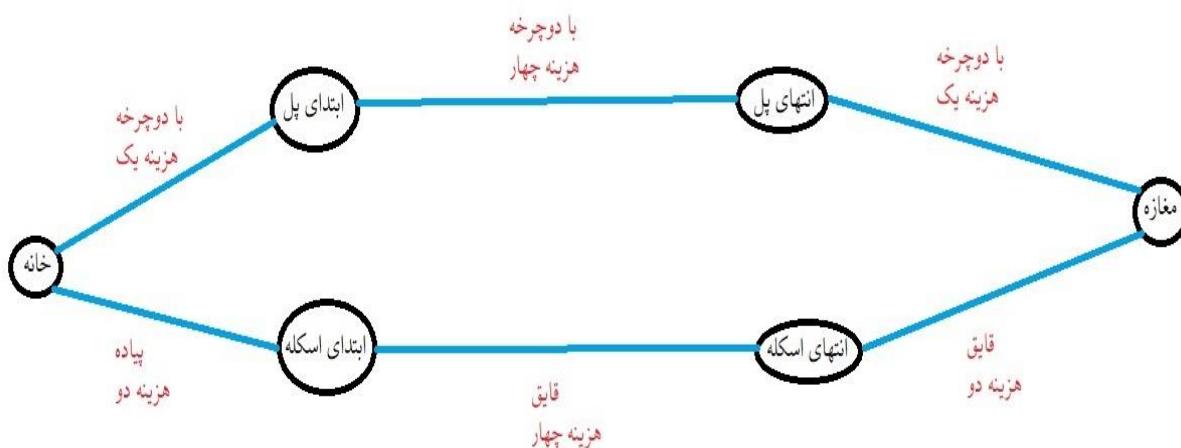


با توجه به گفته‌های صورت سوال، می‌توانیم فاصله هر خانه تا اسکله و یا پل و همچنین فاصله اسکله و یا پل را بصورت یک گراف بدون جهت (در حالت کلی چراکه در صورت سوال به یکطرفه بودن هر خانه تا پل و یا اسکله و هر پل یا اسکله تا مغازه اشاره‌ای نشده است) مدل کنیم. در این گراف از هر راس خانه تا پل یک یال با وزن یک قرار میدهیم چراکه طبق گفته صورت سوال، فاصله خانه تا پل با دوچرخه برابر یک لگو است. و همچنین یک یال از هر خانه تا اسکله قرار میدهیم (ابتدا و انتهای پل و یا اسکله را هر کدام با یک راس در گراف مان مدل می‌کنیم). و فاصله آن را برابر دو قرار می‌دهیم. همچنین فاصله ابتدای پل/اسکله را با یک یال با وزن چهار مقداردهی می‌کنیم. تحلیل مشابهی برای تکمیل گراف در سمت راست داستان ما نیز برقرار است.

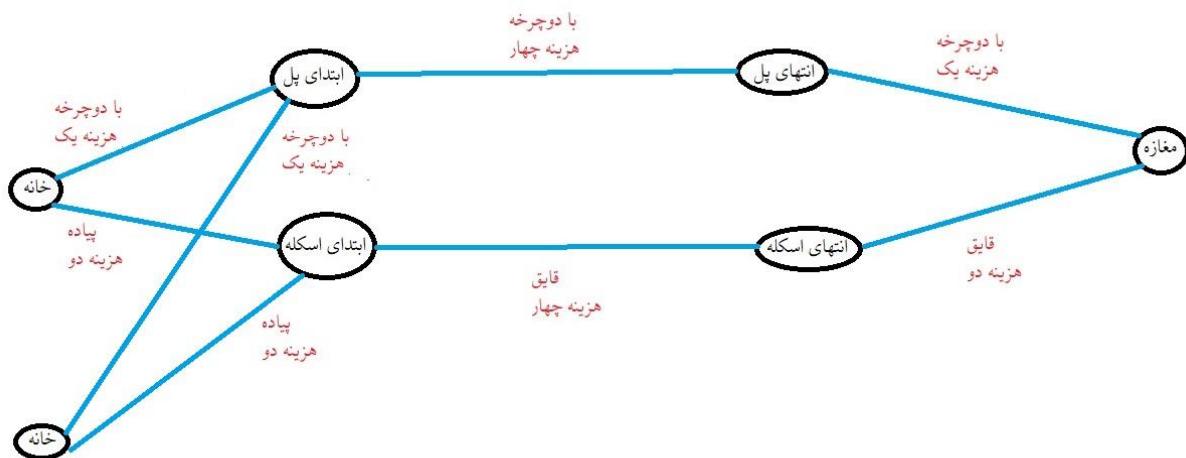
شکل زیر گراف مدل شده را در ساده‌ترین حالت که یک خانه و یک مغازه داریم نشان می‌دهد.



