2-3 控制系统的复数域数学模型

一、定义和性质

1 定义：　线性定常系统传递函数，定义为零初始条件下，

输出量拉氏变换C(s)与输入量拉氏变换R(s)之比。

小结：三要素

- 线性定常系统
- 零初始条件
- 输出与输入的拉氏变换之比（复域模型）

微分方程的一般形式

$$a_0 \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{d\ c(t)}{dt} + a_n c(t)$$

$$= b_0 \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + a_{m-1} \frac{d\ r(t)}{dt} + b_m r(t)$$

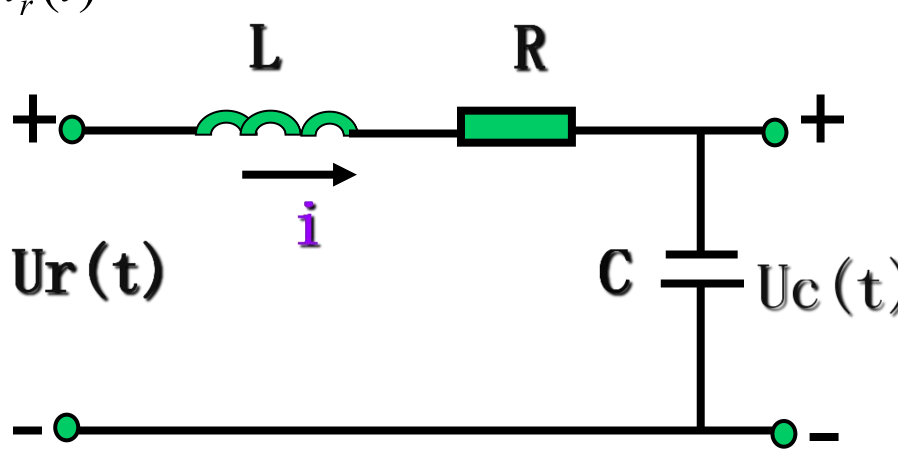
传递函数的一般形式

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \qquad (m < n)$$

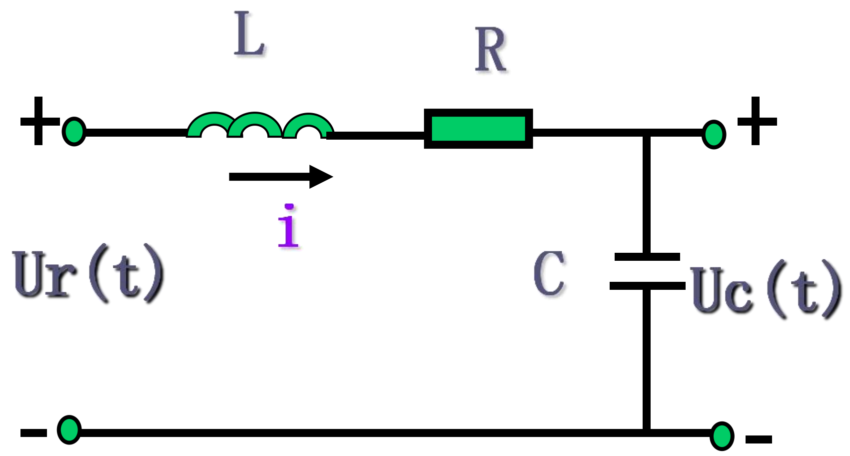
[例]

$$LC\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + RC\frac{du_c(t)}{dt} + u(t) = u_r(t)$$

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

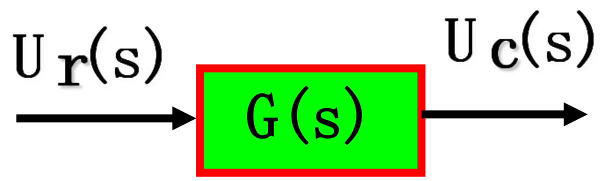


$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$



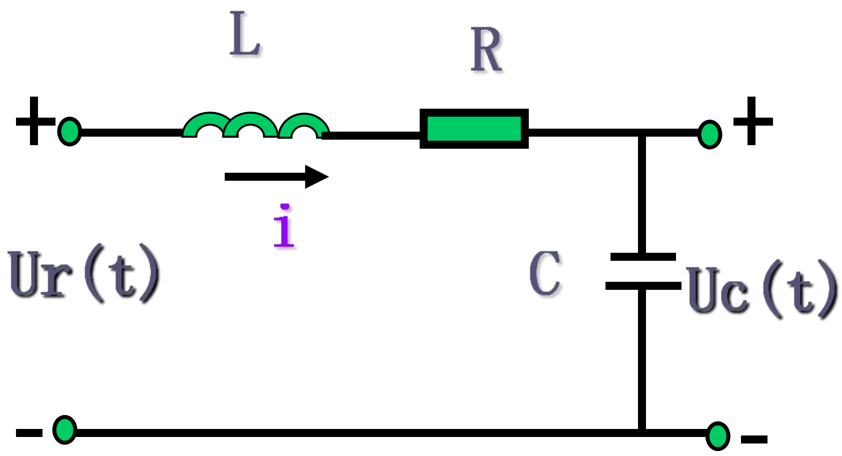
2. 性质

- 传递函数取决于系统或部件的结构，与输入量无关，可用方块图表示



- 它仅能表示输入输出关系，而无法表示出系统的中间变量与它们的关系

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

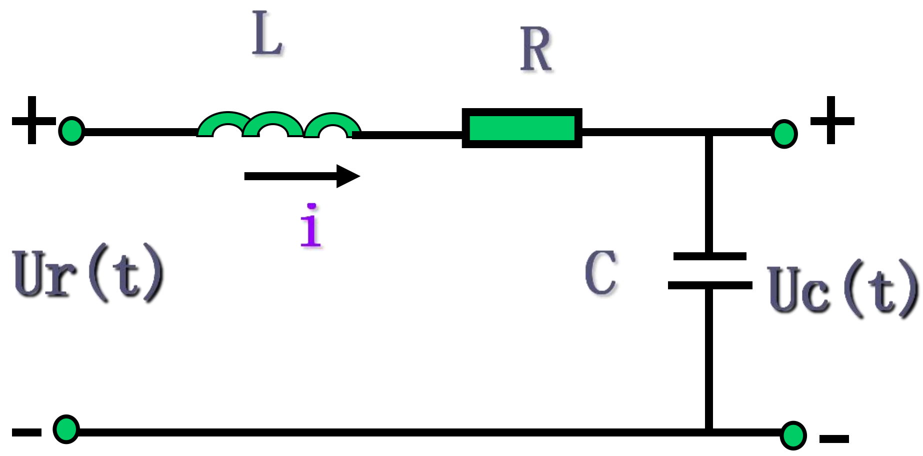


- 传递函数是复变量 s 的**有理真分式函数**，即 n>m，且所有系数均为实数
- 传递函数与微分方程**一一对应**

$$\boxed{\frac{d^i}{dt^i} \leftrightarrow s^i}$$

- 传递函数G(s)的拉氏变换为系统的**脉冲响应**

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$



3. 传递函数的局限性：

- 只能描述线性定常系统
- 适用于单输入一输出系统
- 不能反映非零初始条件下引起的输出

4. 传递函数的零、极点

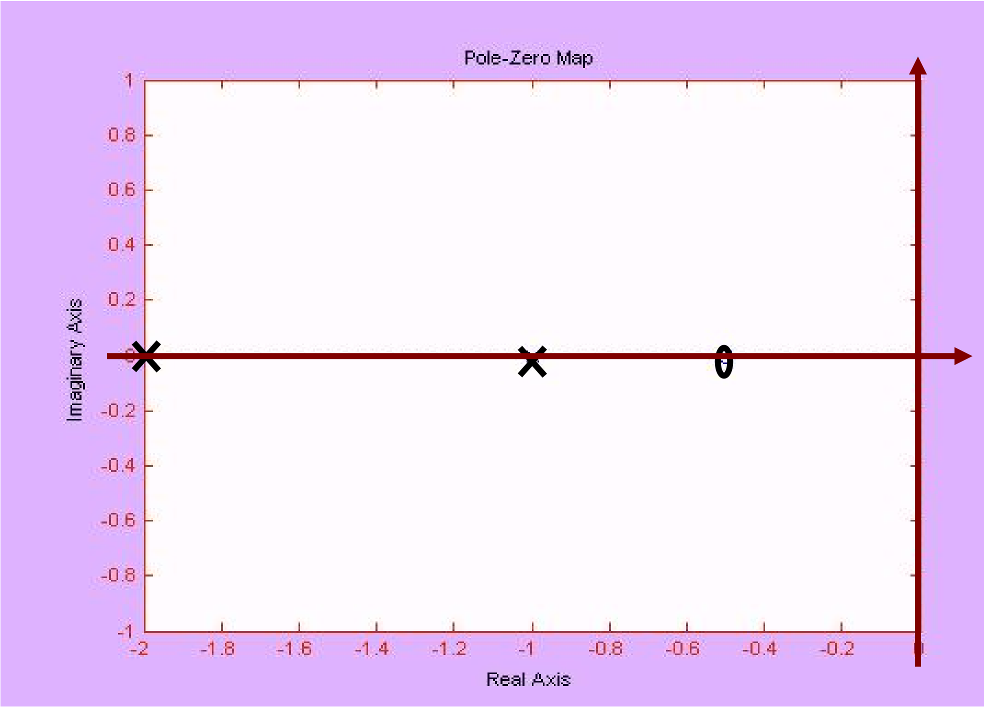
[例] $$G(s)=\frac{4s+2}{s^2+3s+2}=\frac{2(2s+1)}{2(\frac{1}{2}s^2+\frac{3}{2}s+1)}=\frac{2(s+0.5)}{(s+1)(s+2)}$$

