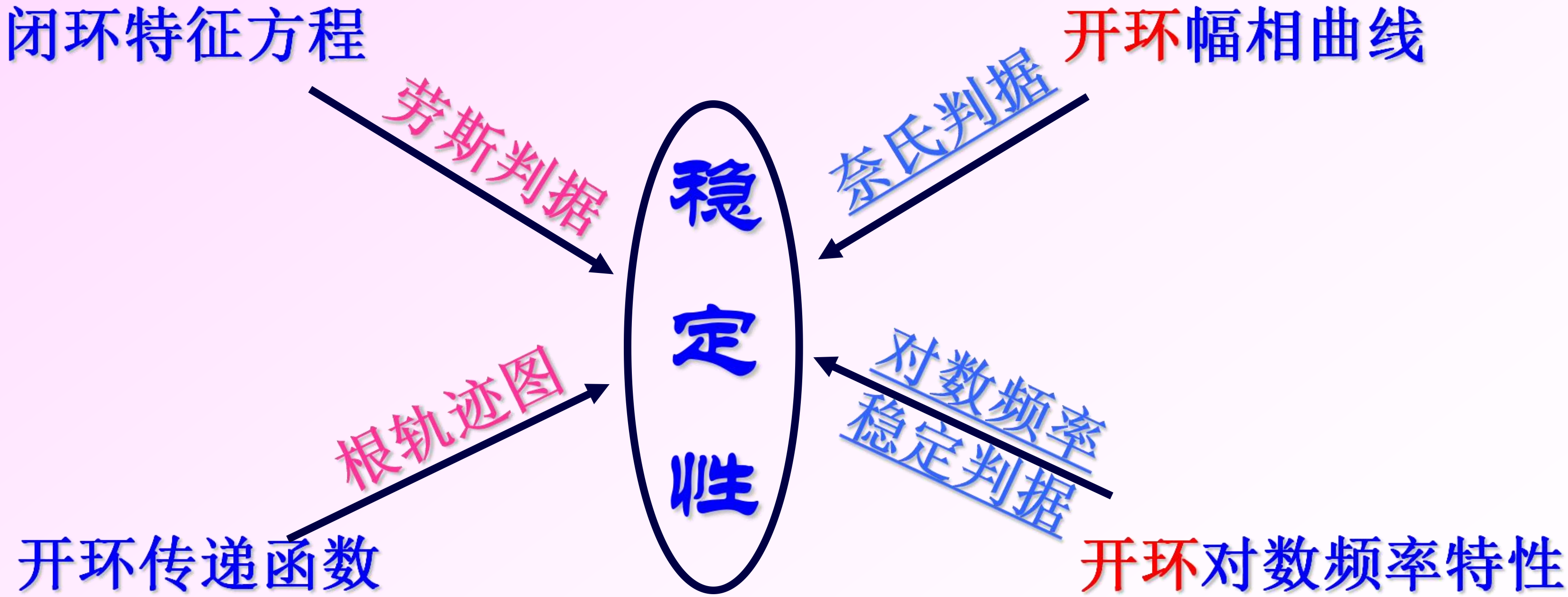
5-3 频率域稳定判据及稳定裕度

判断控制系统稳定性方法有多种多样:



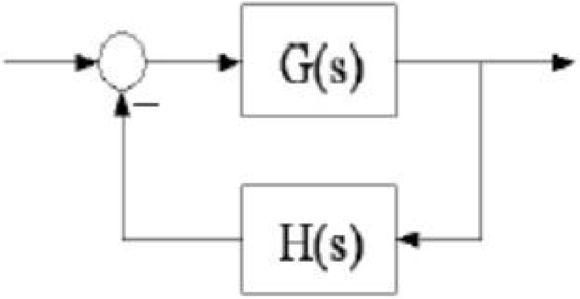
一、奈氏判据 (奈奎斯特判据)

1. 奈氏判据

判据

——如何由开环频率特性判断闭环稳定性?

