

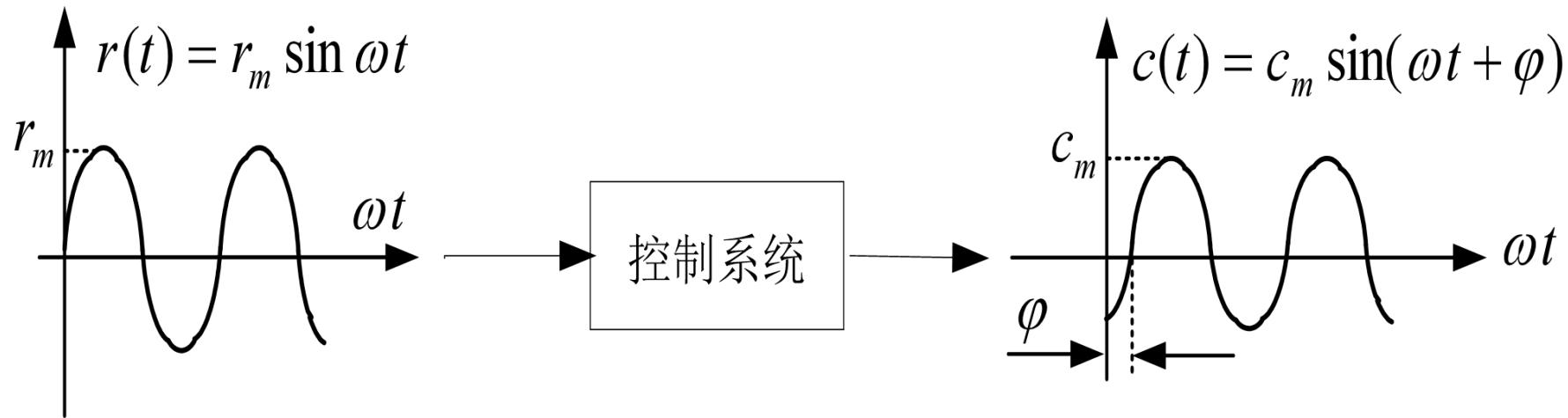
5-1 频率特性

线性定常系统广泛使用三种经典方法

分析方法	数学模型	与时间响应关系
时域分析法	闭环传递函数	$r(t) \xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{求 } c(t)$
根轨迹法	开环传递函数	$\xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{根轨迹图}$ $\xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{分析与 } c(t) \text{ 的关系}$
频率响应法	开环频率特性	$\xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{开环频率特性图}$ $\xrightarrow{\hspace{1cm}} \text{分析与 } c(t) \text{ 的关系}$