传递函数典型环节乘积形式　　　传递函数零、极点形式

零、极点分布图：

$$z=-0.5$$

$$p_1=-1 \quad p_2=-2$$



5. 传递函数零、极点与运动模态关系

某系统 $\dfrac{d^2c(t)}{dt^2}+3\dfrac{dc(t)}{dt}+2c(t)=r(t)$ 　　r(t)=1(t)

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{(s+2)(s+1)}=\frac{0.5}{s+1}+\frac{0.5}{s+2}$$

$$c(t)=0.5e^{-t}+0.5e^{-2t}\qquad(t\geq 0)$$

模态1　模态2

结论：

1. **模态**反映系统运动形式，传递函数的**极点**就是微分方程的特征根，**决定**了系统自由运动的**模态**；
2. **零点**不形成自由运动的模态，但**影响**各模态在**响应中所占比例**。

二、典型元部件的传递函数

1 电位器

$$u(t) = K\theta(t)$$

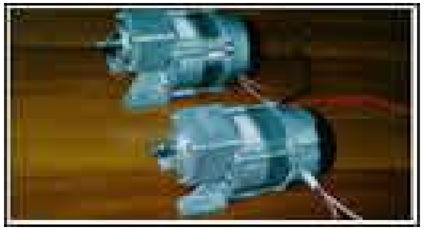
$$\frac{U(s)}{\theta(s)} = K$$

2 电位器对

$$u(t) = K\Delta\theta(t)$$

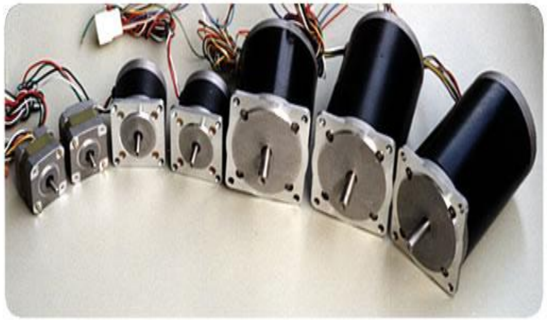
$$\frac{U(s)}{\Delta\theta(s)} = K$$

3 测速发电机



$$u_t(t) = K_t \frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

$$\frac{U_t(s)}{\theta_m(s)} = sK_t$$



步进电机

4 电动机

$$T_m \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + \frac{d\theta_m(t)}{dt} = K_m u_a(t) - K_2 M_c(t)$$

$$\frac{\theta_m(s)}{U_a(s)} = \frac{K_m}{s(T_m s + 1)}$$

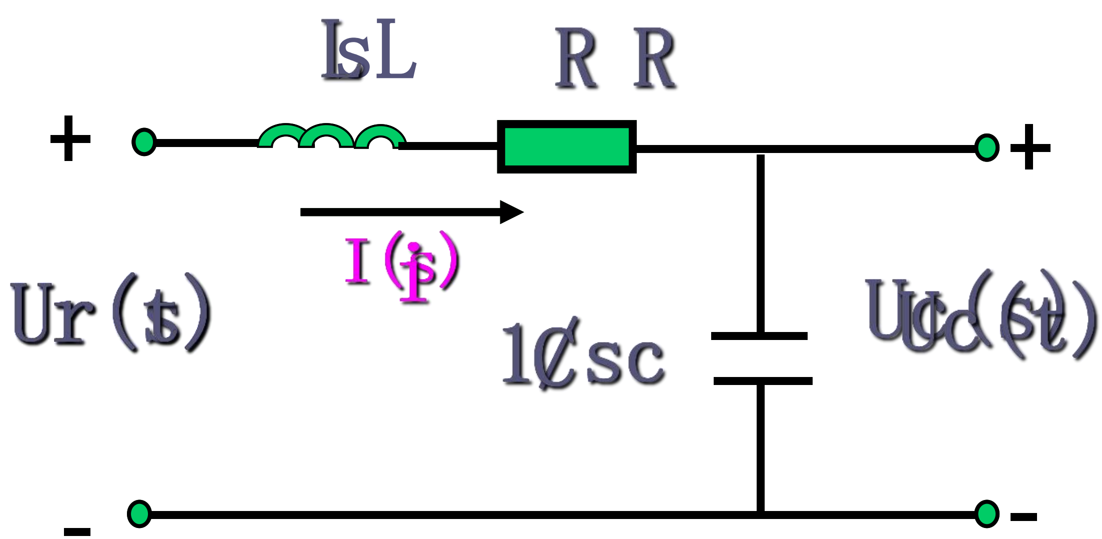
$$\frac{\theta_m(s)}{M_c(s)} = -\frac{K_2}{s(T_m s + 1)}$$

5 无源网络

方法： 列微分方程或用复阻抗概念

[例] 求出RLC组成的无源网络的传递函数 Uc(s)/Ur(s)

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{\mathrm{I(s)}\dfrac{1}{\mathrm{sC}}}{\mathrm{I(s)(sL+R+}\dfrac{1}{\mathrm{sC}})}$$



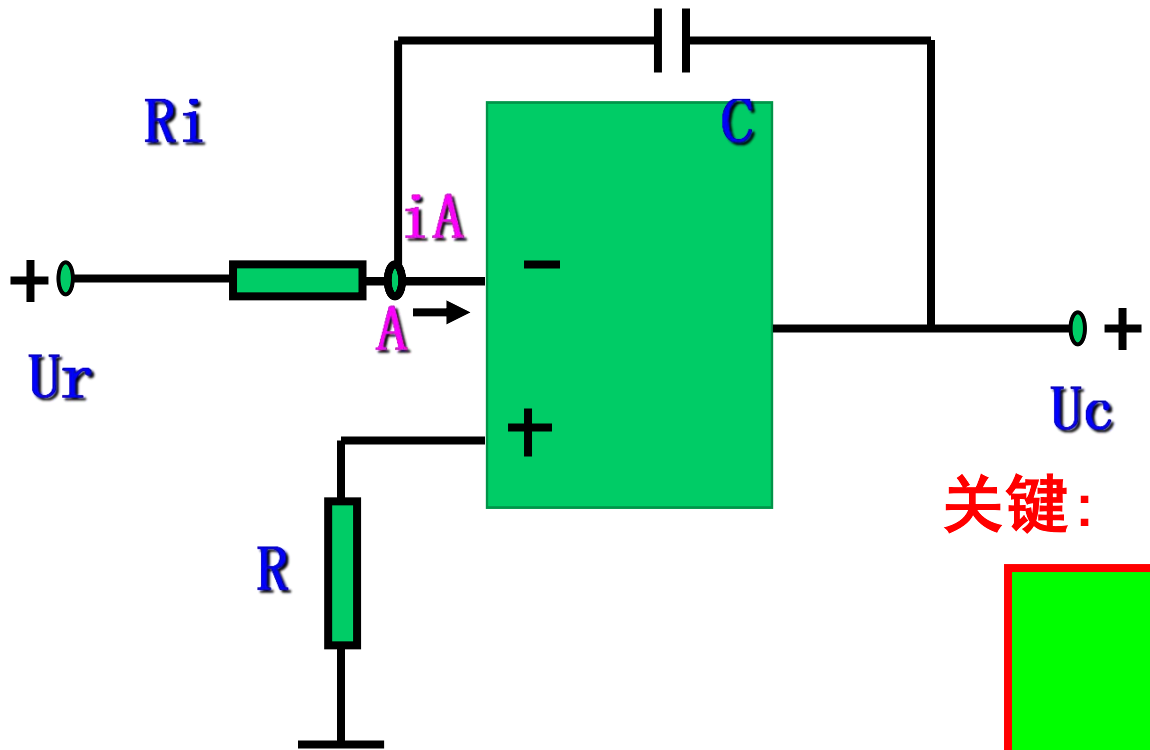
$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

思考：

微分方程是？

6 有源网络

［例］ 求有源网络的传递函数Uc(s)/Ur(s)



关键:

$U_A=0$

$i_A=0$

$$\frac{U_r(s)-U_A(s)}{R_i}=\frac{U_A(s)-U_c(s)}{\frac{1}{sC}}$$

$s?$

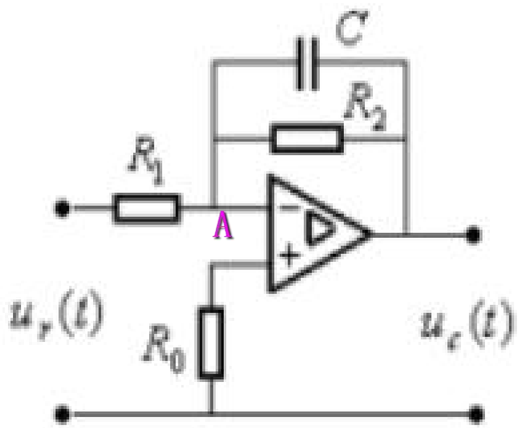
$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=-\frac{1}{R_iCs}$$

积分环节 $\frac{1}{s}$

[练习]

关键:

$$U_A=0$$
$$i_A=0$$



(c)

$$\frac{U_r(s)-U_A(s)}{R_1}=\frac{U_A(s)-U_c(s)}{\frac{1}{sC}//R_2}$$

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=-\frac{\dfrac{R_2\cdot\dfrac{1}{Cs}}{R_2+\dfrac{1}{Cs}}}{R_1}=-\frac{R_2}{R_1(1+R_2Cs)}$$

[练习]

已知在零初始条件下，系统的单位阶跃响应为

$$\boldsymbol{c(t) = 1 - e^{-2t} + e^{-t}}$$

试求系统的传递函数和单位脉冲响应。

解：

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1} \qquad \mathrm{R}(s) = \frac{1}{s}$$

$$\Phi(s) = \frac{\mathrm{C(s)}}{\mathrm{R(s)}} = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+1}\right) / \frac{1}{s}$$

