۱۹۸۳۶۹

سوال دوم.

در این سوال قرار است با فرض معلوم بودن A و x ، منابع s را طوری بدست آوریم که نرم آن مینیمم شود. یعنی در ابتدا قرار است دو مسئله بهینه سازی را به صورت زیر حل کنیم:

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{s}} = argmin\ \boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{s}) \\ \hat{\boldsymbol{s}} = argmin\ \parallel \boldsymbol{s} \parallel_2 \end{cases}$$

با ترکیب دو مسئله بهینه سازی، تابع هدف را بصورت زیر تعریف می‌کنیم و مینیمم آنرا پیدا می‌کنیم:

$$f(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{s}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{\lambda}^T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{s})$$

$$\hat{\boldsymbol{s}} = argmin\ f(\boldsymbol{s}, \boldsymbol{\lambda})$$

حال مسئله بهینه سازی را بصورت زیر حل می‌کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}} = \boldsymbol{2s} - \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\lambda} = 0 \rightarrow \boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\lambda}$$

از طرف دیگر نیز تابع هدف باید به ازای $\boldsymbol{\lambda}$ نیز مینیمم شود تا بتوانیم در رابطه بالا $\boldsymbol{\lambda}$ را قرار داده و $\boldsymbol{s}$ بهینه را بدست آوریم: :

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{s} = 0 \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\lambda} \rightarrow \boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{2}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{x}$$

$$\rightarrow \boldsymbol{s} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\lambda} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}2(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})^{-1}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})^{-1}\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}})^{-\boldsymbol{1}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{x}$$

بعنوان نمونه ، مثال زیر را در متلب اجرا می‌کنیم:

همانطور که مشاهده می‌شود به ازای $\boldsymbol{S}$ تخمینی ، مشاهدات یکسان است و نرم $\boldsymbol{S}$ نیز کاهش یافته است.

```
>> A = [1 2 3;4 5 6]

A =

     1     2     3
     4     5     6

>> S = [1 2 5]'

S =

     1
     2
     5

>> X = A * S

X =

    20
    44

>> S_hat = A.'*inv(A*A.')*X

S_hat =

    0.6667
    2.6667
    4.6667

>> X_hat = A * S_hat

X_hat =

   20.0000
   44.0000

>> norm(S)

ans =

    5.4772

>> norm(S_hat)

ans =

    5.4160
```