



实验一. 航天器轨道计算

卫星在惯性系下的初始状态为：

$$\mathbf{r}_0 = -6311227.13644808\hat{\mathbf{I}} - 1112839.62553522\hat{\mathbf{J}} + 3700000\hat{\mathbf{K}} \text{ (米)}$$

$$\mathbf{v}_0 = 1274.45143229237\hat{\mathbf{I}} - 7227.77323794544\hat{\mathbf{J}} + 2.24700438581515 \times 10^{-13}\hat{\mathbf{K}} \text{ (米/秒)}$$

(1) 利用Matlab解微分方程 $\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r}$, 求解卫星的运行轨迹, 列出要求解的标量方程, 画出三维轨迹图

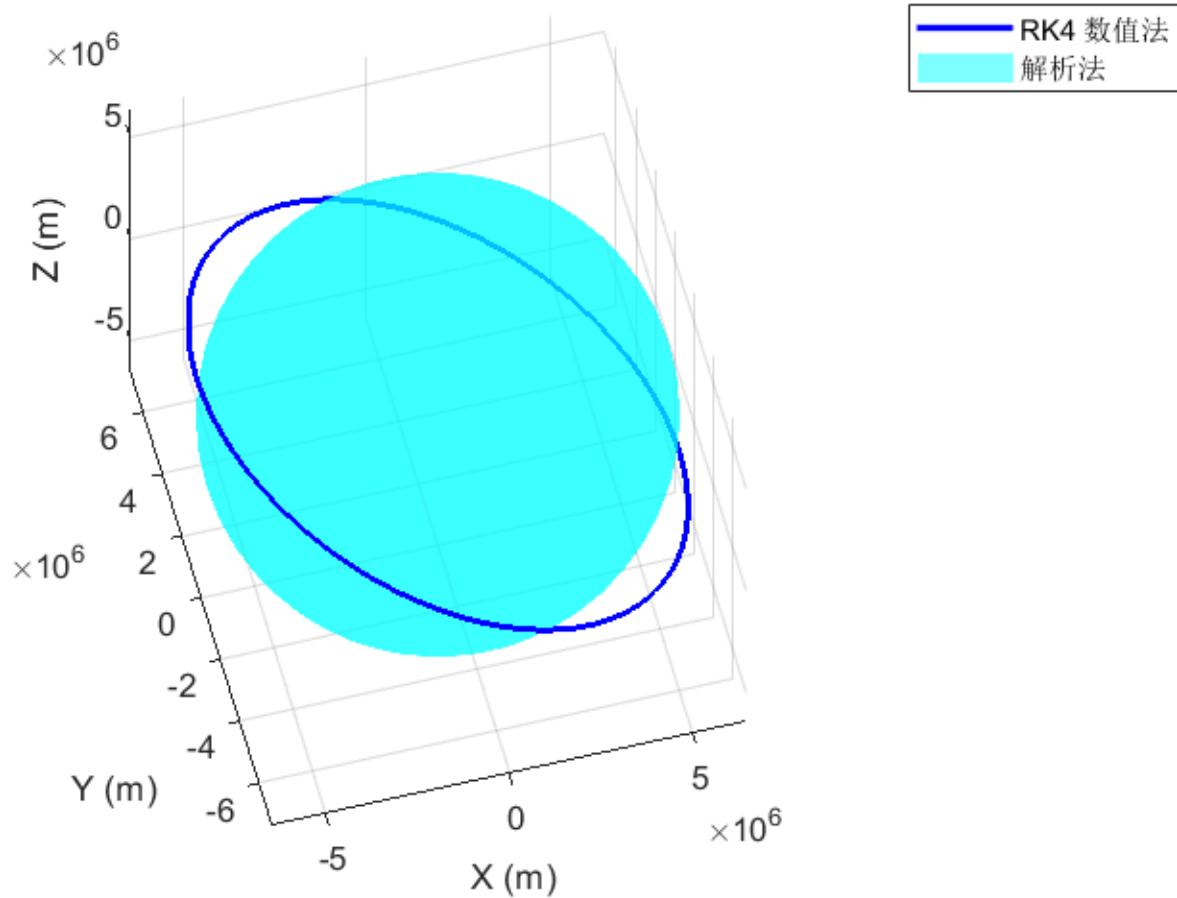
要求解的标量方程如下所示, 之后选择采用RK4方法进行求解。

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x \\ \dot{y} = v_y \\ \dot{z} = v_z \\ \dot{v}_x = -\frac{\mu}{r^3} x \\ \dot{v}_y = -\frac{\mu}{r^3} y \\ \dot{v}_z = -\frac{\mu}{r^3} z \end{cases}$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。

采用0.01s的RK4步长, 运行五个周期, 得到结果如下。

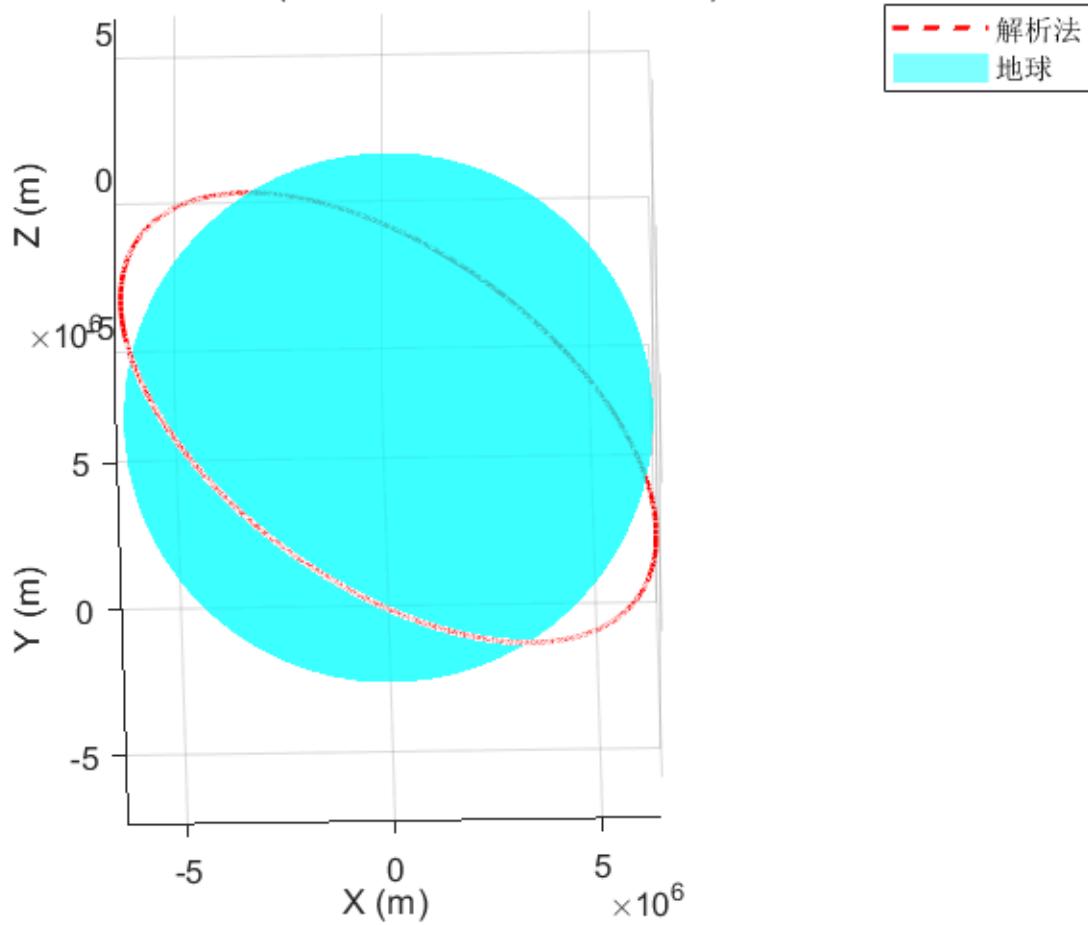
卫星三维轨道 (RK4求解)