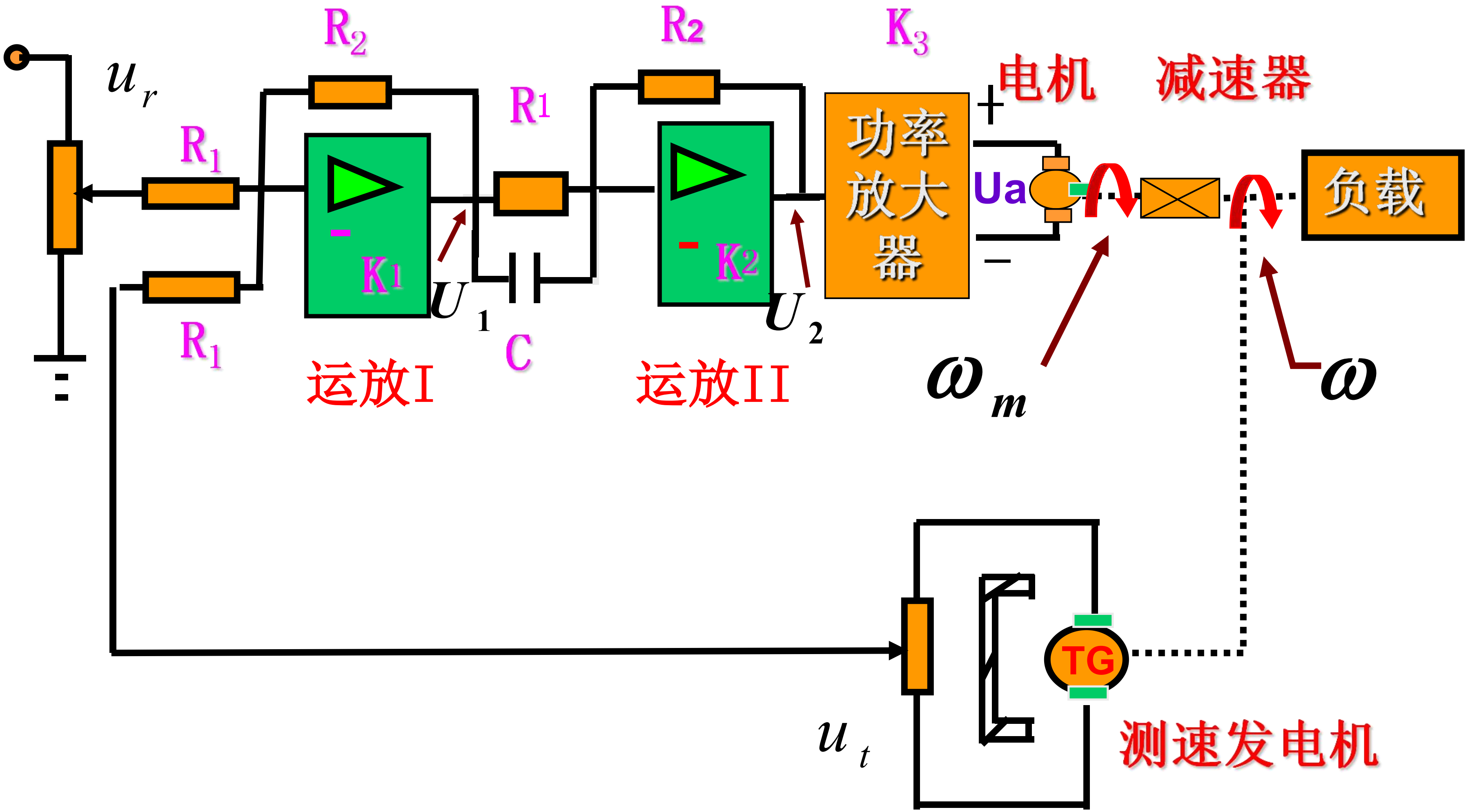
$$k(t) = L^{-1}\left(\frac{\mathrm{C(s)}}{\mathrm{R(s)}}\right) = L^{-1}\left(1 + \frac{2}{s+2} - \frac{1}{s+1}\right) = \delta(t) + 2e^{-2t} - e^{-t}$$

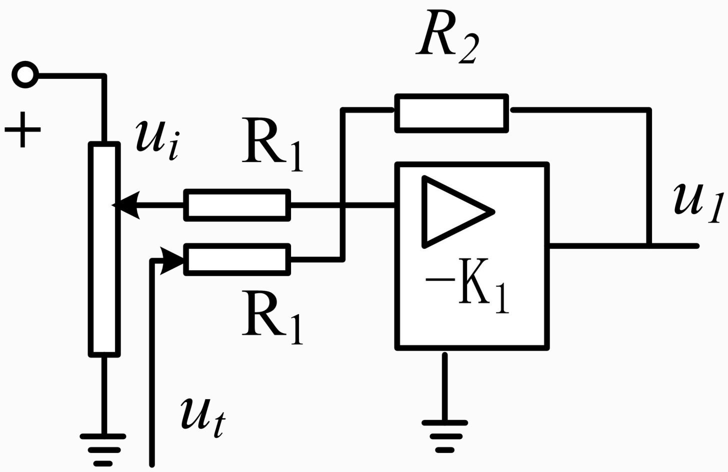
2-4 控制系统的结构图

控制系统的结构图和信号流图都是描述系统各元部件之间信号传递关系的数学图形，它们表示了系统中各变量之间的因果关系以及对各变量所进行的运算，是控制理论中描述复杂系统的一种简便方法。

