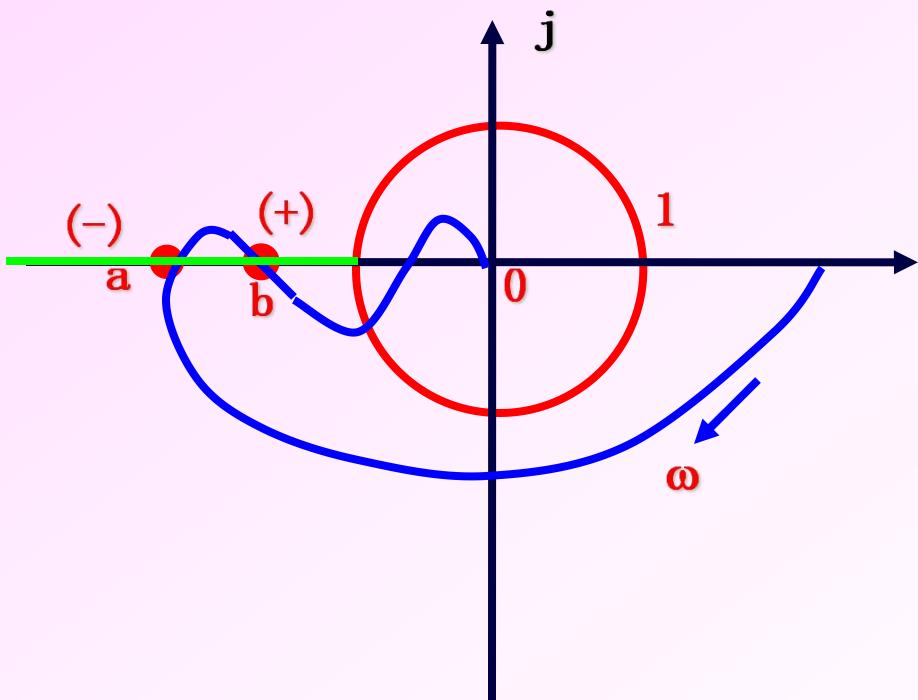


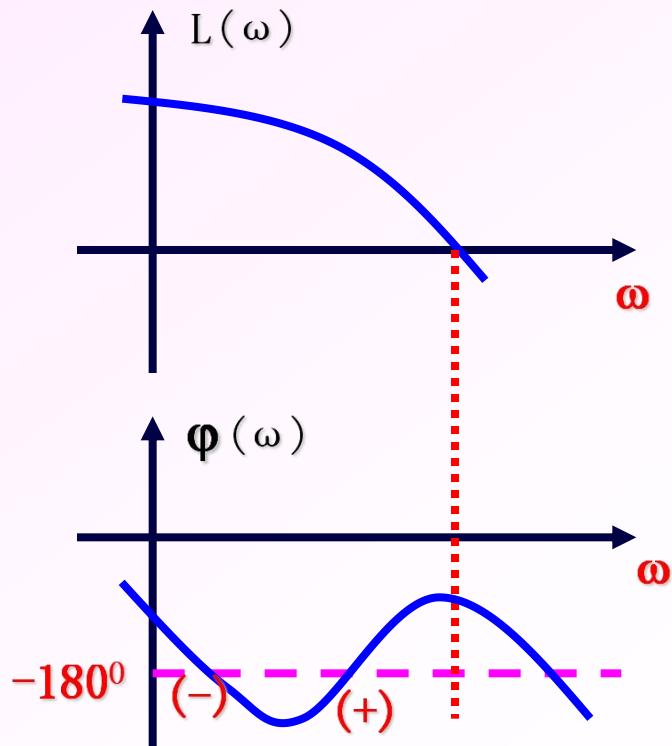
二、对数频率稳定判据

对数频率稳定判据和奈氏判据本质上相同，只是前者是根据系统的开环伯德图来确定 $Z = P - 2N$ 中的 N 而已。

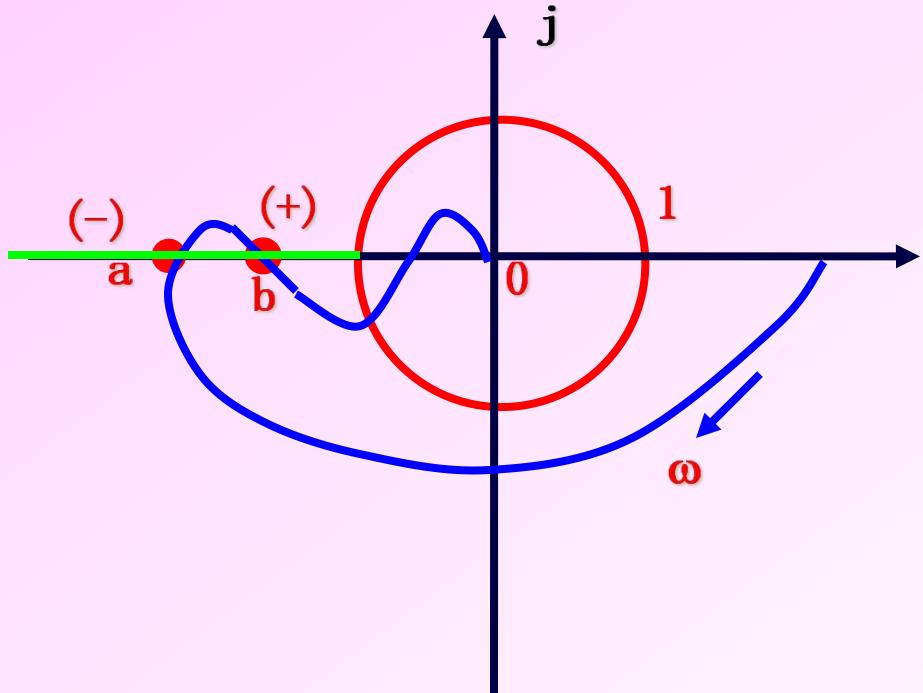
下图是一幅相曲线及其对应地对数频率特性曲线。



幅相曲线



伯德图

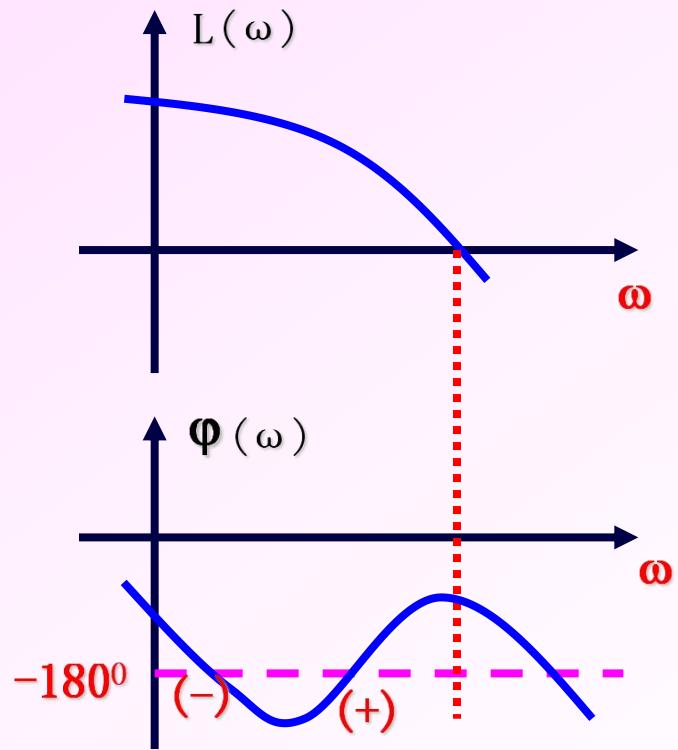


幅相曲线

$$A(\omega) = 1$$

$$A(\omega) > 1$$

$$A(\omega) < 1$$

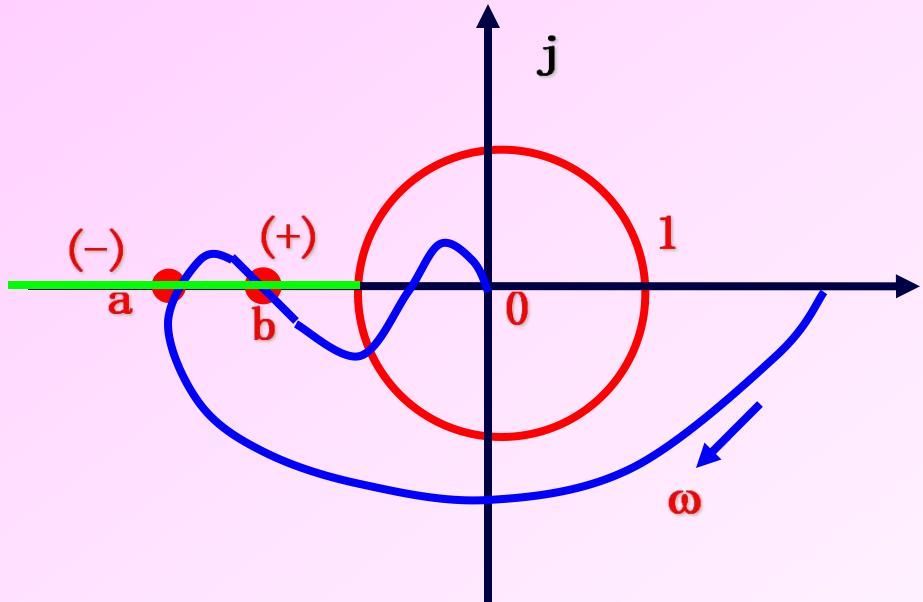


伯德图

$$20 \lg A(\omega) = 0$$

$$20 \lg A(\omega) > 0$$

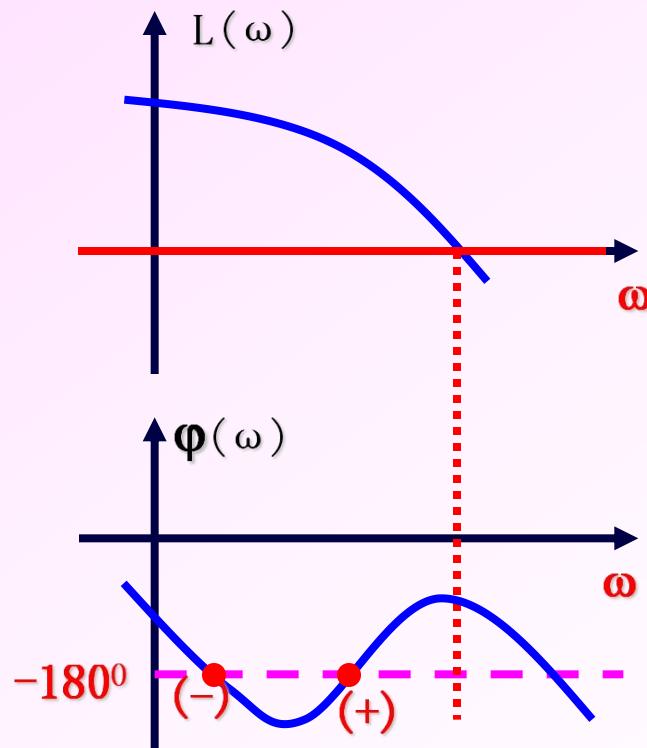
$$20 \lg A(\omega) < 0$$



对数频率判据：

$$Z = P - 2N$$

在 $L(\omega) > 0 \text{dB}$ 的频段， $\varphi(\omega)$ 穿越 $(2k+1)\pi$ 来确定 $N = N_+ - N_-$



注：若开环传递函数 $G(s)H(s)$ 含 v 个积分环节，应在对数相频曲线 $\omega=0+$ 地方，向上一条 $v \times 90^\circ$ 的虚线，计算正、负穿越时，应将补画的虚线看成对数相频曲线的一部分。

[例] 设单位反馈系统，开环传递函数 $G(s) = \frac{10(\frac{1}{3}s + 1)}{s(s - 1)}$

试用对数频率稳定判据判定系统的稳定性。

解： ①作开环对数频率特性曲线

$$G(s) = \frac{10(\frac{1}{3}s + 1)}{s(s - 1)}$$

$$\nu = 1, \quad \omega_1 = 1 \quad \frac{1}{s - 1} \quad \text{不稳定惯性环节} \quad \text{斜率}[-20]$$

$$\omega_2 = 3 \quad \frac{1}{3}s + 1 \quad \text{一阶微分环节} \quad \text{斜率}[+20]$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\omega}{3} - \frac{\pi}{2} - (\pi - \arctan \omega)$$

