



第三章 轨道位置的时间函数



对于椭圆轨道，以下哪个量不守恒？

- A 半长轴
- B 轨道角动量
- C 飞行路径角
- D 轨道能量



下面哪种轨道机械能等于0

- A 圆轨道
- B 椭圆轨道
- C 抛物线轨道
- D 双曲线轨道

填空题 2分



决定轨道形状的轨道根数分别是什么? [填空1]、
[填空2]

主观题 10分



已知中心引力常数为 μ , 试利用抛物线轨道机械能特性, 推导轨道任一点 r 处的速度大小 v , 并指出该速度是圆轨道(半径为 r)速度的多少倍?



1. 引言

思考?

核心问题

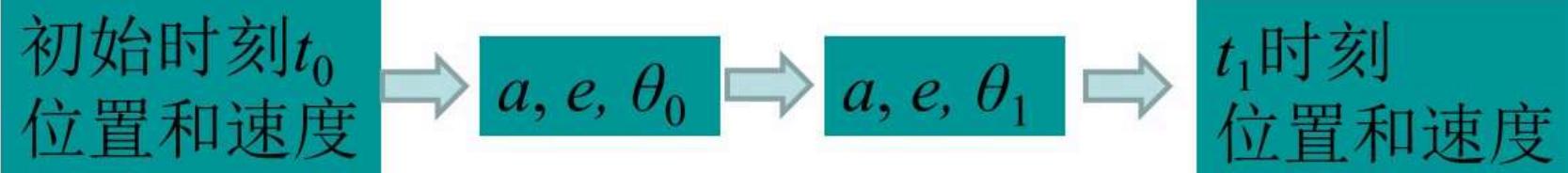
- Q1: 二体问题解可以分为几类（即开普勒轨道类型）？各有什么不同特性？如何区分？ ✓
- Q2: 开普勒轨道有哪些守恒量？
- Q3: 如何计算某一时刻航天器的位置？



1. 引言

轨道递推问题：若已知初始时刻位置和速度，
如何求解目标时刻的位置和速度？

平面情形



若可以知道 t_1 时刻的真近点角 θ_1 值，则采用拉格朗日系数方法可以求解该时刻的位置和速度。

如何建立时间与真近点的关系？



2. 近地点时刻

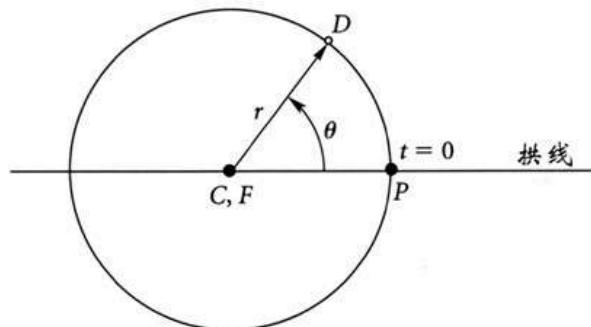
$$r = \frac{(h^2/\mu)}{(1+e\cos\theta)} \quad \text{← 时间的隐函数}$$

如何计算飞过任意两真近点角所需的时间 ?

$$\begin{aligned} h = r^2 \dot{\theta} &\implies \frac{\mu^2}{h^3} dt = \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2} \\ &\quad \downarrow \text{方程两边积分} \\ \frac{\mu^2}{h^3} (t - t_p) &= \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2} \\ &\quad \downarrow t_p = 0 \\ \frac{\mu^2}{h^3} t &= \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2} \quad \cdots \quad \text{通用} \end{aligned}$$



3. 圆轨道



$$\begin{aligned} e = 0 & \quad \frac{\mu^2}{h^3} t = \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2} \\ & \quad \frac{\mu^2}{h^3} t = \int_0^\theta d\theta \\ & \quad t = \frac{h^3}{\mu^2} \theta \quad r = \frac{h^2}{\mu} \\ & \quad t = \frac{r^2}{\sqrt{\mu}} \theta \quad T = 2\pi r^{\frac{3}{2}} / \sqrt{\mu} \\ & \quad t = \frac{\theta}{2\pi} T \quad \text{或} \quad \theta = \frac{2\pi}{T} t \end{aligned}$$



4. 椭圆轨道

$0 < e < 1$

$$\frac{\mu^2}{h^3} t = \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+e \cos \theta)^2}$$
$$\frac{\mu^2}{h^3} t = \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \left[2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e\sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1+e \cos \theta} \right]$$
$$\frac{\mu^2 (1-e^2)^{\frac{3}{2}}}{h^3} \quad t = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e\sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1+e \cos \theta}$$
$$2\pi \left/ \left[\frac{2\pi}{\mu^2} \left(\frac{h}{\sqrt{1-e^2}} \right)^3 \right] \right\} \frac{2\pi}{T_{\text{椭圆}}}$$
$$\downarrow$$
$$T_{\text{椭圆}}$$



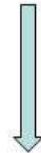
4. 椭圆轨道

$$n = \frac{2\pi}{T_{\text{椭圆}}} \quad \text{椭圆轨道的平均角速度}$$

$$nt = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e\sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1+e \cos \theta}$$

