4-2 根轨迹绘制的基本法则

本节讨论　　1、绘制根轨迹的基本法则

2、闭环极点的确定方法

假设系统满足:

$$G(s)H(s) = k^* \frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{m}(s-p_j)} = -1 \quad (k^*: 0 \to +\infty)$$

又称为:

180° 根轨迹图的绘制 法则

一、基本法则

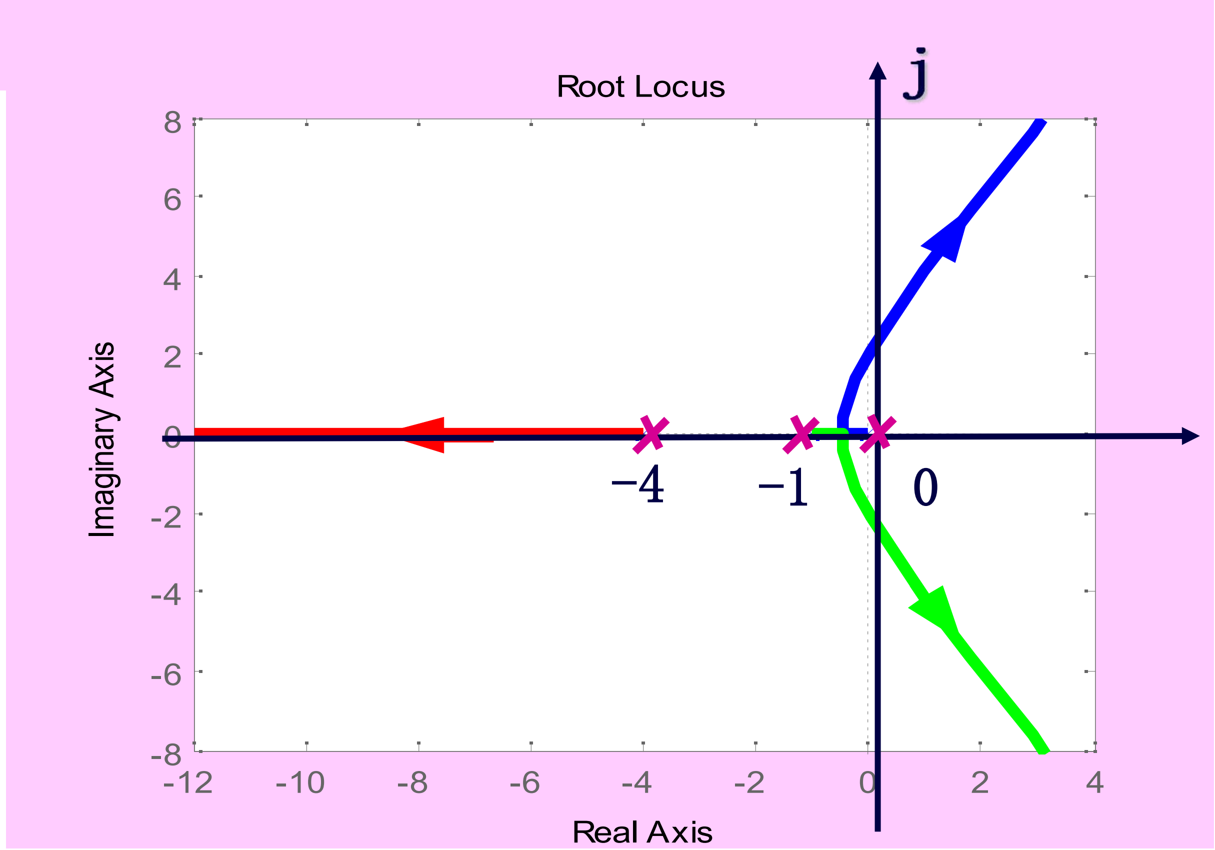
单位反馈系统

$$G(S)=\frac{k^*}{s(s+1)(s+4)}$$

$$k^*:0\to+\infty$$

$$p_1=0, p_2=-1, p_3=-4$$

$$m=0, n=3$$



法则1 根轨迹的分支数 对称性和连续性

根轨迹分支数与开环有限零点数m和开环极点数n中的大者相等，他们是连续的并且对称于实轴。

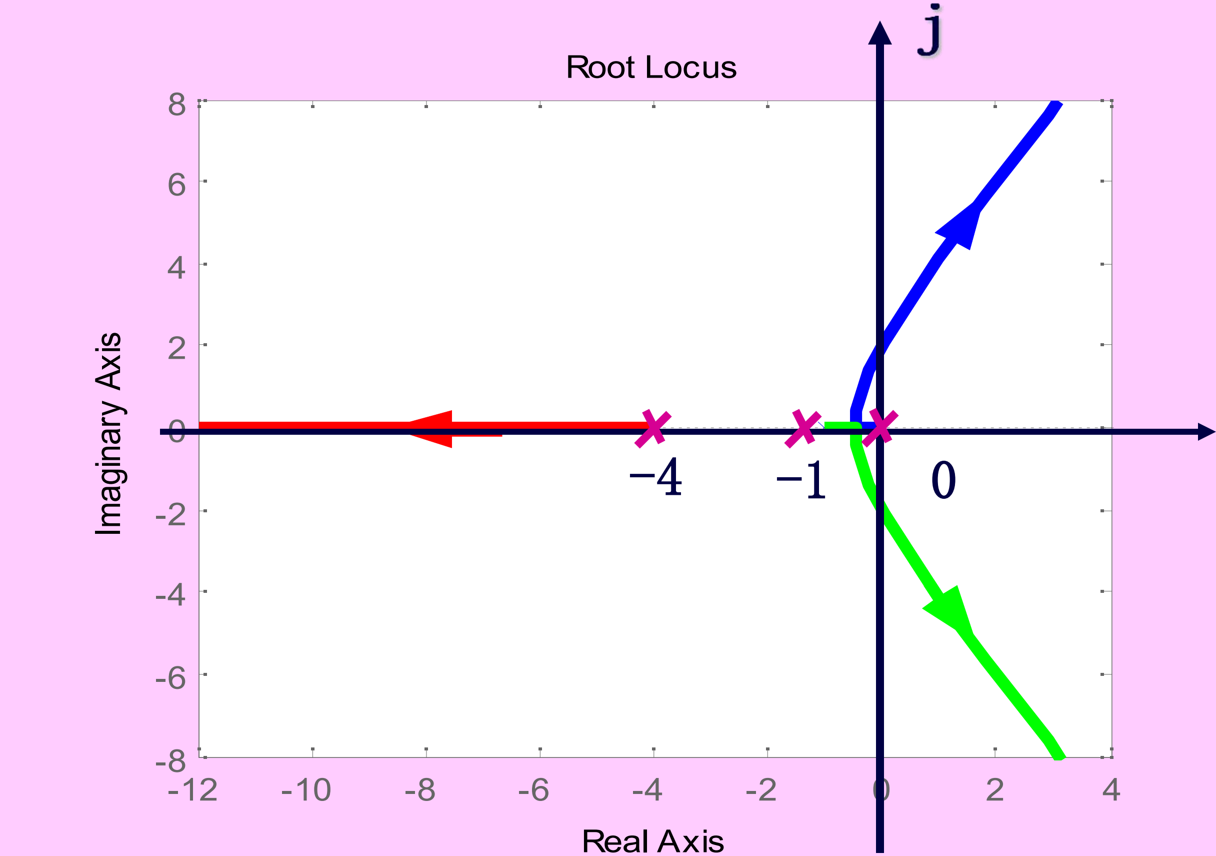
单位反馈系统

$$G(S)=\frac{k^*}{s(s+1)(s+4)}$$

$$(k^*:0\rightarrow+\infty)$$

$$p_1=0, p_2=-1, p_3=-4$$

$$m=0, n=3$$



法则2　根轨迹的起点和终点

根轨迹起于开环极点，终于开环零点

当开环有限极点数n 大于有限零点数m 时，有n-m 条根轨迹终止于无穷远处

法则2　根轨迹的起点和终点

根轨迹起于开环极点，终于开环零点

当开环有限极点数n 大于有限零点数m 时，有n-m 条根轨迹终止于无穷远处

起点满足：

$$k^*\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{m}(s-p_j)}=-1 \qquad (k^*=0)$$

终点满足：

$$\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\frac{1}{k^*}\prod_{j=1}^{m}(s-p_j)}=-1 \qquad (k^*\to\infty)$$

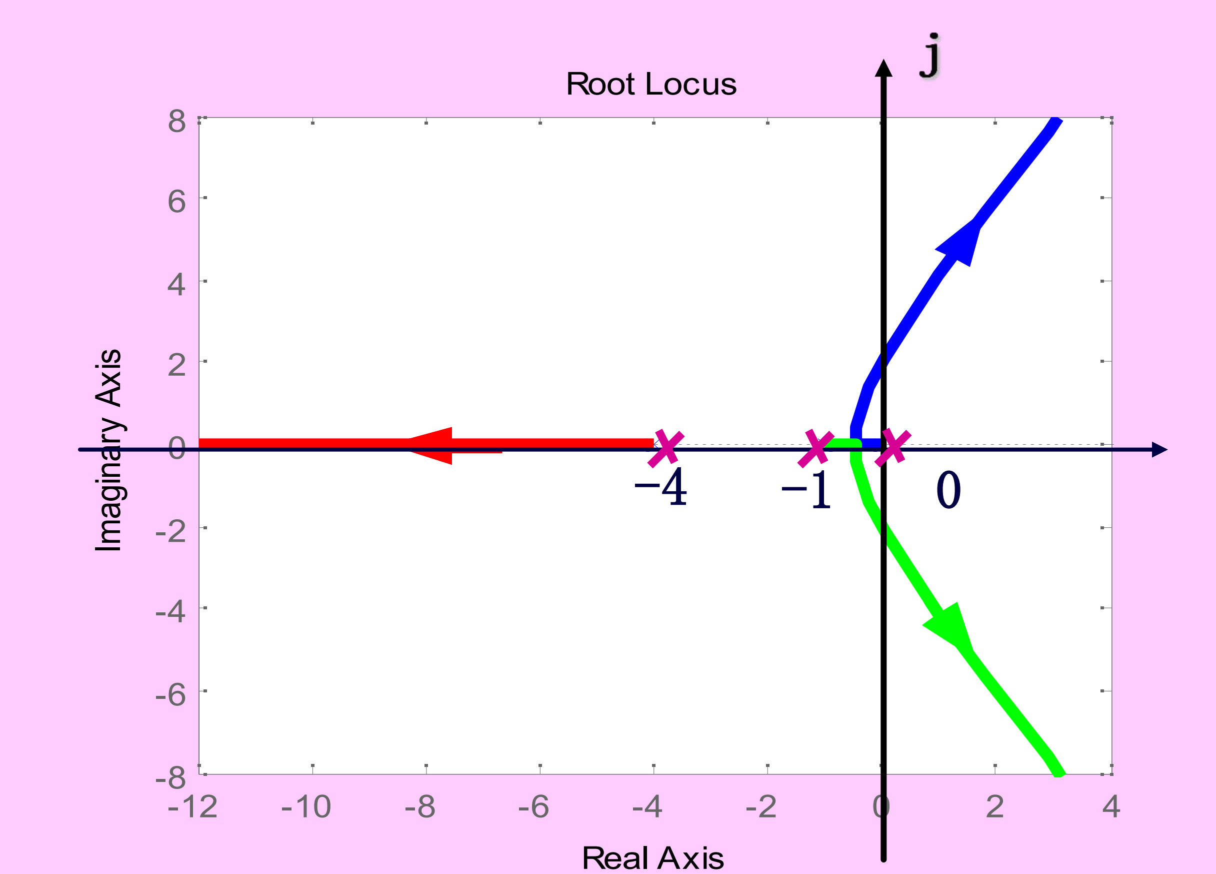
当n>m时，有：

$$K^*\left|\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}\right|=1 \quad \Rightarrow \quad k^*=\lim_{s\to\infty}\frac{\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|}{\prod_{j=1}^{m}|s-z_j|}\to\infty \qquad (n>m)$$