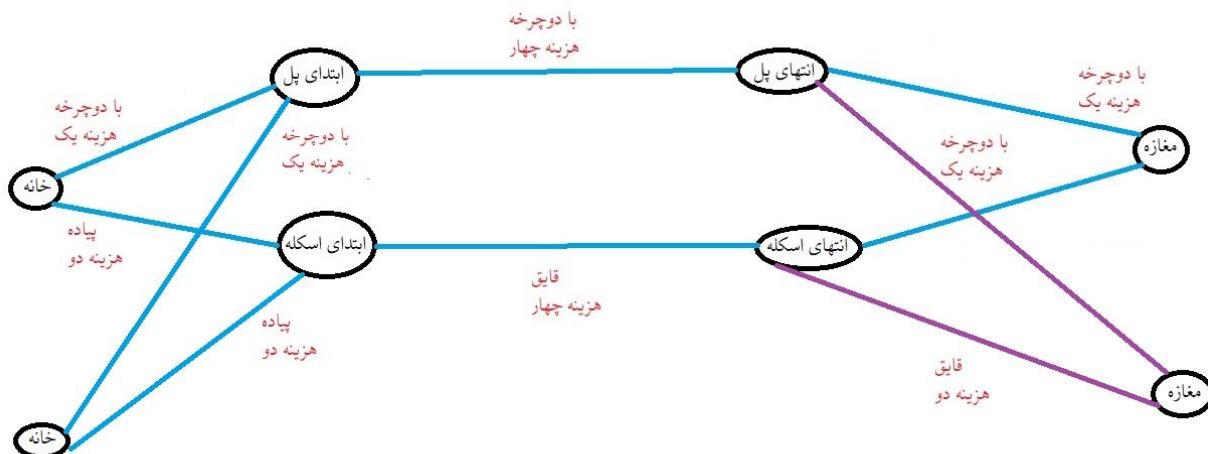
حال میتوان این گراف را گسترش داد و هر تعداد خانه و یا مغازه و پل و اسکله را به آن افزود.

نکته مهم اینست که توضیحات صورت سوال راجع به فاصله هر خانه تا هر پل/اسکله و فاصله هر پل/اسکله تا مغازه اندکی مبهم است. ما در اینجا فرض می‌کنیم که فاصله تا پل با دوچرخه برابر یک و تا اسکله با پای پیاده برابر دو است و طبق این فرض پیش می‌رویم هر چند که فرضیات دیگر خللی به توضیحات ما وارد نمی‌کند.

حال با گسترش گراف به ازای هر پل/اسکله نیاز به دوراس و یک یال بین آنها داریم. در اینجا می‌توان کمی هوشمندانه عمل کرد تا نیازی به دوراس به ازای هر پل/اسکله نباشد. بدین صورت که یال هر خانه را به یک پل/اسکله متصل کنیم. شکل زیر شمایی از دو خانه و یک پل را نشان می‌دهد.



چنین کار مشابهی را میتوان برای سمت چپ رودخانه نیز بکار برد که در شکل زیر آمده است:



حال برای یافتن کوتاهترین فاصله هر خانه تا تمام مغازه ها می توان الگوریتم های یافتن کوتاهترین مسیر گراف را بکار برد. با توجه به اینکه تمام کوتاهترین مسیرها را می خواهیم، بایستی الگوریتم های

all-pair shortest path را بکار ببریم. پیشنهاد اول الگوریتم شبه ضرب ماتریسی است که مرتبه $O(n^4)$ دارد که می توان آن را به $O(n^3 \log n)$ کاهش داد. الگوریتم بهینه تر برای انجام این کار الگوریتم فلوید وارشال است که مرتبه اش $O(n^3)$ است. در حالت کلی و برای گراف های شلوغ (منظور از شلوغ این است که تعداد یال ها برابر $O(n^2)$ باشد). راه حلی بهتر از این مرتبه مکعبی وجود ندارد اما برای گراف های خلوت (منظور از خلوت این است که تعداد یال ها برابر $O(n)$ باشد). و یا گراف هایی که حداقل مقدار یال هایش یک مقدار ثابت است، الگوریتم هایی بهتر از مرتبه مکعبی وجود دارد. یکی از این الگوریتم ها الگوریتم جانسون است که از توضیح جزئیات آن صرف نظر می کنیم و فقط به این نکته اشاره می کنیم که این الگوریتم از دو زیر روال الگوریتم دیکسترا و بلمن فورد و تکنیک وزن دهی مجدد (در صورتی که وزن یال ها منفی باشد) استفاده می کند و برای گراف های خلوت مرتبه زمانی الگوریتم جانسون برابر $O(n^2 \log n)$ است که خوب بهتر از الگوریتم فلوید وارشال است.

حال با توجه به اینکه گراف ما یک گراف خلوت است می توانیم از الگوریتم جانسون استفاده کنیم.

نکته خیلی مهم این است که ما باز هم میتوانیم مرتبه را کاهش دهیم. راه حل استفاده از BFS یا همان جستجوی سطحی است. جستجوی سطحی برای گراف هایی که وزن یکسان دارند، درخت کوتاهترین مسیر را می دهد. در اینجا مشکلی که وجود دارد این است که وزن یال ها متفاوت است اما این مشکل را می توان با افزودن تعدادی راس به عنوان راس dummy بطرف کرد و وزن تمام یال ها را به یک رساند و سپس بر روی گراف حاصل جستجوی سطحی را اعمال کرد. مرتبه زمانی جستجوی سطحی $O(n+e)$ است که چون در گراف ما تعداد یال ها هم مرتبه تعداد راس هاست پس در نتیجه مرتبه زمانی جستجوی سطحی در گراف ما برابر $O(n)$ خواهد شد که این مرتبه زمانی خودش یک کران پایین است و بهتر از $O(n)$ نمی توان این مسئله را حل نمود.