§ 5-1 频率特性

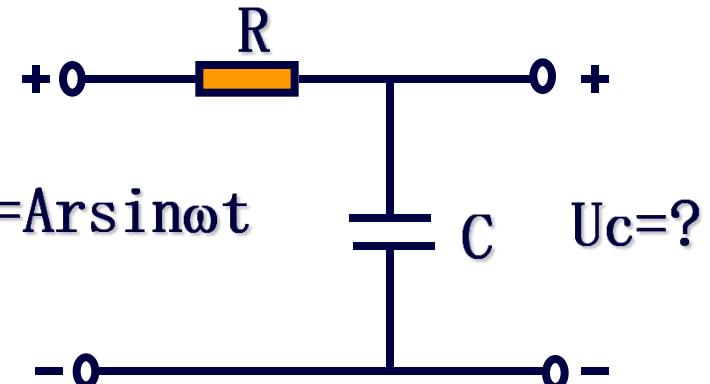
一、频率特性的定义



频率特性

反映稳态输出与输入正弦信号的幅值与相角的关系。

[例] 求图示系统的输出 $U_c(t) = ?$



解：微分方程

$$T \frac{dU_c}{dt} + U_c = U_r \quad (T = RC)$$

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

设 $u_r = A_r \sin \omega t$

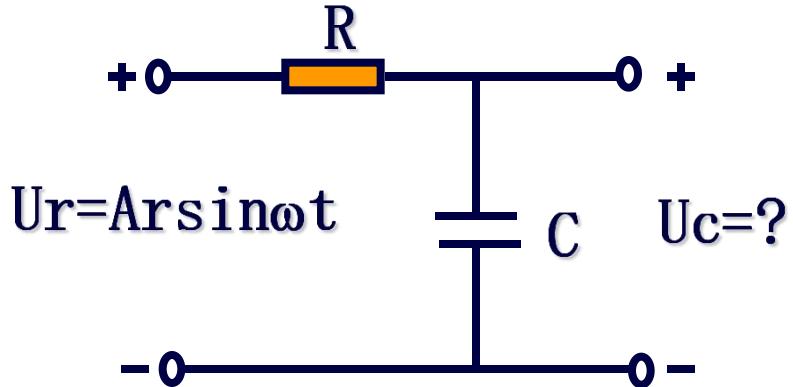
$$U_r(s) = \frac{A_r}{s^2 + \omega^2}$$

瞬态分量

$$u_c(t) = \frac{A_r \omega T}{1 + \omega^2 T^2} e^{-t/T} + \frac{A_r}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \arctg \omega T)$$

稳态分量

[例]求图示系统的输出 $U_C(t) = ?$



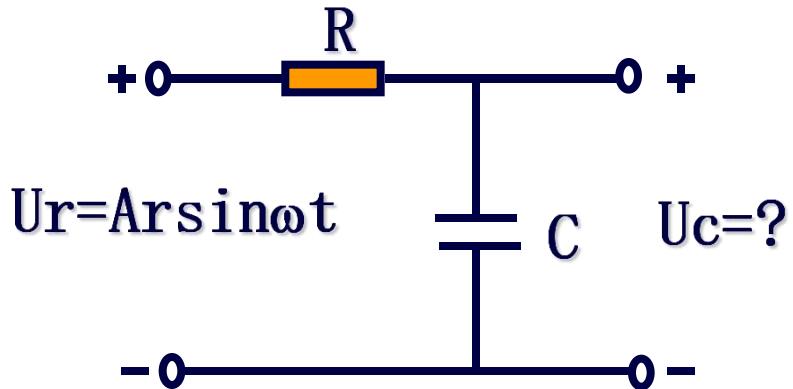
$$u_c(t) = \frac{A_r \omega T}{1 + \omega^2 T^2} e^{-t/T} + \frac{A_r}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \arctg \omega T)$$

$$u_{c_{ss}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \frac{A_r}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \arctan \omega T)$$

$\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$ 称为 RC 网络的 **幅频特性**

$-\arctan \omega T$ 称为 RC 网络的 **相频特性**

[例]求图示系统的输出 $U_C(t) = ?$



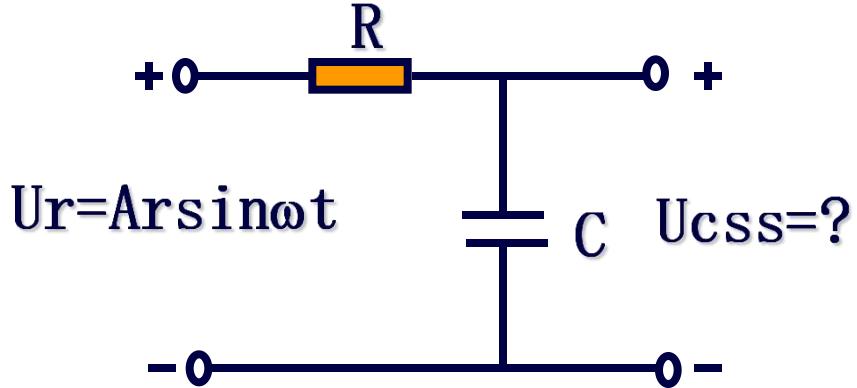
$\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$ 称为 RC 网络的幅频特性

$-\arctan \omega T$ 称为 RC 网络的相频特性

因为 $\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} e^{-j\arctan \omega T} = \frac{1}{1 + j\omega T} = \frac{1}{1 + Ts} \Big|_{s=j\omega}$

所以 $\frac{1}{1 + j\omega T}$ 称为频率特性

[例]求图示系统的 $U_{c_{ss}}(t) = ?$



$$u_{c_{ss}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \frac{A_r}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \arctan \omega T)$$
$$= A_c \sin(\omega t + \phi_c)$$

定义:

幅频特性

$$A(\omega) = \frac{A_c}{A_r} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