平近点角

$M_e = nt$



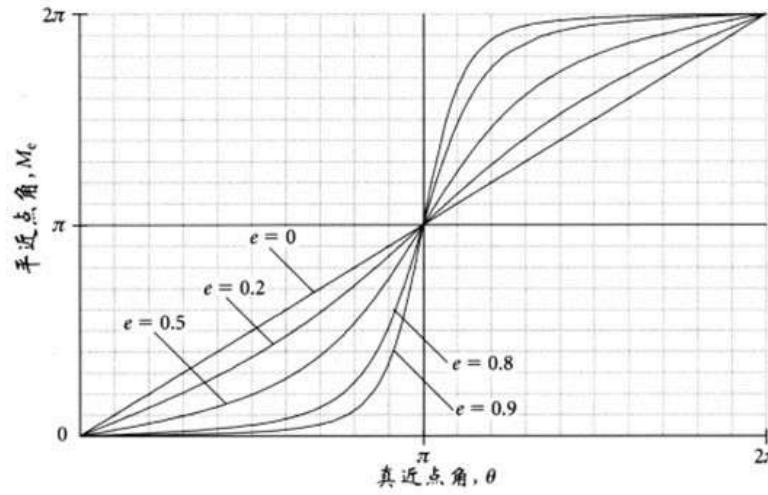
$$M_e = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e\sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1+e \cos \theta}$$

$$M_e = \frac{\mu^2}{h^3} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} t$$

M_e 可看成是一假想物体沿椭圆轨道以常量角速度值为 n 运行时所形成的地方角



4. 椭圆轨道



M_e 为 θ 的单调递增函数

$$t \rightarrow \theta$$

$$t \rightarrow M_e$$

$$M_e \rightarrow \theta$$

$$\frac{\mu^2}{h^3} t = \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \left[2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e\sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1+e \cos \theta} \right]$$

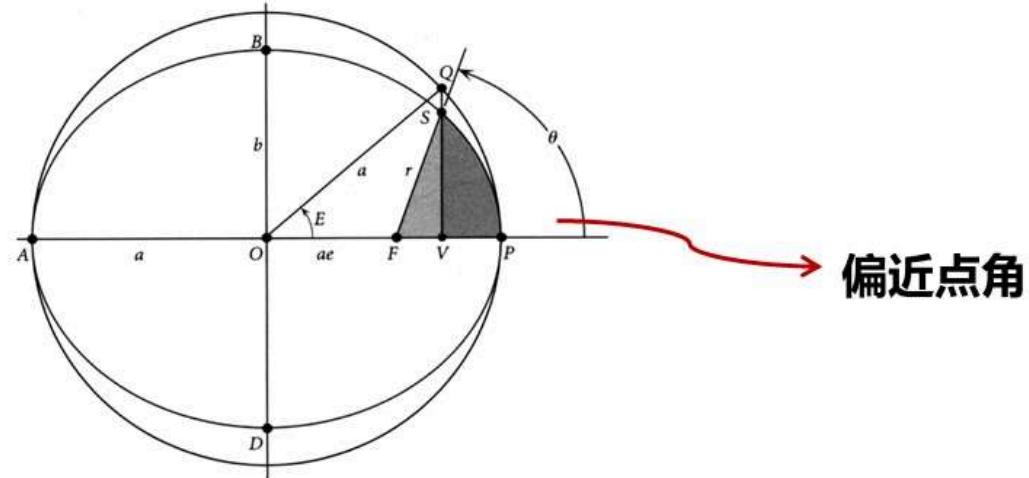
$$M_e = nt$$

$$M_e = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e\sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1+e \cos \theta}$$



4. 椭圆轨道

$$\begin{aligned} M_e \rightarrow \theta \\ M_e \rightarrow E \\ E \rightarrow \theta \end{aligned}$$



偏近点角

$$\overline{OV} = a \cos E$$

$$\overline{OV} = ae + r \cos \theta$$

$$a \cos E = ae + r \cos \theta$$

$$r = a(1-e^2) / (1+e \cos \theta)$$

$$\cos E = \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta}$$

$$\sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta}$$

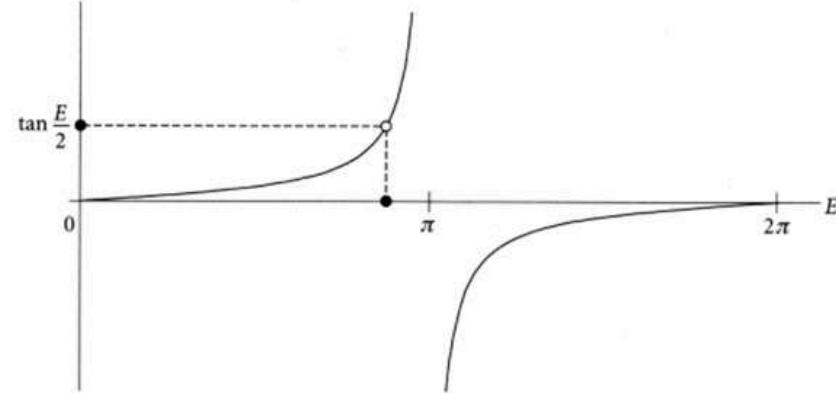
$$\cos \theta = \frac{e - \cos E}{e \cos E - 1}$$



4. 椭圆轨道

$$\begin{cases} \cos E = \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \\ \sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \end{cases} \quad \text{θ已知} \quad \rightarrow \cos E, \sin E$$

问题：不能确定E的项限



$$\tan^2 \frac{E}{2} = \frac{1 - \cos E}{1 + \cos E}$$

$$\tan^2 \frac{E}{2} = \frac{1 - e}{1 + e} \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - e}{1 + e} \tan^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{\theta}{2} \quad \text{or} \quad E = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{\theta}{2} \right)$$