单位反馈系统

$$G(S)=\frac{k^*}{s(s+1)(s+4)}$$

$$(k^*:0\to+\infty)$$



法则3　根轨迹在实轴上的分布

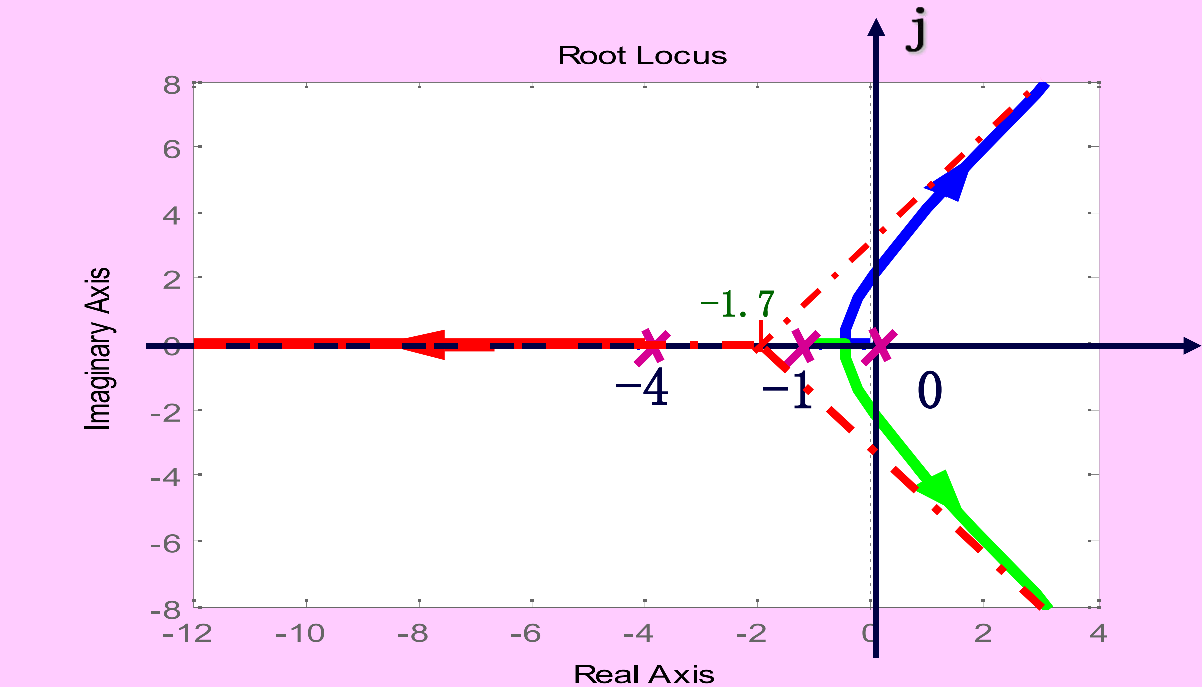
实轴上的某一区域，若其右边开环实数零极点个数之和为奇数，则该区域必是根轨迹。

$$\sum_{i=1}^{m}\angle s-z_i-\sum_{j=1}^{n}\angle s-p_j=(2k+1)\pi$$

单位反馈系统

$$G(S) = \frac{k^*}{s(s+1)(s+4)}$$

$$(k^* : 0 \rightarrow +\infty)$$



法则4 根轨迹的渐近线

研究根轨迹是按什么走向趋于无穷远处

当开环有限极点数n 大于有限零点数m 时，有n-m 条根轨迹分支沿着与实轴交角为φ_a, 交点为σ_a 的一组渐近线趋向无穷远处。

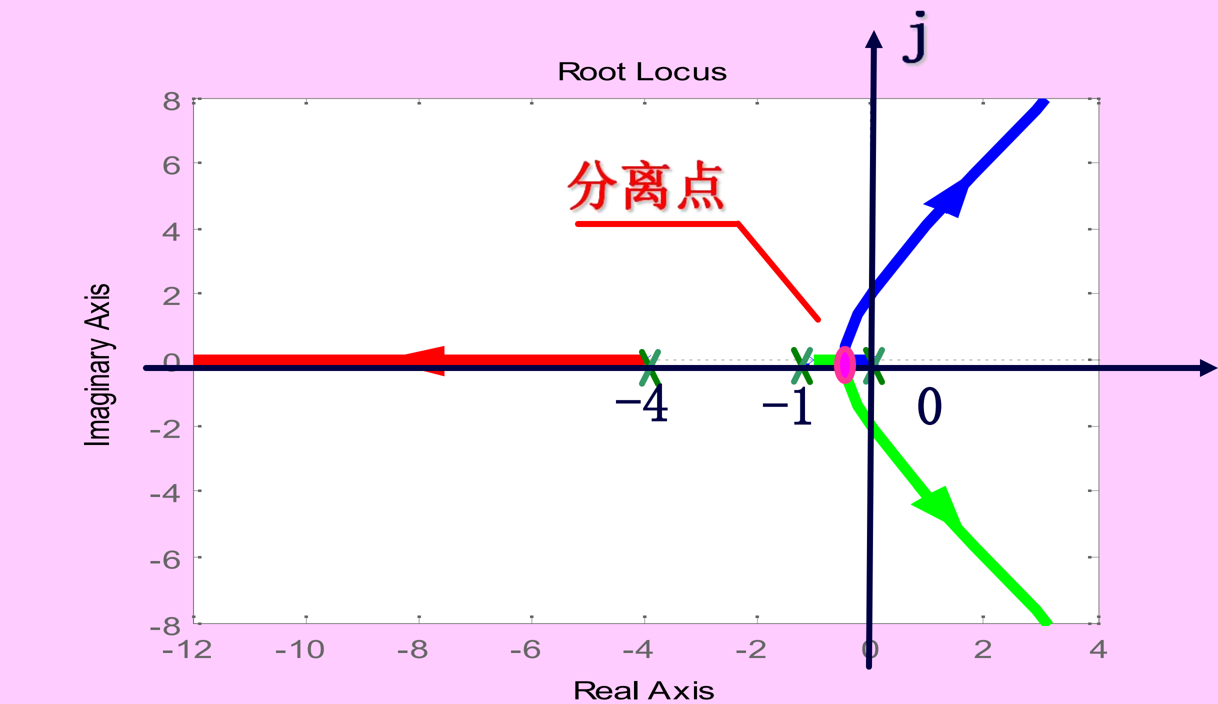
与实轴交点：$$\sigma_a = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

与实轴交角：$$\varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$$

单位反馈系统

$$G(S)=\frac{k^*}{s(s+1)(s+4)}$$

$$(k^*:0\rightarrow+\infty)$$



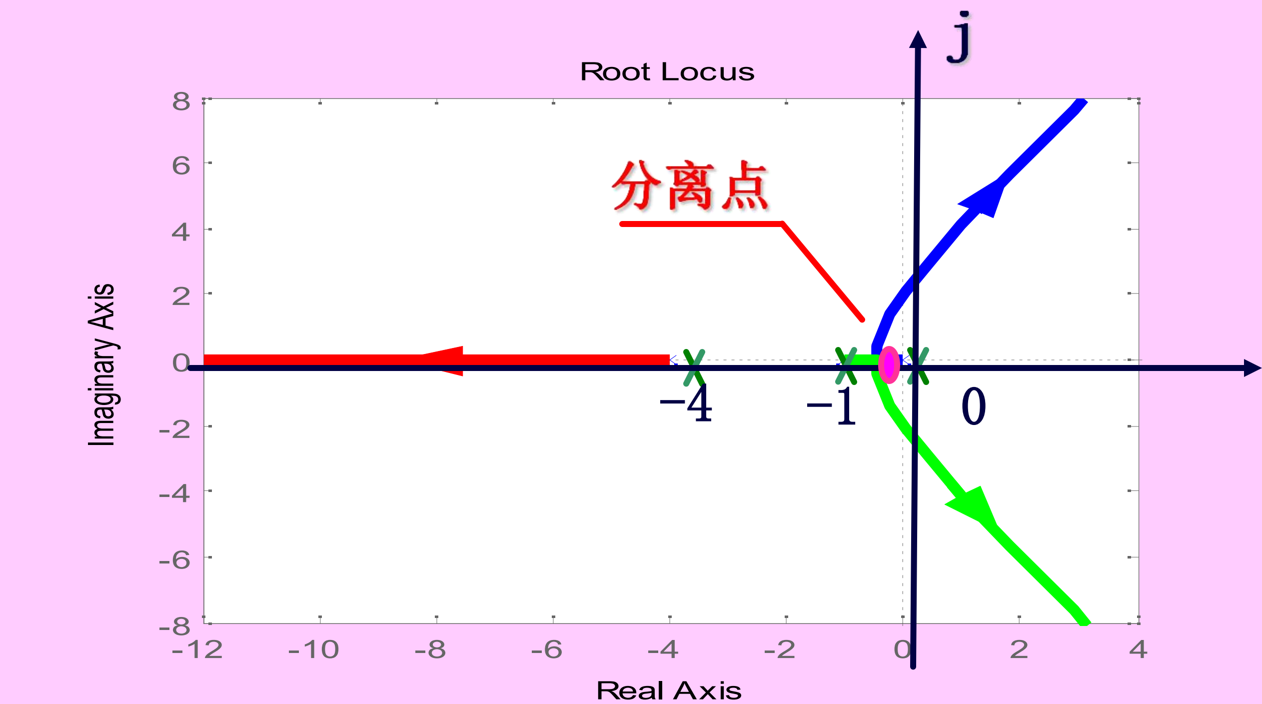
法则5　根轨迹的分离点(会合点)

两条或两条以上根轨迹分支在s平面上相遇又立分开的点，称为根轨迹的分离点。

分离点坐标d 满足：$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{d-z_j}$$

若开环系统无零点 $$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}=0$$

法则5　根轨迹的分离点(会合点)



分离点d满足：

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{d-z_j}$$

- 证明：

特征方程 $$\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+K^*\prod_{j=1}^{n}(s-z_j)=0$$

分离点处：

$$\frac{d}{ds}\left[\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)+K^*\prod_{j=1}^{n}(s-z_j)\right]=0$$

[例]单位反馈系统，开环传递函数如下
试绘制其根轨迹

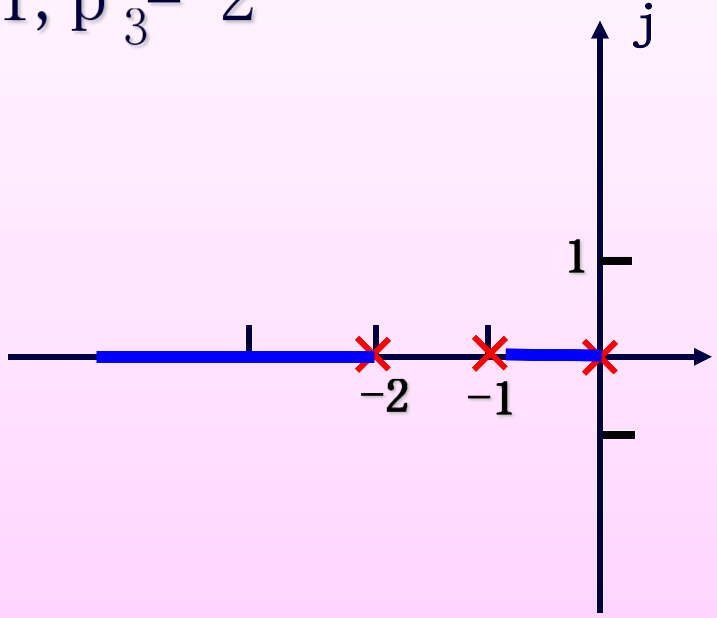
$$G(s)=\frac{k^*}{s(s+1)(s+2)} \qquad k^*: 0 \to +\infty$$