信号流图只适用于线性系统，而结构图也可用于非线性系统。

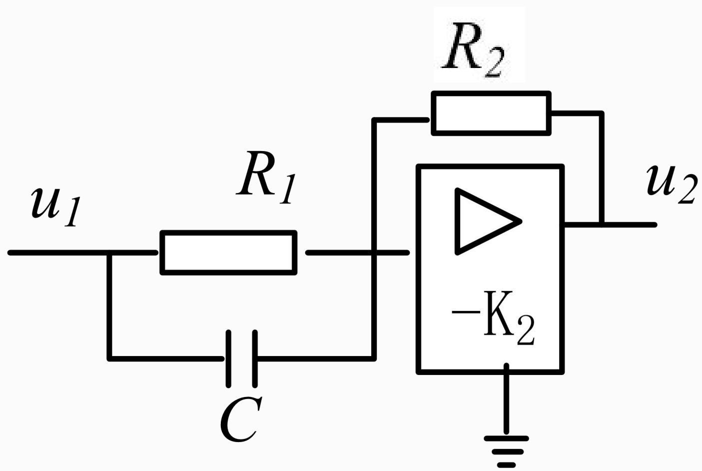
[例]试建立图示速度控制系统结构图。





$$u_1 = K_1(u_i - u_t)$$

$$\frac{U_1(s)}{U_i(s) - U_t(s)} = K_1$$

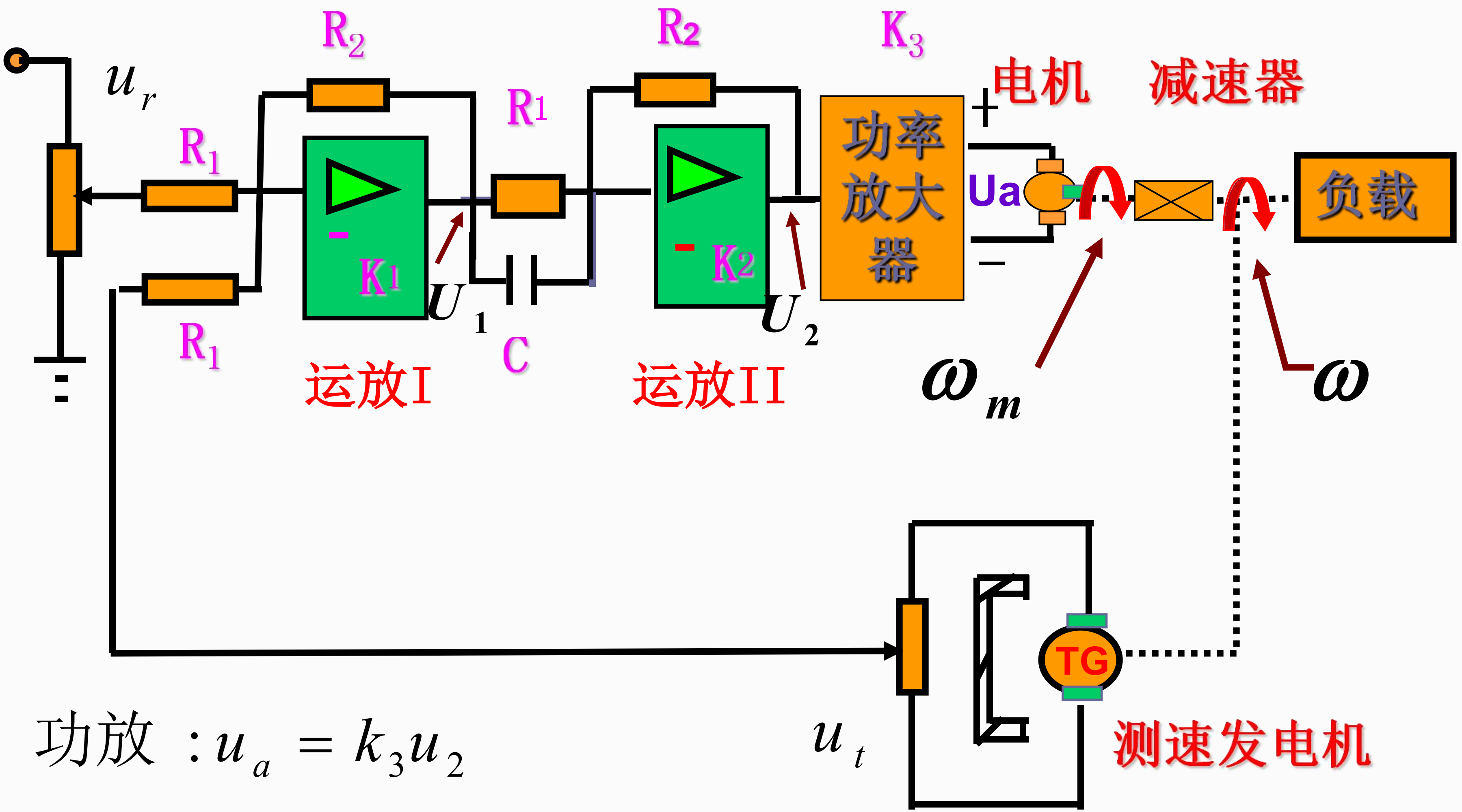


$$u_2 = K_2\left(\tau \frac{du_1}{dt} + u_1\right)$$

$$\frac{U_1(s) - 0}{R_1 \, / / \, \frac{1}{sC}} = \frac{0 - U_2(s)}{R_2}$$

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = K_2(\tau s + 1)$$

[例]试建立图示速度控制系统结构图。



功放 $: u_a = k_3 u_2$

$$\frac{U_a(s)}{U_2(s)} = k_3$$

直流电机：$T_m \frac{d\omega_m}{dt} + \omega_m = k_m u_a - k_c M_c$

$$\frac{\omega_m(s)}{U_a(s)} = \frac{k_m}{sT_m + 1}$$

$$\frac{\omega_m(s)}{M_c(s)} = -\frac{k_c}{sT_m + 1}$$

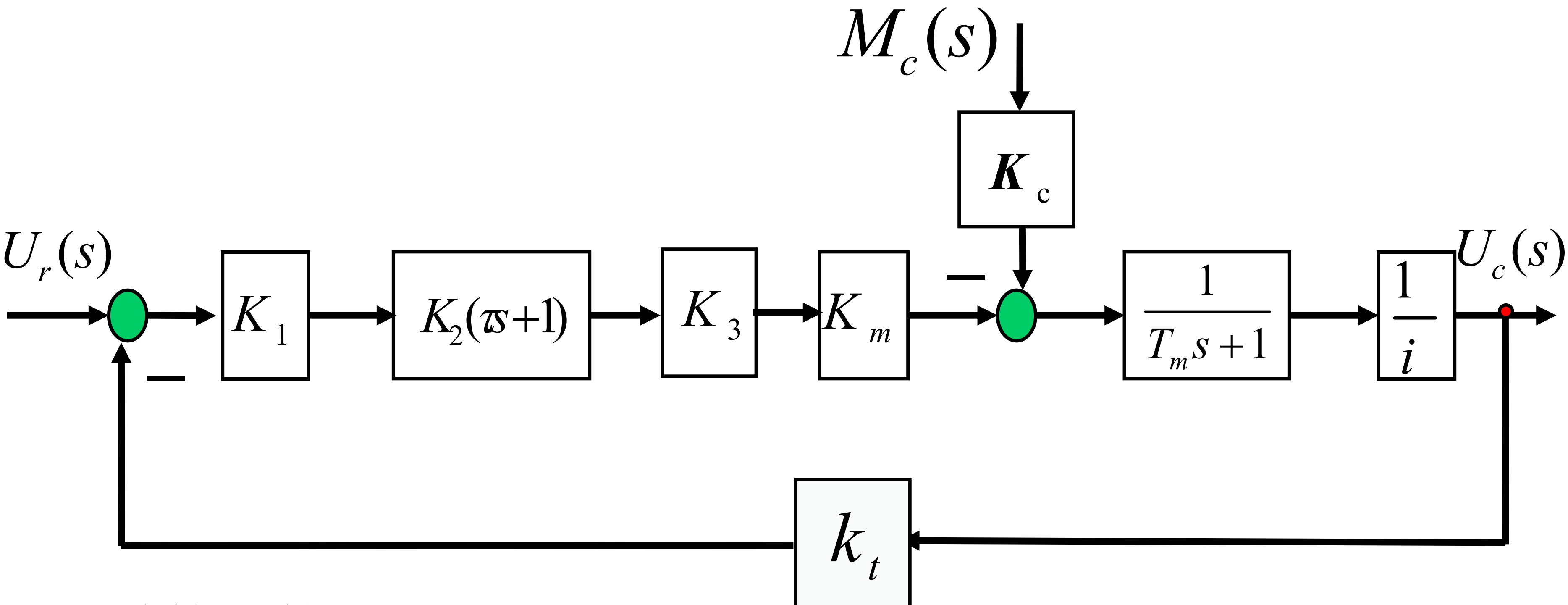
减速器：$\omega = \frac{1}{i}\omega_m$

$$\frac{\omega(s)}{\omega_m(s)} = \frac{1}{i}$$

测速发电机：$u_t = k_t \omega$

$$\frac{\omega(s)}{U_t(s)} = k_t$$