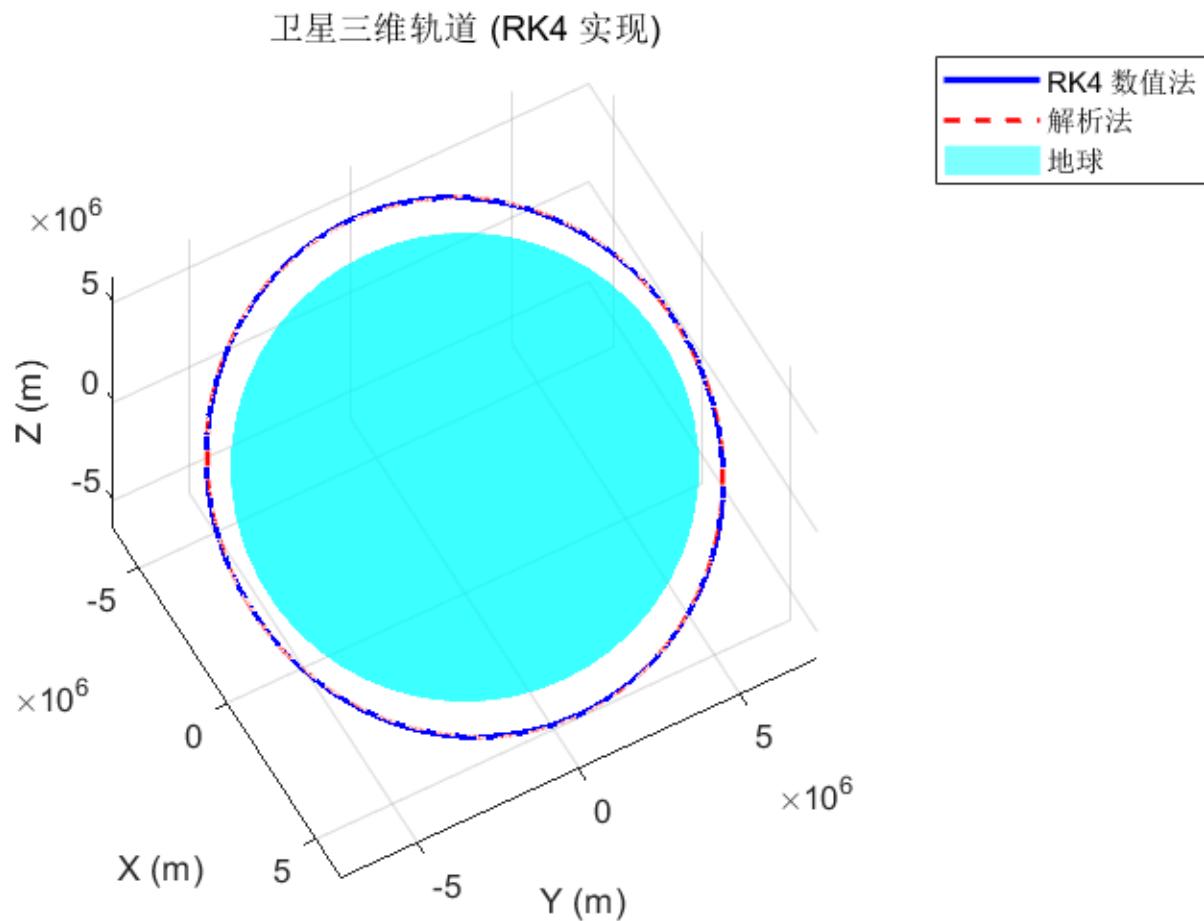
(2) 利用位置速度与轨道根数之间的转换求解一个周期的卫星的位置、速度，画出位置三维轨迹图。