解：首先将G(s)化为零、极点乘积形式

1）开环极点n=3, $p_1=0$, $p_2=-1$, $p_3=-2$

开环零点m=0

2）实轴上根轨迹



[例]单位反馈系统，开环传递函数如下

试绘制其根轨迹

$$G(s)=\frac{k^*}{s(s+1)(s+2)} \qquad k^*:0\to+\infty$$

解：

3）渐近线 n−m=3条

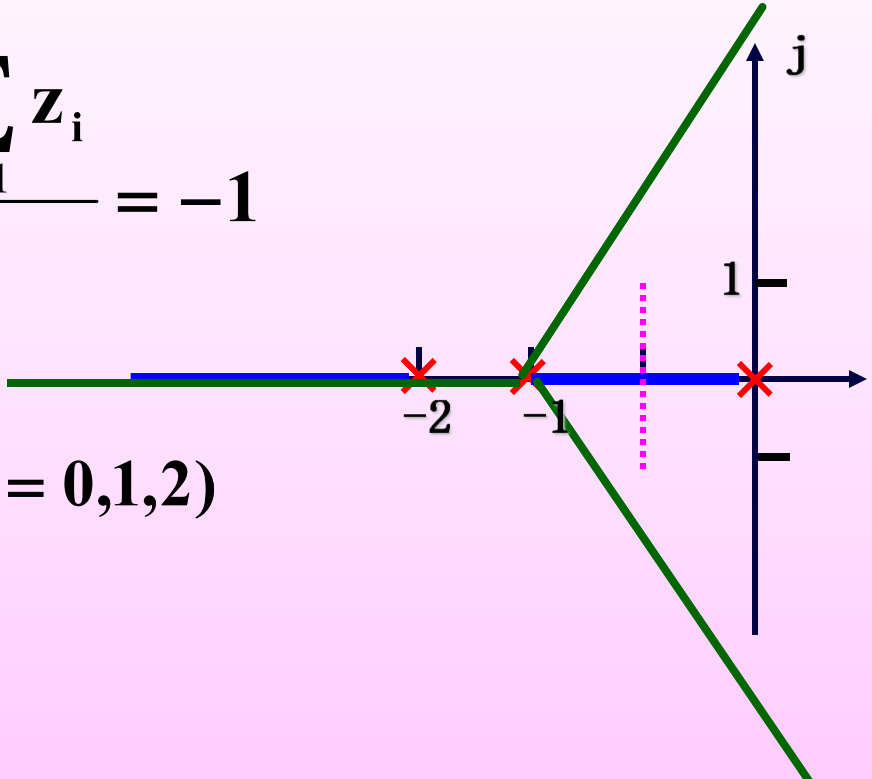
与实轴交点：

$$\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}=-1$$

与实轴交角：

$$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m} \qquad (k=0,1,2)$$

即 $\varphi_a=\frac{\pi}{3}$、π、$-\frac{\pi}{3}$



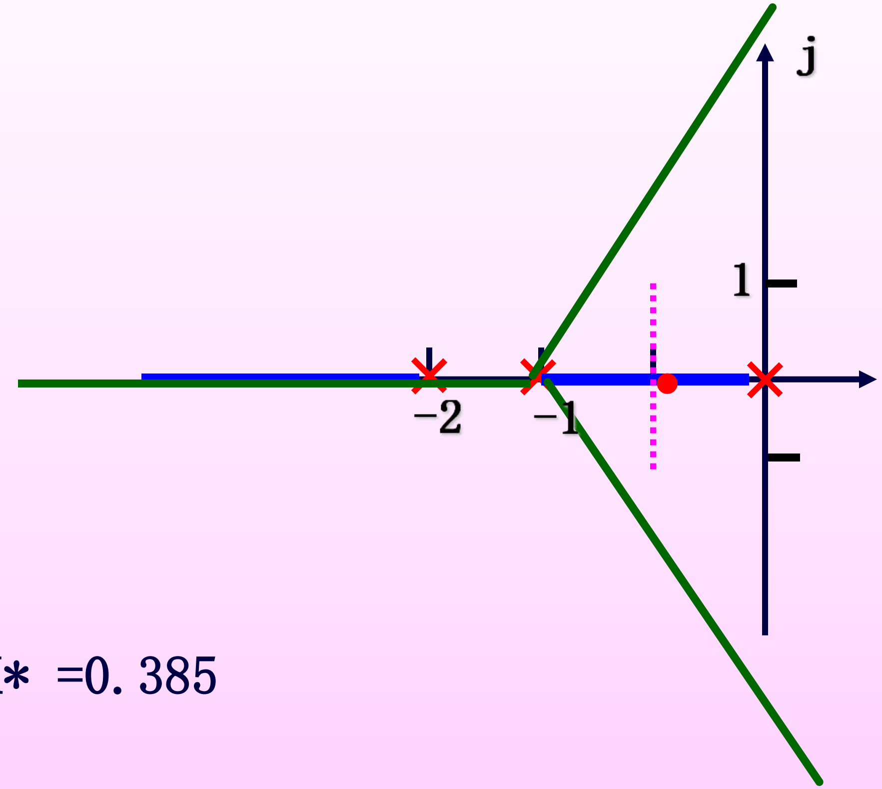
[例]单位反馈系统，开环传递函数如下试绘制其根轨迹。

$$G(s)=\frac{k^*}{s(s+1)(s+2)} \qquad k^*:0\rightarrow+\infty$$

解：4）分离点满足：

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+1}+\frac{1}{d+2}=0$$

d = -0.421



分离点对应的K*满足：

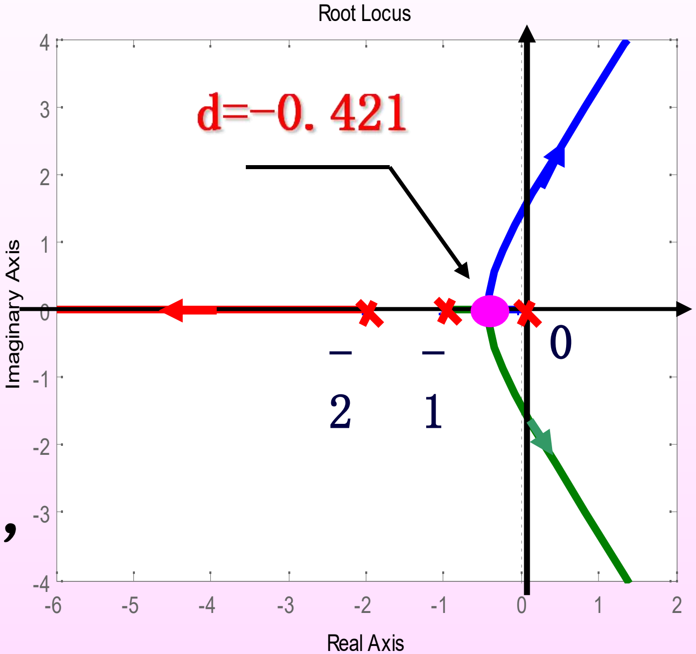
$$\left|\frac{k^*}{s(s+1)(s+2)}\right|_{s=d}=1$$

K* =0.385

[例]单位反馈系统，开环传递函数如下

试绘制其根轨迹。

$$G(s)=\frac{k^*}{s(s+1)(s+2)} \qquad k^*:0\rightarrow+\infty$$



小结：

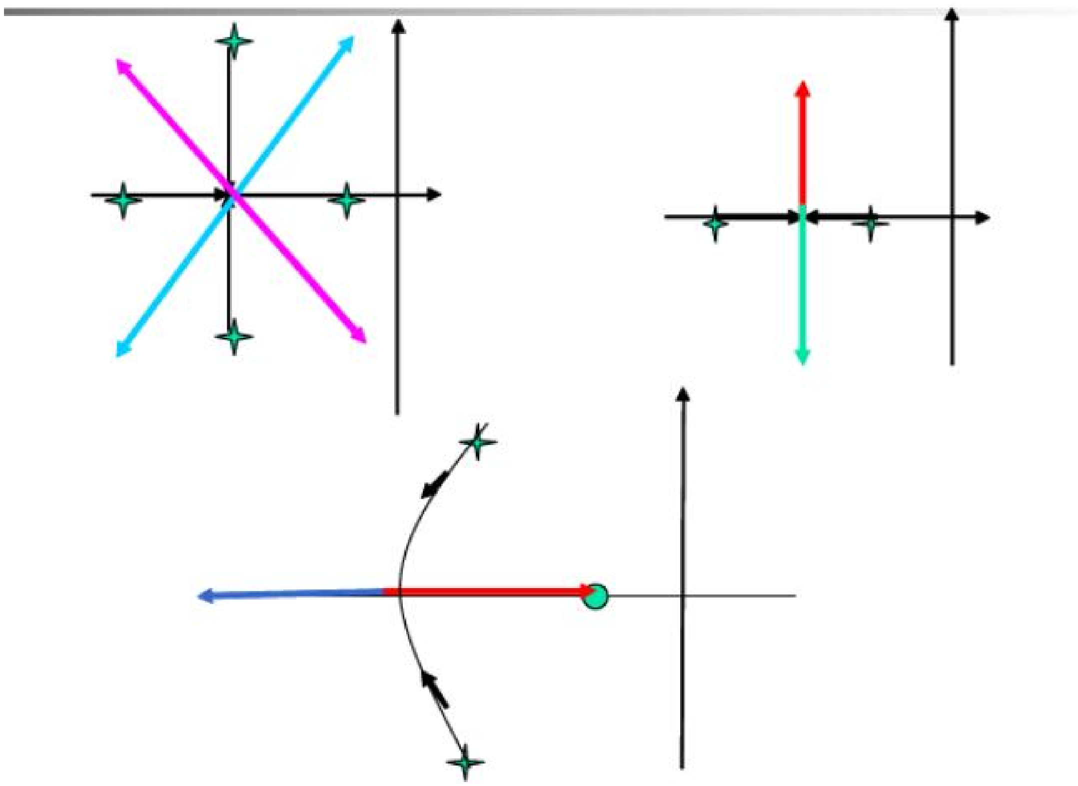
1）分离点以实数为常见

2）分离点为闭环极点为重根的点，系统为临界阻尼系统

3)实轴上两开环极点之间和两开环零点之间若为根轨迹段，则可能存在分离点

法则5　根轨迹的分离点(会合点)