[例] 设单位反馈系统，开环传递函数 $G(s) = \frac{10(\frac{1}{3}s + 1)}{s(s - 1)}$

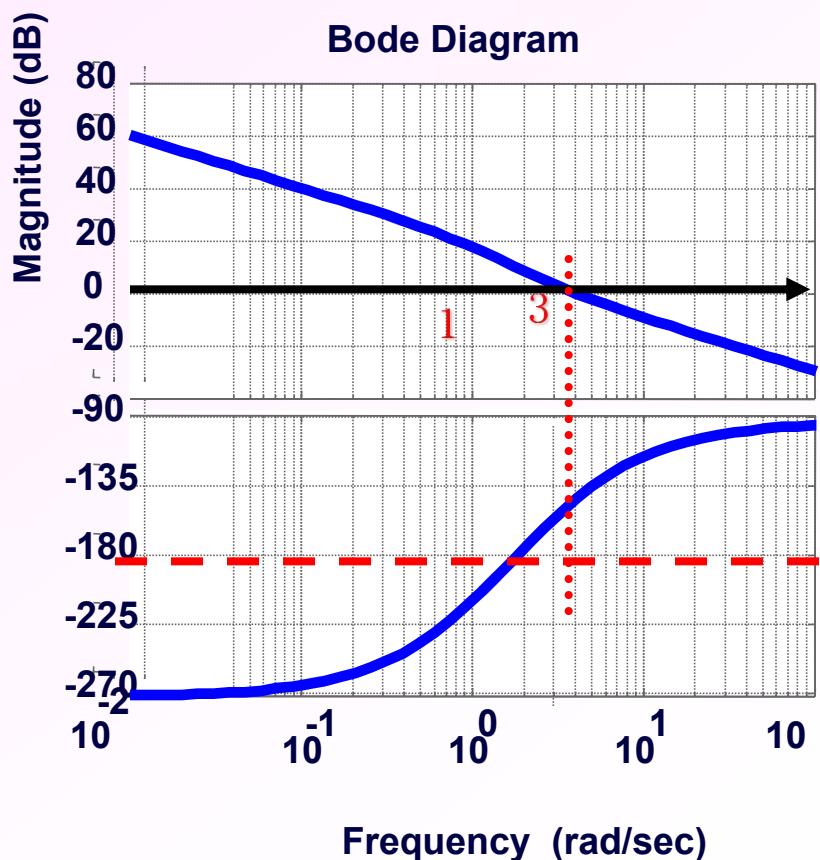
试用对数频率稳定判据判定系统的稳定性。

解：①作开环对数频率特性曲线

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{\omega}{3} - 90^\circ - (\pi - \arctan \omega)$$

$$\omega \rightarrow 0^+ \text{时}, \varphi(\omega) = -270^\circ$$

$$\omega \rightarrow +\infty \text{时}, \varphi(\omega) = -90^\circ$$



$$Z = P - 2N$$

在 $L(\omega) > 0 \text{dB}$ 的频段, $\varphi(\omega)$ 穿越 $(2k+1)\pi$ 来确定 $N = N_+ - N_-$

若开环传递函数 $G(s)H(s)$ 含 v 个积分环节, 应在对数相频曲线 $\omega=0+$ 地方, 向上一条 $v \times 90^\circ$ 的虚线, 计算正、负穿越时, 应将补画的虚线看成对数相频曲线的一部分。

解: ①作开环对数频率特性曲线

$$\omega \rightarrow 0^+ \text{ 时, } \varphi(\omega) = -270^\circ$$

$$\omega \rightarrow +\infty \text{ 时, } \varphi(\omega) = -90^\circ$$

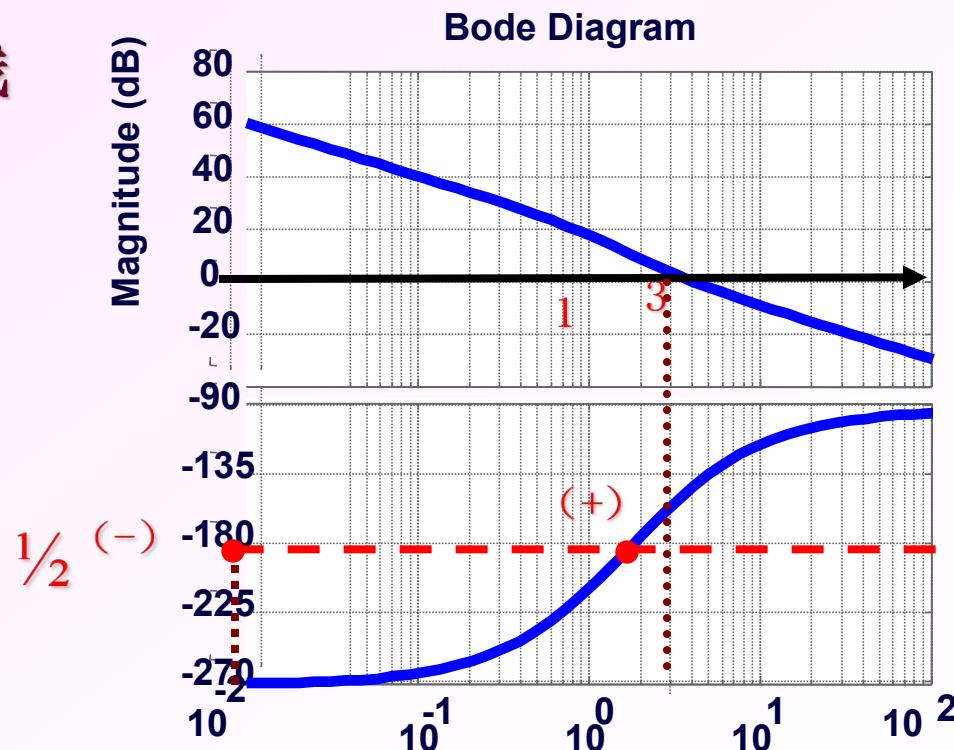
②判稳

注意: 这里要补画!!

$$P=1 \quad N=N_+ - N_- = 1 - 1/2 = 1/2$$

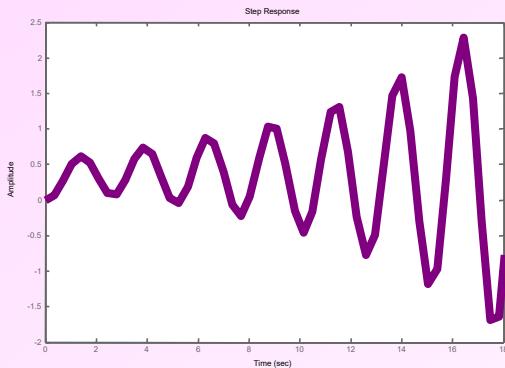
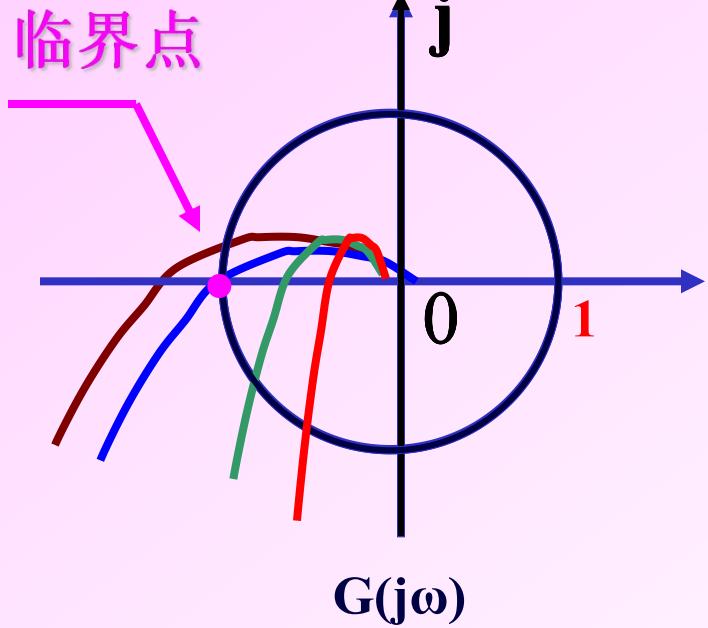
$$Z=P-2N=1-2(1/2)=0$$

