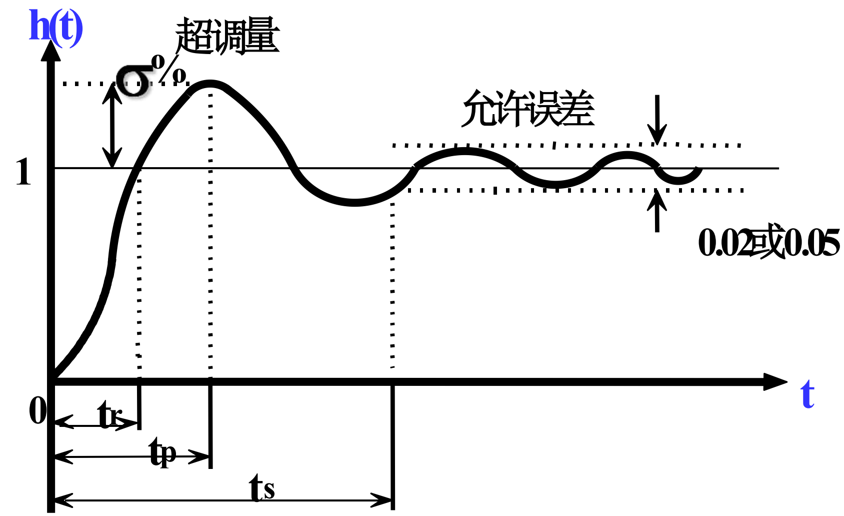
3-5 线性系统的准确性分析

一、误差和稳态误差

1 误差定义



定义1 （从输出端定义）

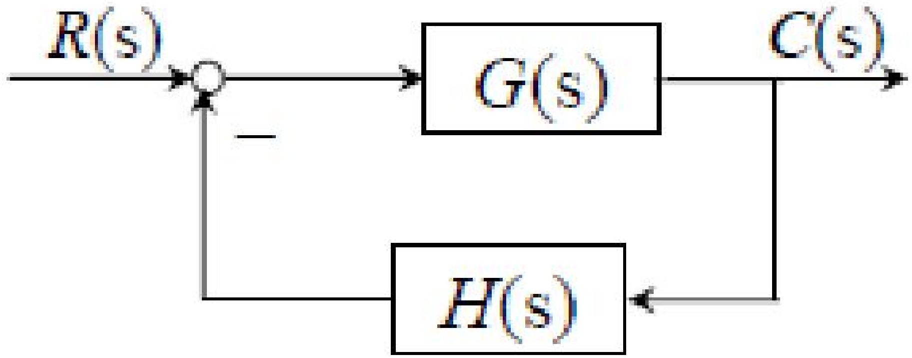
瞬态分量　稳态分量

$$\mathbf{e(t) = c_{希}(t) - c_{实}(t) = e_{tt} + e_{ss}}$$

希望输出　　实际输出

如果系统稳定，稳态误差

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t)$$



$$e(t) = c_{希}(t) - c_{实}(t)$$

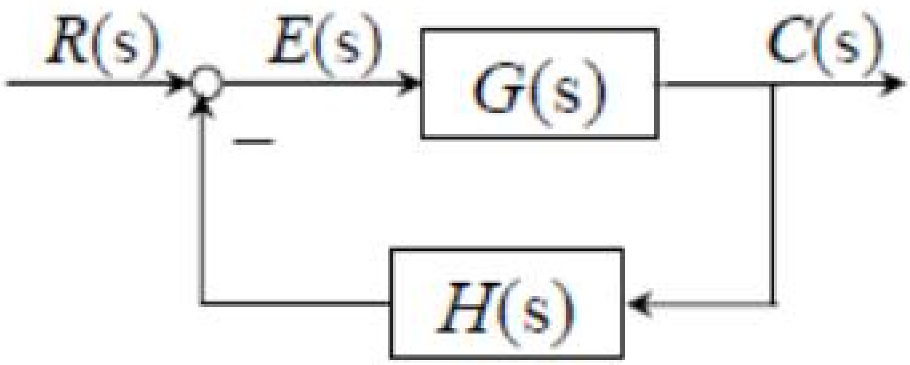
即 $E(s) = C_{希}(s) - C_{实}(s)$

设 $C_{希}(s) = \dfrac{1}{H(s)} R(s)$

$$\varepsilon(s) = R(s) - \mathrm{H(s)}C(s)$$
$$= R(s) - \mathrm{H(s)}\frac{1}{\mathrm{H(s)}}R(s) = 0$$

误差**E(s)** = 希望输出-实际输出= $\dfrac{1}{\mathrm{H(s)}}R(s) - C(s)$

定义2 （从输入端定义）

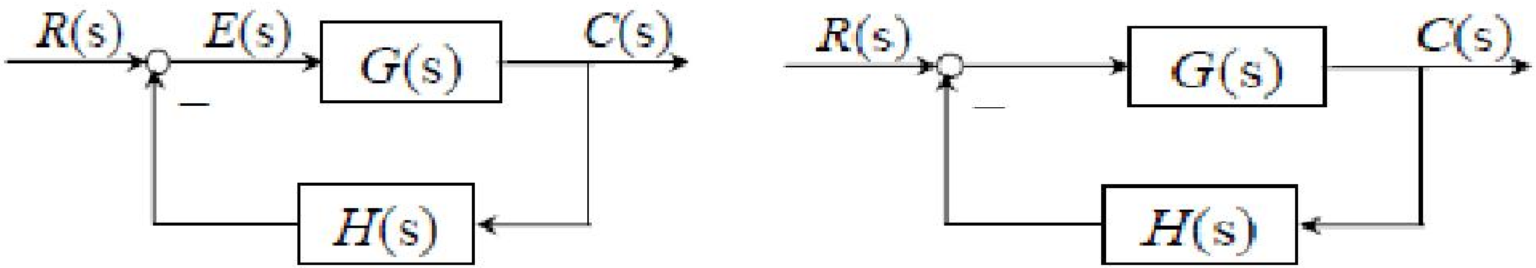


E(s)= R(s)-H(s)C(s) （给定-反馈）

如果系统稳定，稳态误差

$$e_{ss}=\lim_{t\to\infty}e(t)$$

两种误差定义小结



定义1 从输出端定义误差： $\mathbf{E(s)} = \frac{1}{H(s)}R(s) - C(s)$

定义 2 从输入端定义误差：E(s)= R(s)-H(s)C(s) （给定-反馈）

两种误差的关系

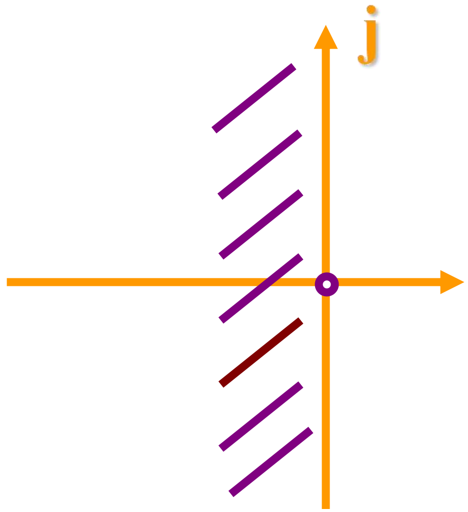
$$\mathbf{E(s)} = \frac{1}{H(s)}R(s) - C(s) = \frac{1}{H(s)}[R(s) - H(s)C(s)] = \frac{1}{H(s)}E(s)$$