稳态输出振幅

输入信号振幅

相频特性

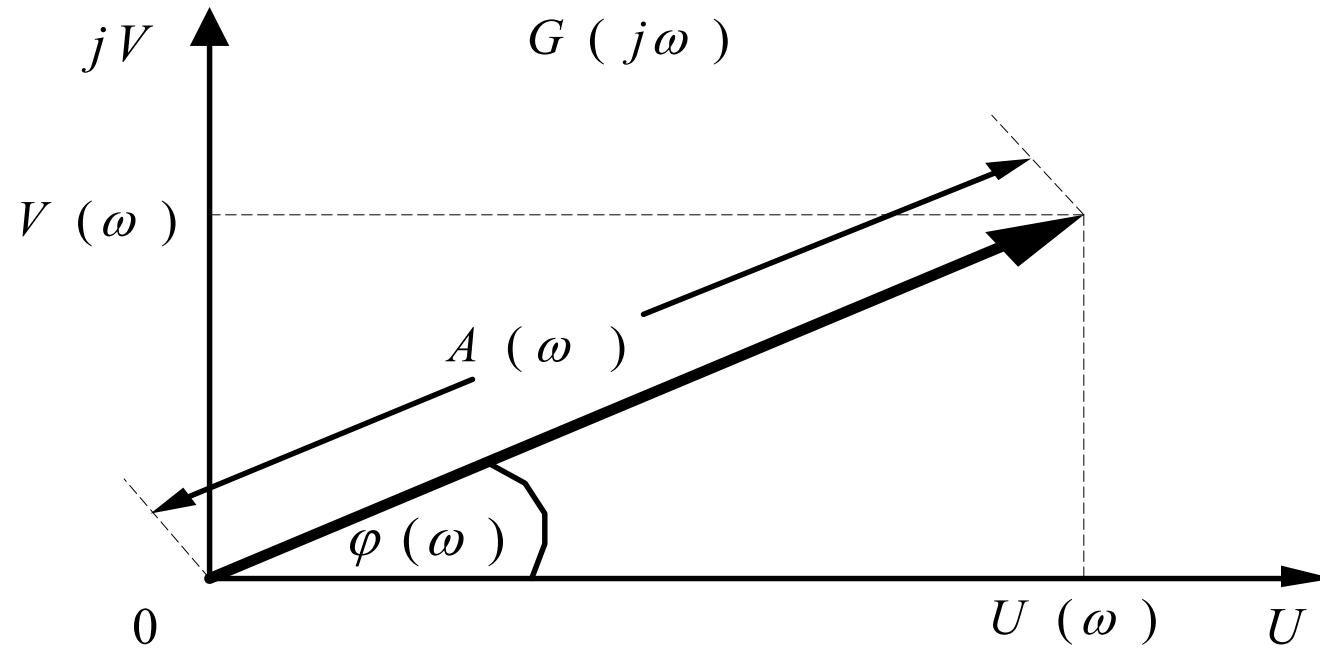
稳态输出相角

$$\varphi(\omega) = \varphi_c - \varphi_r = -\operatorname{arctg} \omega T$$

输入信号相角

频率特性

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$



$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega)$$

定义：

幅频特性

$$A(\omega) = \frac{A_c}{A_r} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}}$$