4. 椭圆轨道

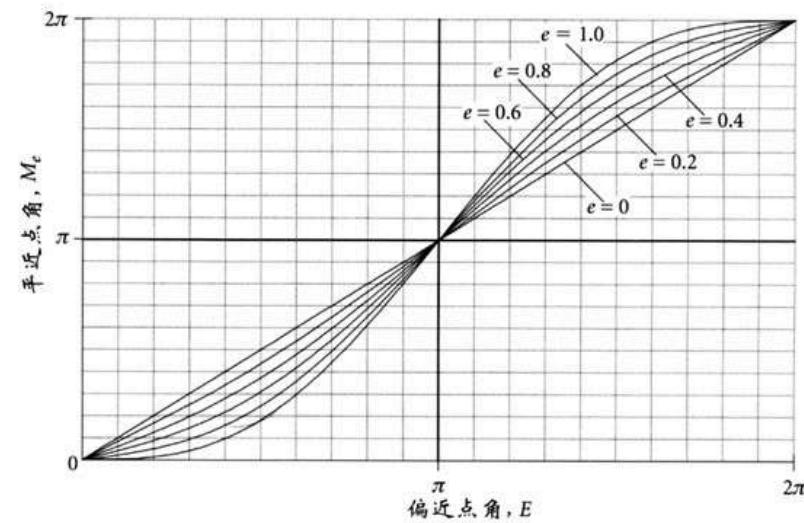
$$E = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\sin E = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1+e \cos \theta}$$

$$M_e = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e \sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1+e \cos \theta}$$



$$M_e = E - e \sin E \quad \text{开普勒方程}$$





4. 椭圆轨道

$$\frac{\mu^2}{h^3} t = \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \left[2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e\sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1+e \cos \theta} \right]$$

$t \rightarrow \theta$

$t \rightarrow M_e \quad M_e \rightarrow \theta$

$M_e \rightarrow E \rightarrow \theta$

$$nt = M_e \quad M_e = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e\sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1+e \cos \theta}$$
$$nt = M_e \quad M_e = E - e \sin E \quad E = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right)$$



4. 椭圆轨道

真近点角 $\theta \rightarrow t$

$$\begin{array}{c} E = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \\ \theta \xrightarrow{} E \xrightarrow{} M_e \xrightarrow{} t \\ M_e = E - e \sin E \\ M_e = \frac{2\pi}{T} t \end{array}$$

$t \rightarrow \theta$

$$\begin{array}{ccccc} t & \xrightarrow{M_e = \frac{2\pi}{T} t} & M_e & \xrightarrow{M_e = E - e \sin E} & E \\ & & \downarrow & & \xrightarrow{\tan \frac{\theta}{2} = \tan \frac{E}{2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}} \\ & & & & \theta \end{array}$$

超越方程，不能直接求出 E

图解法，数值法，近似迭代法（牛顿迭代法）或其他方法求解 E

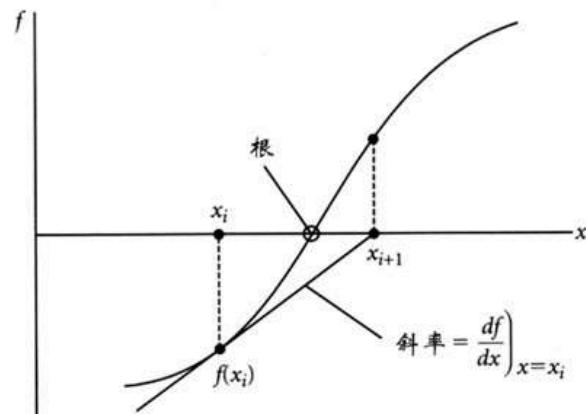


4. 椭圆轨道

估计 x_i



$$f(x) = 0$$



$$f'(x_i) = \frac{0 - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

利用牛顿法解开普勒方程需要建立如下函数关系

$$f(E) = E - e \sin E - M_e$$

$$f'(E) = 1 - e \cos E$$

$$E_{i+1} = E_i - \frac{E_i - e \sin E_i - M_e}{1 - e \cos E_i}$$

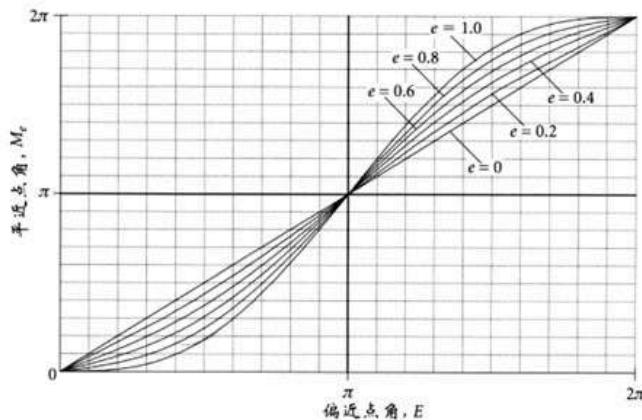


4. 椭圆轨道

算法 3.1

已知偏心率 e 和平近点角 M_e , 从开普勒方程中解出偏近点角 E 。附录 D.2

将此算法在 MATLAB 中予以实现。



1. 按如下标准选择根 E 的初始估计值: 若 $M_e < \pi$, 则 $E = M_e + e/2$; 若 $M_e > \pi$, 则 $E = M_e - e/2$ 。注意: E 和 M_e 的单位均为弧度。 $E = M_e + e \sin(M_e)$
2. 在上步确定 E_i 值后, 可在之后任意步中算出 $f(E_i) = E_i - e \sin E_i - M_e$ 和 $f'(E_i) = 1 - e \cos E_i$ 。
3. 算出比值 $ratio_i = f(E_i)/f'(E_i)$ 。
4. 若 $|ratio_i|$ 超出所要求的精度范围 (如 10^{-8}), 则重新估计 E 值,

$$E_{i+1} = E_i - ratio_i$$

再返回第二步。

5. 如果 $|ratio_i|$ 小于所要求的精度范围, 则此时 E_i 就是所设精度范围内的解。



4. 椭圆轨道

例3.1 一地心椭圆轨道，近地点半径为**9600**千米，远点半径为**21000**千米。求出由近地点P飞行至真近点角**120⁰**处所需要的时间

$$\theta \xrightarrow{E = 2 \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-e}}{\sqrt{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right)} E \xrightarrow{M_e = E - e \sin E} M_e \xrightarrow{M_e = \frac{2\pi}{T} t} t \quad e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = \frac{21000 - 9600}{21000 + 9600} = 0.37255$$