当单位反馈时，两者相等。

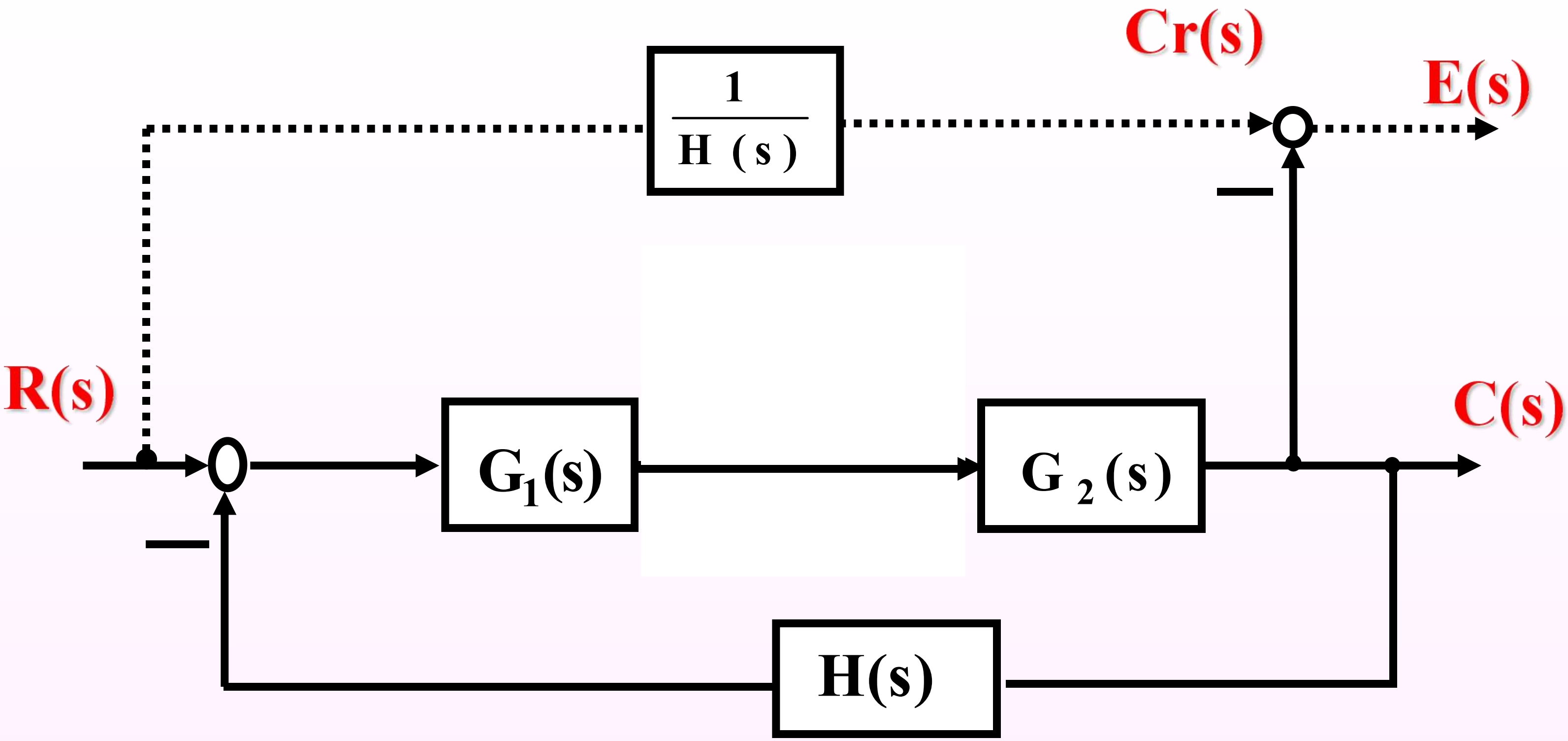
2 e_{ss} 的计算-- 终值定理法

若sE(s)解析--- sE(s)在s 平面虚轴和右半平面无极点，则

$$e_{ss} = \lim_{t \to +\infty} e(t) = \lim_{s \to 0} sE(s)$$



[例]典型控制系统结构如图，在输入信号R(s)和扰动信号N(s)同时作用下，求e_{ss}.



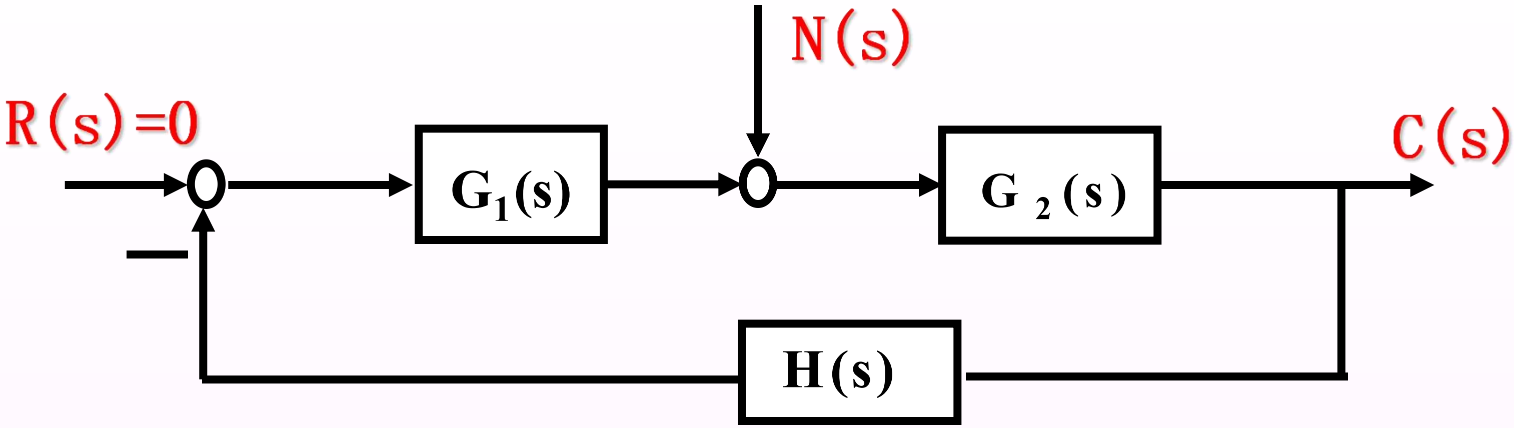
1) R(s)引起的误差E (s)=?

$$E_1(s)=C_r(s)-C(s)$$

设 $\dfrac{C_r(s)}{R(s)}=\dfrac{1}{H(s)}$

$$\varepsilon(s)=R(s)-B(s)=R(s)-\frac{1}{H(s)}R(s)H(s)=0$$

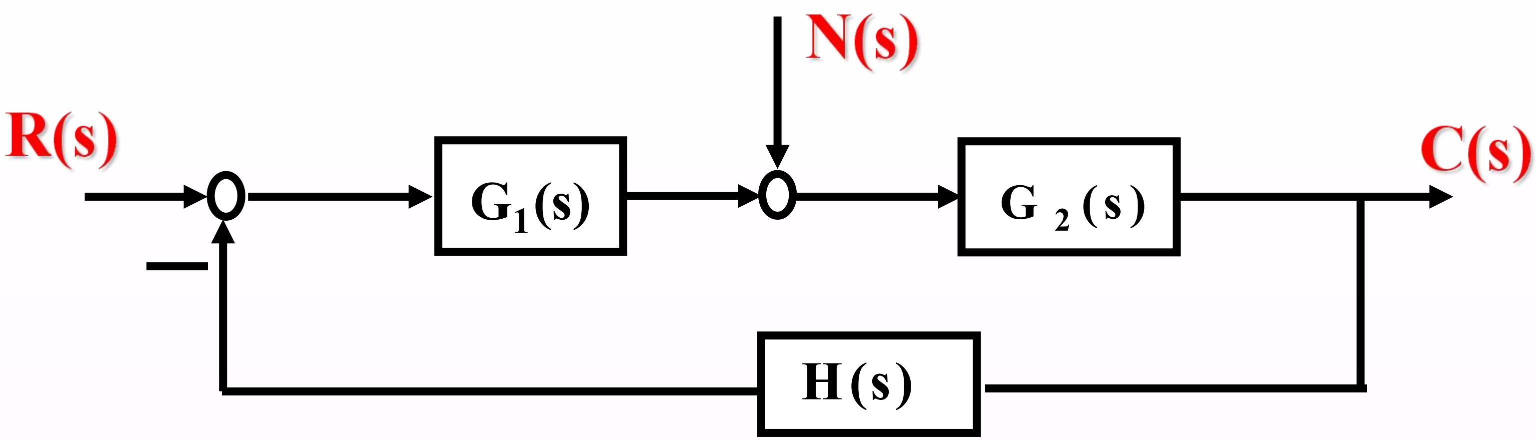
[例]典型控制系统结构如图，在输入信号R(s)和扰动信号N(s)同时作用下，求 ess.



2）N(s)引起的误差E(s)=?

$$E_2(s)=C_n(s)-C(s)=0-C(s)$$

$$=0-\phi_{cn}(s)N(s)$$

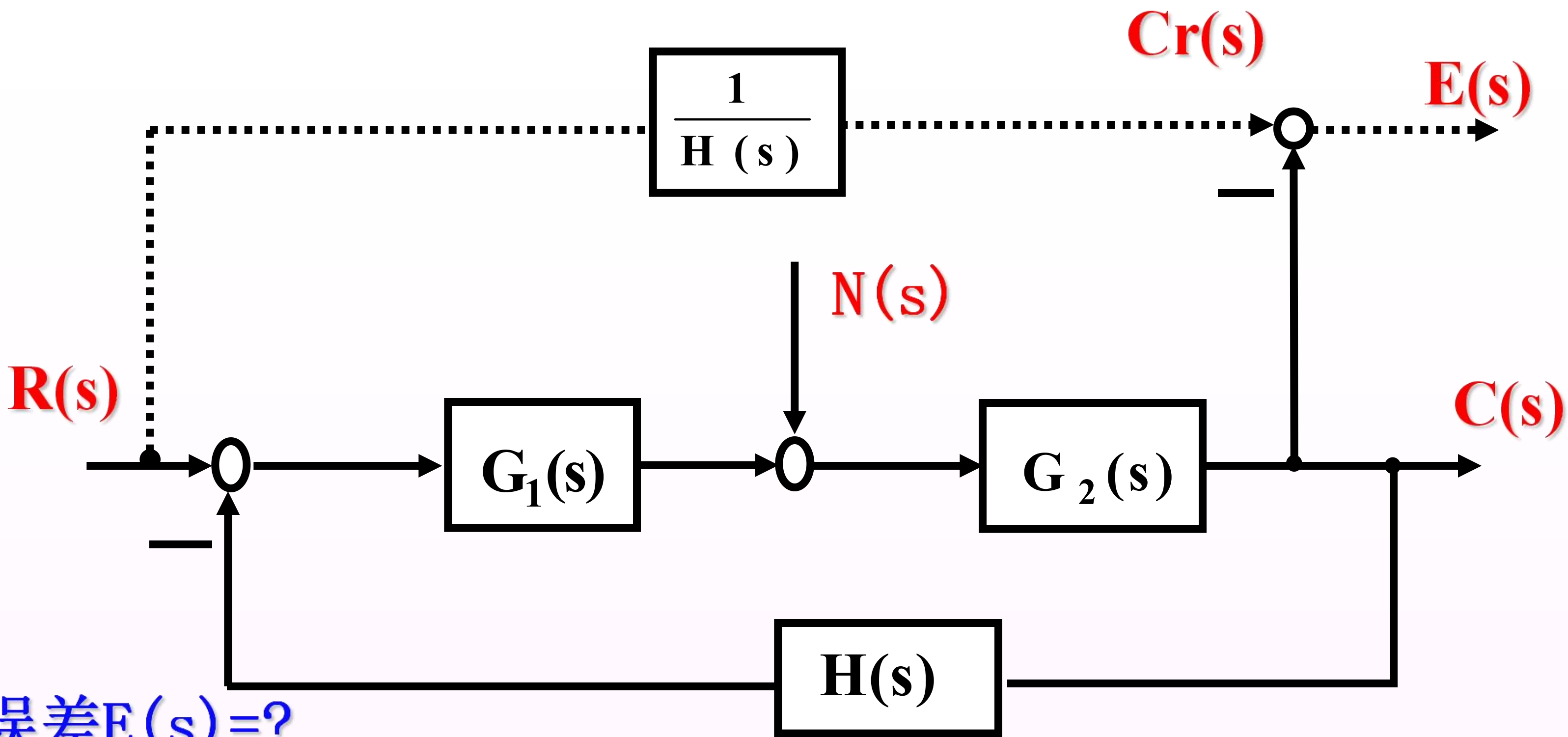


2) N(s)引起的误差E(s)=?