示例



[例]单位反馈系统，开环传递函数如下试绘制其根轨迹。

$$G(s)=\frac{k(s+1)}{s(2s+1)}$$

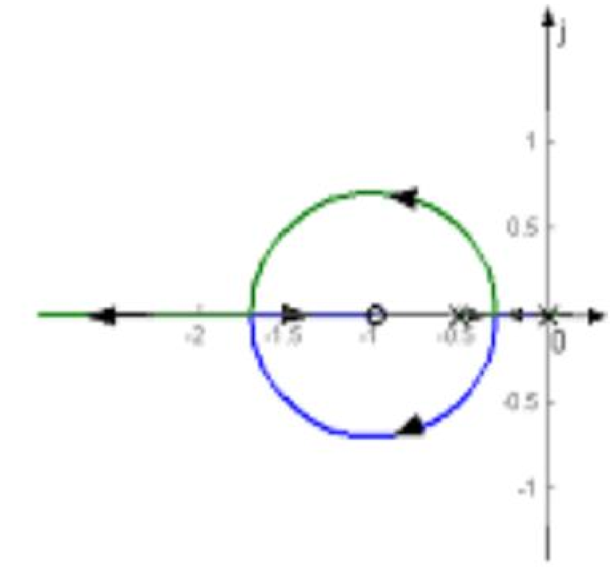
解：

$$G(s)=\frac{K(s+1)}{s(2s+1)}=\frac{K(s+1)}{2s(s+\frac{1}{2})}$$

① 实轴上的根轨迹：$(-\infty,-1]$，$[-0.5,0]$

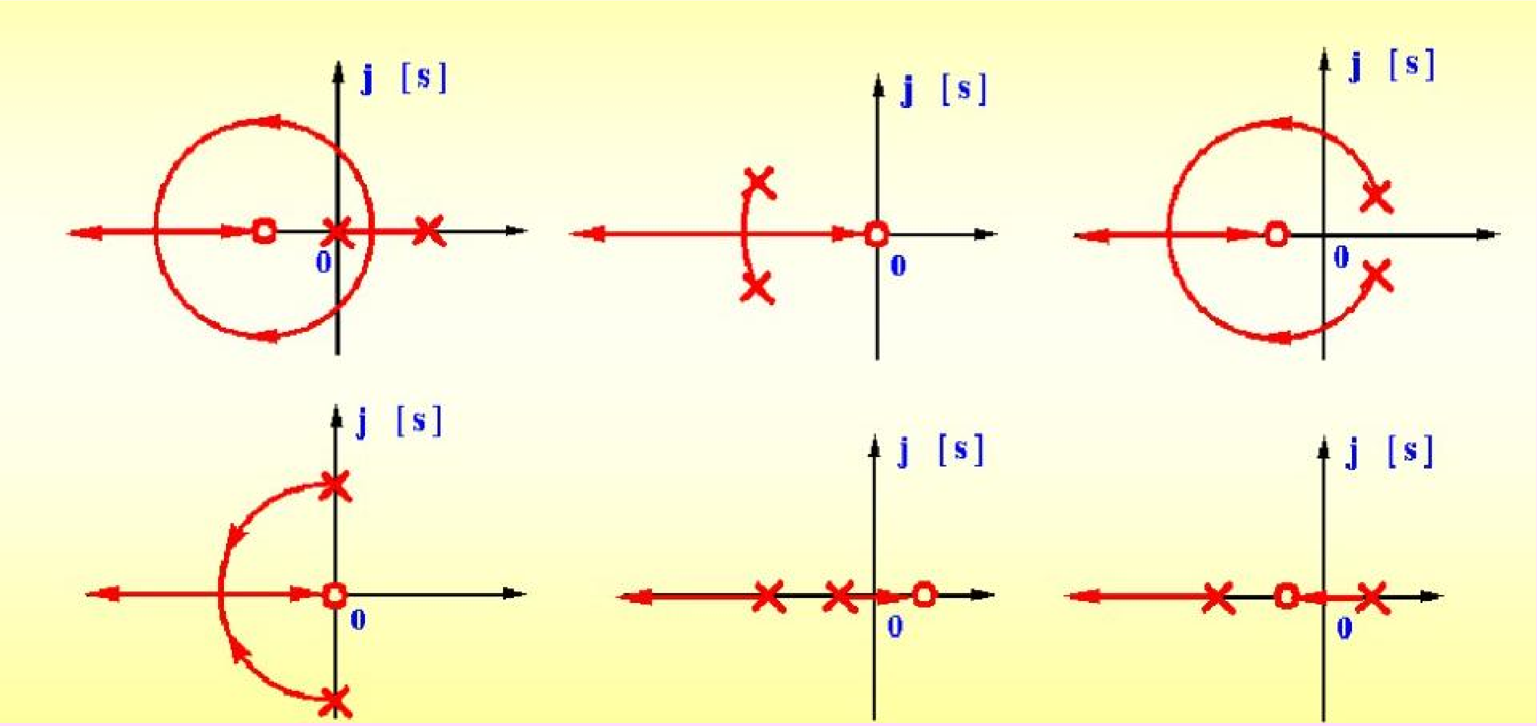
② 分离点：$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+0.5}=\frac{1}{d+1}$

解之得：$d=-0.293, d=-1.707$。



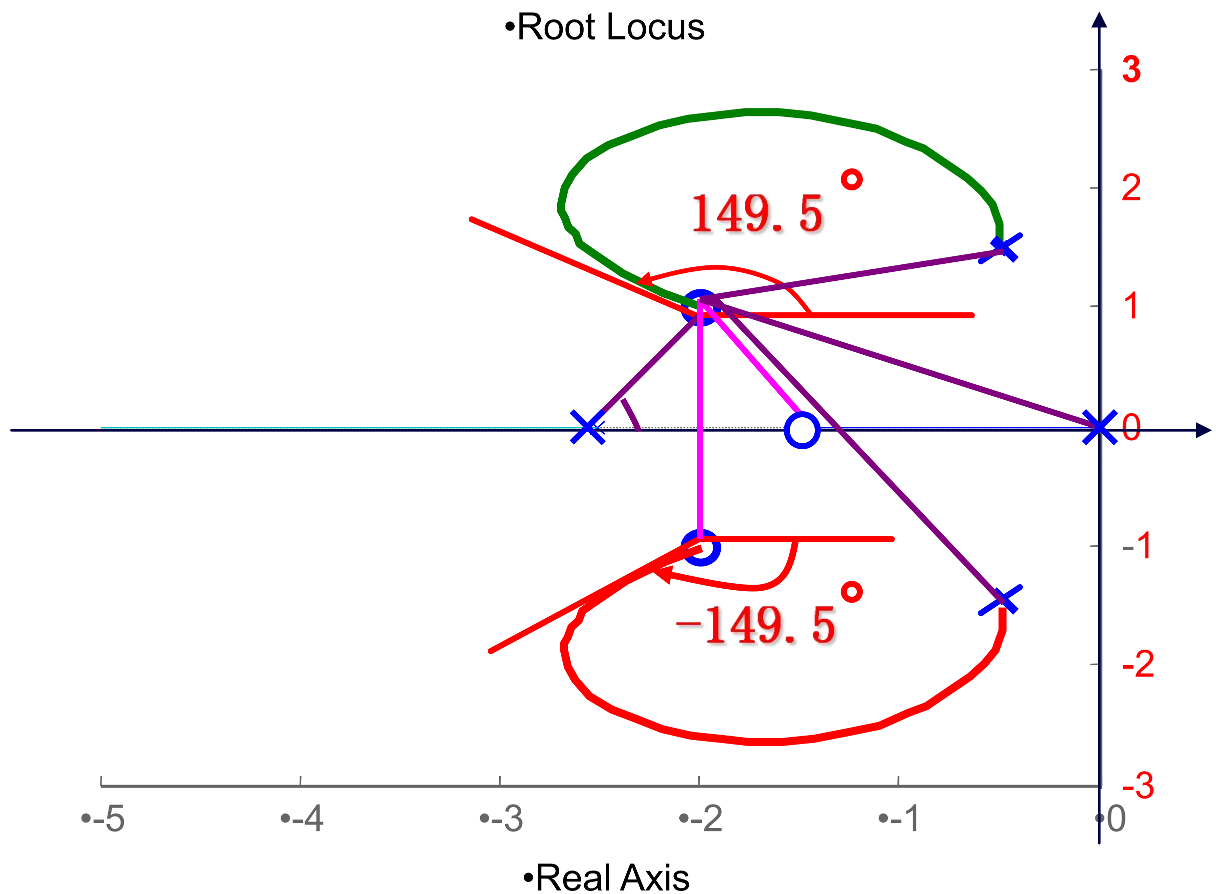
[例]单位反馈系统，开环传递函数如下试绘制其根轨迹。

$$G(s)=\frac{k(s+1)}{s(2s+1)}$$



若系统有2个开环极点，1个开环零点，

根轨迹为以开环零点为圆心的圆或圆的一部分



法则6　根轨迹起始角和终止角

起始角　$$\theta_{pl} = (2k+1)\pi + \sum_{i=1}^{m} \angle p_l - z_i - \sum_{i=1(i\neq l)}^{n} \angle p_l - p_i$$

终止角　$$\phi_{zl} = (2k+1)\pi + \sum_{i=1}^{n} \angle z_l - p_i - \sum_{i=1(i\neq l)}^{m} \angle z_l - z_i$$

法则6　根轨迹起始角和终止角

起始角　$\theta_{pl}=(2k+1)\pi+\sum_{i=1}^{m}\angle p_l-z_i-\sum_{i=1(i\neq l)}^{n}\angle p_l-p_i$

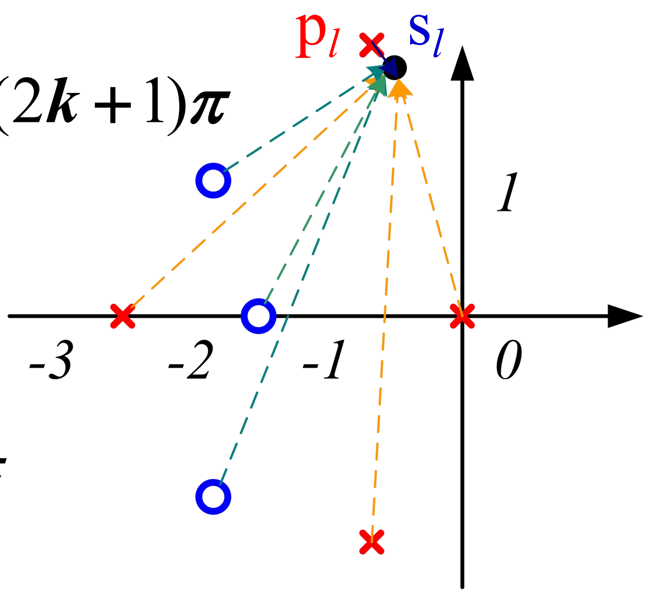
证明：

相角条件　$\sum_{j=1}^{m}\angle(s-z_j)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s-p_i)=(2k+1)\pi$

设根轨迹上有一点s_l，且无限靠近极点p_l

相角条件可写为　$\sum_{j=1}^{m}\angle(s_l-z_j)-\sum_{i=1}^{n}\angle(s_l-p_i)=(2k+1)\pi$

$$\sum_{j=1}^{m}\angle(s_l-z_j)-[\sum_{\substack{i=1\\i\neq l}}^{n}\angle(s_l-p_i)+\angle(s_l-p_l)]=(2k+1)\pi$$



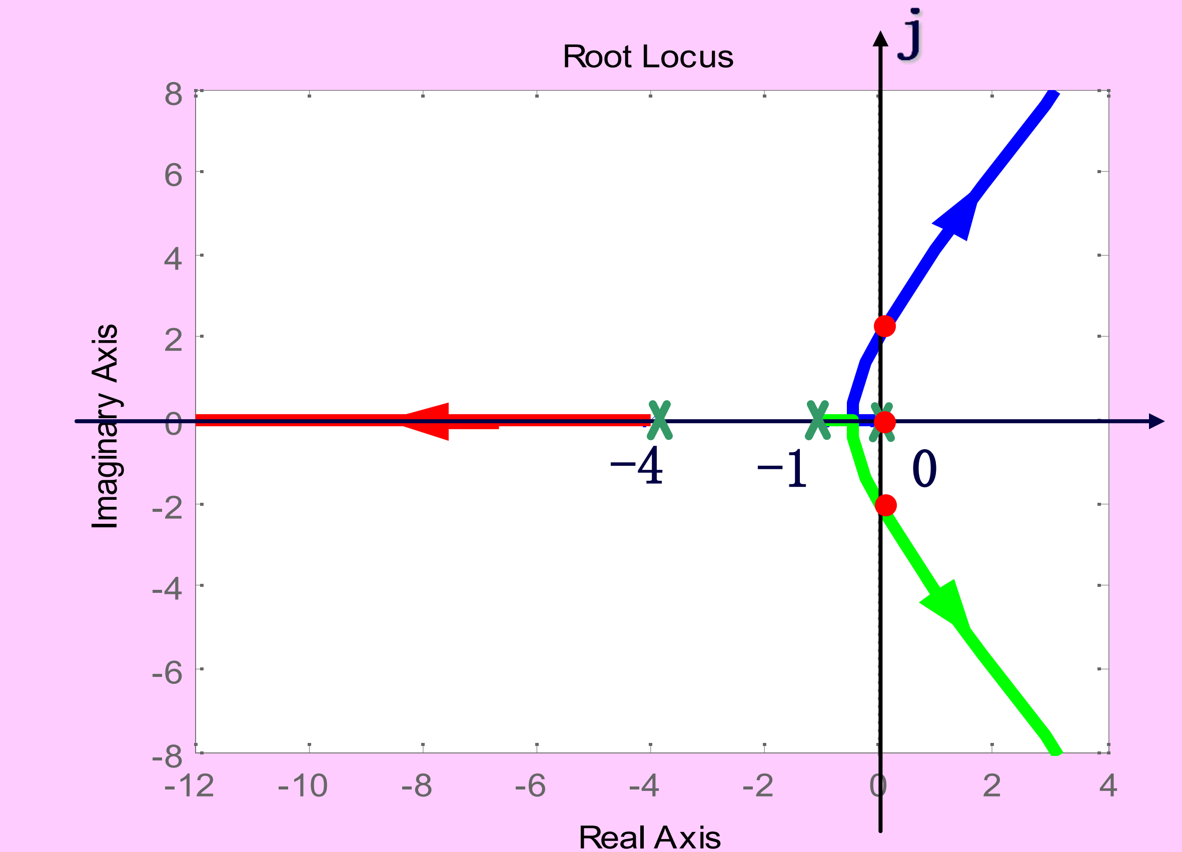
用p_l代替s_l, 可写为

$$\sum_{j=1}^{m}\angle(p_l-z_j)-[\sum_{\substack{i=1\\i\neq l}}^{n}\angle(p_l-p_i)+\underbrace{\angle(s_l-p_l)}_{\theta_{pl}}]=(2k+1)\pi$$