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{(1+e \cos \theta)} \longrightarrow 9600 = \frac{h^2}{398600} \frac{1}{1+0.37255 \cos(0)} \Rightarrow h = 72472 \text{ 千米}^2/\text{秒}$$

$$T = \frac{2\pi}{\mu^2} \left(\frac{h}{\sqrt{1-e^2}} \right)^3 = \frac{2\pi}{398600^2} \left(\frac{72472}{\sqrt{1-0.37255^2}} \right)^3 = 18834 \text{ 秒}$$

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-0.37255}{1+0.37255}} \tan \frac{120^\circ}{2} = 1.1711 \Rightarrow E = 1.7281 \text{ 弧度}$$

$$M_e = E - e \sin E \longrightarrow M_e = 1.7281 - 0.37255 \sin 1.7281 = 1.3601 \text{ 弧度}$$

$$t = \frac{M_e}{2\pi} T = \frac{1.3601}{2\pi} 18834 = 4077 \text{ 秒} \quad (1.132 \text{ 小时})$$



4. 椭圆轨道

例3.2:

在例3.1中，分别求出自近地点起**1 h**和**3 h**后的真近点角
要求求解精度为 **10^{-6}**

作业

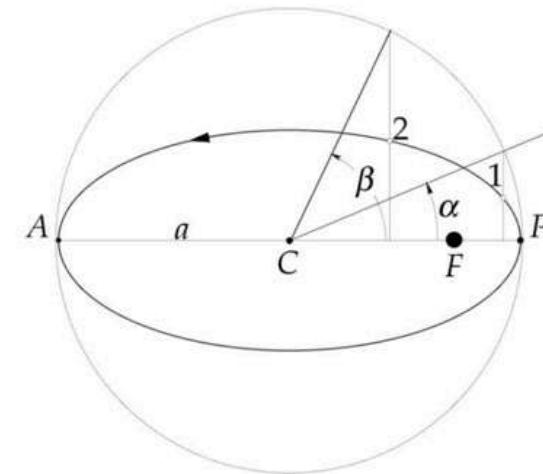


1. 一颗卫星在绕地轨道上运行，近地点高度为 200km, 远地点高度为 600km。求出此卫星两次高度为 400km 时的时间间隔。

主观题 10分



C为椭圆中心。已知偏心率e，轨道周期T和夹角 α 、 β ，推导从点1飞到点2的时间t



主观题 10分



C为椭圆中心。已知偏心率e，轨道周期T和夹角 α 、 β ，推导从点1飞到点2的时间t

$$t_{12} = t_2 - t_1 = \frac{M_2}{2\pi} T - \frac{M_1}{2\pi} T$$

$$t_{12} = \frac{T}{2\pi} (M_2 - M_1)$$

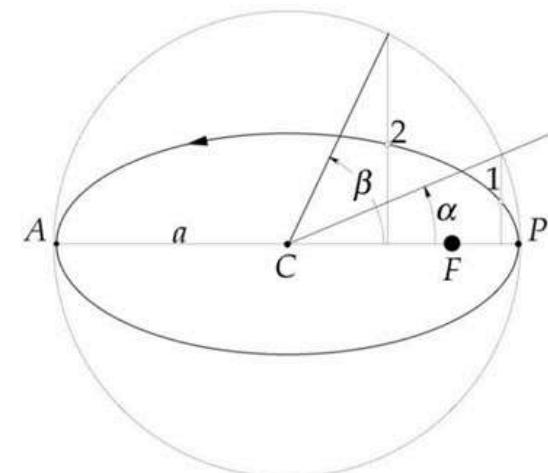
$$M_1 = E_1 - e \sin E_1 = \alpha - e \sin \alpha$$

$$M_2 = E_2 - e \sin E_2 = \beta - e \sin \beta$$

$$t_{12} = \frac{T}{2\pi} [(\beta - e \sin \beta) - (\alpha - e \sin \alpha)] = \frac{T}{2\pi} [\beta - \alpha + e(\sin \alpha - \cos \beta)]$$

$$\sin \alpha - \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

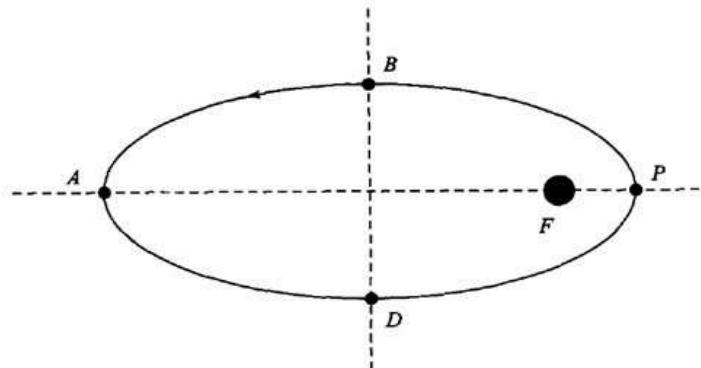
$$\therefore t_{12} = \frac{T}{2\pi} \left[\beta - \alpha + 2e \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right]$$