$$E_2(s) = C_n(s) - C(s) = 0 - C(s)$$

3) 总误差E(s)=?

$$\begin{aligned} \mathrm{E(s)} &= \mathrm{E_1(s) + E_2(s)} \\ &= [\frac{1}{\mathrm{H(s)}}\mathrm{R(s)} - \phi_{\mathrm{cr}}\mathrm{(s)R(s)}] + [0 - \phi_{\mathrm{cn}}\mathrm{(s)N(s)}] \\ &= \frac{1}{\mathrm{H(s)}}\mathrm{R(s)} - [\phi_{\mathrm{cr}}\mathrm{(s)R(s)} + \phi_{\mathrm{cn}}\mathrm{(s)N(s)}] \end{aligned}$$

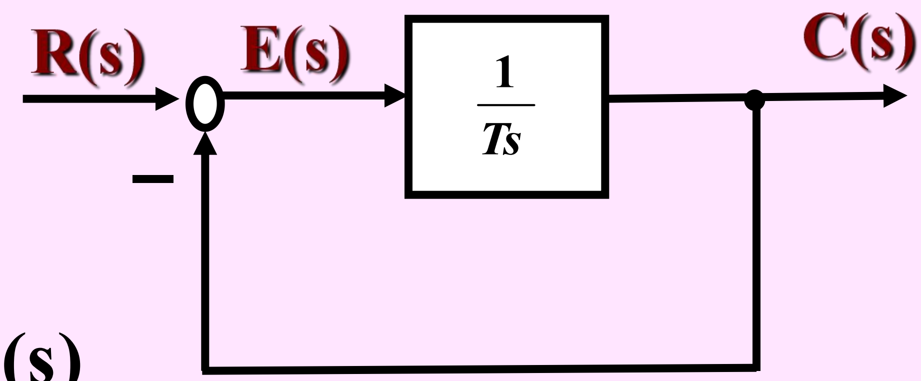


3） 总误差E(s)=?

$$E(s)=E_1(s)+E_2(s)$$
$$=[\frac{1}{H(s)}R(s)-\phi_{cr}(s)R(s)]+[0-\frac{G_2(s)}{1+G_1G_2H}N(s)]$$
$$=\frac{1}{H(s)}R(s)-[\phi_{cr}(s)R(s)+\phi_{cn}(s)N(s)]$$
$$=\frac{1}{H(s)}R(s)-C(s)$$

如果系统解析 $e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)$

[例] 单位反馈系统, G(s)=1/TS，试求r(t)=1(t)和r(t)=sinω t时，求ess.



解:1. $E(s) = R(s) - C(s)$

$$= R(s) - \frac{G(s)}{1+G(s)} R(s)$$

$$= \frac{1}{1+G(s)} R(s) = \frac{s}{s+1/T}$$

$\because$ sE(s) 解析　　$\therefore\ e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = 0$

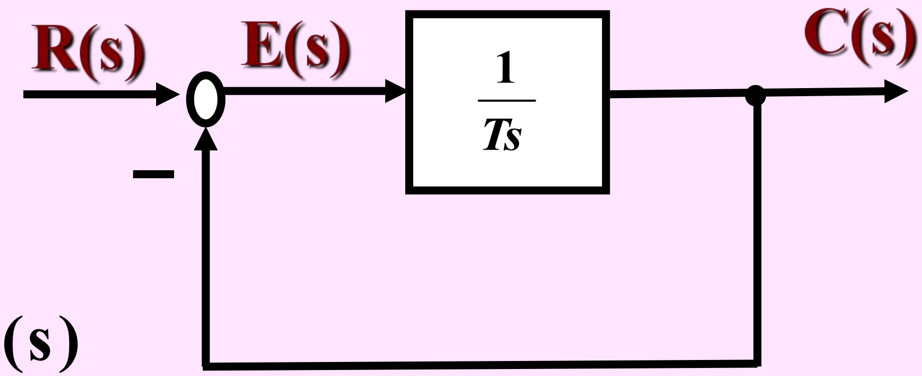
终值定理法求ess的步骤:

1）系统必须稳定

2）求E(s)

3) $e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s)$（系统解析）

[例] 单位反馈系统, G(s)=1/TS，试求r(t)=1(t)和r(t)=sinω t时，求ess.



解:2. $$E(s) = R(s) - C(s)$$

$$= R(s) - \frac{G(s)}{1+G(s)} R(s)$$

$$= \frac{1}{1+G(s)} R(s)$$

$$R(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \qquad E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s) = \frac{s}{s+\frac{1}{T}} \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

∵ sE(s) 不解析

$$E(s) = \frac{\omega s}{(s+1/T)(s^2+\omega^2)} = -\frac{T\omega}{(T^2\omega^2+1)} \cdot \frac{1}{(s+1/T)} + \frac{T\omega}{(T^2\omega^2+1)} \cdot \frac{s}{(s^2+\omega^2)} + \frac{T^2\omega^3}{(T^2\omega^2+1)} \cdot \frac{1}{(s^2+\omega^2)}$$

$$e(t) = L^{-1}(e(t))$$

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t)$$

$$e_{ss}(t) = \frac{T\omega}{T^2\omega^2+1}\cos\omega t + \frac{T^2\omega^2}{T^2\omega^2+1}\sin\omega t$$

二、开环传递函数的两种形式

1）零、极点乘积形式

$$G(s)H(s) = K^* \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s - p_j)}$$

其中：z_i 为传递函数开环零点，p_j 为传递函数开环极点

K^* 为根轨迹增益

特点：s首一项系数为“+1”

注意：型别以开环系统典型环节乘积形式来划分

2）典型环节的乘积形式

$$G(s)H(s)=\frac{K(\tau_1 s+1)(\tau_2^2 s^2+2\zeta_1\tau_2 s+1)\cdots(\tau_i s+1)}{s^{\gamma}(T_1 s+1)(T_2^2 s^2+2\zeta_2 T_2 s+1)\cdots(T_j s+1)}$$

其中：K为开环增益　γ为系统型别

特点：常数项为“1”

注意：型别以开环系统典型环节乘积形式来划分

最基本的典型环节如下：

（1）比例环节 K（$K>0$）。

（2）积分环节 $1/s$ 和微分环节 s。

（3）惯性环节$\frac{1}{Ts+1}$和一阶微分环节 $Ts+1$（$T>0$）。

（4）振荡环节$\frac{1}{s^2/\omega_n^2+\frac{2\zeta s}{\omega_n}+1}$和二阶微分环节 $s^2/\omega_n^2+\frac{2\zeta s}{\omega_n}+1(\omega_n>0,0<\zeta<1)$。

[例]单位反馈系统 $G(s)=\dfrac{k(2s+1)}{s(s+2)(3s+2)}$

其根轨迹增益为 $\underline{\quad \dfrac{2k}{3} \quad}$，开环增益为 $\underline{\quad \dfrac{k}{4} \quad}$，

型别γ 为 $\underline{\quad 1 \quad}$ 阶次为 $\underline{\quad 3 \quad}$。

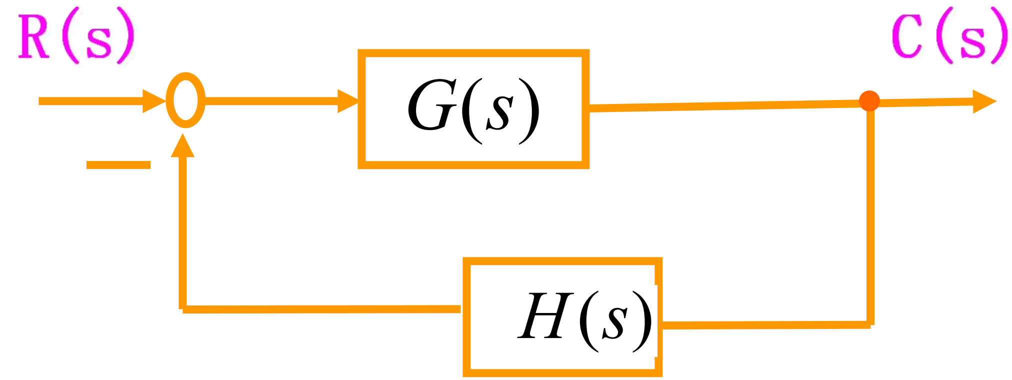
分析:

$$G(s)=\frac{k(2s+1)}{s(s+2)(3s+2)}=\frac{2k(s+1/2)}{3s(s+2)(s+2/3)}$$

$$=\frac{k(2s+1)}{2*2s(\frac{1}{2}s+1)(\frac{3}{2}s+1)}$$

三、输入r(t)作用下e_{ss}分析

方法1）终值定理法



$$E(s)=\frac{1}{H(s)}R(s)-C(s)=\frac{1}{H(s)}\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{H(s)}\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

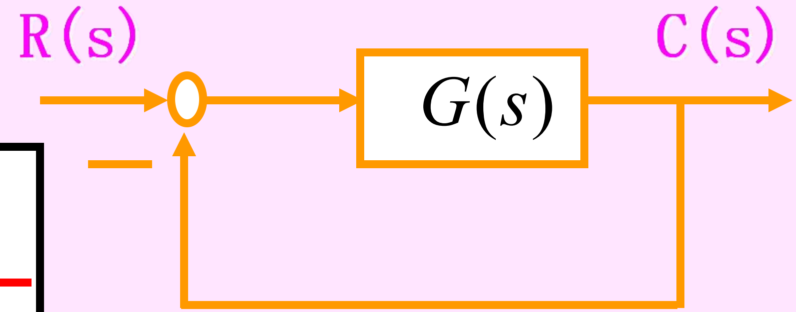
$$C(s)=\frac{R(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$\boxed{e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\frac{1}{\mathrm{H}(s)}\frac{R(s)}{1+\dfrac{K}{s^{v}}}}$$