故闭环系统稳定

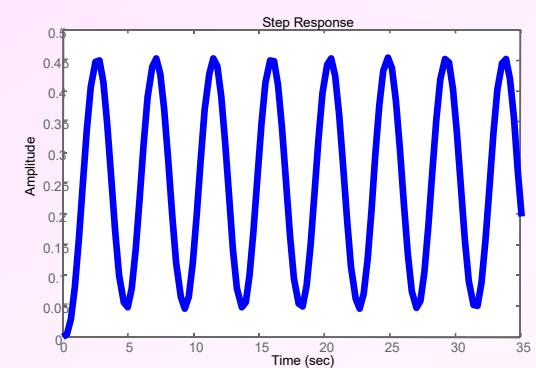


$$G(s) = \frac{10 \left(\frac{1}{3}s + 1 \right)}{s(s-1)}$$

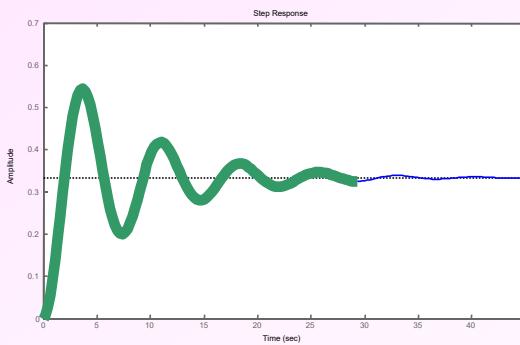
稳定裕度



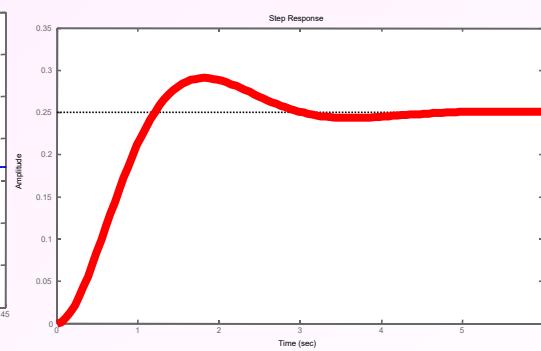
a)



b)



c)



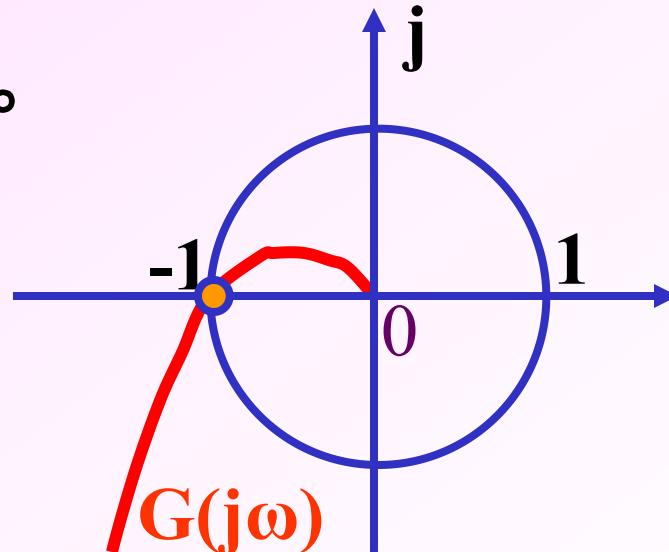
d)

b) 和 c) 都对系统稳定, 但 c) 稳定程度更好, 对应的 $x(t)$ 发散
a) 单位幅相曲线已过临界点, 系统不稳定, 对应的 $x(t)$ 发散
相曲线离临界点较远

结论: 系统的开环幅相曲线在临界点附近的形状, 对闭环稳定性影响很大, 曲线接近临界点, 稳定程度越差.

临界稳定的概念

最小相角系统当 $G(j\omega)$ 过(-1,j0)点时(见图),
闭环系统**临界稳定**。



特点: $G(j\omega)$ 曲线过(-1,j0)点时,

$$\left. \begin{array}{l} |G(j\omega)| = 1 \\ \angle G(j\omega) = -180^\circ \end{array} \right\} \text{同时成立!}$$

[例]单位反馈系统开环传递函数, $T_1 > 0, T_2 > 0$

$$G(s) = \frac{1}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

试确定使系统闭环临界稳定时参数 T_1, T_2 值.

解: ①作奈氏曲线

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{j\omega(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)} \quad v = 1 \\ &= -\frac{T_1 + T_2}{1 + \omega^2(T_1^2 + T_2^2) + \omega^4 T_1^2 T_2^2} + j \frac{\frac{1}{\omega}(1 - \omega^2 T_1 T_2)}{1 + \omega^2(T_1^2 + T_2^2) + \omega^4 T_1^2 T_2^2} \\ &= \frac{1}{\omega \sqrt{1 + \omega^2 T_1^2} \sqrt{1 + \omega^2 T_2^2}} e^{-j(90^\circ + \arctan \omega T_1 + \arctan \omega T_2)} \end{aligned}$$

[例]单位反馈系统开环传递函数, $T_1 > 0, T_2 > 0$

$$G(s) = \frac{1}{s(T_1s + 1)(T_2s + 1)}$$

试确定使系统闭环临界稳定时参数 T_1, T_2 值.