[例]试建立图示速度控制系统结构图。

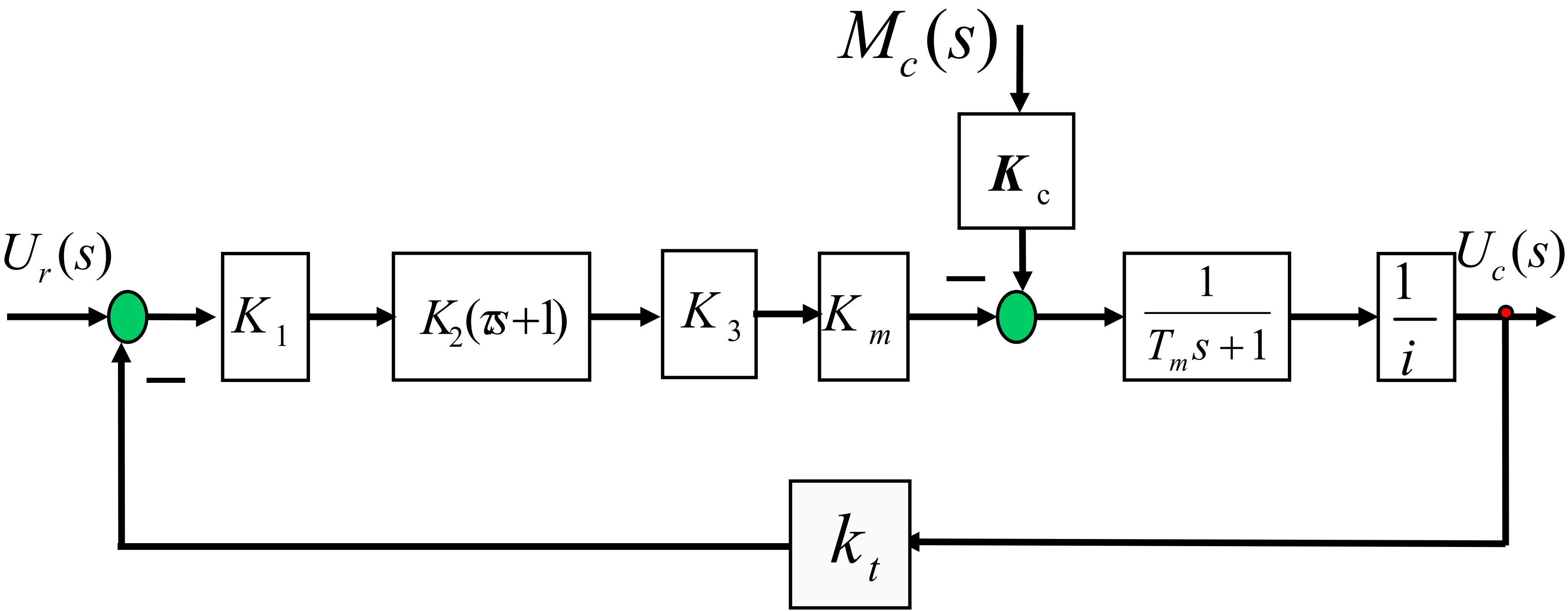


一、结构图的组成

a） 信号线　带有箭头的直线，直线旁标注信号的象函数

b）引出点（或测量点，分支点）

表示信号的引出，或测量，由同一点引出的信号大小、性质完全相同



c）比较点（或综合点）

注意：相比较的信号应具有相同的量纲

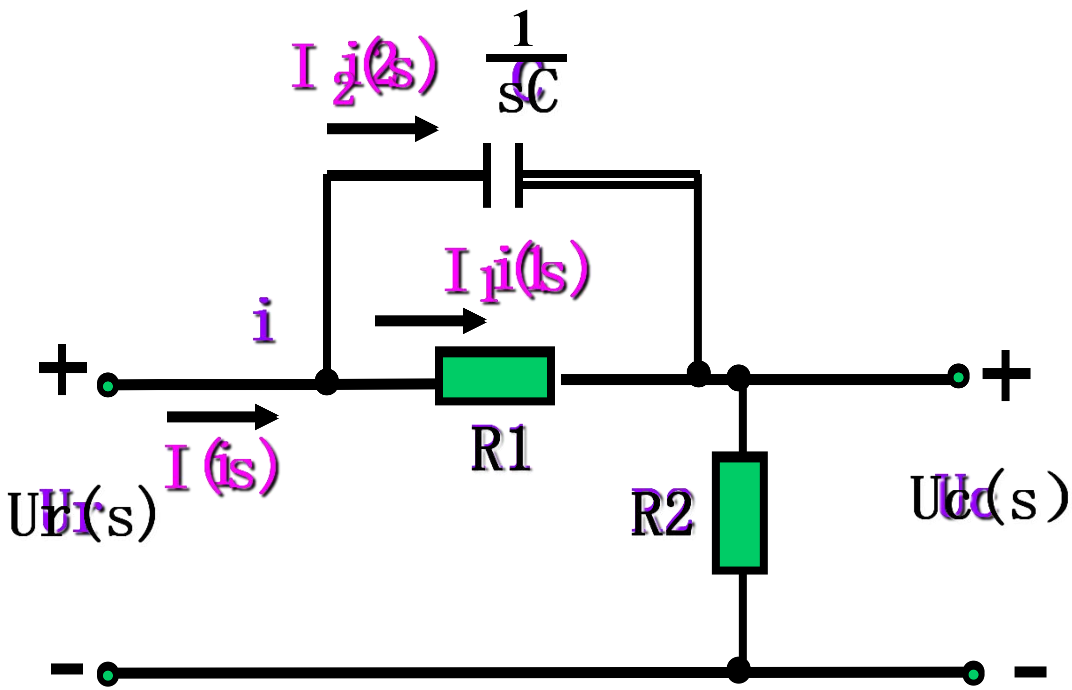
d）方框（或环节）

方框内写入系统的传递函数

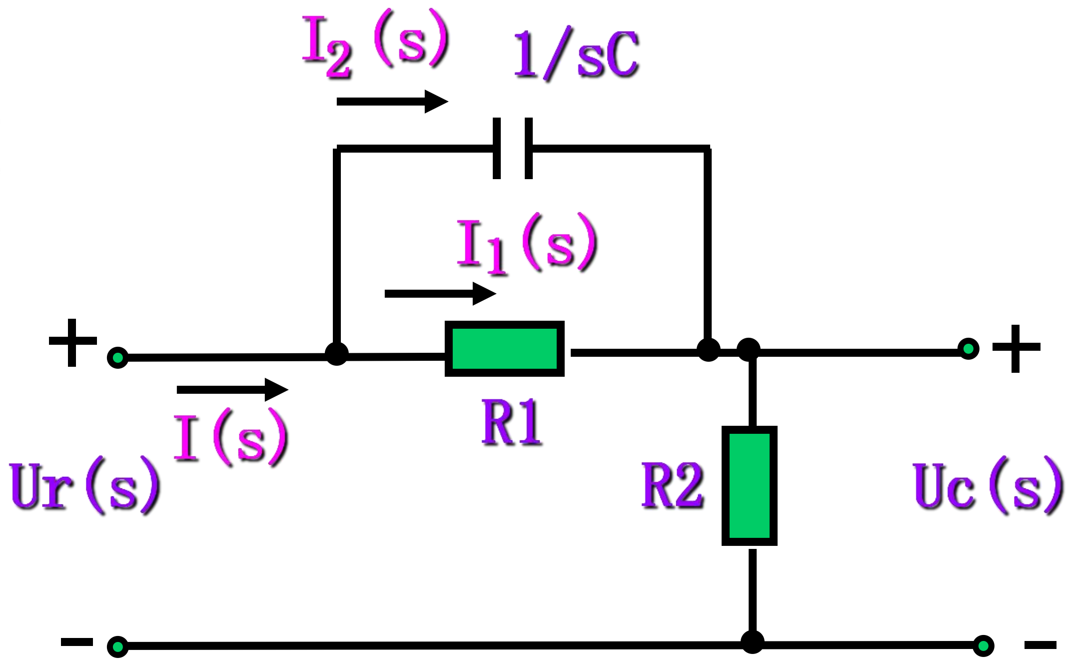
方框的输出量 = 传递函数 * 方框的输入量

二、结构图的绘制

[例]试绘制图示无源网络的结构图



[例] 绘制图示系统结构图



$$U_r(s)=I_1(s)R_1+U_c(s)$$

$$\frac{1}{SC}I_2(s)=I_1(s)R_1$$

$$I(s)=I_1(s)+I_2(s)$$

$$U_c(s)=I(s)R_2$$

$$\frac{I_1}{U_r(s)-U_c(s)}=\frac{1}{R_1}$$

$$\frac{I_2(s)}{I_1(s)}=R_1Cs$$

$$I(s)=I_1(s)+I_2(s)$$

$$\frac{U_c(s)}{I(s)}=R_2$$

绘制结构图的步骤：

步骤1 列写各元件的微分方程式，列写时要考虑负载效应。

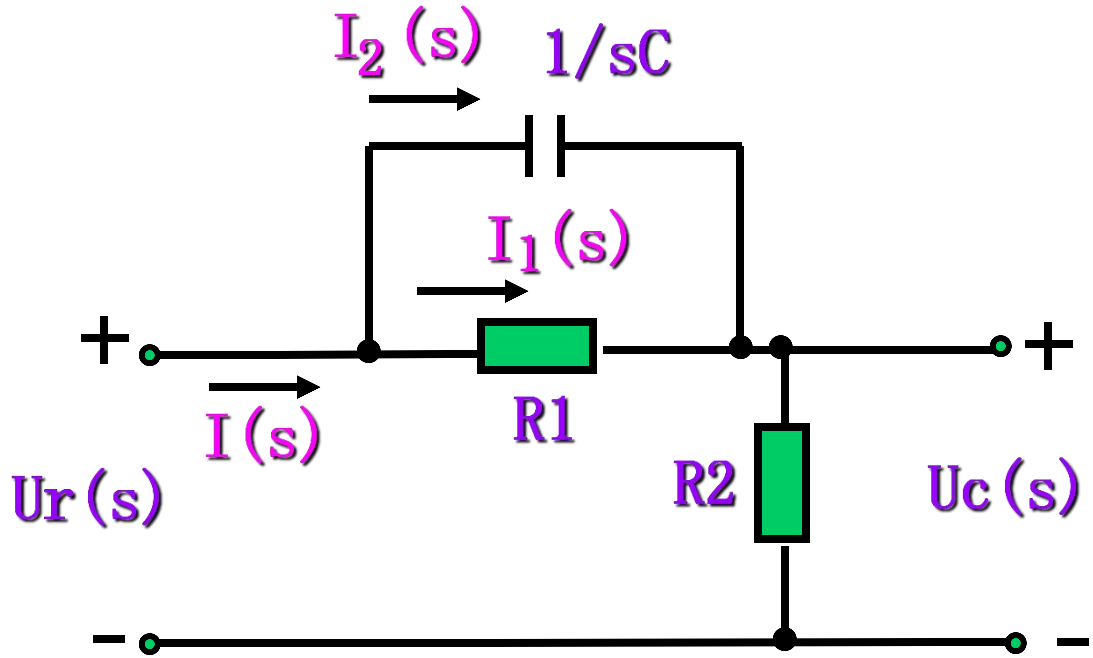
步骤2 列写各元部件的传递函数。

$$\frac{I_1}{U_r(s)-U_c(s)}=\frac{1}{R_1}$$

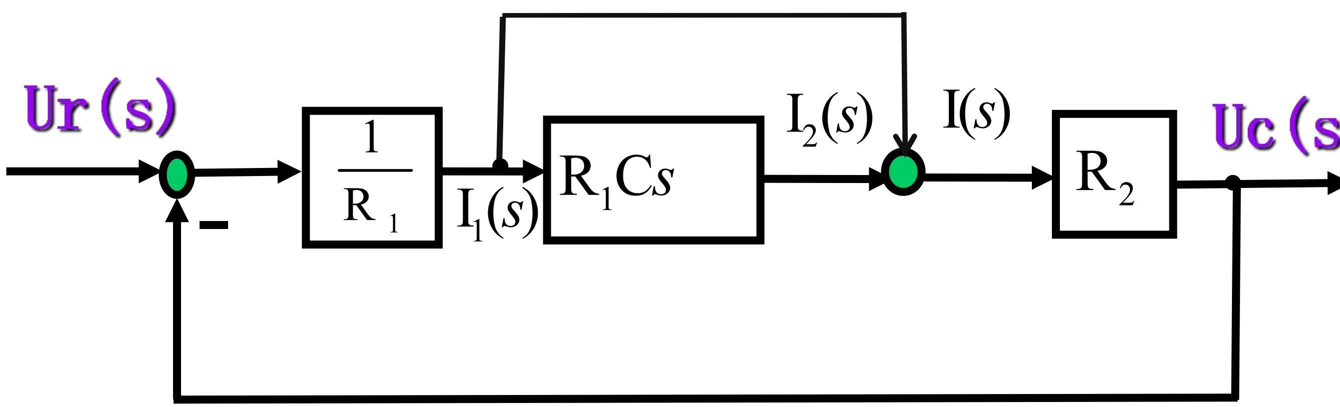
$$\frac{I_2(s)}{I_1(s)}=R_1Cs$$