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s^{v}}\frac{\prod_{i=1}^{m}(\tau_i s+1)}{\prod_{j=1}^{n}(T_j s+1)}$$

稳态误差与系统的开环增益、型别及输入有关

方法2）误差系数法



R(t)	误差系数	ess
$R_0 1(t)$	$k_p = \lim\limits_{s\to 0} G(s)H(s)$	$\dfrac{R_0}{1+k_p}$
$V_0 t$	$k_v = \lim\limits_{s\to 0} sG(s)H(s)$	$\dfrac{V_0}{k_v}$
$A_0 t^2/2$	$k_a = \lim\limits_{s\to 0} s^2 G(s)H(s)$	$\dfrac{A_0}{k_a}$

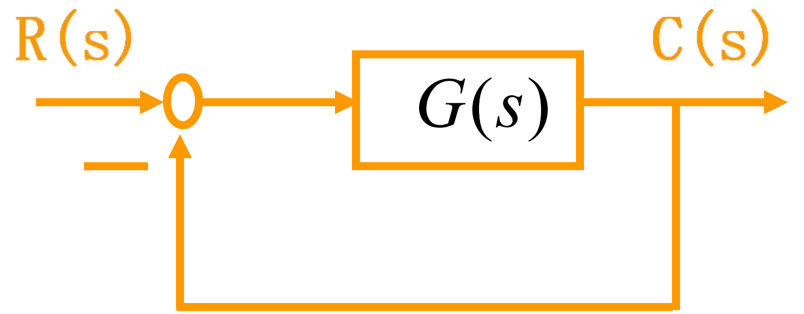
Kp: 位置误差系数

Kv：速度误差系数

Ka：加速度误差系数

[注意]　适用条件：1）单位反馈系统

2）输入信号为上面三种形式（或组合）



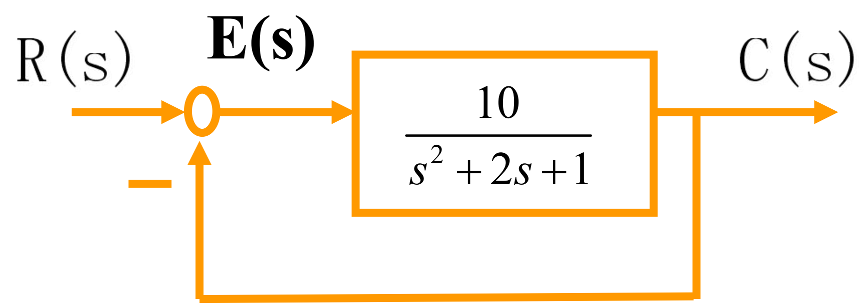
系统型别与稳态误差的关系表

系统型别	静态误差系数			稳态误差 e_{ss}		
	K_p	K_v	K_a	阶跃输入 $R\cdot 1(t)$	斜坡输入 Rt	加速度输入 $\frac{Rt^2}{2}$
0	K	0	0	$\frac{R}{1+K}$	∞	∞
Ⅰ	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$	∞
Ⅱ	∞	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$
Ⅲ	∞	∞	∞	0	0	0

系统型别与稳态误差的关系：

增加系统的型别，可减小稳态误差。

[例] 求$r(t)=5*1(t)$, $e_{ss}=?$



解：法1

$$E(s)=\frac{1}{1+G(s)}R(s)=\frac{1}{1+\frac{10}{s^2+2s+1}}\frac{5}{s}=\frac{s^2+2s+1}{s^2+2s+11}\frac{5}{s}$$

$$sE(s)=\frac{s^2+2s+1}{s^2+2s+11}*5$$

$$s_{1,2}=-1\pm j\sqrt{10}$$

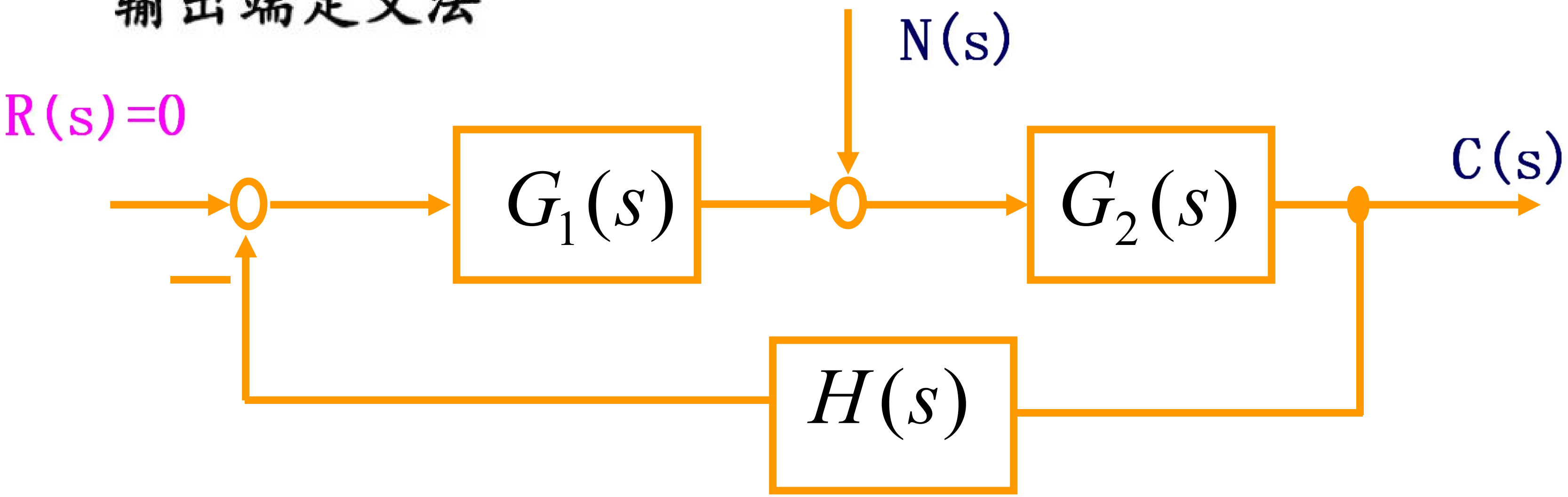
解析 $$e_{ss}=\lim_{s\to 0}sE(s)=\frac{5}{11}$$

法2

$$K_p=\lim_{s\to 0}G(s)=10 \qquad e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}=\frac{5}{11}$$

四、扰动作用下ess分析

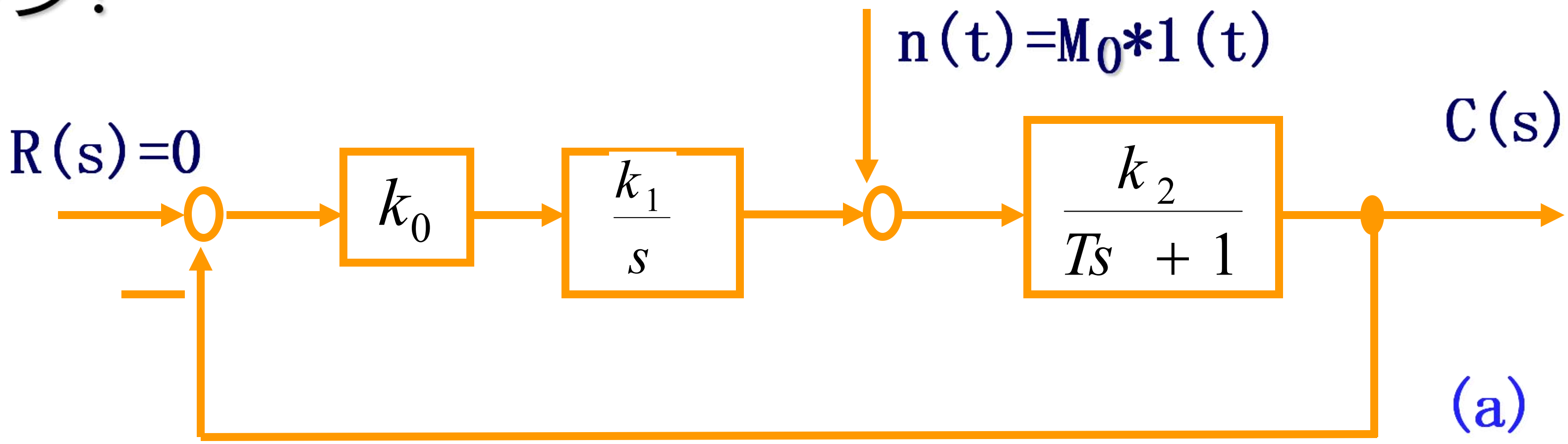
输出端定义法



$$E(s) = 0 - C(s) = -\frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H} N(s)$$