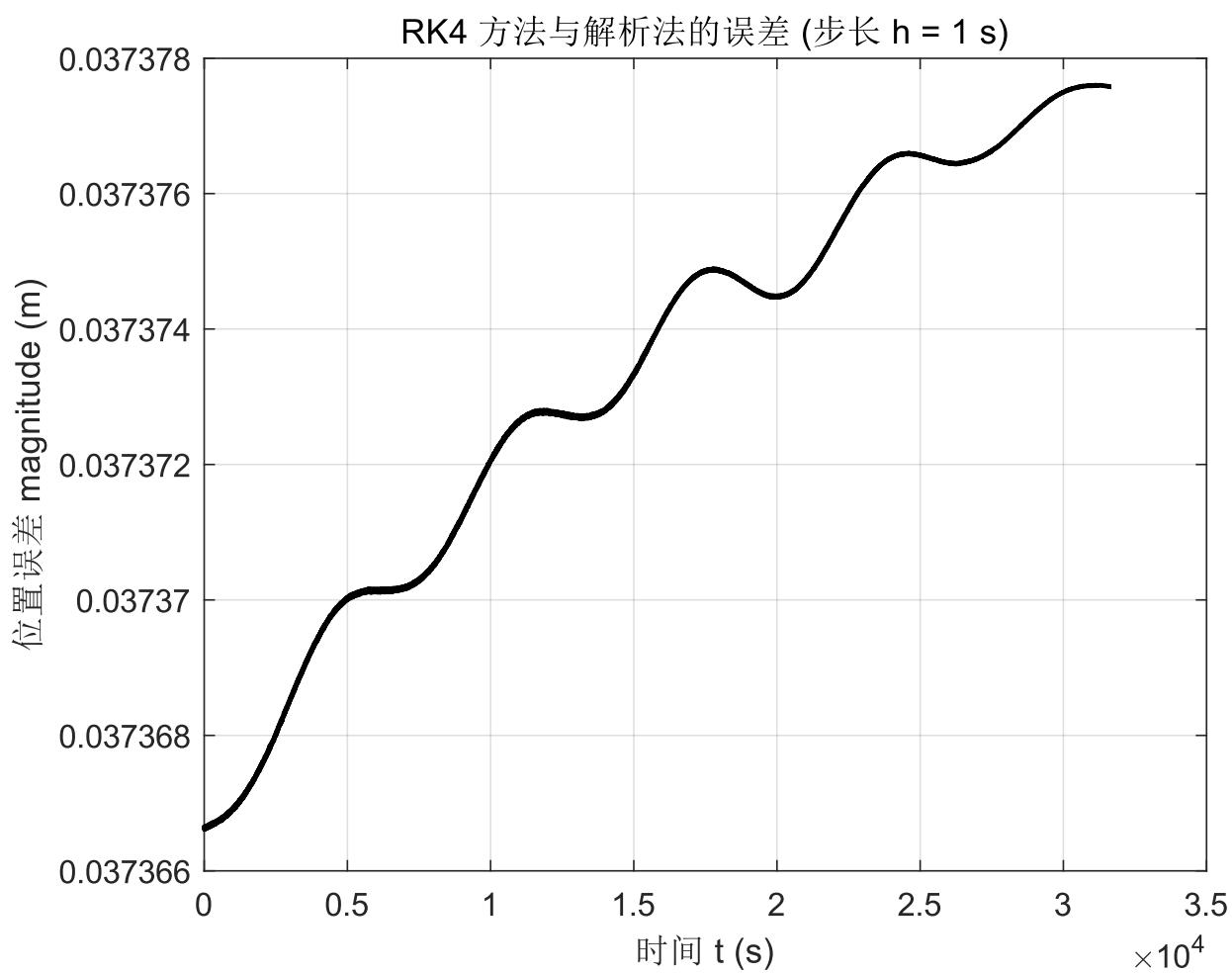
采用解析法进行求解，运行五个周期，得到结果如下。

$\times 10^6$ 上星三维轨道 (位置速度轨道根数转化求解)