考虑系统结构图为:



$$G(s)H(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K(s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_m)}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n} \qquad (m\le n)$$

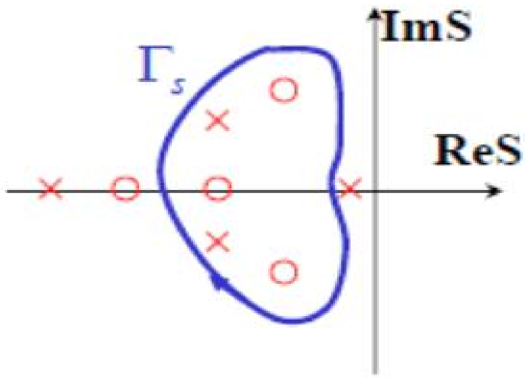
辅助函数

定义: $F(s)=1+G(s)H(s)=1+\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{A(s)+B(s)}{A(s)}$

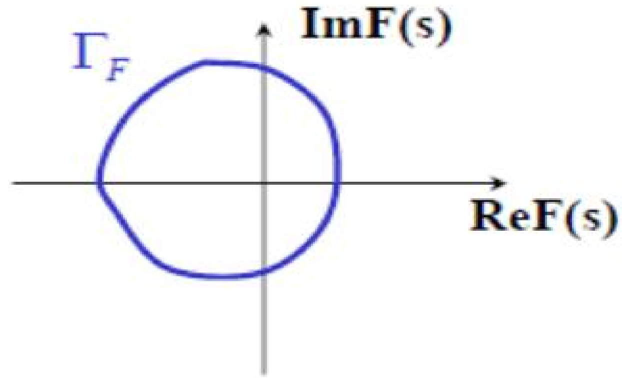
显然: **F(s)**的零点——系统的闭环极点（**n**个）

F(s)的极点——系统的开环极点（**n**个）

幅角定理



[S]平面



[F(s)]平面

规定：Γ_s 是s平面的一条（顺时针）封闭曲线，

Γ_s 不经过**F(s)**的零点，也不经过**F(s)**的极点。

Γ_s 内包含了**Z**个**F(s)**的零点，**P**个**F(s)**的极点。

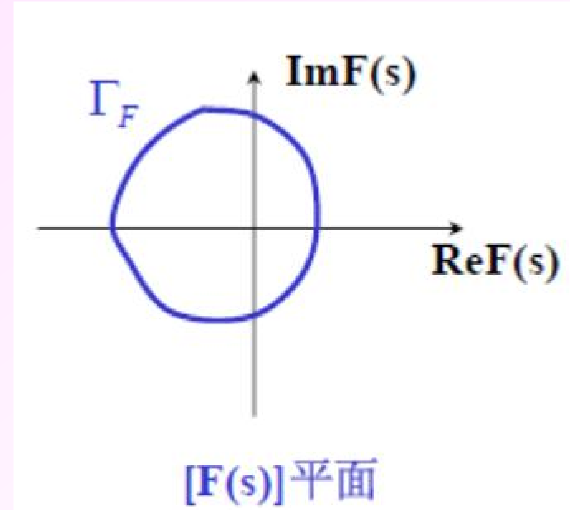
幅角定理:

当s 沿Γ_s顺时针转一圈时，其映射曲线Γ_F绕**F(s)**平面的原点逆时针转R=P-Z圈。

规定： R>0——逆时针， R<0——顺时针

考虑到：$F(s)=1+G(s)H(s)$

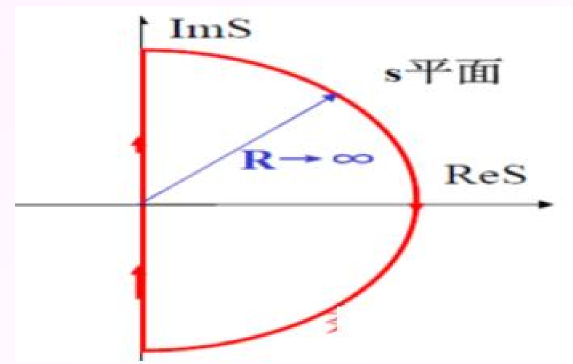
闭环系统稳定



$\Longrightarrow$ $F(s)=0$ 时， $G(s)H(s)=-1$

$\Longrightarrow$ $F(s)$平面原点即为 $G(s)H(s)$平面(-1，j0)点

Γ_{GH} 如何绘制？



考虑到 Γ_{GH} 的对称性，可以 $\frac{1}{2}\Gamma_{GH}$的映射曲线

1） $s=j\omega \qquad \omega:0\rightarrow\infty$

$G(s)H(s)=G(j\omega)H(j\omega)$——$\Gamma_{GH}$ 即Nyquist图

2）半径为无穷大的半圆 $s=\infty e^{j\theta} \quad \theta\in[-90^0,90^0]$

对应虚轴在无穷远处对应的映射的点

3）

特殊地，当G(s)H(s) 存在ν个原点的极点, 即型别>=1时，

当ω从0 $\to 0^+$变化时，其在GH平面上的映射为：
半径为∞，顺时针转过$\nu \cdot 90^0$的大圆弧。

例如：

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

1. 奈氏判据

内容：

$$Z = P - 2N$$

--Z:正实部特征根的个数

--P:开环传递函数右半S平面极点数

--N:开环幅相曲线ω从0→+∞时，绕临界点(-1, j0)的圈数

[逆时针为正，顺时针为负]

若Z=0，闭环系统稳定； 反之，不稳定，且有Z个正实部根

注：若开环传递函数G(s)H(s)含积分环节，且假设为ν个，则绘制开环幅相曲线后，应从与频率0+对应的点开始，逆时针方向补画半径为无穷大的$\nu\times 90^0$圆弧，并用虚线表示.

$$Z = P - 2N$$

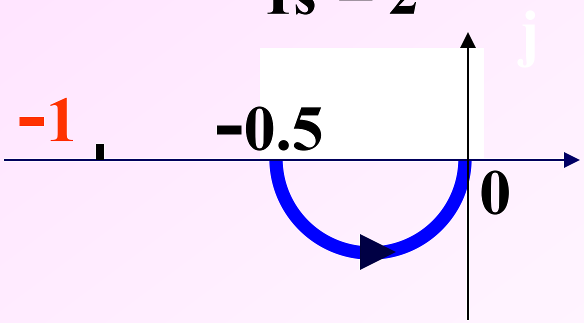
P:开环传递函数右半S平面极点数

N:开环幅相曲线ω从0→+∞时，绕临界点(-1, j0)的圈数

若 Z=0，闭环系统稳定；反之，不稳定，且有Z个正实部根

注：若开环传递函数G(s)H(s)含积分环节，且假设为ν个，则绘制开环幅相曲线后，应从与频率0+对应的点开始，反时针方向补画半径为无穷大的ν×90^{0}圆弧，并用虚线表示.