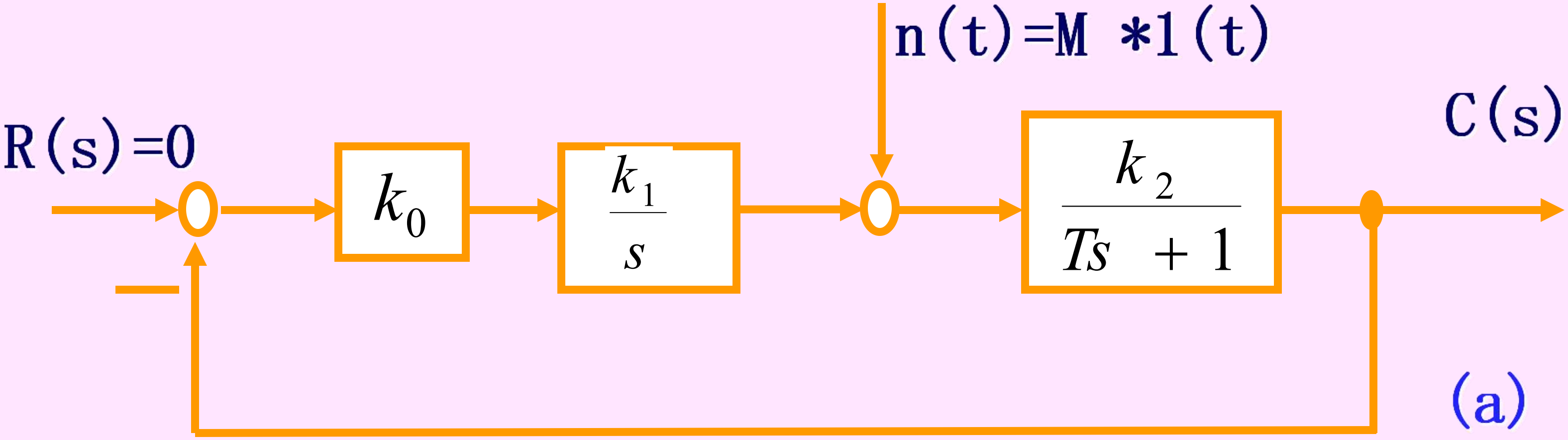
$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = -\lim_{s\to 0} s\frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H} N(s)$$

[例]两系统具有相同的开环传递函数，且扰动信号也相同，仅扰动的作用点不同，求其ess；系统（c）的ess为多少?



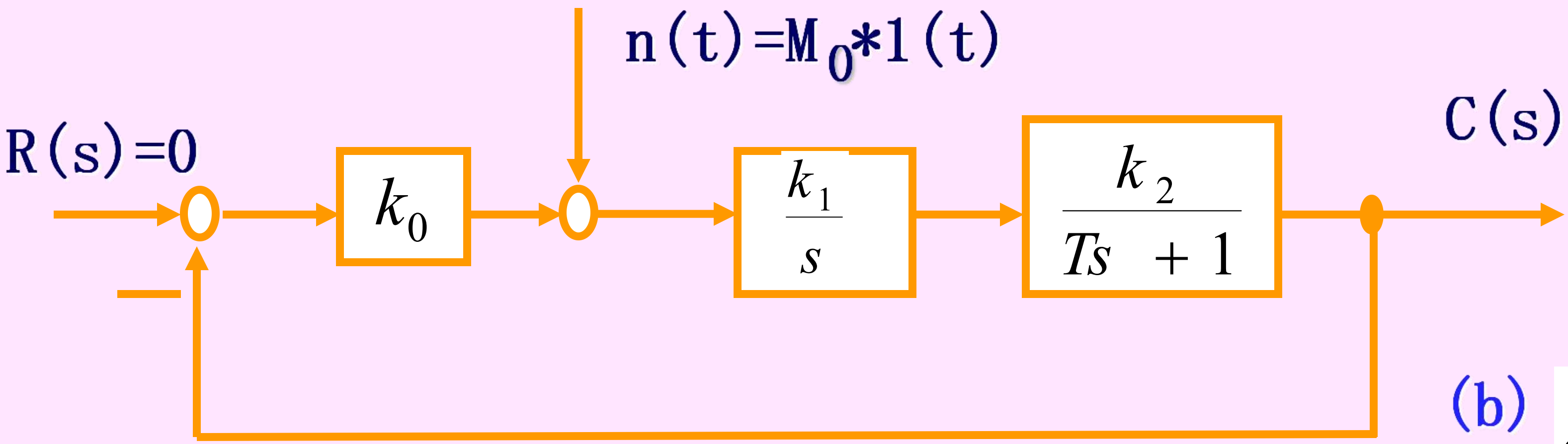
$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}sE(s)=-\lim_{s\to 0}sC(s)=-\lim_{s\to 0}s\frac{\dfrac{k_2}{Ts+1}}{1+\dfrac{k_1k_2}{s(Ts+1)}}\frac{M_0}{s}$$

$$=0$$



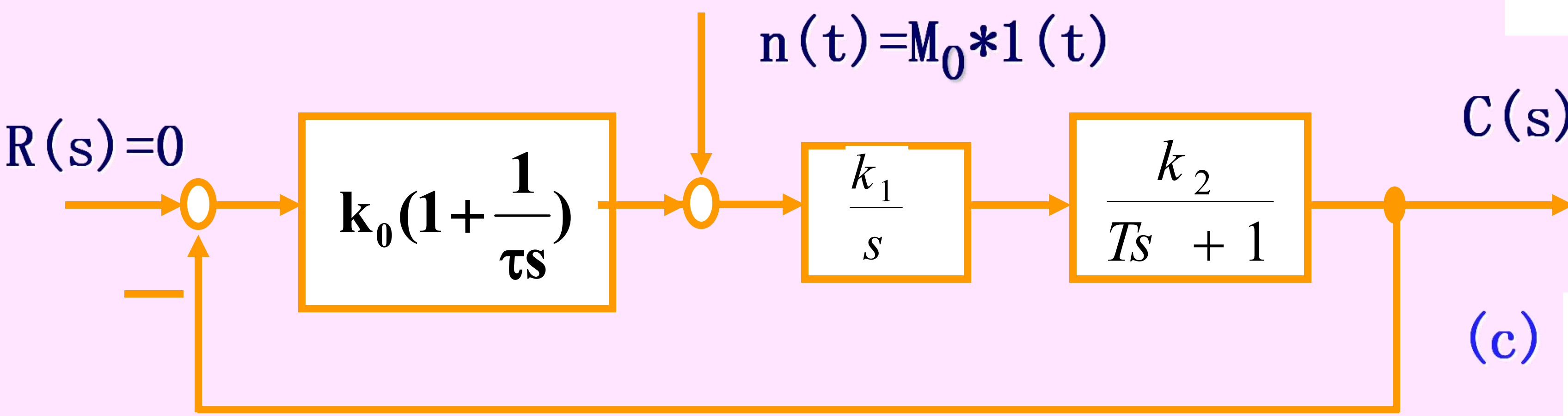
(a)

$$e_{ss}=0$$



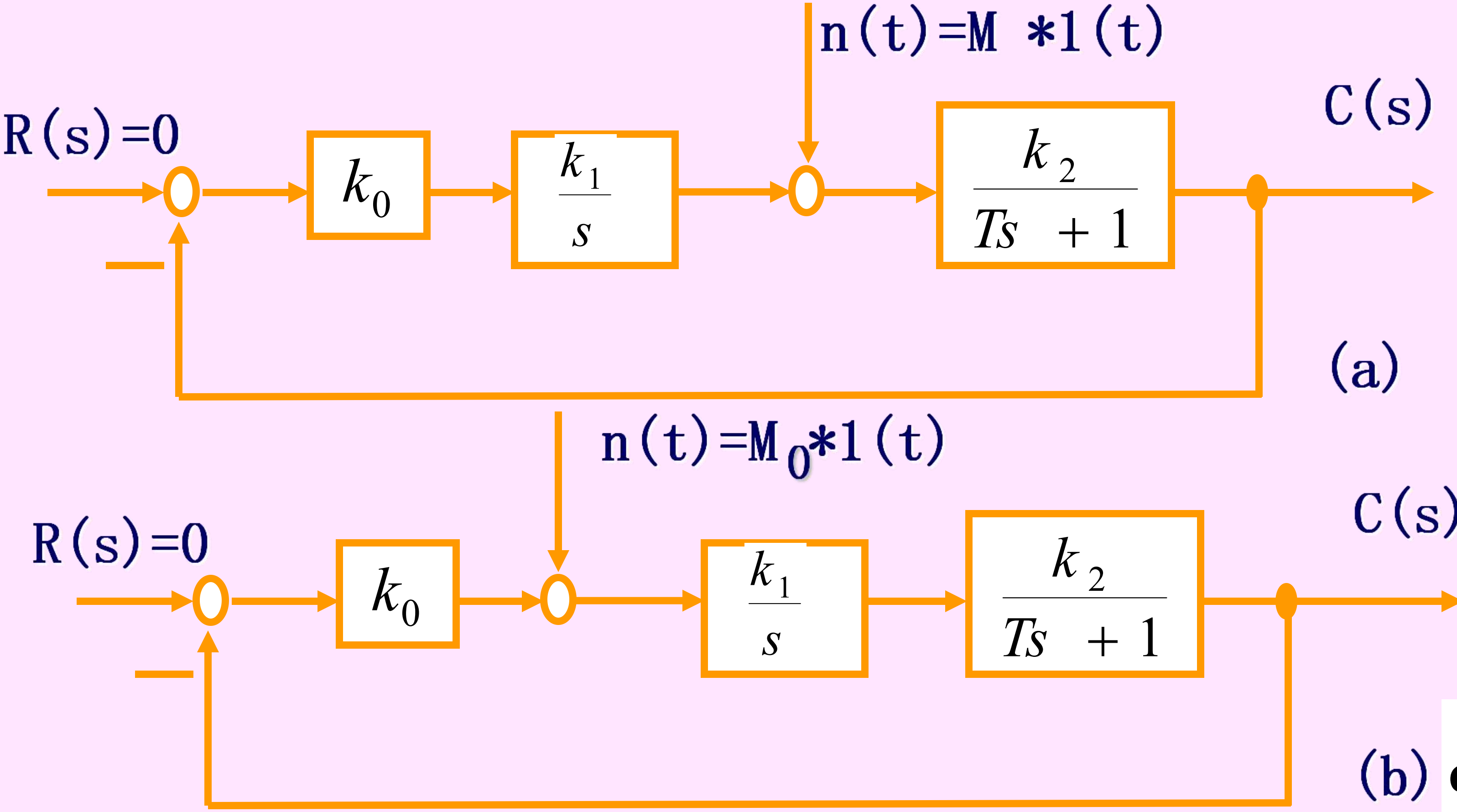
(b)