单位反馈系统

$$G(S)=\frac{k^*}{s(s+1)(s+4)}$$

$$(k^*:0\rightarrow+\infty)$$



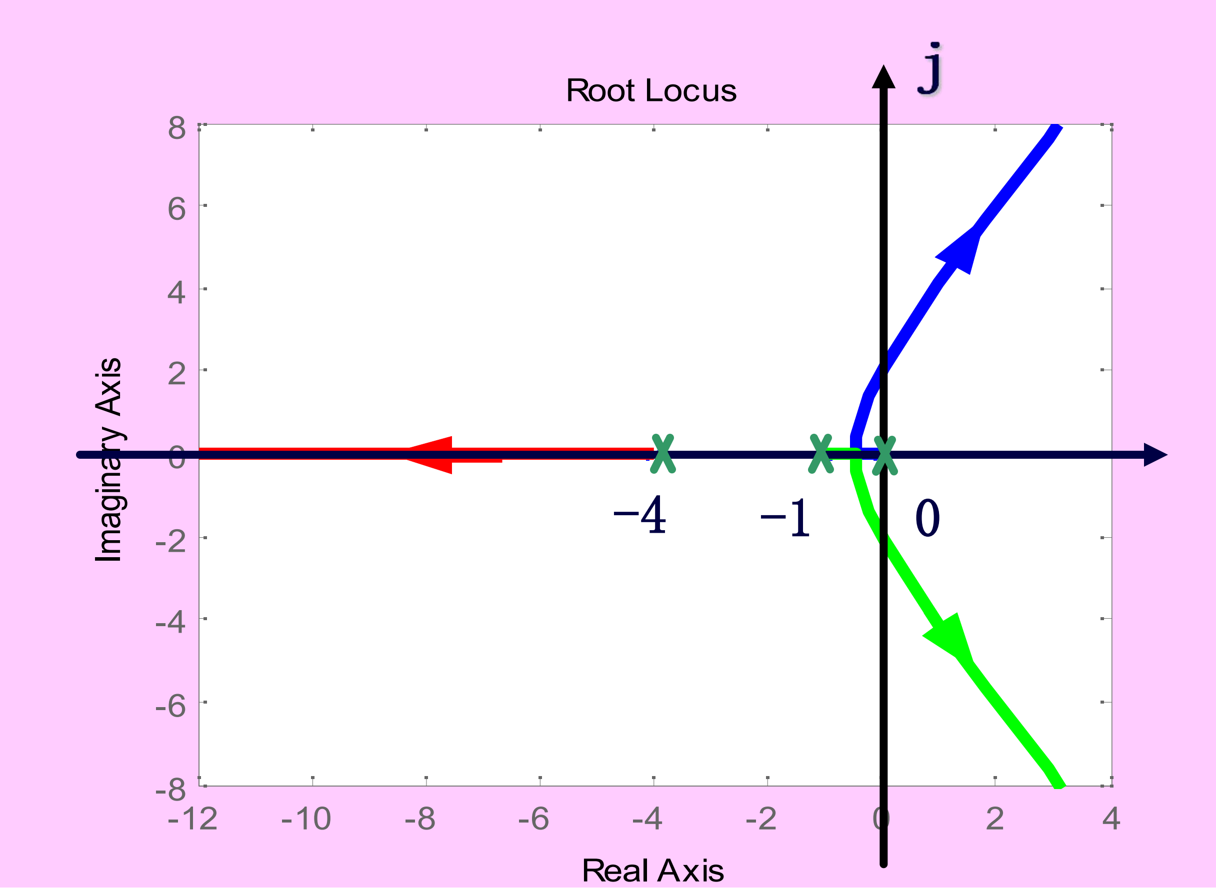
法则7　根轨迹与虚轴的交点

根轨迹与虚轴交点处的K值和ω值，令闭环特征方程中$s=j\omega$，分别取实部和虚部等于零求得.

单位反馈系统

$$G(S)=\frac{k^*}{s(s+1)(s+4)}$$

$$(k^*:0\rightarrow+\infty)$$



法则8　　根轨迹的走向

当 $K^*\uparrow$ 时，若一些根轨迹分支向左移动，则另一些根轨迹分支必向右移动。

§4.2 180° 根轨迹图的绘制

适用条件：特征方程可整理为$1+\dfrac{K^*\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}=0$ 且 K^* 从$0\to\infty$ 变化。

绘制根轨迹图的规则

序	内容	规　　则
1	分支数，对称性	等于开环传递函数的极点数（n≥m） 对称于实轴
2	起点、终点	起始于开环的极点，终止于开环传的零点（包括无限零点）
3	实轴上分布	实轴上的根轨迹在实轴的某一区间内存在根轨迹，则其右边开环传递函数的零点、极点数之和必为奇数
4	渐近线	相交于实轴上的一点： 坐标为：$\sigma_a=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{j=1}^{m}z_j}{n-m}$　倾角为：$\varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{n-m}$

绘制根轨迹图的规则

序	内容	规　　则
5	分离（回合）点	实轴上的分离（会合）点 ——（必要条件） $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d-p_i}=\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{d-z_j}$
6	起始角 终止角	复极点处的起始角： $\theta_{p_l}=(2k+1)\pi+\sum_{i=1}^{m}\angle(p_l-z_i)-\sum_{i=1(i\neq l)}^{n}\angle(p_l-p_i)$ 复零点处的终止角： $\varphi_{z_l}=(2k+1)\pi+\sum_{i=1}^{n}\angle(z_l-p_i)-\sum_{i=1(i\neq l)}^{m}\angle(z_l-z_i)$
7	虚轴交点	（1）满足特征方程 $1+G(j\omega)H(j\omega)=0$ 的 $j\omega$ 值； （2）由劳斯阵列求得；
8	走向	当 $n-m\geq 2, K\to\infty$ 时，一些轨迹向右，则另一些将向左。
9	K*计算	根轨迹上任一点处的K*： $K^*=\frac{1}{\lvert G(s)H(s)\rvert}=\frac{\lvert s-p_1\rvert\cdots\lvert s-p_n\rvert}{\lvert s-z_1\rvert\cdots\lvert s-z_m\rvert}$

[例] 已知单位反馈系统，开环传递函数

$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+3)(s^2+2s+2)} \qquad k^*:0\rightarrow+\infty$$

试绘制其概略根轨迹；并求使系统稳定的 k^* 范围

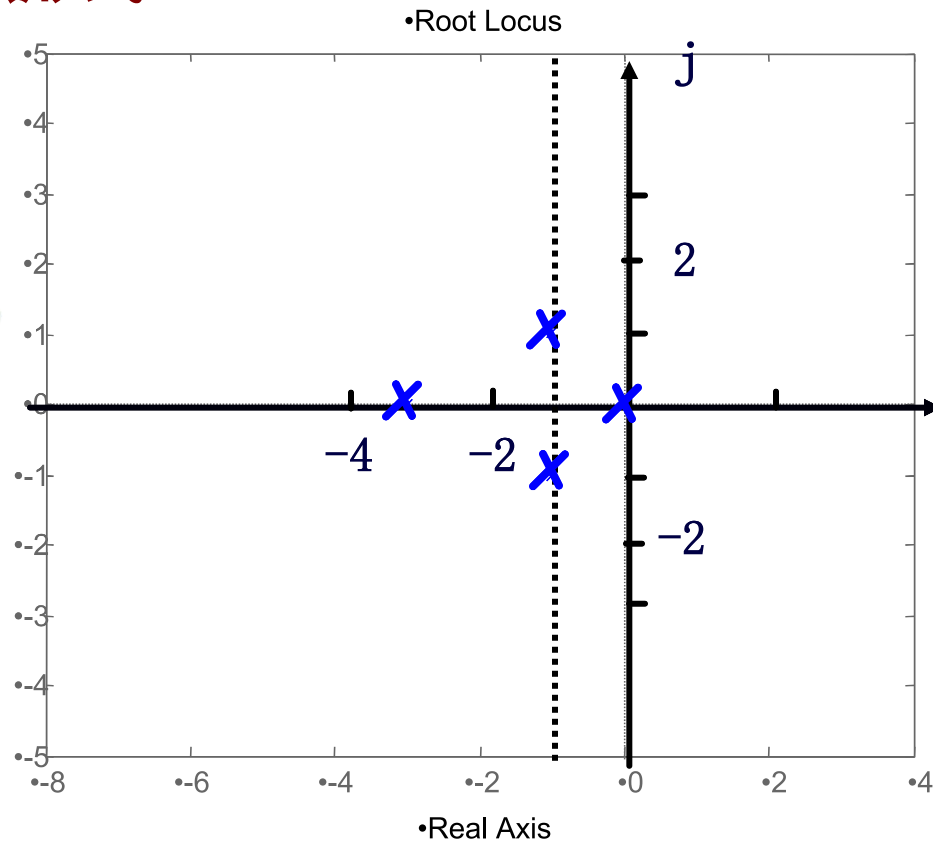
解：首先将G(s)化为零、极点乘积形式

$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+3)(s+1+j)(s+1-j)}$$

1）开环极点n=4, $p_1=0$, $p_2=-3$,

$p_3=-1+j$ $p_4=-1-j$

开环零点m=0



[例] 已知单位反馈系统，开环传递函数

$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+3)(s^2+2s+2)} \quad k^*: 0 \to +\infty$$

试绘制其概略根轨迹，并求使系统稳定的k^*范围.

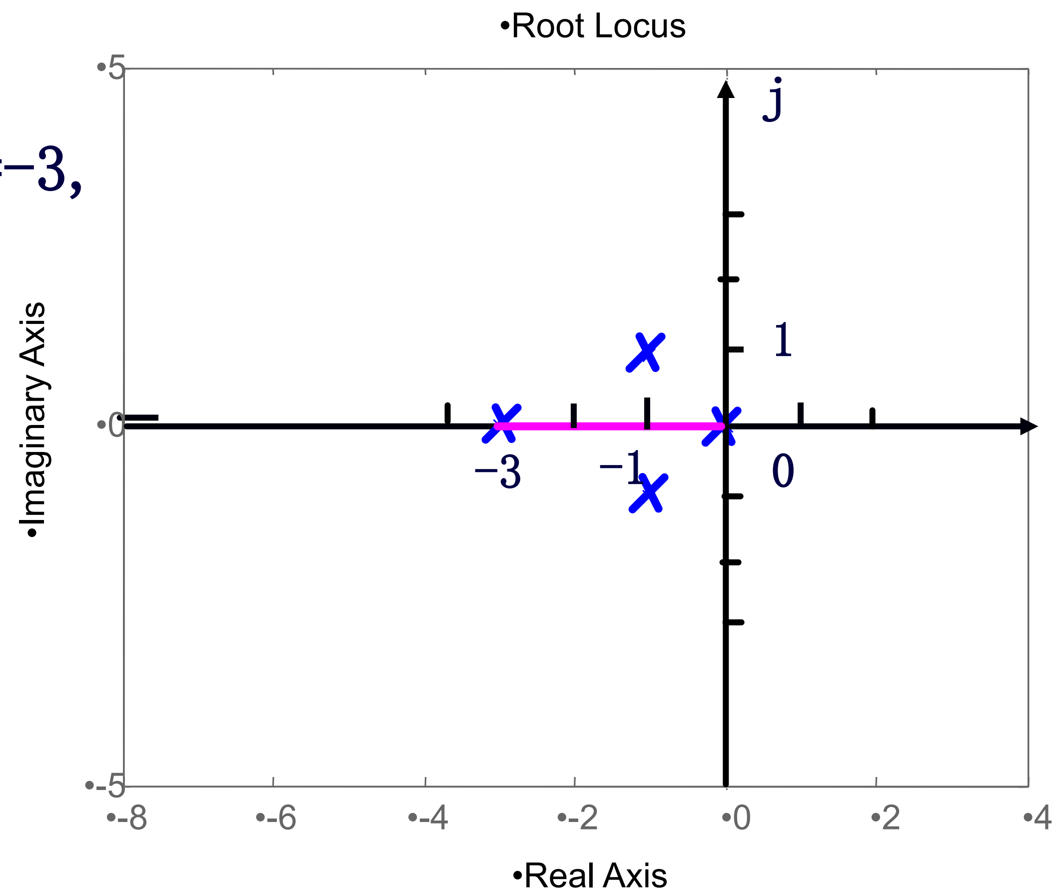
解：

1）开环极点n=4 ，$p_1=0$, $p_2=-3$,

$p_3=-1+j$ $\quad p_4=-1-j$

开环零点m=0

2）实轴上根轨迹



[例] 已知单位反馈系统，开环传递函数

$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+3)(s^2+2s+2)} \quad k^*:0\rightarrow +\infty$$

试绘制其概略根轨迹，并求使系统稳定的k^*范围.