解: ①作奈氏曲线

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{1}{j\omega(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)} \quad v = 1 \\ &= \frac{1}{\omega \sqrt{1+\omega^2 T_1^2} \sqrt{1+\omega^2 T_2^2}} e^{-j(90^\circ + \arctan \omega T_1 + \arctan \omega T_2)} \end{aligned}$$

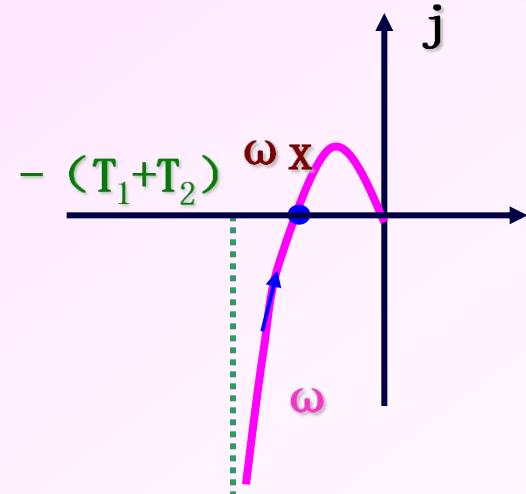
$$\omega \rightarrow 0^+ \text{时} \quad G(j\omega) = \infty / -90^\circ$$

$$\omega \rightarrow \infty \text{时} \quad G(j\omega) = / -270^\circ$$

令 $\text{Im}[G(j\omega)] = 0$ 得 $\omega_x^2 = 1/T_1 T_2$

$$\omega_x = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}}$$

$$G(j\omega_x) = -\frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}$$



$$V_x = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \text{Re}[G(j\omega)] = -(T_1 + T_2)$$

② 欲使系统临界稳定, $G(j\omega)$ 必须过 $(-1, j0)$ 点

即 $\begin{cases} |G(j\omega)| = 1 \\ \angle G(j\omega) = -180^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} = 1 \\ \omega = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}} \end{cases}$

即系统临界稳定条件为 $\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} = 1$

欲使系统闭环稳定, 则 $|G(j\omega)| < 1 \quad \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} < 1$

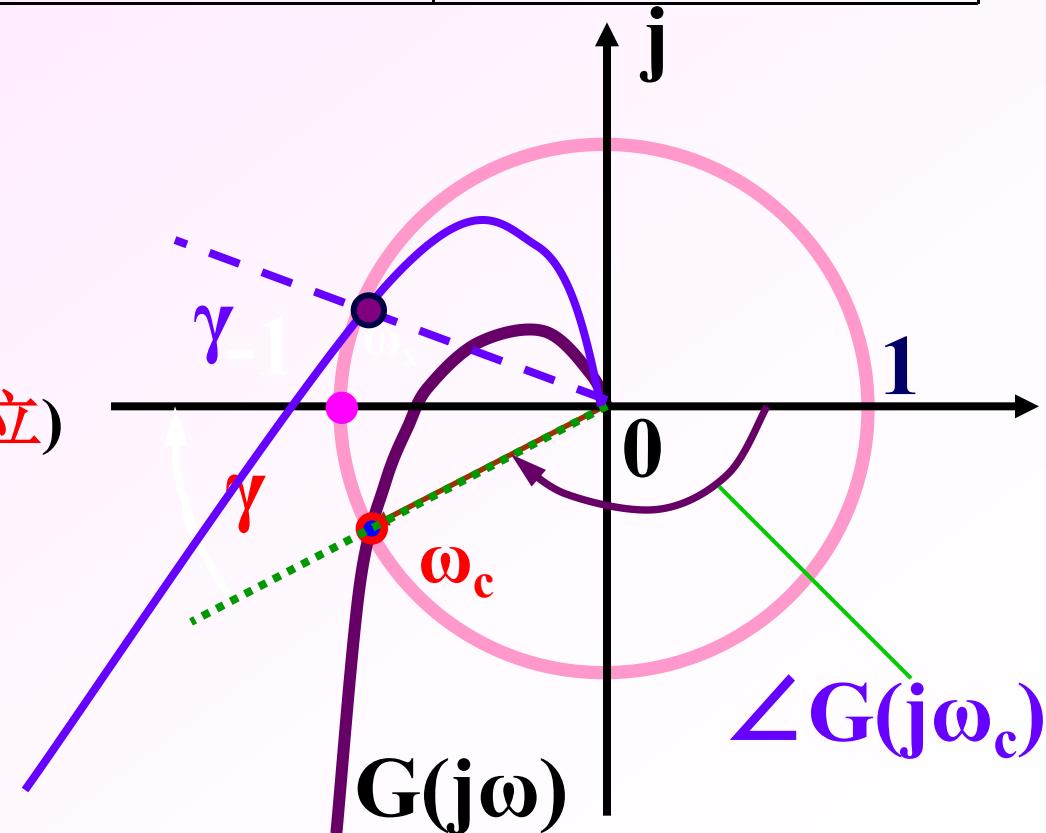
相角欲度 γ	开环极坐标图	开环伯德图
截止频率 ω_c	$ G(j\omega_c)H(j\omega_c) =1$	$L(\omega_c)=0$
γ 定义	$G(j\omega_c)H(j\omega_c)$ - $\gamma = -180^\circ \rightarrow \gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c)$	
大小	$ G(j\omega_c)H(j\omega_c) =1$ 的矢量 与负实轴夹角	$L(\omega_c)=0$ 处相角与 -180° 夹角

讨论: $\gamma > 0$ 稳定;

$\gamma = 0$ 临界稳定;

$\gamma < 0$ 不稳定

(最小相位系统才成立)



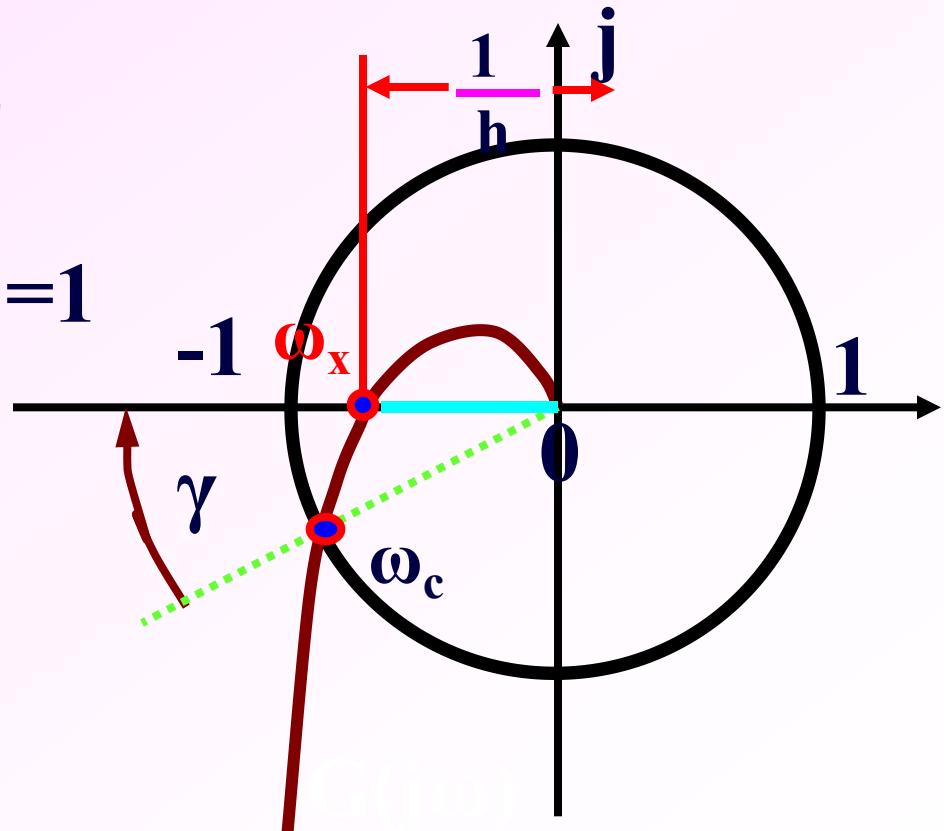
幅值裕度 h 定义:

	开环极坐标图	开环伯德图
穿越频率 ω_x	$ G(j\omega_x)H(j\omega_x) = 1$	与 -180° 线交点对应的频率
h 定义	$h^* G(j\omega_x)H(j\omega_x) = 1 \rightarrow h = 1/ G(j\omega_x)H(j\omega_x) $	

$$\angle G(j\omega_x) H(j\omega_x) = -180^\circ$$

$$h |G(j\omega_x) H(j\omega_x)| = 1$$

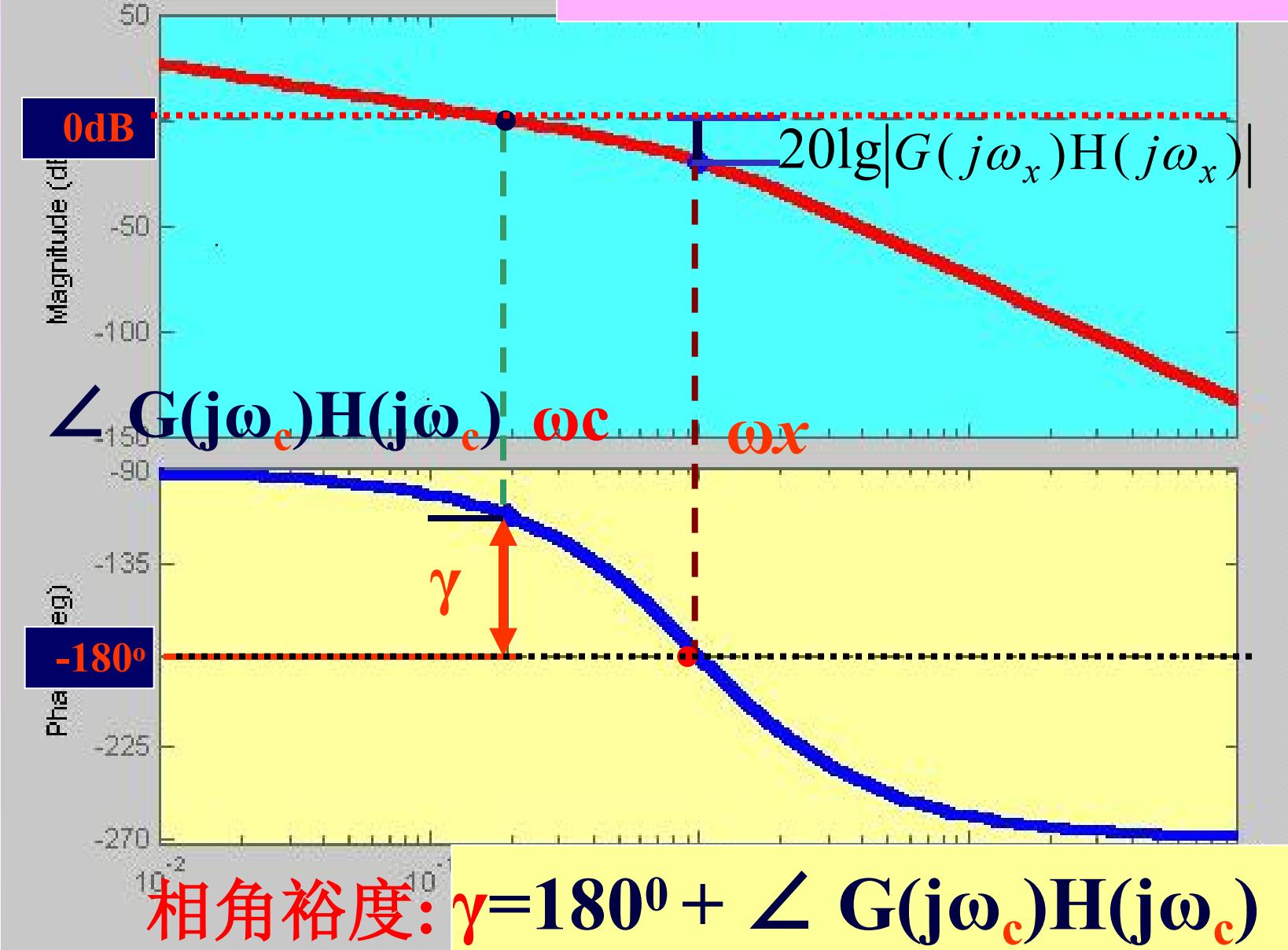
幅值裕度 $h = \frac{1}{|G(j\omega_x)H(j\omega_x)|}$



$h > 1$ 稳定; $h = 1$ 临界稳定; $h < 1$ 不稳定 (最小相位系统才成立)

幅值裕度:

$$h \text{dB} = -20 \lg |G(j\omega_x)H(j\omega_x)|$$



相角裕度: $\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c)$

在Bode图上, 如何看临界稳定? ω_c 处对应 $\gamma=0^\circ$

[例]已知单位反馈系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{10(s-1)}{s(s+1)^2}$$

要求: 1. 绘制奈氏曲线 2. 用奈氏判据判稳 3. 求 γ 和 h 。

解:

- 起点: $G(j0_+) = \infty \angle 90^\circ$
- 终点: $G(j\infty) = 0 \angle -180^\circ$

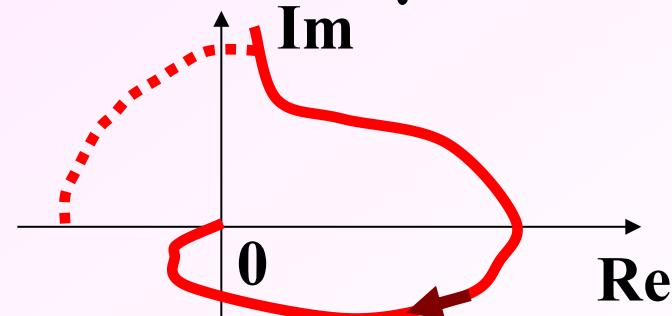
求交点:

$$G(j\frac{1}{\sqrt{3}}) = 15$$

$$G(j\sqrt{3}) = -j\frac{5}{\sqrt{3}}$$

$$2. z = p - 2N = 0 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

可见系统不稳定!



3. $\omega_c = 3.08$
 $\gamma = 53.9^\circ$

$$\omega_x = \infty$$

$$h = \infty$$

不能由 γ 和 h 判稳!