$$e_{ss}=-\frac{M_0}{K_0}$$



(c)

$$e_{ss}=0$$

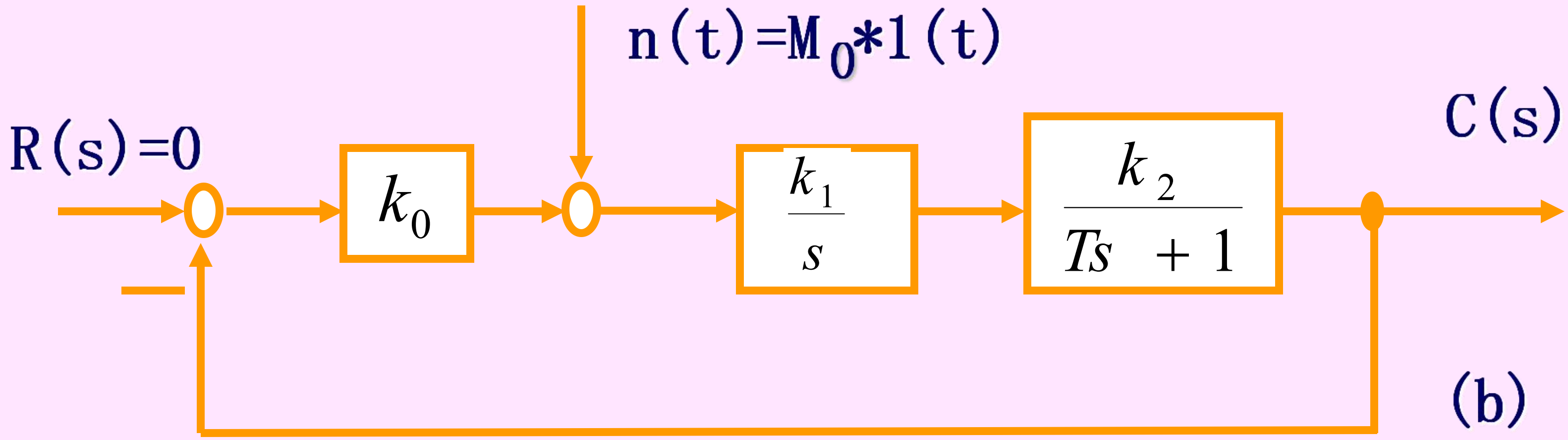


(a) $\mathbf{e_{ss}=0}$

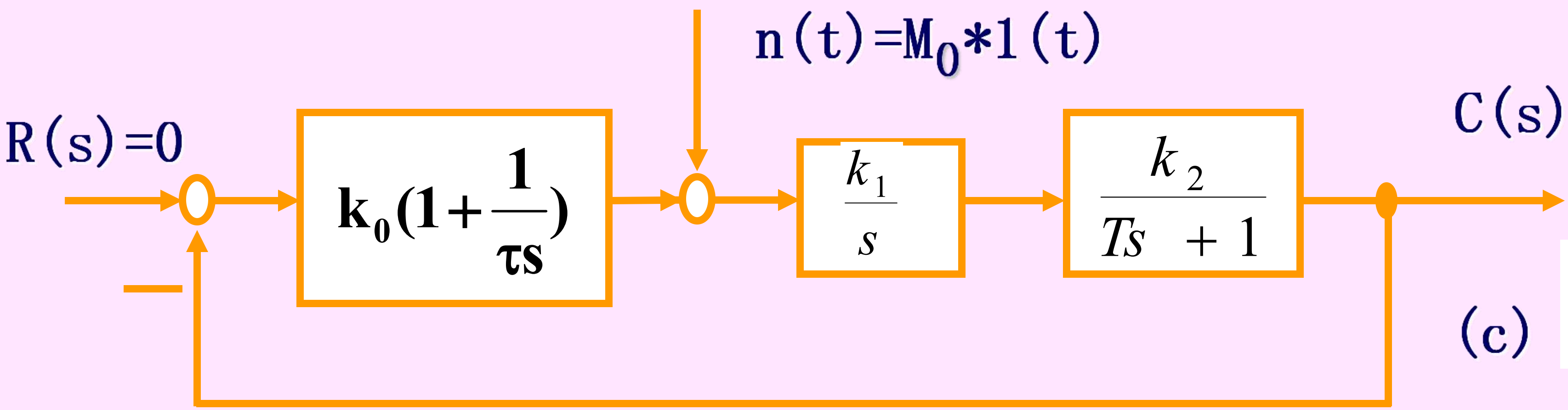
(b) $\mathbf{e_{ss}=-\frac{M_0}{K_0}}$

小结：1）比较a)和b)两系统具有相同开环传递函数和扰动信号，

但扰动点作用不同，稳态误差不同



$$e_{ss}=-\frac{M_0}{K_0}$$



$$e_{ss}=0$$

2）比较b） c)扰动作用下的ess与扰动点前的前向通道传递函数中积分环节的个数和增益有关，与扰动点后的前向通道传递函数积分环节的个数和增益无关。

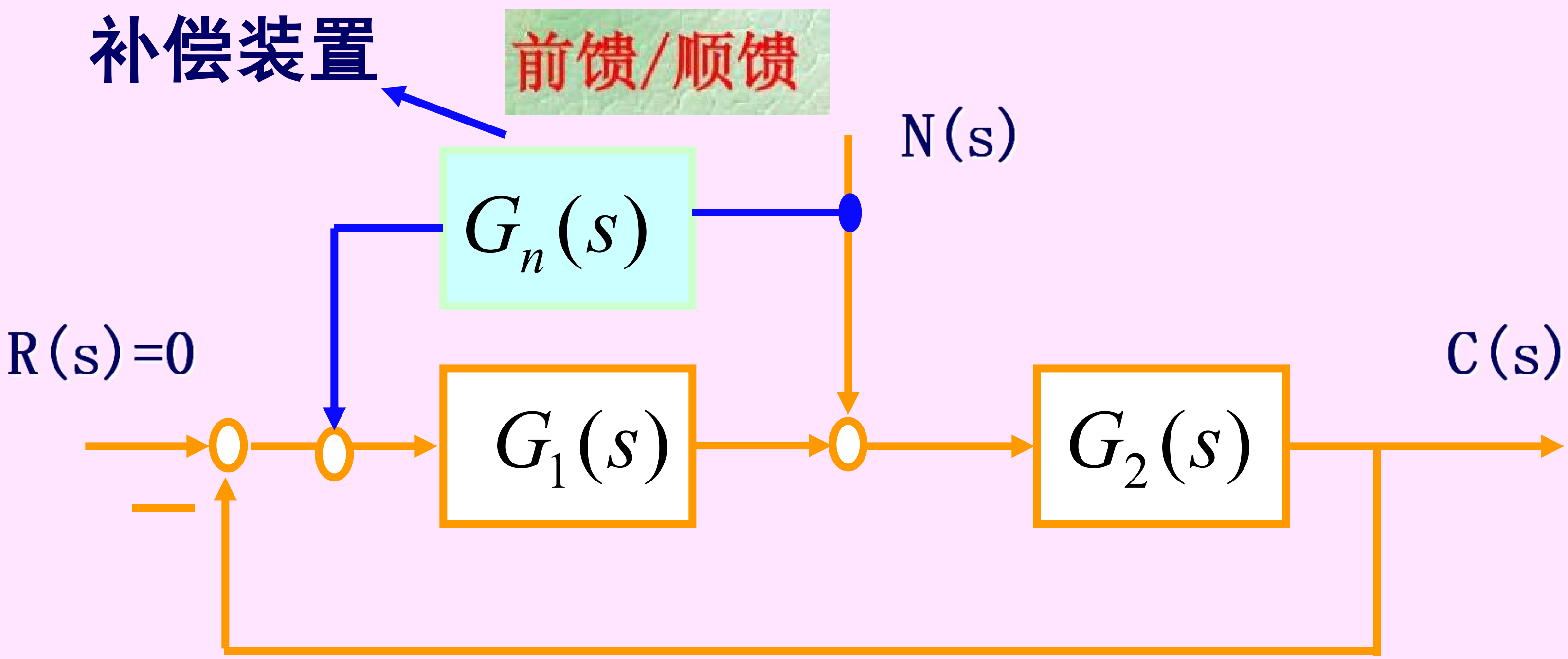
五、减小和消除稳态误差方法
— 复合控制方法

复合控制：顺馈控制 + 反馈控制

定义：使系统$E(s)=0$的补偿为全补偿

使系统$e_{ss}=0$的补偿为稳态全补偿

1 按扰动补偿的复合控制

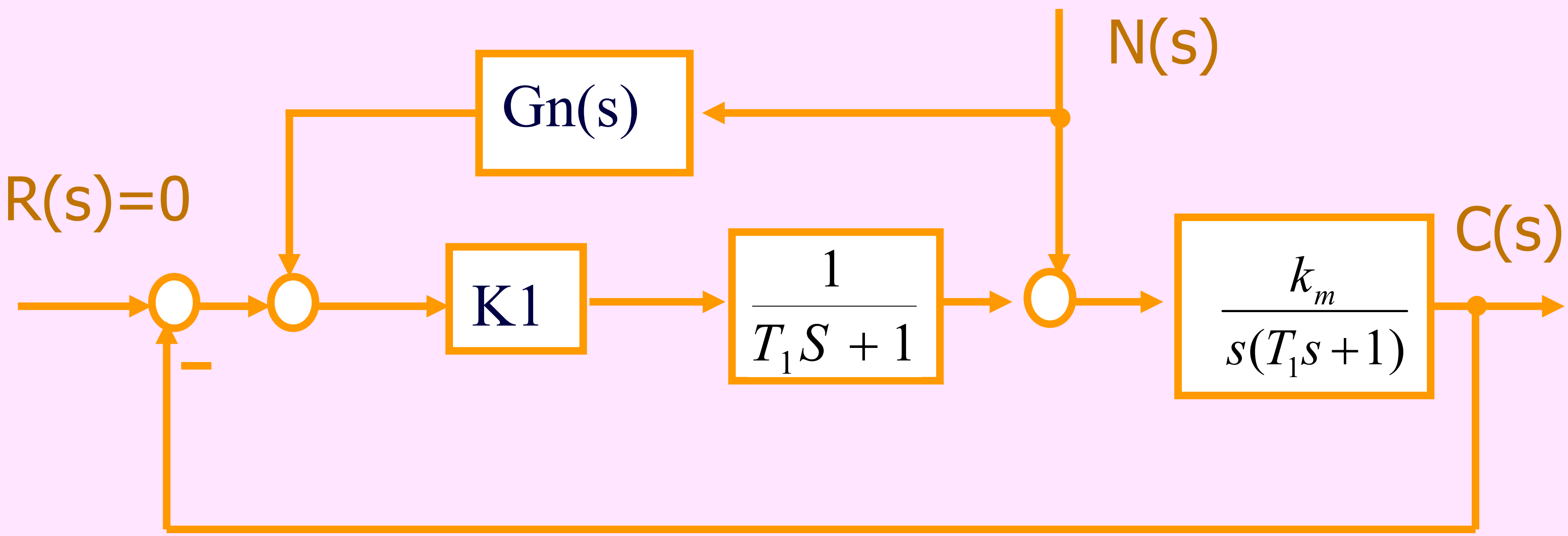