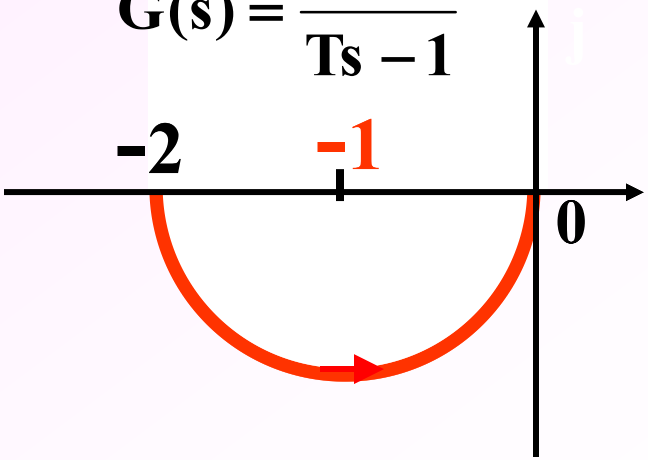
$$G(s) = \frac{1}{Ts - 2}$$



$$Z=P-2N=1-0=1$$

系统不稳定

$$G(s) = \frac{2}{Ts - 1}$$



$$Z=P-2N = 1 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$$

系统稳定

$$Z = P - 2N$$

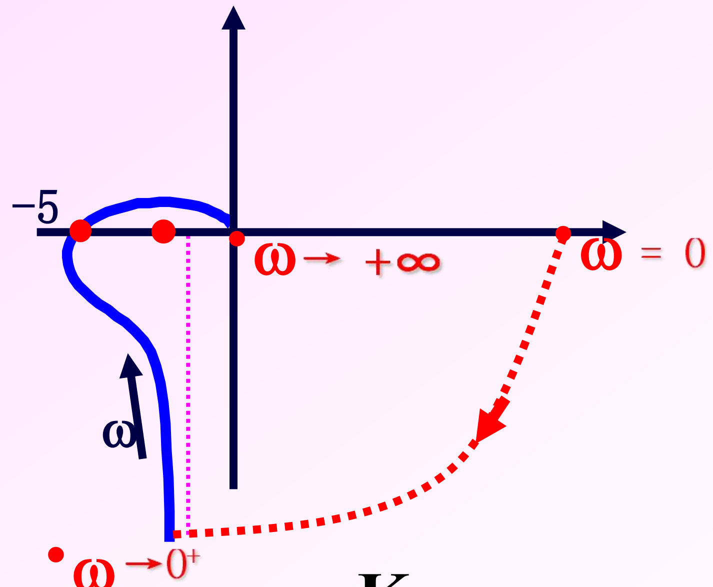
P:开环传递函数右半S平面极点数

N:开环幅相曲线ω从0→+∞时，绕临界点(-1, j0)的圈数

若Z=0，闭环系统稳定；反之，不稳定，且有Z个正实部根

注：若开环传递函数G(s)H(s)含积分环节，且假设为ν个，则绘制开环幅相曲线后，应从与频率0+对应的点开始，逆时针方向补画半径为无穷大的$\nu\times 90^0$圆弧，并用虚线表示.

例：



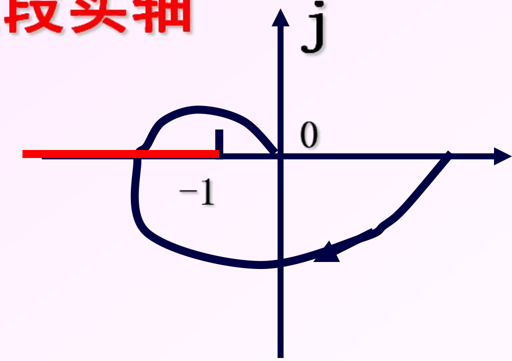
$$G(s) = \frac{K}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)}$$

$Z= P-2N = 0-2(-1)= 2$

系统不稳定

2. 确定N 实用方法

a) 穿越　ω增加时，G(jω)H(jω)穿越-1 →-∞这段实轴



正穿越(N_+)：当ω↑时，相角增加的穿越

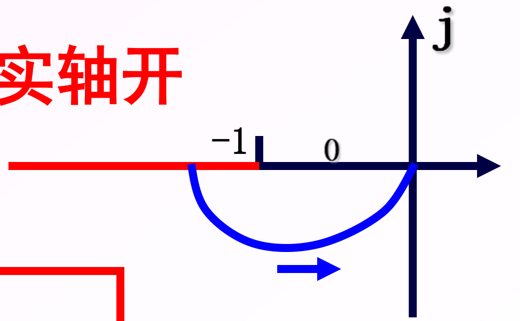
负穿越(N_-)：当ω↑时，相角减小的穿越

半次穿越：当ω↑时，从实轴开始的穿越

$N_- = 1$

半次正穿越($N_+ = 1/2$)：当ω↑时，幅相曲线从实轴开始，相角增加的穿越

半次负穿越($N_- = 1/2$)：当ω↑时，幅相曲线从实轴开始，相角减小的穿越



b) N的确定

开环幅相曲线包围(-1, j0)的圈数为N：$N = N_+ - N_-$

$N_+ = 1/2$

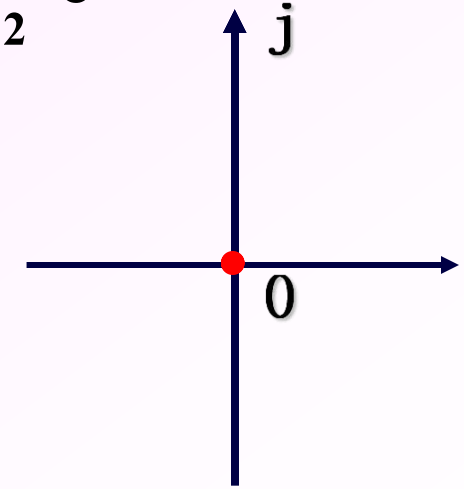
[例] 单位反馈系统开环传递函数$G(s)=\dfrac{K}{s^2(Ts+1)}$，试用奈氏判据判稳。