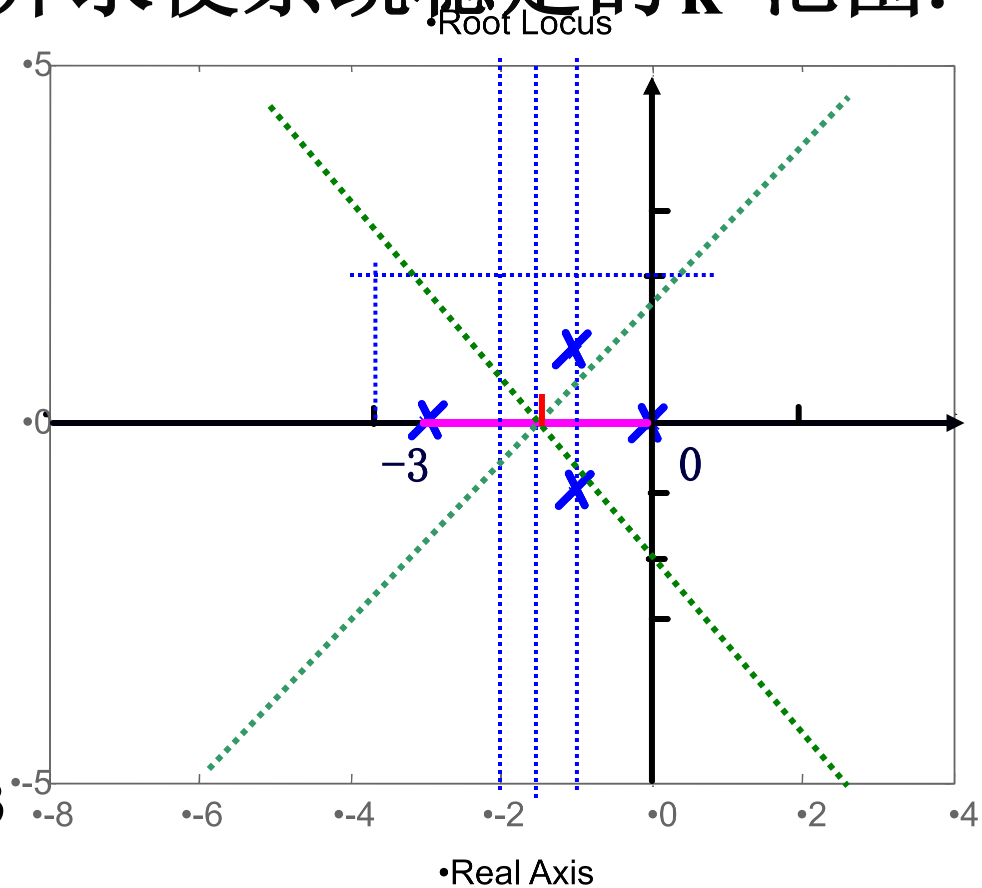
解：3）渐近线 n−m=4条

与实轴交点：

$$\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}=-1.25$$

与实轴交角：

$$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m} \qquad k=0,1,2,3$$



[例] 已知单位反馈系统，开环传递函数

$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+3)(s^2+2s+2)} \quad k^*:0\to+\infty$$

试绘制其概略根轨迹, 并求使系统稳定的k^*范围.

解：3）渐近线 n−m=4条

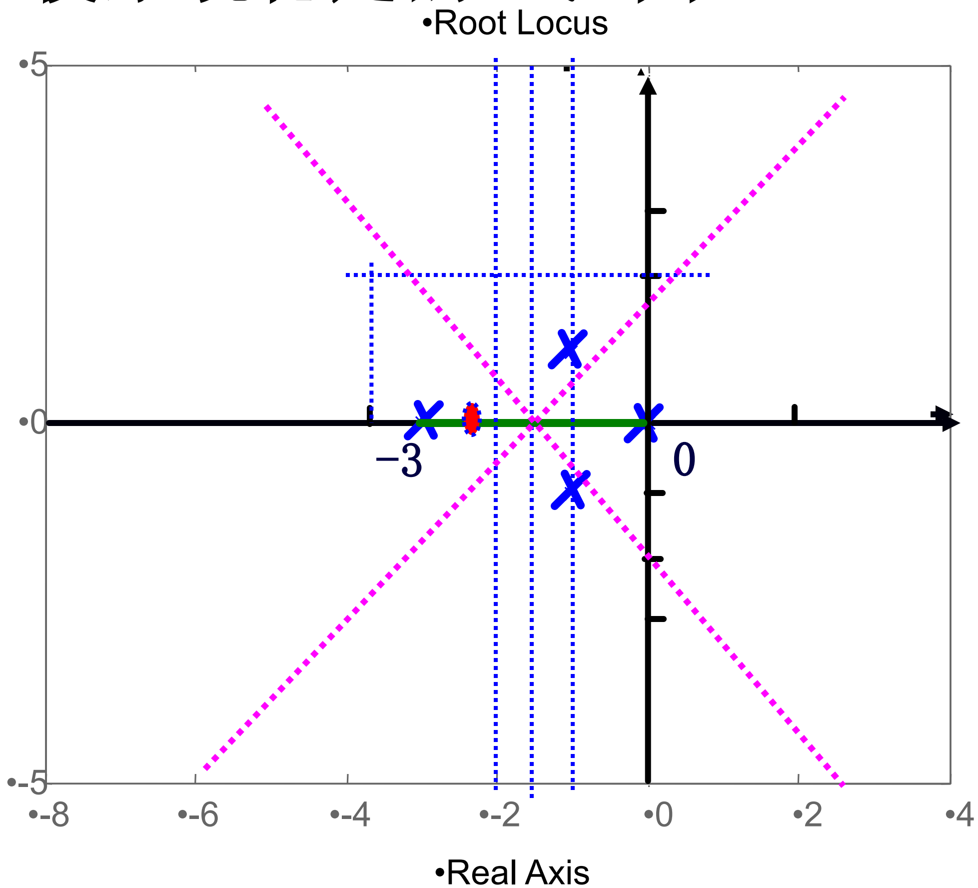
$$\sigma_a=\frac{\sum_{i=1}^{n}p_i-\sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}=-1.25$$

$$\varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m} \qquad k=0,1,2,3$$

4）分离点

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{d+3}+\frac{1}{d+1+j}+\frac{1}{d+1-j}=0$$

$$d\approx-2.3$$



[例] 已知单位反馈系统，开环传递函数

$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+3)(s^2+2s+2)} \quad k^*:0\to+\infty$$

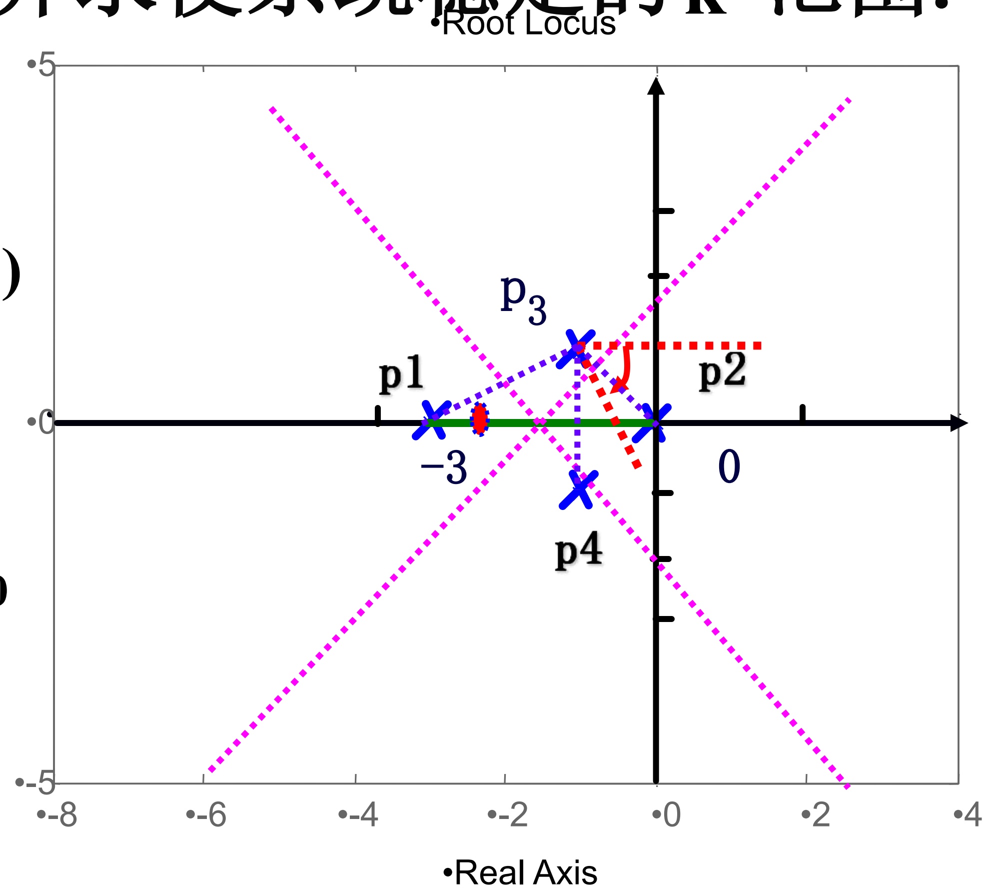
试绘制其概略根轨迹, 并求使系统稳定的 k^* 范围.

解：5）起始角

$$\theta_{p_3}=(2k+1)\pi+\sum_{i=1}^{m}\angle(p_3-z_i)-\sum_{i=1}^{n}\angle(p_3-p_i)$$

$$=180^0-135^0-26.5^0-90^0$$

$$=-71.6^0$$



[例] 已知单位反馈系统，开环传递函数

$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+3)(s^2+2s+2)} \quad k^*: 0\rightarrow +\infty$$

试绘制其概略根轨迹, 并求使系统稳定的 k^*范围.