$$C(s)=\frac{G_2(1+G_1G_n)}{1+G_1G_2}N(s)$$

$$E(s)=0-C(s)=0$$

$$G_n(s)=-\frac{1}{G_1(s)}$$

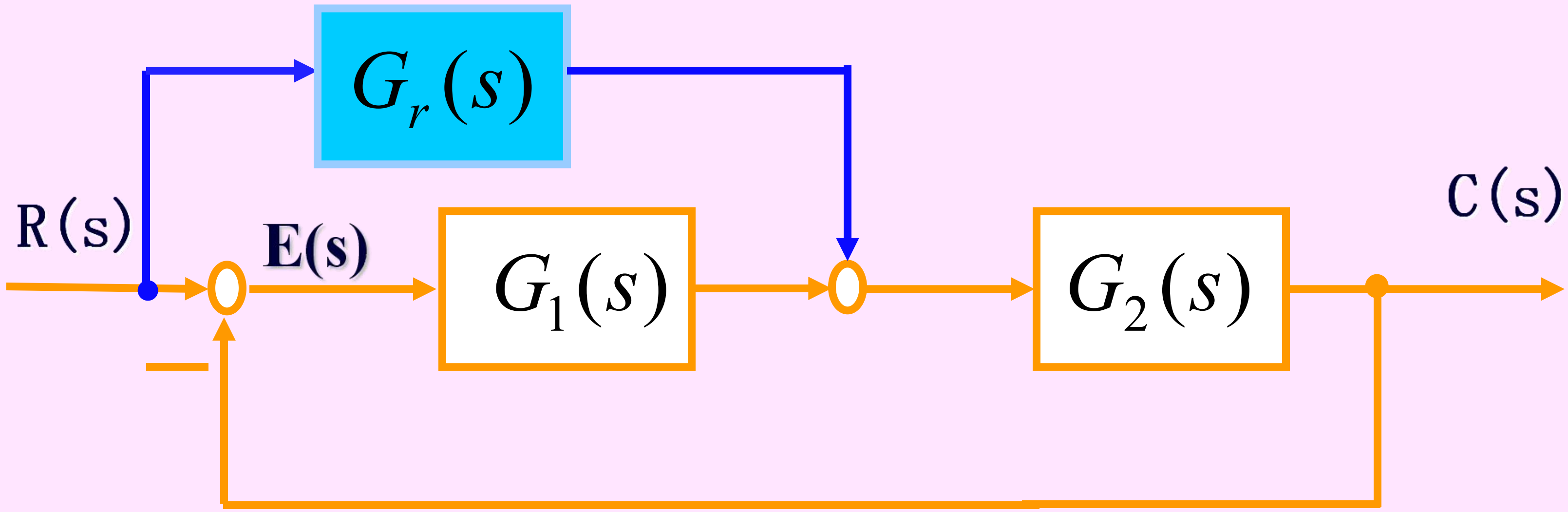
［例］ 图示位置随动系统，N(s)为负载扰动力矩，要求选择补偿装置Gn(s)，使<u>系统输出不受扰动影响</u>，若使ess =0，　Gn(s)=？



$$\text{使 } E(s)=0, \text{则 } G_n(s)=-\frac{1}{G_1(s)}=-\frac{1}{k_1/(T_1s+1)}$$

2 按输入补偿的复合控制

目的：通过附加补偿装置Gr(s),使系统在输入信号作用下的误差为零。

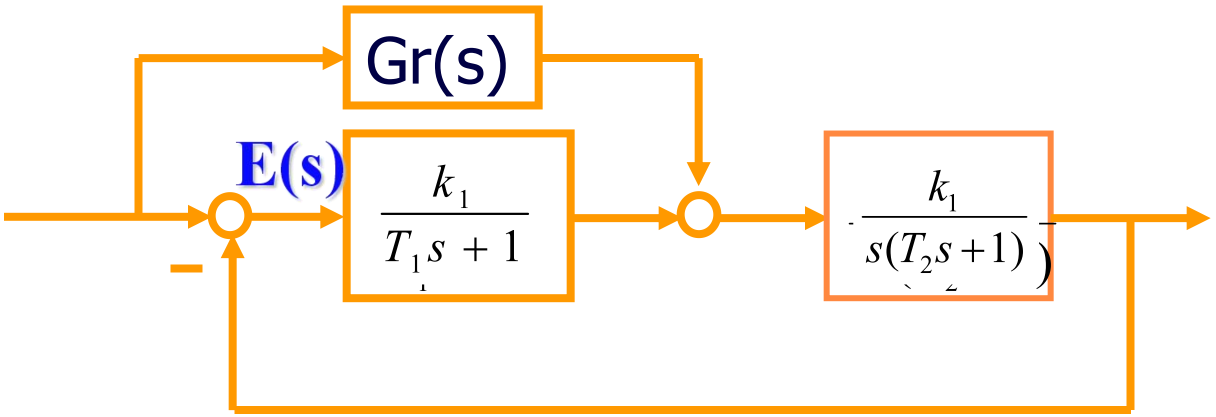


$$E(s)=R(s)-C(s)=\frac{1-G_r(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}R(s)=0$$

$$G_r(s)=\frac{1}{G_2(s)}$$

按输入补偿的复合控制实例

[例] 单位反馈系统，r(t)=V_0t，要求采用按输入补偿的复合控制，使系统ess=0时的补偿装置Gr(s)=?