$$I(s)=I_1(s)+I_2(s)$$

$$\frac{U_c(s)}{I(s)}=R_2$$



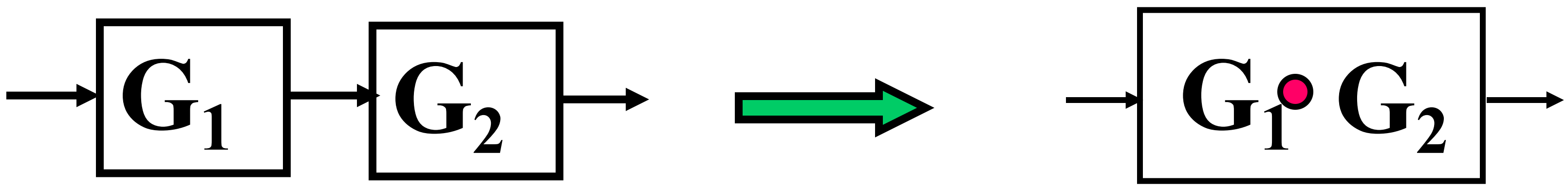
步骤3 根据各元件信号流向，用信号线依次连接各方框，即得到系统的结构图。



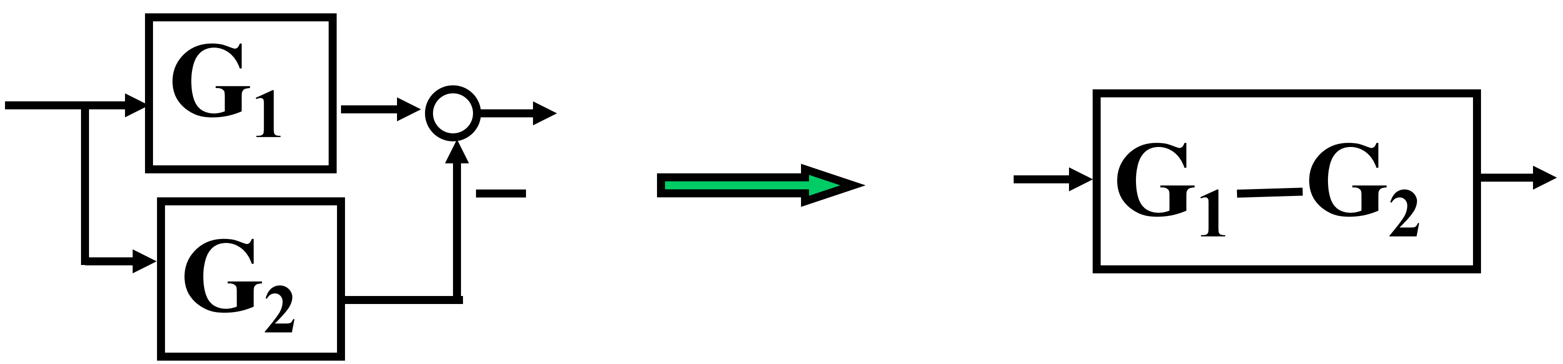
三、结构图的等效变换

等效变换：指变换前后，变量关系保持不变。

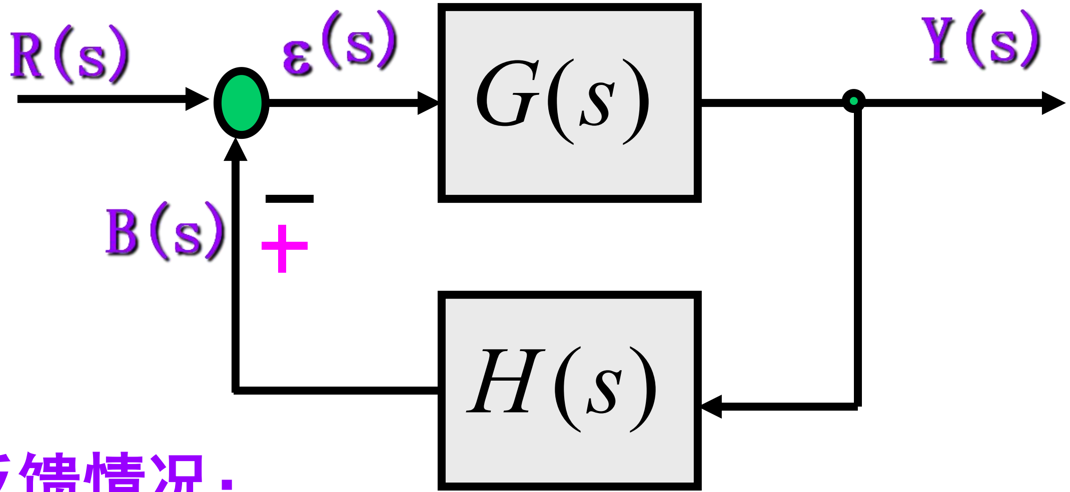
1 串联方框的合并

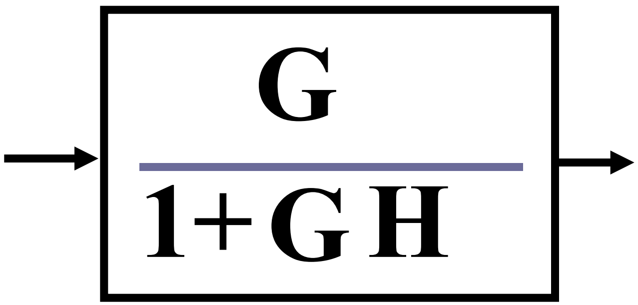


2 并联方框的合并



3 反馈方框的合并





负反馈情况：

$$\varepsilon(s) = R(s) - B(s)$$

$$Y(s) = [R(s) - H(s)Y(s)]G(s)$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

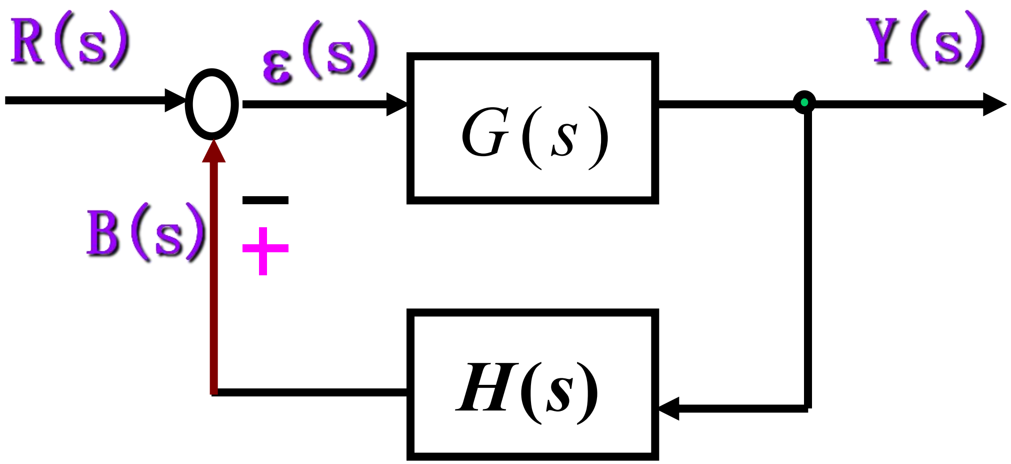
当$H(s)=1$有

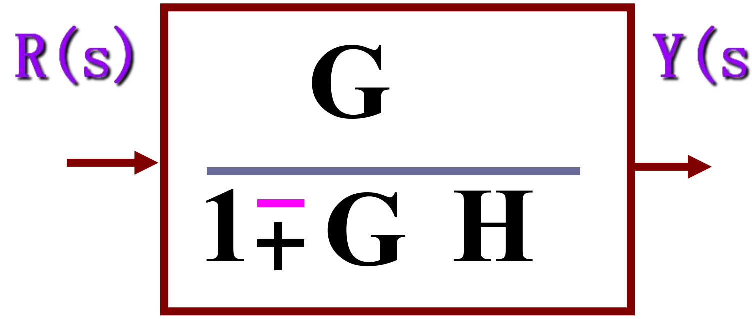
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

单位反馈

对于正反馈有 $$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1-G(s)H(s)}$$

[例]求传递函数





名词术语：

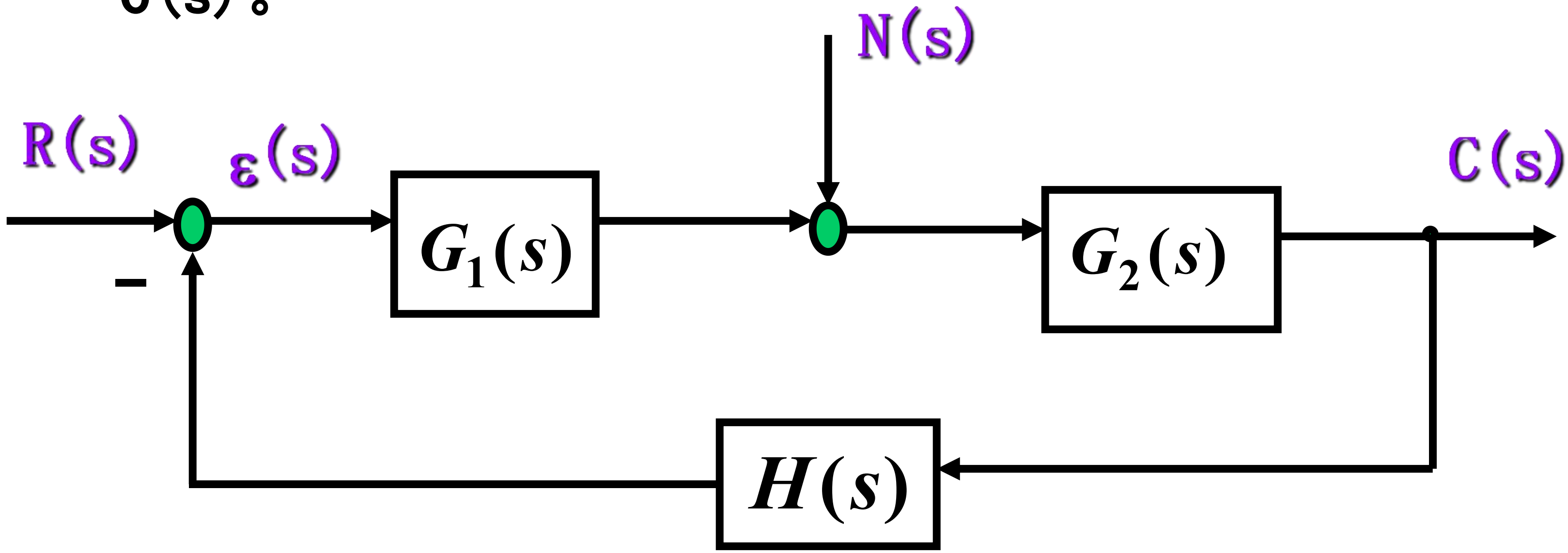
闭环传递函数： $\Phi（s）=C(s)/R(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$