(3) 给出两种计算方法的轨道误差，比较两种方法计算的轨道有无差别。





误差随时间不断积累，但总体上差异较小，但在执行具体任务时仍将影响任务能否正确执行的因素。

```

% 清除工作区
clc; clear; close all;

%% 参数设置
mu = 3.986004418e14; % 地球引力常数 (m^3/s^2)

% 初始状态
r0_vec = [-6311227.13644808; -1112839.62553522; 3700000];
v0_vec = [1274.45143229237; -7227.77323794544; 2.24700438581515e-13];
y0 = [r0_vec; v0_vec];

% 数据预处理
r0 = norm(r0_vec);
v0 = norm(v0_vec);
Energy = v0^2/2 - mu/r0;
a = -mu / (2*Energy);
T_period = 2 * pi * sqrt(a^3 / mu);

fprintf('轨道半长轴 a = %.2f km\n', a/1000);
fprintf('轨道周期 T = %.2f s\n', T_period);

%% RK4

% --- RK4 设置 ---
h = 1; % 步长 s
t_rk4 = 0:h:5*T_period; % 仿真时间
N = length(t_rk4);

% 初始化状态矩阵 [rx, ry, rz, vx, vy, vz]
state_rk4 = zeros(N, 6);
state_rk4(1, :) = y0'; % 零状态初始化

% --- RK4 迭代主循环 ---
y_current = y0; % 当前状态列向量

fprintf('正在进行 RK4 数值积分计算...\n');
for i = 1 : N-1
    t_curr = t_rk4(i);

```

```

% 计算四个斜率 k1, k2, k3, k4
k1 = OrbitEOM(t_curr, y_current, mu);
k2 = OrbitEOM(t_curr + h/2, y_current + h*k1/2, mu);
k3 = OrbitEOM(t_curr + h/2, y_current + h*k2/2, mu);
k4 = OrbitEOM(t_curr + h, y_current + h*k3, mu);

% 更新状态
y_next = y_current + (h/6) * (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4);

% 保存结果
state_rk4(i+1, :) = y_next';

% 更新当前状态进入下一次迭代
y_current = y_next;
end

r_num = state_rk4(:, 1:3); % 提取 RK4 计算出的位置矢量

%% 位置速度轨道根数转化-解析法

[a, e, i, Omega, omega, M0] = rv2coe(r0_vec, v0_vec, mu); % 零状态初始化

r_ana = zeros(N, 3);

fprintf('正在进行解析法计算...\n');
n = sqrt(mu / a^3); % 平均角速度

for k = 1:N
    t = t_rk4(k);
    M = M0 + n * t;
    E = KeplerSolver(M, e);

    sin_nu = (sqrt(1 - e^2) * sin(E)) / (1 - e * cos(E));
    cos_nu = (cos(E) - e) / (1 - e * cos(E));
    nu = atan2(sin_nu, cos_nu);

    [r_vec_t, ~] = coe2rv(a, e, i, Omega, omega, nu, mu);
    r_ana(k, :) = r_vec_t';
end