主观题 10分



- 3.6 如图 P.3.6 所示,已知偏心率 e 和周期 T 。求(1)由点 D 经近地点飞行至点 B 所需要的时间;
(2)由点 B 经远地点飞行至点 D 所需要的时间。



主观题 10分

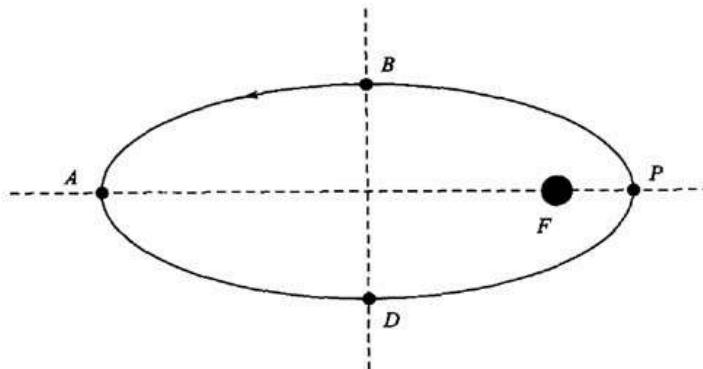


3.6 如图 P.3.6 所示,已知偏心率 e 和周期 T 。求(1)由点 D 经近地点飞行至点 B 所需要的时间;
(2)由点 B 经远地点飞行至点 D 所需要的时间。

$$M_B = E_B - e \sin E_B$$

$$2\pi \frac{t_B}{T} = \frac{\pi}{2} - e \sin \frac{\pi}{2}$$

$$t_B = \frac{\frac{\pi}{2} - e \sin \frac{\pi}{2}}{2\pi} T = \left(\frac{1}{4} - \frac{e}{2\pi} \right) T$$



$$t_{DB} = 2t_B, \quad t_{BD} = T - 2t_B$$

主观题 10分



3.7 如图 P.3.7 所示,若椭圆的偏心率为 0.3,用周期 T 表示由点 P 飞行至点 B 所需要的时间。

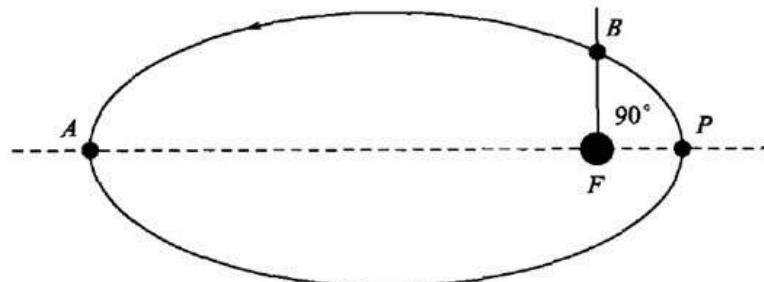


图 P.3.7

主观题 10分



3.7 如图 P. 3.7 所示,若椭圆的偏心率为 0.3,用周期 T 表示由点 P 飞行至点 B 所需要的时间。

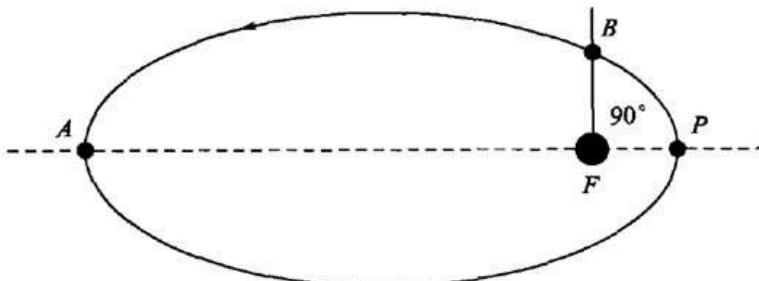


图 P. 3.7

$$\tan \frac{E_B}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta_B}{2} = \sqrt{\frac{1-0.3}{1+0.3}} \tan \frac{\pi}{4} = 0.73380 \Rightarrow E_B = 1.2661 \text{ rad}$$

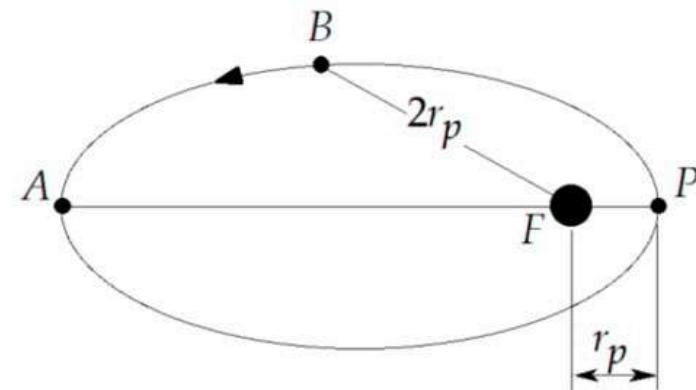
$$M_B = E_B - e \sin E_B = 1.2661 - 0.6 \sin 1.2661 = 0.97992 \text{ rad}$$