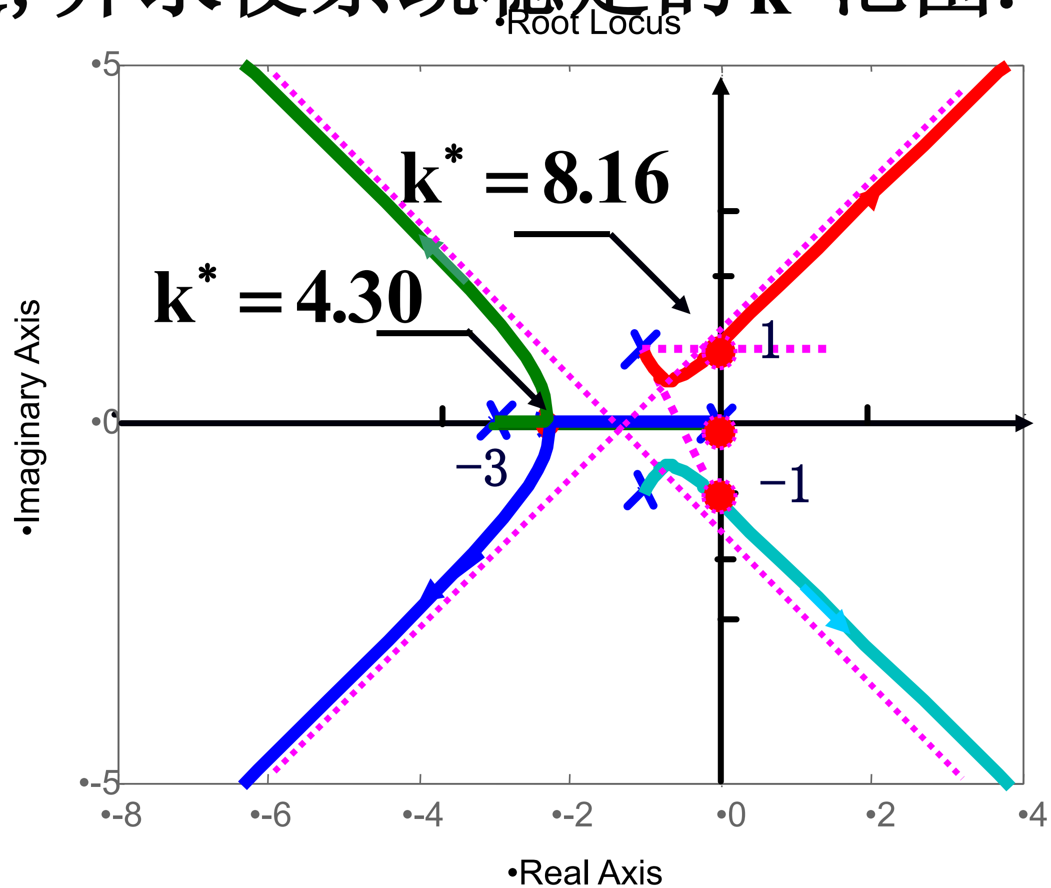
解：6）与虚轴交点

令s=jω代入D(s)=0

$\omega=0 \quad k^*=0$

$\omega=\pm 1.1 \quad k^*=8.16$

2. $0<k^*<8.16$

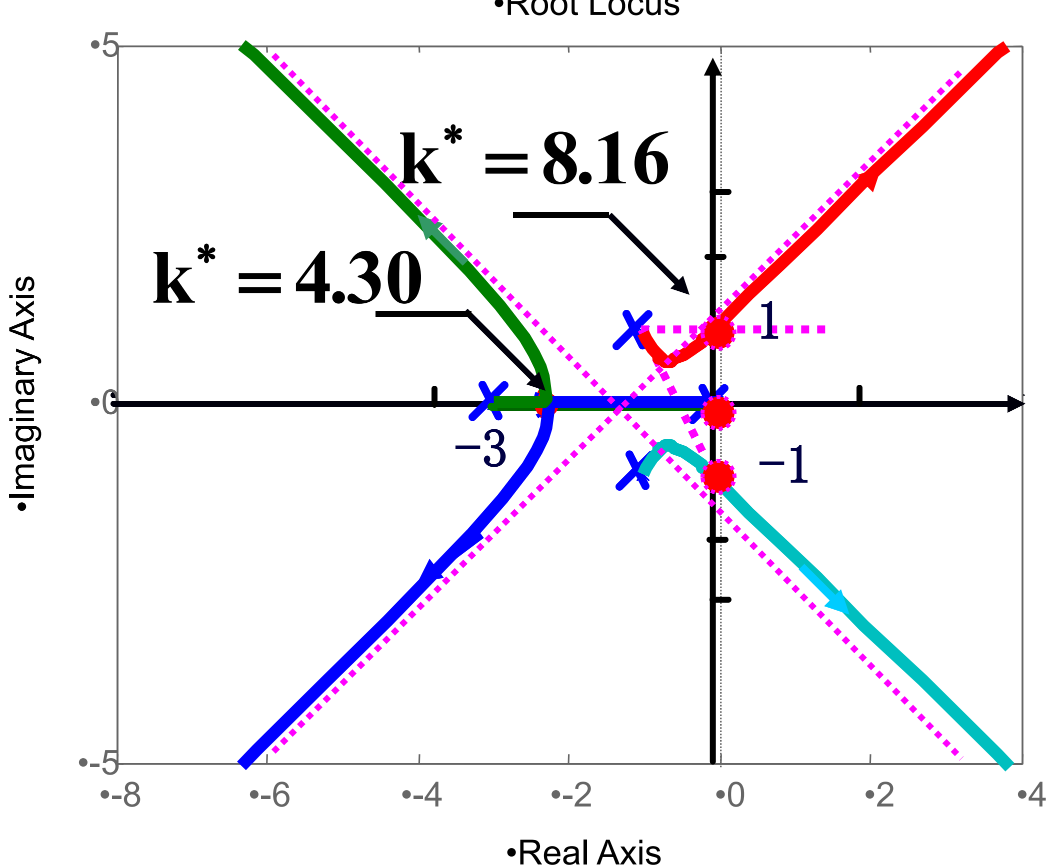


[例] 已知单位反馈系统，开环传递函数

$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+3)(s^2+2s+2)} \quad k^*: 0 \rightarrow +\infty$$

试绘制其概略根轨迹, 并求使系统稳定的 k^* 范围.

```
num =[1];
den1=conv([1 0],[1 3]);
den =conv(den1,[1 2 2]);
rlocus(num,den);
pause
```

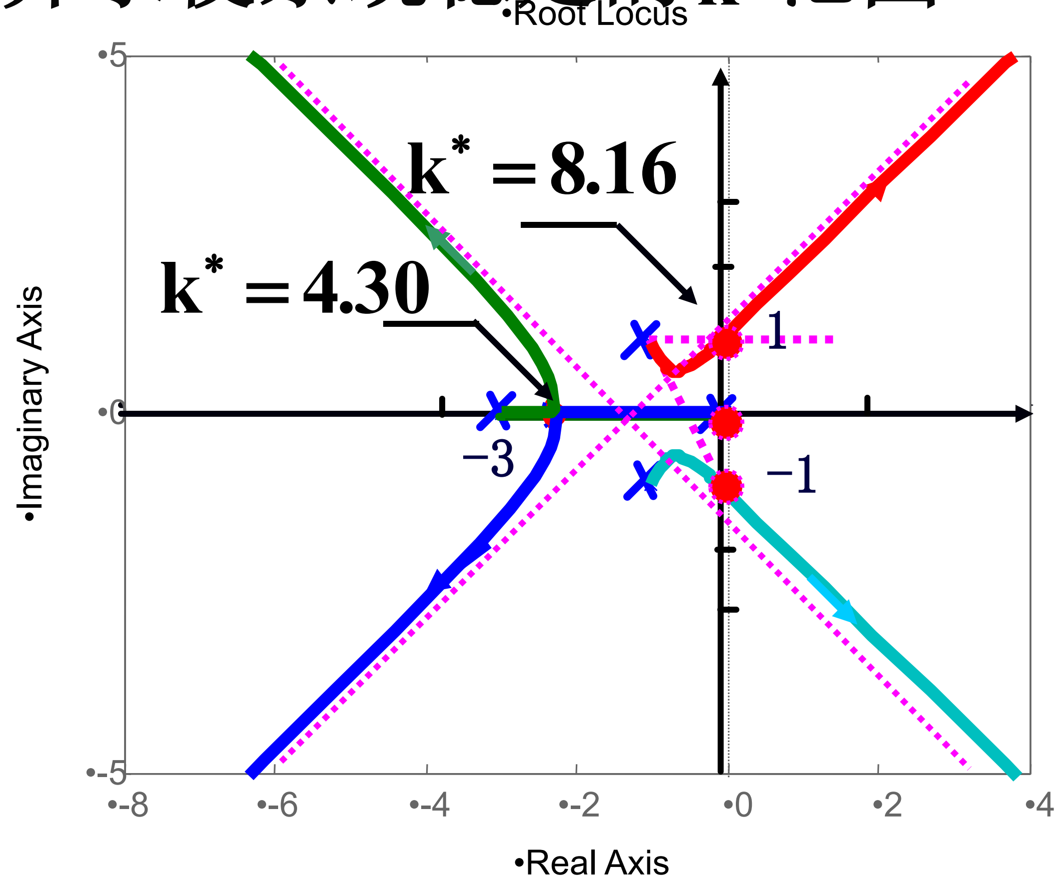


[例] 已知单位反馈系统，开环传递函数

$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+3)(s^2+2s+2)} \qquad k^*: 0 \to +\infty$$

试绘制其概略根轨迹, 并求使系统稳定的 k^* 范围.

```
num =[1];
den1=conv([1 0],[1 3]);
den =conv(den1,[1 2 2]);
rlocus(num,den);
pause
```



二、闭环极点的确定

方法：实数闭环极点$\xrightarrow{\text{模值方程}}$试探法

复数闭环极点——————韦达定理

韦达定理：

若 $$D(s)=\lambda s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

则 $$s_1+s_2+\cdots+s_n=-\frac{a_1}{\lambda}$$ 根之和

$$s_1*s_2*\cdots*s_n=(-1)^n\frac{a_n}{\lambda}$$ 根之积

[例] 已知单位反馈系统，开环传递函数

$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$

试确定$k^*=4$的闭环极点

实数闭环极点——试探法（模值方程）

复数闭环极点——韦达定理

$$D(s)=\lambda s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_n=0$$

$$s_1+s_2+\cdots+s_n=-\frac{a_1}{\lambda}$$

$$s_1 * s_2 * \cdots * s_n=(-1)^n\frac{a_n}{\lambda}$$

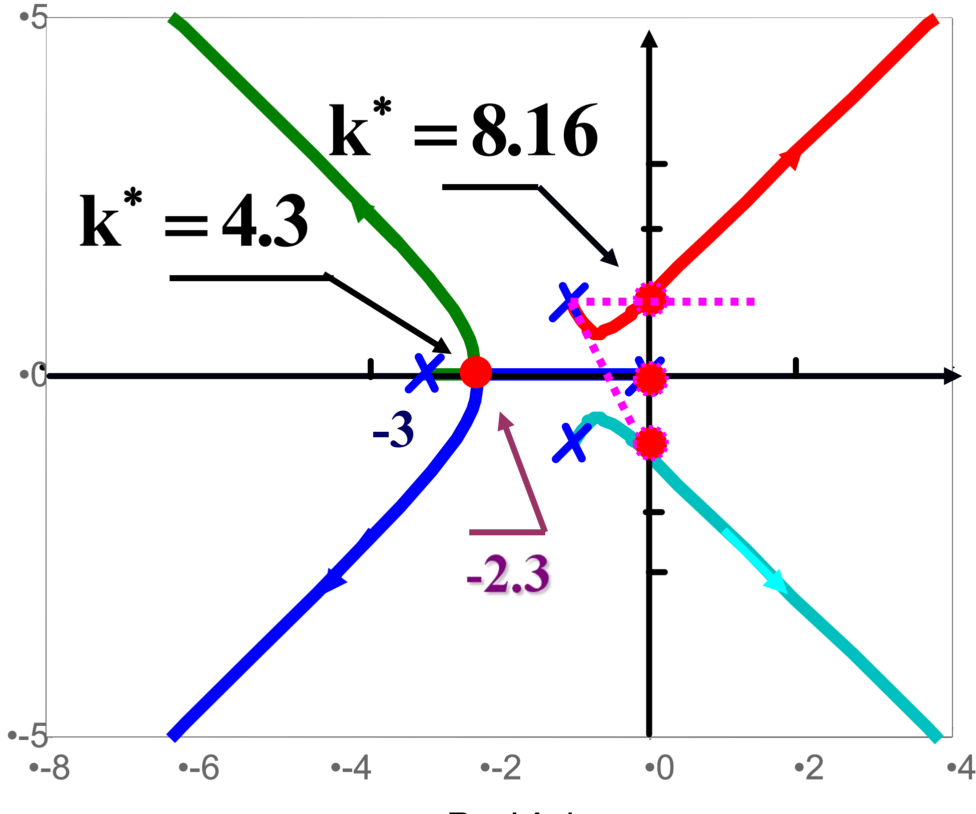
解：

$$\Phi(s)=\frac{k^*}{s(s+3)(s^2+2s+2)+k^*}$$

$$=\frac{k^*}{s^4+5s^3+8s^2+6s+k^*}$$

由模值方程得：

$$|G(s)|=\frac{4}{|s||s+3||s^2+2s+2|}=1$$



［例］已知单位反馈系统，开环传递函数

$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$

试确定 $k^*=4$ 的闭环极点

解：

由模值方程得：

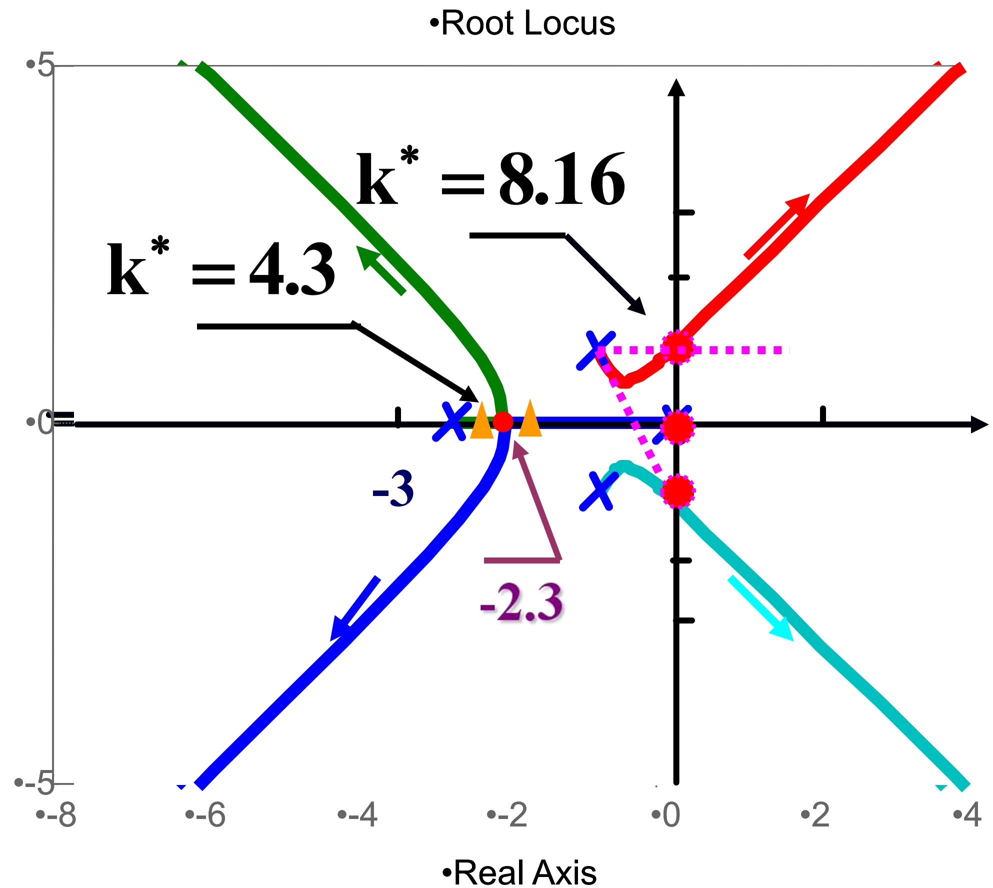
$$|G(s)|=\frac{4}{|s||s+3||s^2+2s+2|}=1$$