```

```

%% 误差

% --- 三维轨道 ---
figure('Name', 'RK4', 'Color', 'w');
plot3(r_num(:,1), r_num(:,2), r_num(:,3), 'b', 'LineWidth', 2); hold on;
[X, Y, Z] = sphere(50);
R_earth = 6378137;
surf(X*R_earth, Y*R_earth, Z*R_earth, 'FaceColor', 'c', 'EdgeColor', 'none', 'FaceAlpha', 0.5);
axis equal; grid on;
xlabel('X (m)'); ylabel('Y (m)'); zlabel('Z (m)');
legend('RK4 数值法', '解析法', '地球');
title('卫星三维轨道 (RK4求解)');
view(3);

% --- 三维轨道 ---
figure('Name', 'Analytical', 'Color', 'w');
plot3(r_ana(:,1), r_ana(:,2), r_ana(:,3), 'r--', 'LineWidth', 1.5); hold on;
[X, Y, Z] = sphere(50);
R_earth = 6378137;
surf(X*R_earth, Y*R_earth, Z*R_earth, 'FaceColor', 'c', 'EdgeColor', 'none', 'FaceAlpha', 0.5);
axis equal; grid on;
xlabel('X (m)'); ylabel('Y (m)'); zlabel('Z (m)');
legend('解析法', '地球');
title('卫星三维轨道 (位置速度轨道根数转化求解)');
view(3);

% --- 误差分析 ---
pos_err = sqrt(sum((r_num - r_ana).^2, 2)); % 位置误差模长

figure('Name', 'RK4 Error Analysis', 'Color', 'w');
plot(t_rk4, flip(pos_err), 'k', 'LineWidth', 1.5);
grid on;
xlabel('时间 t (s)');
ylabel('位置误差 magnitude (m)');
title(['RK4 方法与解析法的误差 (步长 h = ' num2str(h) ' s)']);

fprintf('\n--- 结果比较 ---\n');
fprintf('RK4 步长: %.4f 秒\n', h);
fprintf('最大位置误差: %.4e 米\n', max(pos_err));

```

```
%% --- 辅助函数 ---
```

```
% 1. 轨道动力学微分方程
```

```
function dydt = OrbitEOM(~, y, mu)
    r_vec = y(1:3);
    v_vec = y(4:6);
    r_mag = norm(r_vec);
    a_vec = -mu / (r_mag^3) * r_vec;
    dydt = [v_vec; a_vec];
end
```

```
% 2. 开普勒方程求解器
```

```
function E = KeplerSolver(M, e)
    E = M;
    if e > 0.8, E = pi; end
    tol = 1e-13; ratio = 1;
    while abs(ratio) > tol
        f = E - e*sin(E) - M;
        df = 1 - e*cos(E);
        ratio = f / df;
        E = E - ratio;
    end
end
```

```
% 3. RV转COE
```

```
function [a, e_mag, i, Omega, omega, M0] = rv2coe(r_vec, v_vec, mu)
    r = norm(r_vec); v = norm(v_vec);
    h_vec = cross(r_vec, v_vec); h = norm(h_vec);
    n_vec = cross([0;0;1], h_vec); n = norm(n_vec);
    e_vec = (1/mu) * ((v^2 - mu/r)*r_vec - dot(r_vec, v_vec)*v_vec);
    e_mag = norm(e_vec);
    energy = v^2/2 - mu/r;
    a = -mu / (2*energy);
    i = acos(h_vec(3) / h);
    if n ~= 0
        Omega = acos(n_vec(1) / n);
        if n_vec(2) < 0, Omega = 2*pi - Omega; end
        omega = acos(dot(n_vec, e_vec) / (n*e_mag));
        if e_vec(3) < 0, omega = 2*pi - omega; end
    end
end
```

```

else
    Omega = 0; omega = 0;
end
nu = acos(dot(e_vec, r_vec) / (e_mag*r));
if dot(r_vec, v_vec) < 0, nu = 2*pi - nu; end
E0 = 2 * atan(sqrt((1-e_mag)/(1+e_mag)) * tan(nu/2));
M0 = E0 - e_mag * sin(E0);
end

% 4. COE转RV
function [r_vec, v_vec] = coe2rv(a, e, i, Omega, omega, nu, mu)
p = a * (1 - e^2); r = p / (1 + e*cos(nu));
r_pqw = [r*cos(nu); r*sin(nu); 0];
v_pqw = sqrt(mu/p) * [-sin(nu); e+cos(nu); 0];
c0 = cos(Omega); s0 = sin(Omega); co = cos(omega); so = sin(omega); ci = cos(i); si = sin(i);
R = [ c0*co-s0*so*ci, -c0*so-s0*co*ci, s0*si;
      s0*co+c0*so*ci, -s0*so+c0*co*ci, -c0*si;
      so*si,           co*si,           ci ];
r_vec = R * r_pqw; v_vec = R * v_pqw;
end

```