$$t_B = \frac{M_B}{2\pi} T = \frac{0.97992}{2\pi} T = \boxed{0.15596T}$$

主观题 10分



若椭圆轨道的偏心率为0.5，周期为T，计算从P飞到B的时间



主观题 10分



若椭圆轨道的偏心率为0.5，周期为T，计算从P飞到B的时间

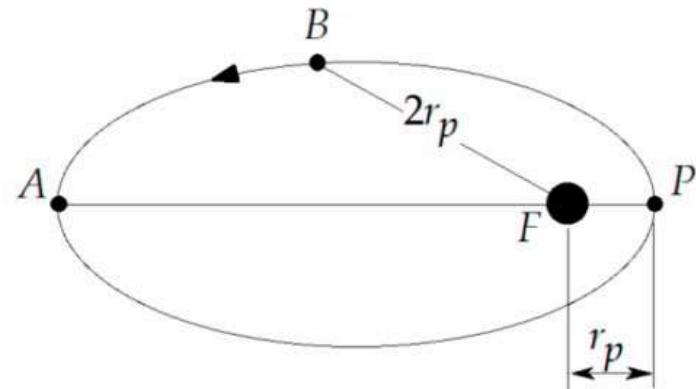
$$\left. \begin{array}{l} r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos \theta} \\ r_{\text{perigee}} = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e} \end{array} \right\} \Rightarrow r = \frac{r_{\text{perigee}} (1 + e)}{1 + e \cos \theta}$$
$$2r_{\text{perigee}} = \frac{r_{\text{perigee}} (1 + 0.5)}{1 + 0.5 \cos \theta_B}$$

$$\cos \theta_B = -0.5 \Rightarrow \theta_B = 120^\circ$$

$$\tan \frac{E_B}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta_B}{2} = \sqrt{\frac{1-0.5}{1+0.5}} \tan \frac{120^\circ}{2} \Rightarrow E_B = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

$$M_B = E_B - e \sin E_B = \frac{\pi}{2} - 0.5 \sin \frac{\pi}{2} = 1.0708 \text{ rad}$$

$$t_B = \frac{M_B}{2\pi} T = \frac{1.0708}{2\pi} T = \boxed{0.17042T}$$





5. 抛物线

$$e=1 \quad \frac{\mu^2}{h^3}t = \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

$$\frac{\mu^2}{h^3}t = \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2}$$

查积分表可以求得

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2} = \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{\theta}{2}$$

抛物线真近点角与时间的函数关系式

$$\frac{\mu^2}{h^3}t = \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{\theta}{2}$$

抛物线轨道的平近点角

$$M_p = \frac{\mu^2}{h^3}t$$

$$M_p = \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{\theta}{2}$$



5. 抛物线

真近点角 $\theta \rightarrow t$

$$\frac{1}{2} \tan \frac{\theta}{2} + \frac{1}{6} \tan^3 \frac{\theta}{2} = \frac{\mu^2}{h^3} t$$

$$\theta \longrightarrow t$$

$t \rightarrow \theta$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \left[3M_p + \sqrt{(3M_p)^2 + 1} \right]^{\frac{1}{3}} - \left[3M_p - \sqrt{(3M_p)^2 + 1} \right]^{\frac{1}{3}}$$

$$M_p = \frac{1}{2} \tan \frac{\theta}{2} + \frac{1}{6} \tan^3 \frac{\theta}{2}$$

$$t \longrightarrow M_p \triangleq \frac{\mu^2}{h^3} t \longrightarrow \theta$$



6. 双曲线

$$e > 1 \quad \frac{\mu^2}{h^3} t = \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

查积分表

$$\begin{aligned} & \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2} \\ &= \frac{1}{e^2-1} \left[\frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta} - \frac{1}{\sqrt{e^2-1}} \ln \left(\frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)} \right) \right] \end{aligned}$$

双曲线轨道的位置时间函数

$$\frac{\mu^2}{h^3} t = \frac{1}{e^2-1} \frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta} - \frac{1}{(e^2-1)^{\frac{3}{2}}} \ln \left(\frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)} \right)$$

两边同乘以 $(e^2-1)^{\frac{3}{2}}$ 可得

$$\frac{\mu^2}{h^3} (e^2-1)^{\frac{3}{2}} t = \frac{e\sqrt{e^2-1} \sin\theta}{1+e\cos\theta} - \ln \left(\frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)} \right)$$



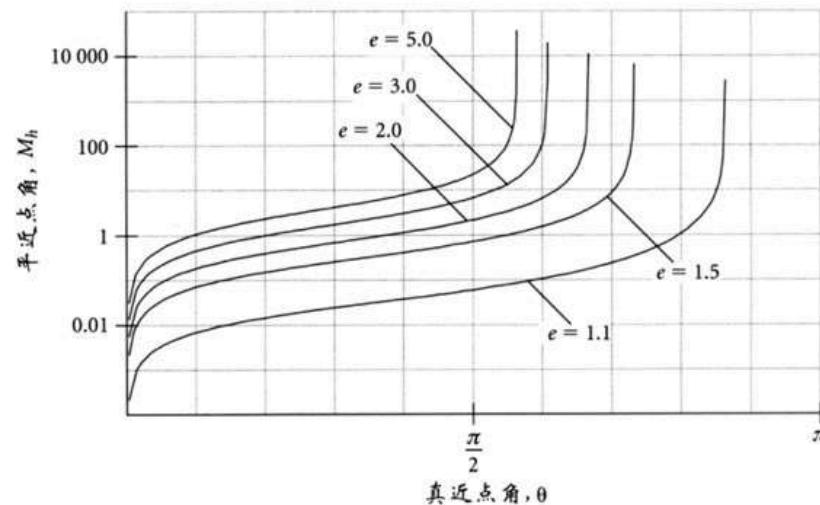
6. 双曲线

$$\frac{\mu^2}{h^3} (e^2 - 1)^{\frac{3}{2}} t = \frac{e\sqrt{e^2 - 1} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} - \ln \left(\frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)} \right)$$

$$M_h = \frac{\mu^2}{h^3} (e^2 - 1)^{\frac{3}{2}} t$$

$$t = \frac{h^3}{\mu^2} \frac{1}{(e^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} M_h$$