解：1. 作开环幅相曲线

$$G(j\omega)=\frac{K}{(j\omega)^2(j\omega T+1)}=\frac{K}{\omega^2\sqrt{1+\omega^2T^2}}e^{-j(2\times 90^0+\arctan\omega T)}$$

$\omega\to 0^+,\ G(j\omega)=\infty\underline{/-\pi}$

$\omega\to +\infty,\ G(j\omega)=0\underline{/(-\pi-\pi}/2)=0\underline{/-3\pi/2}$



与负实轴交点

$$G(j\omega)=\frac{K}{-\omega^2(1+j\omega T)}=\frac{-K}{\omega^2(1+\omega^2T^2)}+j\frac{\omega TK}{\omega^2(1+\omega^2T^2)}$$

令$\mathrm{Im}G(j\omega)=0$　　得$\omega=0$(不合题意 舍 $\because\ \omega\neq 0$)

与负实轴交点

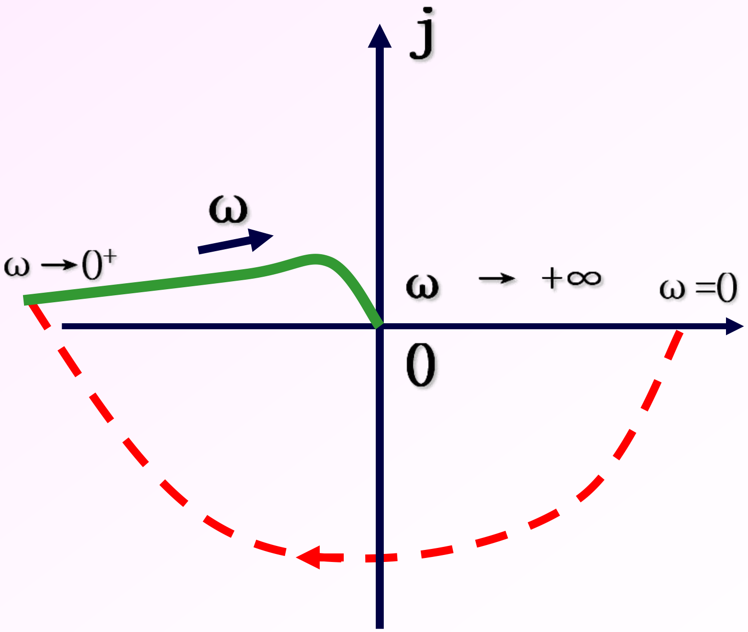
$$G(j\omega)=\frac{K}{-\omega^2(1+j\omega T)}=\frac{-K}{\omega^2(1+\omega^2T^2)}+j\frac{\omega TK}{\omega^2(1+\omega^2T^2)}$$

令 $\mathrm{Im}G(j\omega)=0$ 得 $\omega=0$(不合题意 舍 ∵ $\omega\neq0$)

$v=2$, 从 $\omega=0^+$对应点开始, 逆时

针补画半径为无穷大

$v\times90^0=180^0$圆弧, 并用虚线表示



②判稳

$P=0$ $N=N_+-N_-=0-1=-1$

$\therefore Z=P-2N=2$

闭环系统不稳定

课堂练习：5-13(1)-(5)

已知单位反馈系统的开环传递函数及其幅相曲线如下，试根据奈氏判据判断闭环系统的稳定性。

(1) $G(s)=\dfrac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)(T_3s+1)}$;　　(2) $G(s)=\dfrac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$;

(3) $G(s)=\dfrac{K}{s^2(Ts+1)}$;　　(5) $G(s)=\dfrac{K}{s^3}$;　　(4) $G(s)=\dfrac{K(T_1s+1)}{s^2(T_2s+1)}(T_1>T_2)$;