对于非最小相位系统

已知某最小相位系统的开环对数幅频渐近线如图 2 所示，用奈氏判据判断系统稳定性，并求系统的相角裕度。

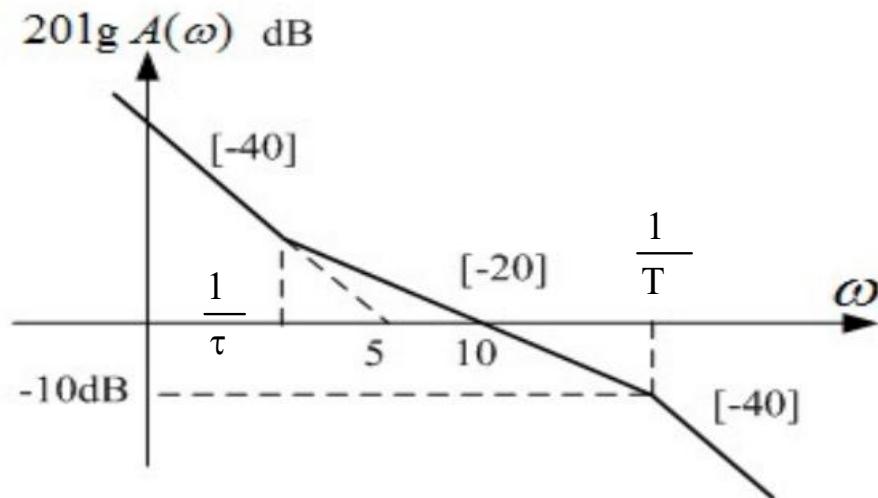


图 2

$$G(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(T s + 1)} \quad K = 25 \quad \tau = 0.4$$

$$T = 10^{-1.5} = 0.0316$$

$$\gamma = 180^\circ + \varphi = \arctg(4) - \arctg(0.3) = 59^\circ$$

小结：

$$Z = P - 2N$$

--Z: 正实部特征根的个数

--P: 开环传递函数右半S平面极点数

奈氏判据：

N: 开环幅相曲线 ω 从 $0 \rightarrow +\infty$ 时, 绕临界点 $(-1, j0)$ 的圈数

对数频率稳定判据：由开环系统伯德图确定N的方法为：

在 $L(\omega) > 0$ dB 所有频率范围内, $\varphi(\omega)$ 对 $(2k+1)\pi$ 线的正负穿越次数差即 $N = N^+ - N^-$

若 $Z=0$, 闭环系统稳定; 反之, 不稳定, 且有Z个正实部根

相角欲度 $\gamma = 180^\circ + G(j\omega_c)H(j\omega_c)$

截止频率 ω_c $|G(j\omega_c)H(j\omega_c)|=1$

幅值裕度 $h = \frac{1}{|G(j\omega_x) H(j\omega_x)|}$

穿越频率 ω_x $\angle G(j\omega_x)H(j\omega_x) = -180^\circ$

5-4 闭环系统频域性能指标

常用的频域性能指标分：

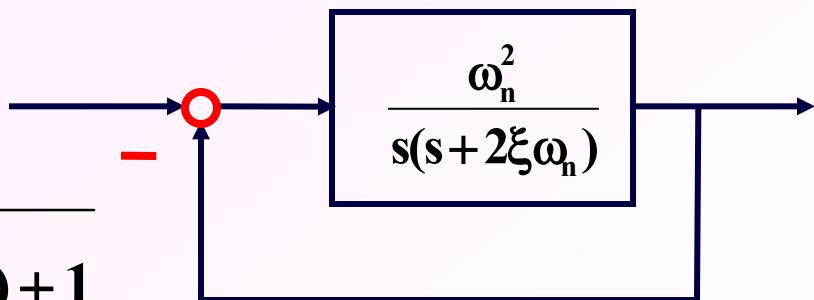
开环频域性能指标： γ , ω_c , h 等

闭环频域性能指标： ω_b , ω_r , M_r 等

一、二阶系统闭环频域指标与时域指标关系

1. 带宽频域 ω_b

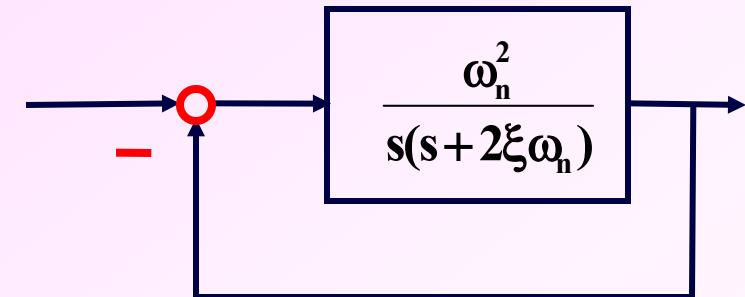
$$\phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{(\frac{s}{\omega_n})^2 + 2\xi(\frac{s}{\omega_n}) + 1}$$



$$\phi(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2\xi \frac{\omega}{\omega_n}}$$

$$|\phi(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

定义: $|\Phi(j\omega_b)| = 0.707 |\Phi(j0)|$



闭环幅频特性衰减 $0.707 |\Phi(j0)|$

对应的频率为 ω_b (称为带宽频率)

$$\omega_b \triangleq \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{2 - 4\xi^2 + 4\xi^4}}$$

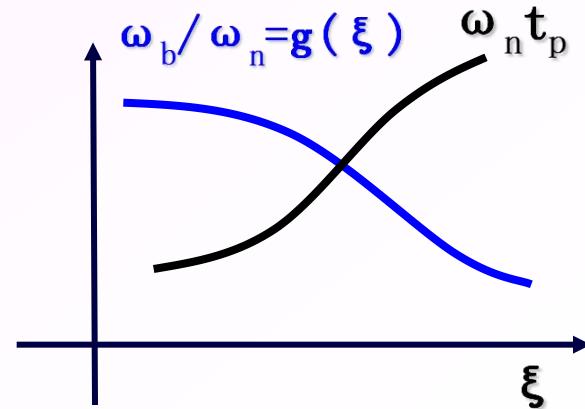
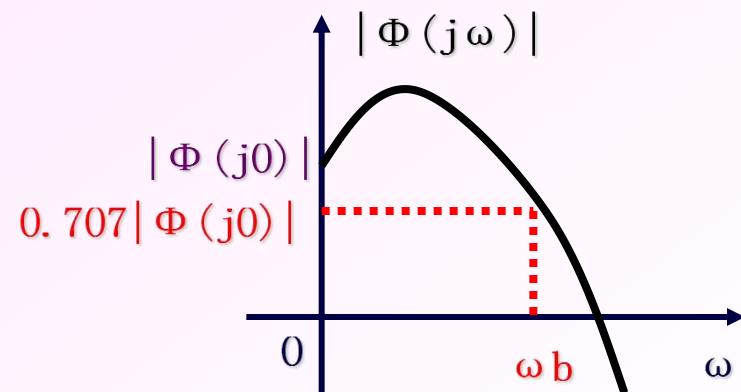
$$\frac{\omega_b}{\omega_n} \sim g(\xi)$$

$$\text{又二阶系统 } t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \xi^2}} \therefore \omega_n t_p = f(\xi)$$