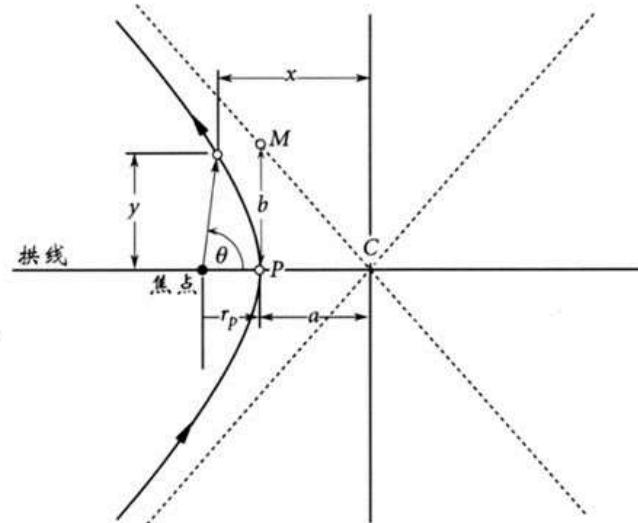
$$M_h = \frac{e\sqrt{e^2 - 1} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} - \ln \left(\frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)} \right)$$





6. 双曲线

像在椭圆轨道中引入偏近点角 E 可以简化椭圆轨道真近点角和平近点角之间的关系一样，这里我们也可引入一辅助角 F 作为双曲线轨道的偏近点角。



$$\sinh F = \frac{y}{b}$$
$$\downarrow$$
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\cosh F = \frac{x}{a}$$

$$y = r \sin \theta$$
$$r = a(e^2 - 1) / (1 + e \cos \theta)$$
$$b = a\sqrt{e^2 - 1}$$
$$\sinh F = \frac{y}{b} \implies \sinh F = \frac{\sqrt{e^2 - 1} \sin \theta}{1 + e \cos \theta}$$



6. 双曲线

可以解得用真近点角表示的 F 为

$$F = \sinh^{-1} \left(\frac{\sqrt{e^2 - 1} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \right)$$

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$F = \ln \left(\frac{\sin \theta \sqrt{e^2 - 1} + \cos \theta + e}{1 + e \cos \theta} \right)$$

$$\sin \theta = \frac{2 \tan(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)}, \quad \cos \theta = \frac{1 - \tan^2(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)}$$

$$F = \ln \left(\frac{1 + e + (e - 1) \tan^2(\theta/2) + 2 \tan(\theta/2) \sqrt{e^2 - 1}}{1 + e + (1 - e) \tan^2(\theta/2)} \right)$$



$$F = \ln \left(\frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)} \right)$$



6. 双曲线

$$F = \ln \left(\frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)} \right)$$

任务：进一步简化由真近点角求偏近点角的公式

$$\begin{aligned}\sinh F &= \frac{\sqrt{e^2 - 1} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \\ \cosh^2 F - \sinh^2 F &= 1 \\ \cosh F &= \frac{\cos \theta + e}{1 + e \cos \theta} \quad \longrightarrow \quad \cos \theta = \frac{\cosh F - e}{1 - e \cosh F} \\ \tanh F &= \frac{\sinh F}{\cosh F} \\ \text{查数学手册} \quad \downarrow \quad \tanh \frac{F}{2} &= \frac{\sinh F}{1 + \cosh F} \\ \tanh \frac{F}{2} &= \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \quad \xrightarrow{\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}} \quad \tanh \frac{F}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \tan \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

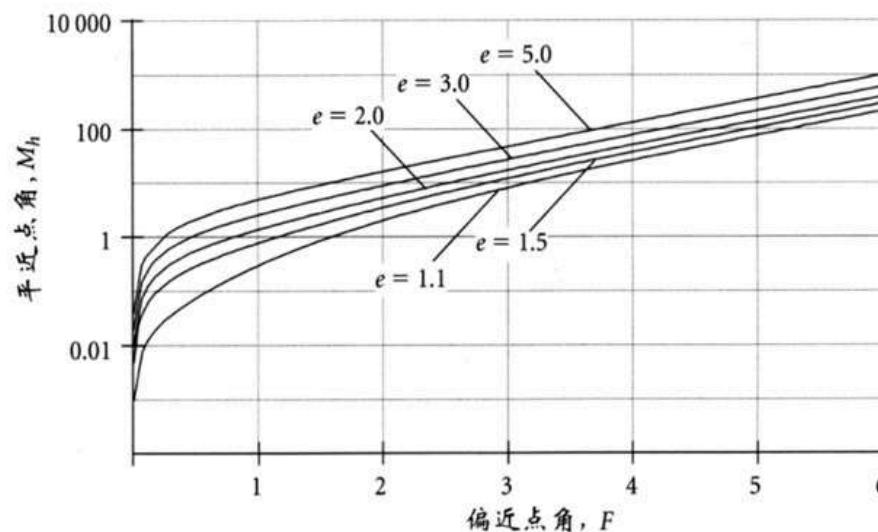


6. 双曲线

$$\sinh F = \frac{\sqrt{e^2 - 1} \sin \theta}{1 + e \cos \theta}$$
$$F = \ln \left(\frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)} \right)$$
$$M_h = \frac{e\sqrt{e^2 - 1} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} - \ln \left(\frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)} \right)$$

↓

$M_h = e \sinh F - F$ 双曲线的开普勒方程





6. 双曲线

真近点角 $\theta \rightarrow t$

$$\begin{aligned} \tanh \frac{F}{2} &= \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \tan \frac{\theta}{2} & M_h &= e \sinh F - F & t &= \frac{h^3}{\mu^2} \frac{1}{(e^2-1)^{\frac{3}{2}}} M_h \end{aligned}$$
$$\theta \xrightarrow{\quad} F \xrightarrow{\quad} M_h \xrightarrow{\quad} t$$