经试探得：

$$s_1=-2 \quad s_2=-2.54$$

$$s_1+s_2+s_3+s_4=-5$$

$$s_1\cdot s_2\cdot s_3\cdot s_4=4$$



[例] 已知单位反馈系统，开环传递函数

$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$

试确定 $k^*=4$ 的闭环极点

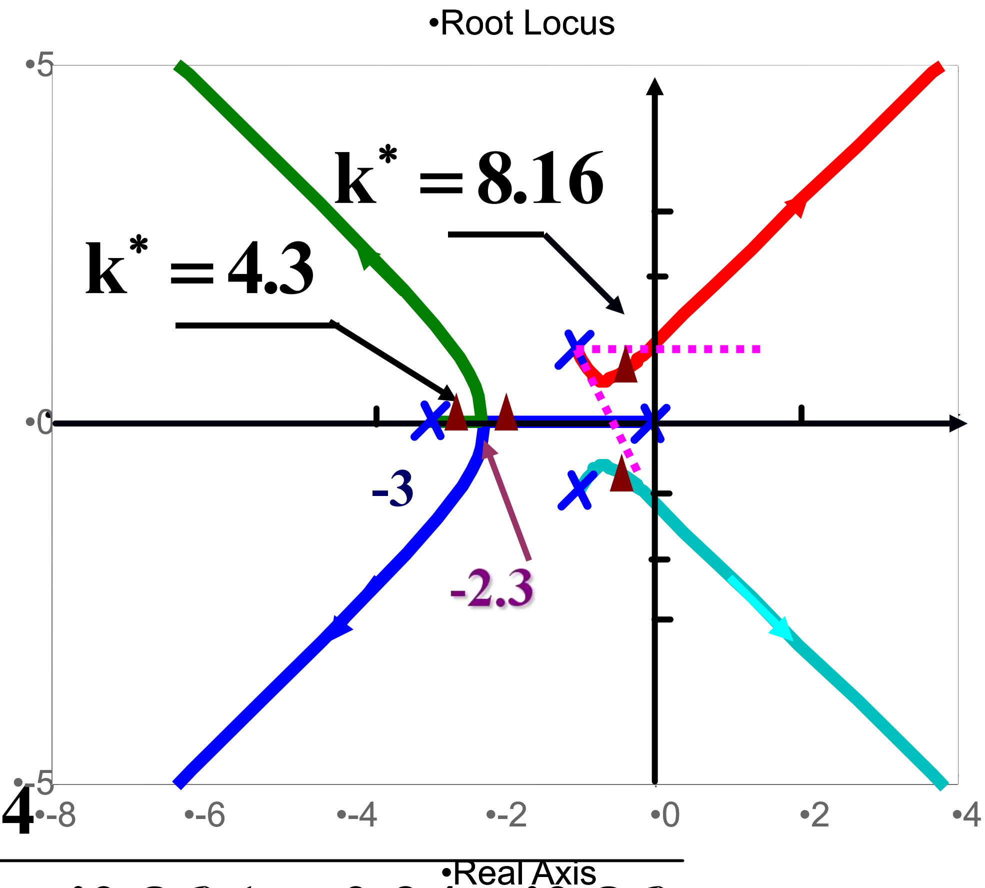
解：

$$s_1=-2 \quad s_2=-2.54$$

$$s_1+s_2+s_3+s_4=-5$$

$$s_1\cdot s_2\cdot s_3\cdot s_4=4$$

得： $s_{3,4}=-0.24\pm j0.86$

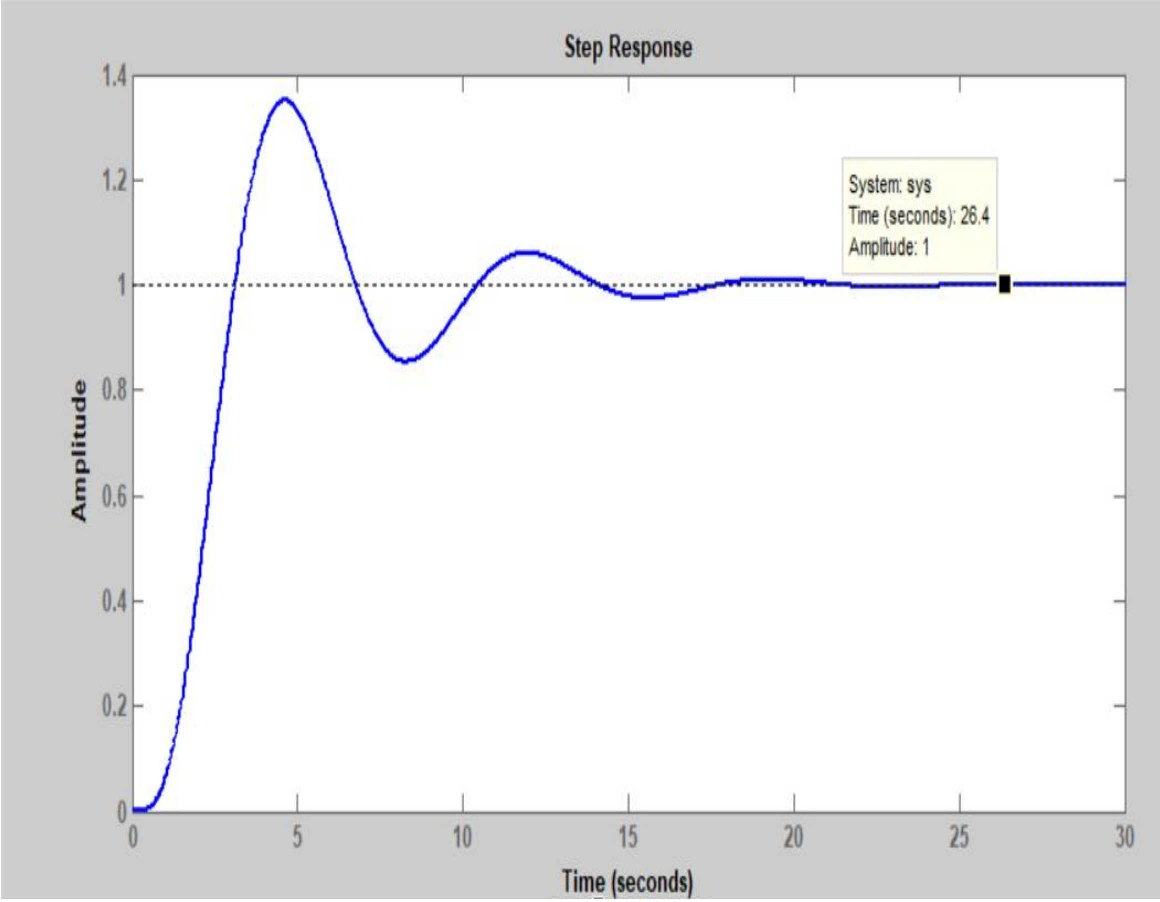


则

$$\Phi(s)=\frac{4}{(s+2)(s+2.52)(s+0.24+j0.86)(s+0.24-j0.86)}$$

$$\Phi(s)=\frac{4}{(s+2)(s+2.52)(s+0.24+j0.86)(s+0.24-j0.86)}$$

```
clc;
clear;
num=[4];
den=[1 5 8 6 4];
sys=tf(nnum,den);
step(sys)
```



主导极点： 在高阶系统中，离虚轴最近的闭环极点，周围无闭环零点，其他闭环极点离虚轴远，它对系统动态性能影响最大

设某单位负反馈系统开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K^{*}}{s(s+1)(s+2)}$$

试概略绘制 K^{*} 从 $0 \rightarrow \infty$ 变化时的闭环根轨迹，并求临界根轨迹增益及该增益对应的三个闭环极点。

解： n=3,m=0, $p_1=0; p_2=-1; p_3=-2$

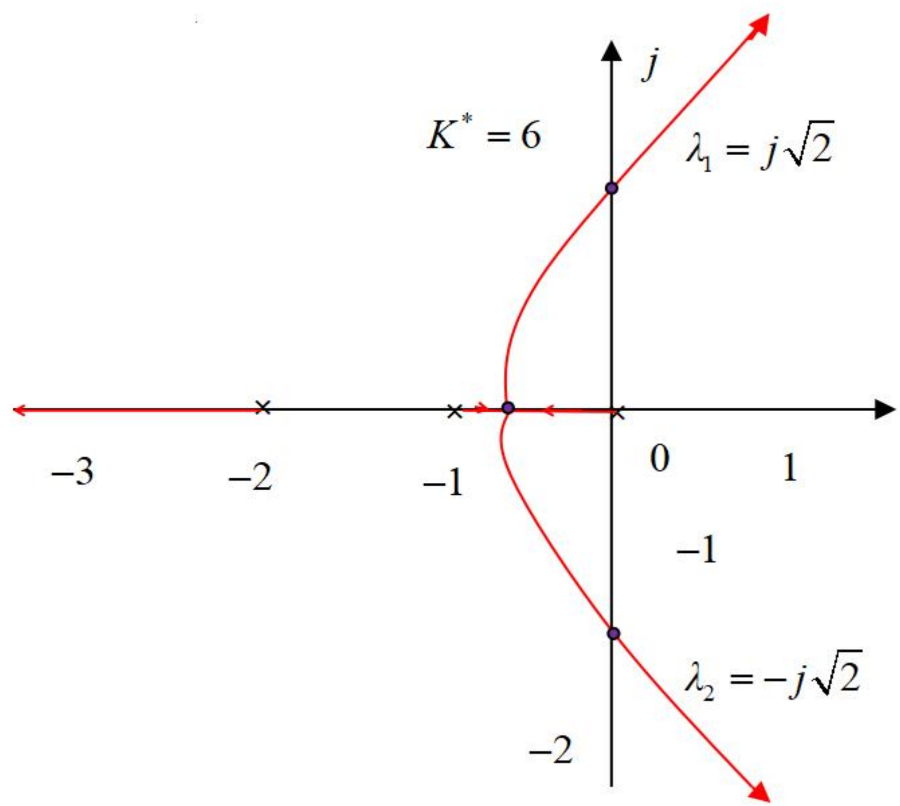
渐近线：

$$\begin{cases} \sigma_a=\dfrac{-1-2}{3}=-1 \\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{3}=\pm\dfrac{\pi}{3},\pi \end{cases}$$

分离点：

$d=-0.423$，

与虚轴交点：$\begin{cases} \omega=\pm\sqrt{2} \\ K^{*}=6 \end{cases}$，



设某单位负反馈系统开环传递函数为

$$G(s)=\frac{K^*}{s(s+1)(s+2)}$$

试概略绘制 K^* 从 $0\to\infty$ 变化时的闭环根轨迹，并求临界根轨迹增益及该增益对应的三个闭环极点。

$K^*=6$ 为临界根 轨迹增益，

根轨迹与虚轴的交点为对应的两个闭环极点，第三个闭环极点可由根之和法则求

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=-3$$

$$\lambda_3+j\sqrt{2}-j\sqrt{2}=-3$$

$$\lambda_3=-3$$