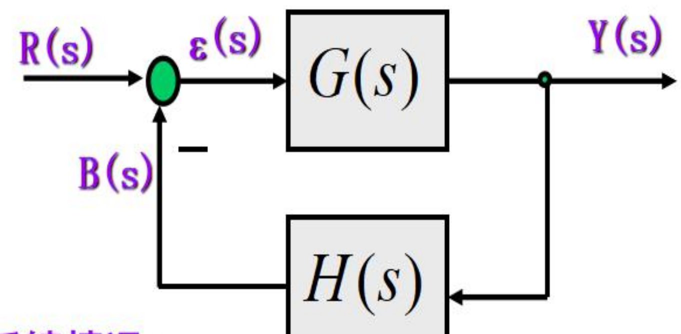
开环传递函数： $G（s）= B(s)/\ \varepsilon(s)=G(s)H(s)$

前向通道： 系统输入量到输出量之间的通道 G (s)

主反馈通道： 输出量到主反馈信号之间的通道 H(s)

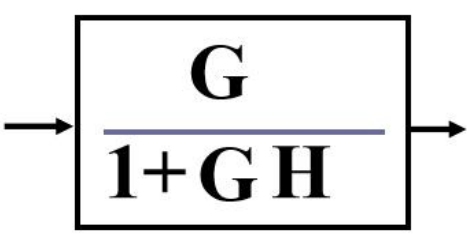
[例] 求系统每一外作用对每一输出的传递函数，并求总输出C(s)。



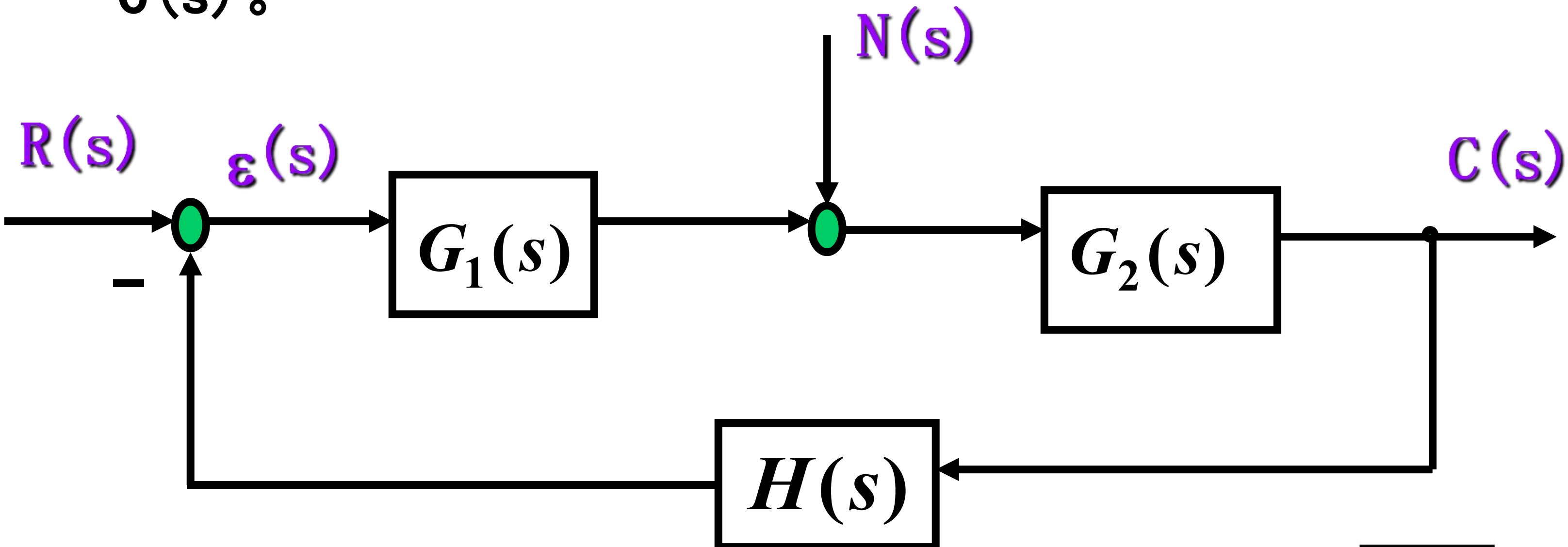


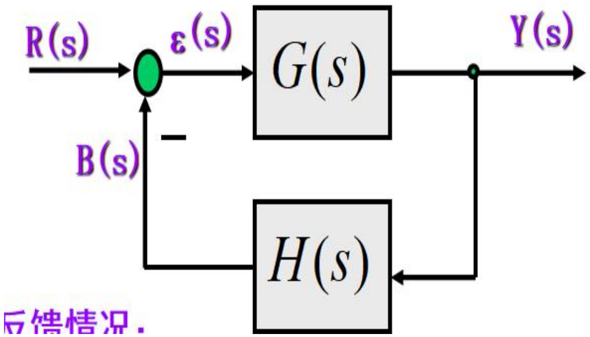
1. 令N(s)=0

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$



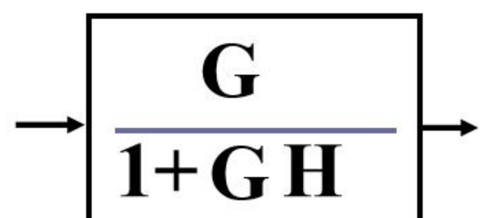
[例] 求系统每一外作用对每一输出的传递函数，并求总输出C(s)。



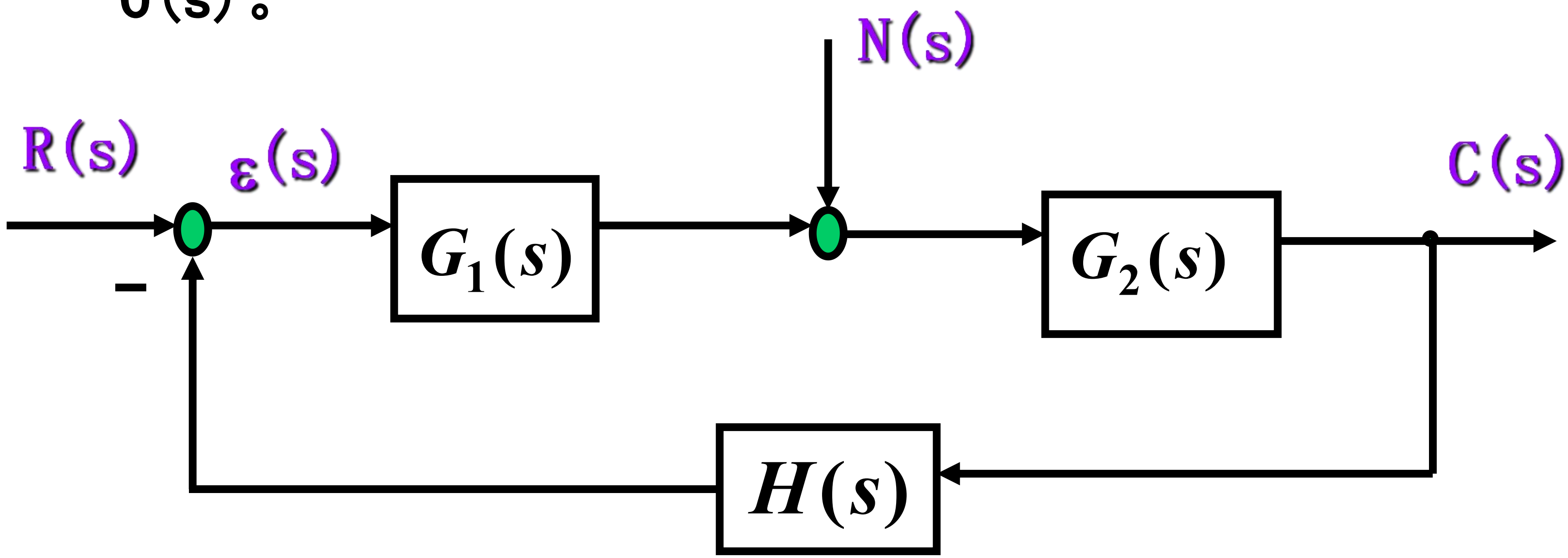


2. 令R(s)=0

$$\frac{C(s)}{N(s)}=\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$



[例] 求系统每一外作用对每一输出的传递函数，并求总输出C(s)。



3.