$t \rightarrow \theta$

超越方程，不能直接求出 F

$$M_h \triangleq \frac{\mu^2}{h^3} (e^2 - 1)^{\frac{3}{2}} t$$
$$t \xrightarrow{\quad} M_h \xrightarrow{\quad} F \xrightarrow{\quad} \theta$$

牛顿迭代法



7. 全局变量

椭圆方程→双曲线方程

$$\begin{aligned}a &\leftarrow -a \\b &\leftarrow ib \\M_e &\leftarrow iM_h \\E &\leftarrow iF\end{aligned}$$

$$\sin(iF) = i \sinh F, \cos(iF) = \cosh F$$

研究全局变量的目的：将开普勒方程的不同形式合并为单一通用的开普勒方程

| | |
|----------------------------|----------------------------|
| 一般 | 特殊 |
| $r \leftrightarrow \theta$ | $\theta \leftrightarrow t$ |
| 一般 | 一般 |
| $r \leftrightarrow \chi$ | $\chi \leftrightarrow t$ |



7. 全局变量

程适用于所有形式的轨道方

轨道半径 r :

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos \theta}$$

长半轴 a :

$$a = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 - e^2}$$

假设: 双曲线的长半轴为负值

能量函数:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \implies a = \frac{1}{\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}} \implies \begin{cases} a > 0 \Rightarrow \text{椭圆轨道} \\ a < 0 \Rightarrow \text{双曲线轨道} \end{cases}$$

全局近点角 χ (chi) ← 全局变量

$r \leftarrow \chi \leftarrow t$



7. 全局变量

设 t_0 表示全局变量为零的时刻， χ 表示 $t_0 + \Delta t$ 时刻的全局近点角值（全局变量），单位是千米的平方根

全局开普勒方程：

$t=t_0$ 时刻的半径

$t=t_0$ 时刻的径向速度

$$\alpha = \frac{1}{a} \begin{cases} > 0 & \text{椭圆} \\ = 0 & \text{抛物线} \\ < 0 & \text{双曲线} \end{cases}$$

$$\sqrt{\mu \Delta t} = \frac{r_0 v_{r0}}{\sqrt{\mu}} \chi^2 C(\alpha \chi^2) + (1 - \alpha r_0) \chi^3 S(\alpha \chi^2) + r_0 \chi$$

$C(z), S(z)$ 斯达姆夫函数的无穷级数定义

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{(2k+3)!} = \frac{1}{6} - \frac{z}{120} + \frac{z^2}{5040} - \frac{z^3}{362880} + \frac{z^4}{39916800} - \frac{z^5}{6227020800} + \dots$$

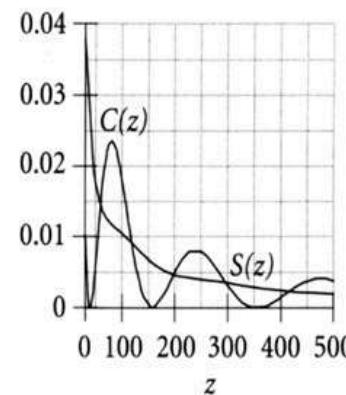
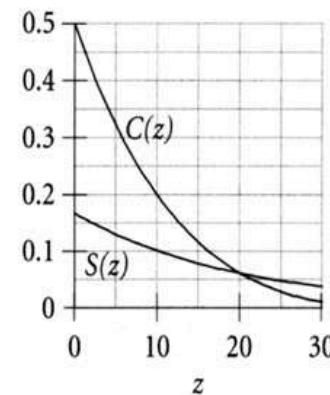
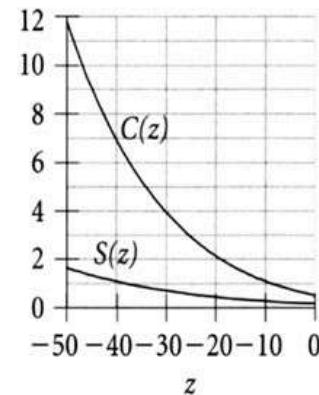
$$C(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{(2k+2)!} = \frac{1}{2} - \frac{z}{24} + \frac{z^2}{720} - \frac{z^3}{40320} + \frac{z^4}{3628800} - \frac{z^5}{479001600} + \dots$$



7. 全局变量

$S(z)$, $C(z)$ 与圆周三角函数和双曲三角函数的关系为

$$S(z) = \begin{cases} \frac{\sqrt{z} - \sin \sqrt{z}}{(\sqrt{z})^3} & (z > 0) \\ \frac{\sinh \sqrt{-z} - \sqrt{-z}}{(\sqrt{-z})^3} & (z < 0) \\ \frac{1}{6} & (z = 0) \end{cases} \quad C(z) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{z}}{z} & (z > 0) \\ \frac{\cosh \sqrt{-z} - 1}{-z} & (z < 0) \\ \frac{1}{2} & (z = 0) \end{cases}$$





7. 全局变量

小结:

- 1.推导了各种轨道类型的真近点角与时间的关系式
 - (1) 平近点角、偏近点角
 - (2) 不同轨道类型的平近点角、偏近点角、真近点角、时间之间的转换关系。
 - (3) 开普勒方程
 - (4) 牛顿迭代法

2.全局变量

$$\begin{array}{ccc} t \rightarrow \chi & \longrightarrow & \mathbf{r} = f\mathbf{r}_0 + g\mathbf{v}_0 \\ \chi \rightarrow f, g, \dot{f}, \dot{g} & & \mathbf{v} = \dot{f}\mathbf{r}_0 + \dot{g}\mathbf{v}_0 \end{array}$$