误差e(t)=0

$$G_r(s) = \frac{s(T_1 s + 1)}{k_1}$$

ess=0

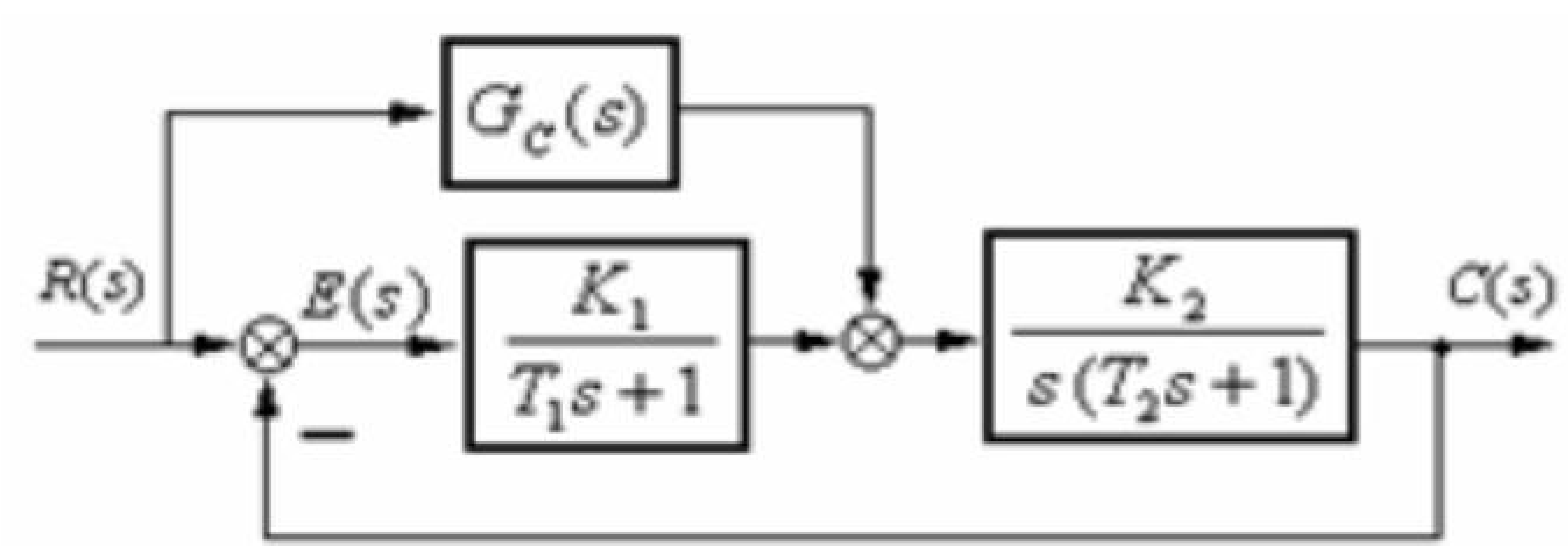
$$G_r(s) = \frac{s}{k_1}$$

[例] 复合控制系统如图所示，

图中K1、K2、T1、T2是大于0的常数

(1)确定当闭环系统稳定时，参数K1、K2、T1、T2应满足的条件；

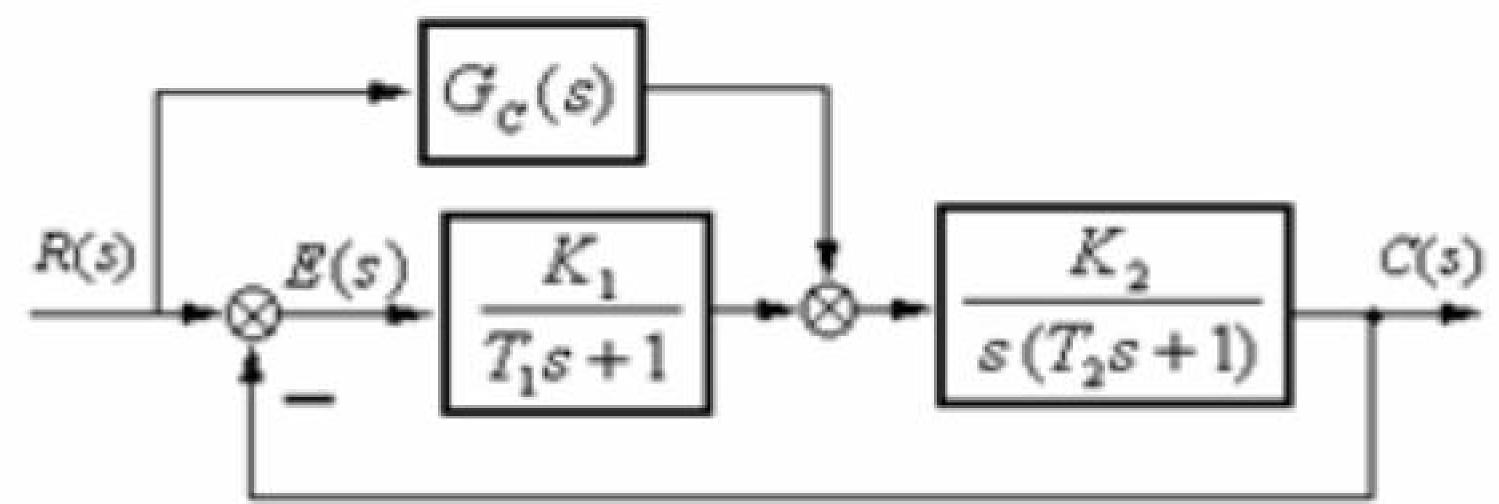
(2)当输入$r(t)=V_0t$时，选择校正装置Gc(s)，使得系统无稳态误差（误差定义为R(s)-C(s))



［例］ 复合控制系统如图所示，

图中K1、K2、T1、T2是大于0的常数

(1) 确定当闭环系统稳定时，参数K1、K2、T1、T2应满足的条件；



解 (1) 系统误差传递函数为

$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1-\dfrac{K_2}{s(T_2 s+1)}G_c(s)}{1+\dfrac{K_1 K_2}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)}}=\frac{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)-K_2 G_c(s)(T_1 s+1)}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)+K_1 K_2}$$

解 (1) 系统误差传递函数为

$$\Phi_e(s)=\frac{E(s)}{R(s)}=\frac{1-\dfrac{K_2}{s(T_2s+1)}G_c(s)}{1+\dfrac{K_1K_2}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}}=\frac{s(T_1s+1)(T_2s+1)-K_2G_c(s)(T_1s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K_1K_2}$$

$$D(s)=T_1T_2s^3+(T_1+T_2)s^2+s+K_1K_2$$

$$\begin{array}{c|cc}
s^3 & T_1T_2 & 1 \\
s^2 & T_1+T_2 & K_1K_2 \\
s^1 & \dfrac{T_1+T_2-T_1T_2K_1K_2}{T_1+T_2} & \\
s^0 & K_1K_2 &
\end{array}$$

因 K_1、K_2、T_1、T_2均大于 0,所以只要

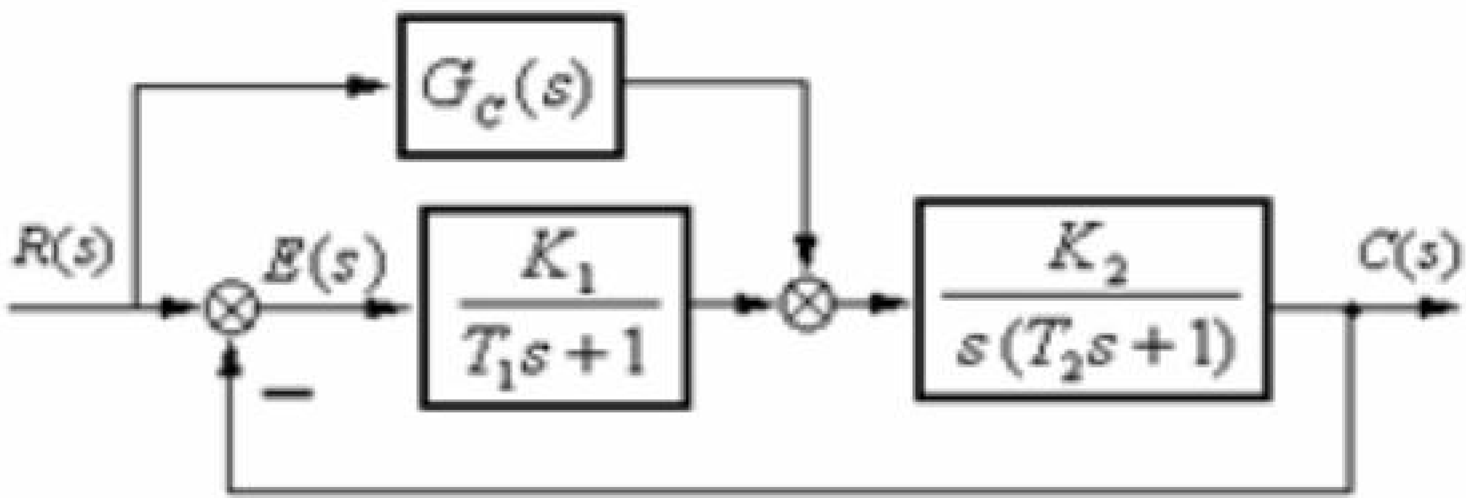
$$\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}>K_1K_2$$

即可满足稳定条件。

［例］ 复合控制系统如图所示，

图中K1、K2、T1、T2是大于0的常数

(2)当输入$r(t)=V_0t$时，选择校正装置Gc(s)，使得系统无稳态误差（误差定义为R(s)-C(s))



(2) 在斜坡输入信号作用下其稳态误差为

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\Phi_e(s)R(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{s(T_1s+1)(T_2s+1)-K_2G_c(s)(T_1s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K_1K_2}\frac{V_0}{s^2}=$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{V_0}{K_1K_2}\left[1-K_2\frac{G_c(s)}{s}\right]$$

（2）在斜坡输入信号作用下其稳态误差为

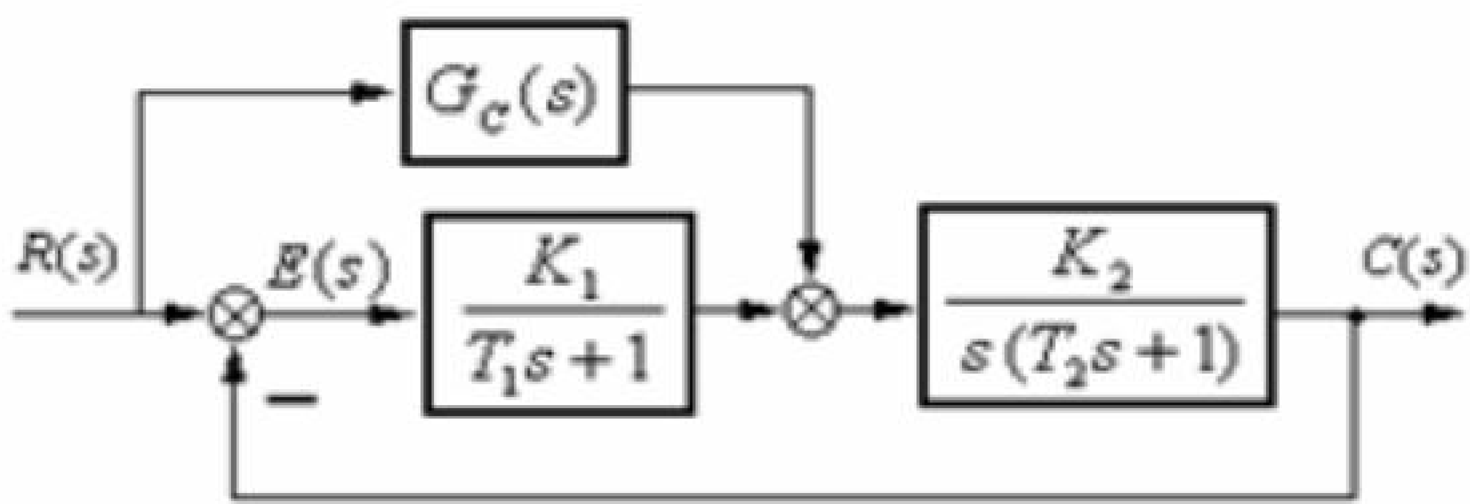
$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} s\Phi_e(s)R(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{s(T_1s+1)(T_2s+1)-K_2G_c(s)(T_1s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)+K_1K_2}\frac{V_0}{s^2}=$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{V_0}{K_1K_2}[1-K_2\frac{G_c(s)}{s}]$$

令 $e_{ss}=0$，得

$$G_c(s)=\frac{s}{K_2}$$

由此可见，校正装置 $G_c(s)=\frac{s}{K_2}$ 时，可保证无稳态误差。



小结：

一、误差和稳态误差

1. 误差定义　2. 计算方法

二、开环传递函数的两种形式

三、输入r(t)作用下ess分析

四、扰动作用下ess分析

五、减小和消除稳态误差方法

—复合控制方法