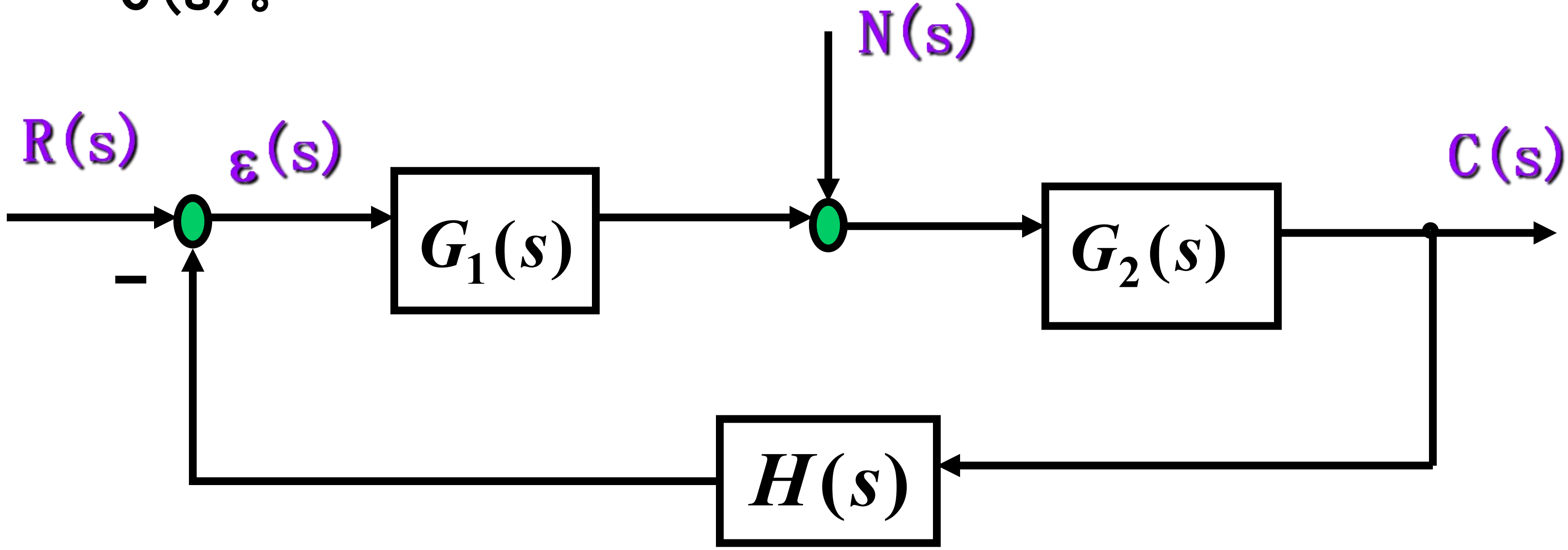
$$C(s)=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s)+\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

$$=\frac{G_1(s)G_2(s)R(s)+G_2(s)N(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

$$1+G_1(s)G_2(s)H(s)=1+G_K(s)$$

——闭环系统的特征多项式

[例] 求系统每一外作用对每一输出的传递函数，并求总输出C(s)。



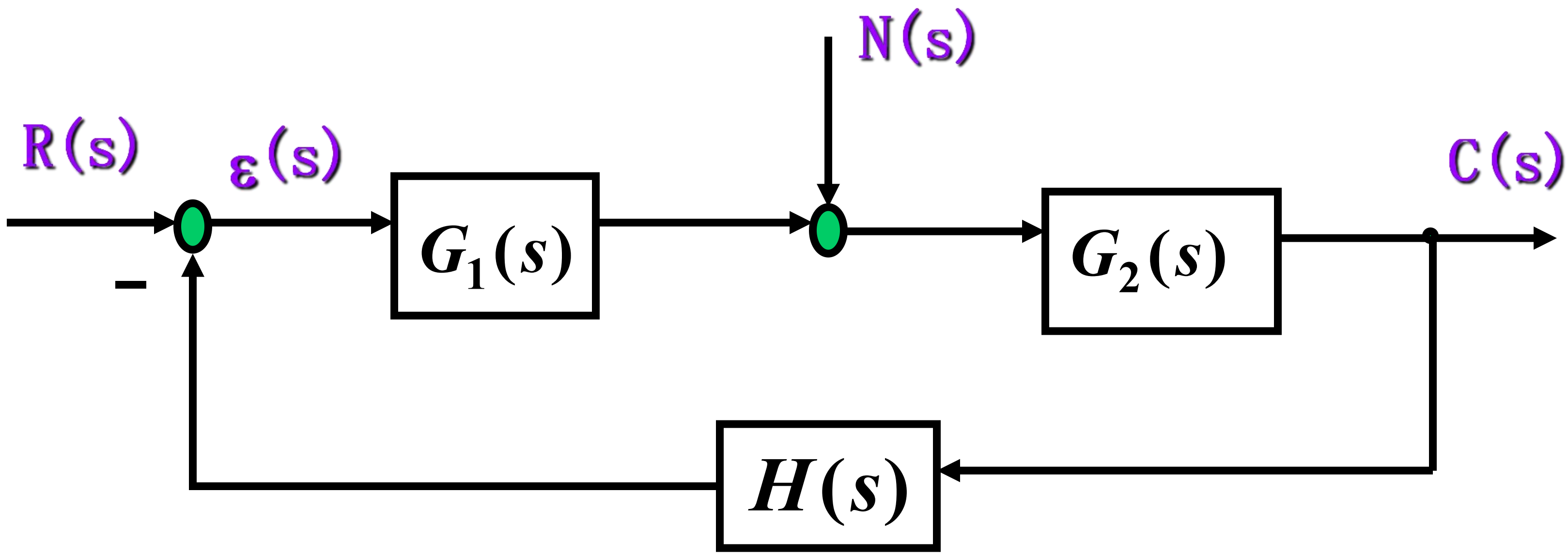
$$C(s)=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s)+\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s)$$

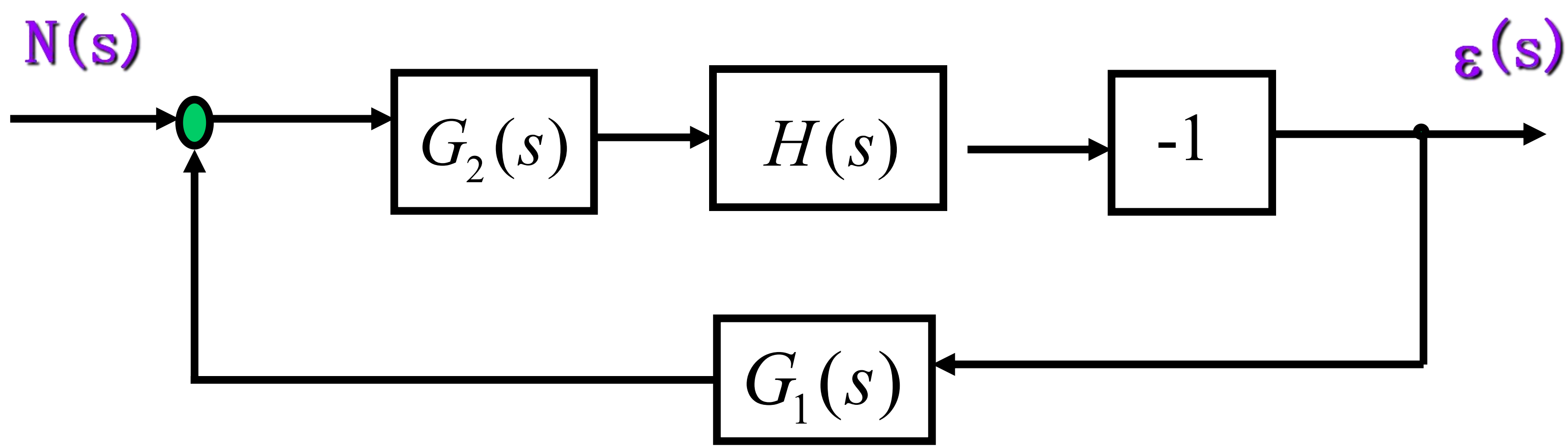
结论：1. 传递函数不能直接相加减；

2. 控制系统闭环传递函数分母相同，又称特征方程式。

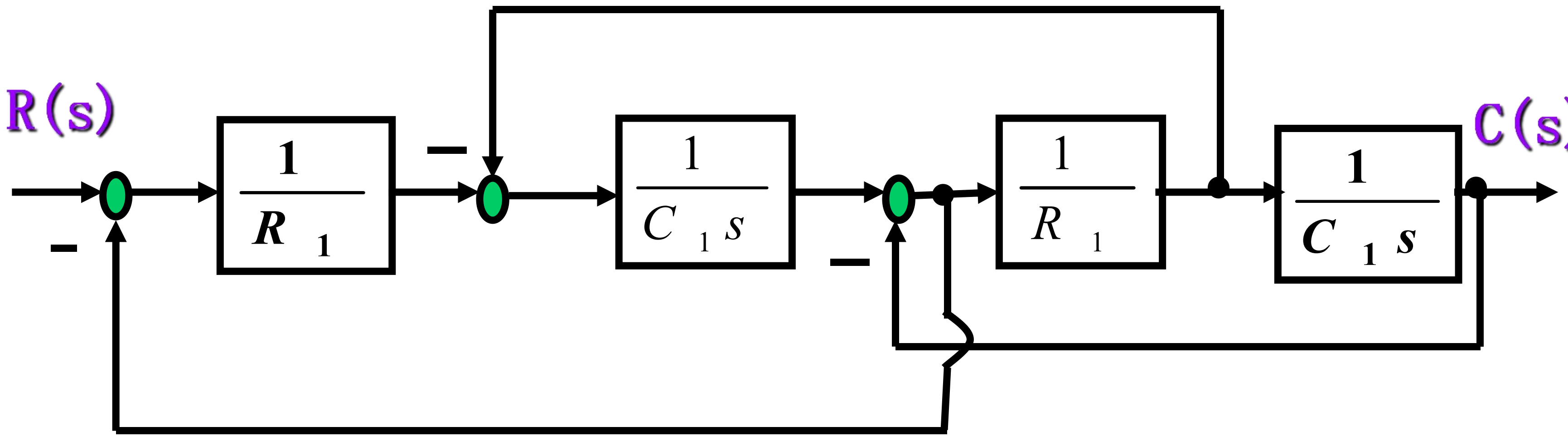
思考： $\Phi_{\varepsilon r}(s)=?$ $\Phi_{\varepsilon n}(s)=?$

$$\Phi_{\varepsilon n}(s) = ?$$





[练习] 系统结构如图所示，试用结构图变换求传递函数C(s)/R(s)。



[练习]

系统结构图的建立