由图可见: ω_n 一定, $\omega_b \uparrow \rightarrow \xi \downarrow \rightarrow t_p \downarrow$

结论: 带宽越大, 系统反映速度越快

但从抑制噪声角度, 带宽不宜过大



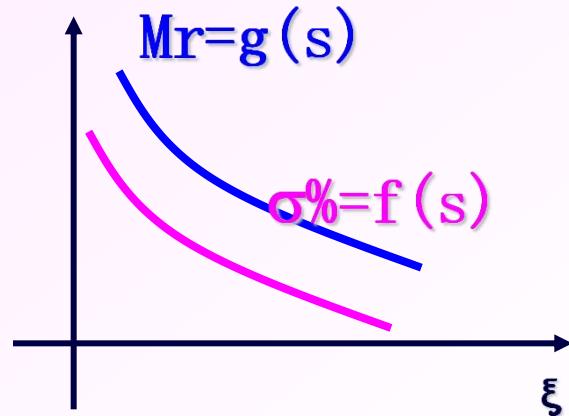
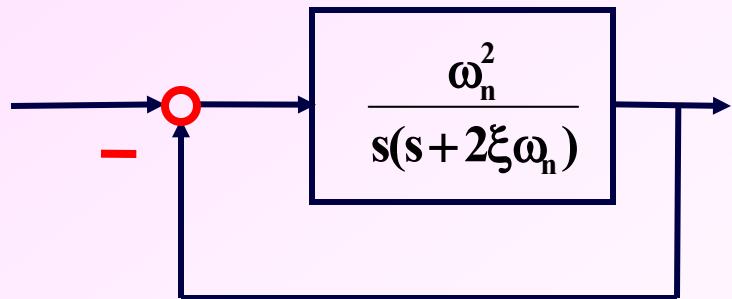
2. 谐振峰值Mr 和 ω_r

$$Mr = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (\xi \leq 0.707)$$

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2} \quad (\xi \leq 0.707)$$

$$\sigma\% = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \times 100\%$$

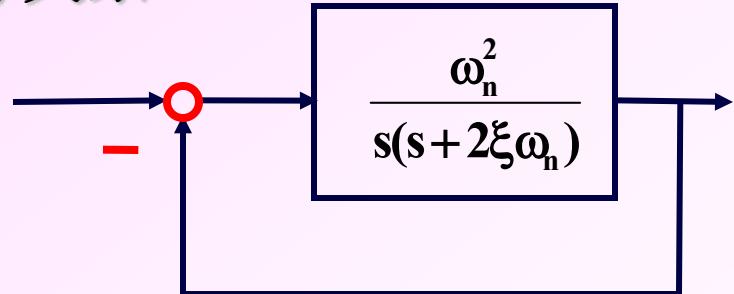
$$Mr \uparrow \rightarrow \xi \downarrow \rightarrow \delta \% \uparrow$$



结论:Mr是度量系统平稳性的频域指标。

二、二阶系统开环频域指标与时域指标关系

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega + 2\xi\omega_n)}$$



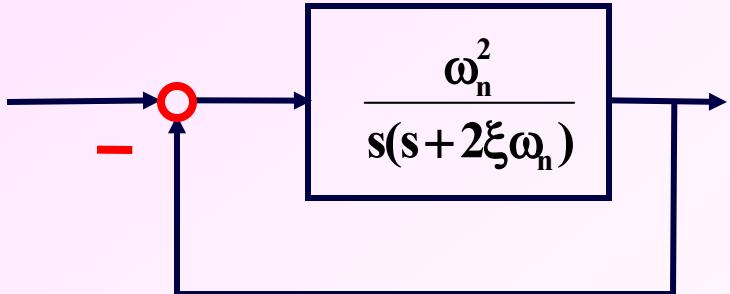
$$A(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\omega \sqrt{\omega^2 + (2\xi\omega_n)^2}} \quad \varphi(\omega) = \angle G(j\omega) = -90^\circ - \arctan \frac{\omega}{2\xi\omega_n}$$

由 $|G(j\omega_c)| = 1$ 得 $\frac{\omega_c}{\omega_n} = \sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2}$

$$\gamma = 180^\circ + \angle G(j\omega_c) = 180^\circ - 90^\circ - \arctan \frac{2\xi\omega_n}{\omega_c} = \arcc \tan \frac{2\xi\omega_n}{\omega_c}$$

$\Rightarrow \gamma = \arctan \frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2}}$

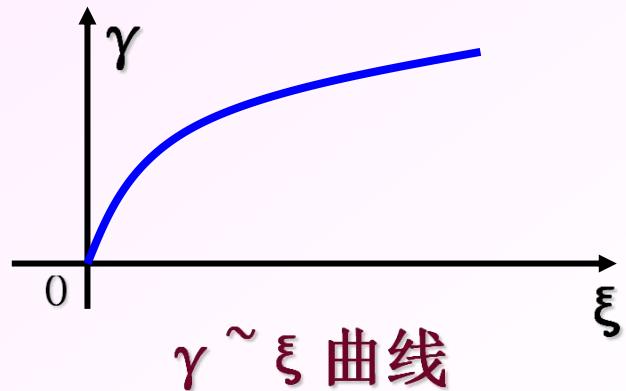
→ $\gamma = \arctan \frac{2\xi}{\sqrt{\sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2}}$



结论: $\xi \uparrow \rightarrow \gamma \uparrow \rightarrow \delta \% \downarrow$

相角裕度反映动态过程稳定性

一般取 γ 在 $30^\circ - 70^\circ$ 之间



又 $\because \gamma = \arctan \frac{2\xi\omega_n}{\omega_c} \quad \therefore \xi\omega_n = \frac{\omega_c}{2} \tan \gamma$

$$t_s = \frac{3}{\xi\omega_n} = \frac{6}{\omega_c \tan \gamma}$$

相同 γ 下, ω_c 大者, $t_s \downarrow$

结论: ω_c 反映系统动态过程快速性

三、高阶系统频域指标与时域指标的关系

超调量 $\sigma\% = 0.16 + 0.4 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right) \quad (3.5^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ)$

调节时间 $t_s = \frac{k\pi}{\omega_c}$

式中 $k = 2 + 1.5 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right) + 2.5 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right)^2$

小结：

平稳性↑ 快速性↑

开环频域性能指标: $\gamma \uparrow$, $\omega_c \uparrow$, h 等

闭环频域性能指标: $\omega_b \uparrow$, ω_r , $M_r \uparrow$ 等

快速性↑ 平稳性↓