输入信号振幅

相频特性

$$\varphi(\omega) = \varphi_c - \varphi_r = -\operatorname{arctg} \omega T$$

稳态输出相角

频率特性

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

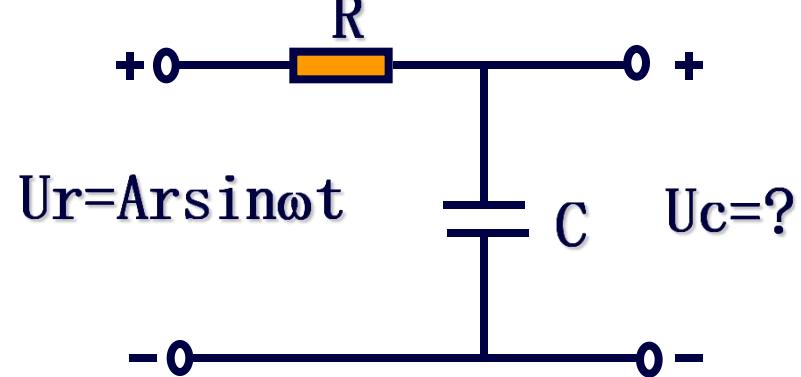
物理意义：

频率特性表示系统对不同频率正弦信号的“跟踪”能力

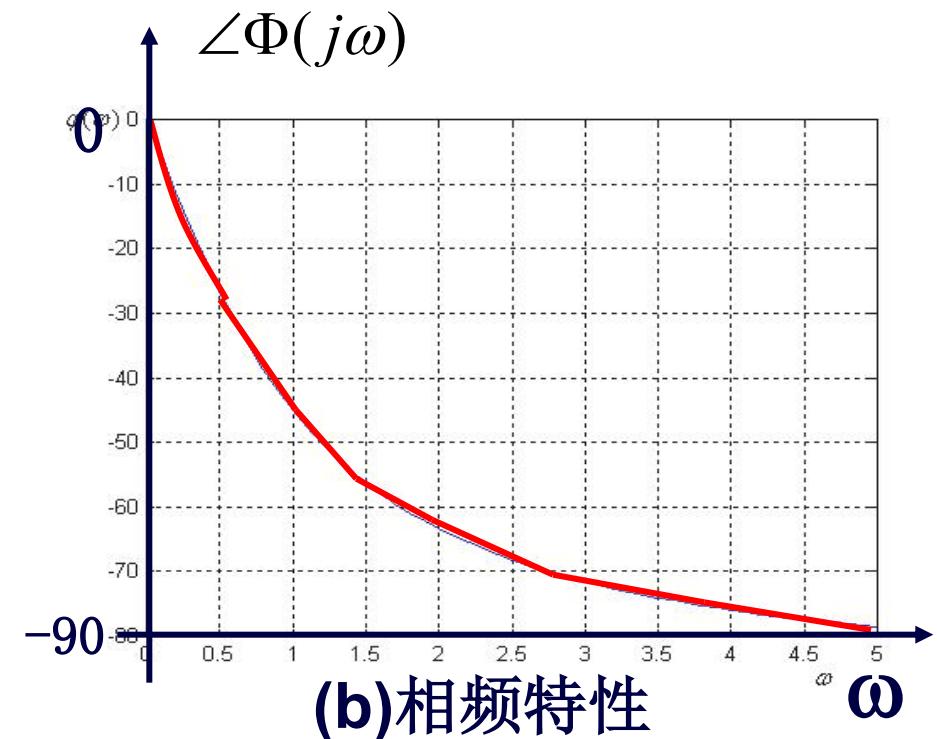
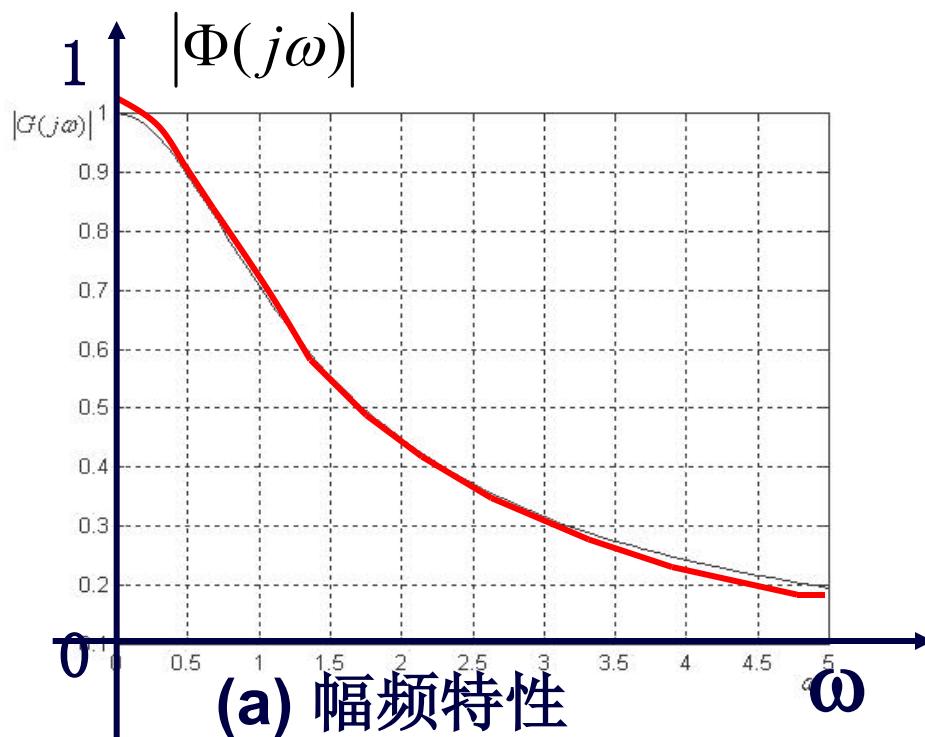
重要应用：频率特性概念求正弦信号作用下的e_{ss}和c_{ss}

[例]

$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \Phi(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$



$$u_{c_{ss}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \frac{Ar}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \sin(\omega t - \arctan \omega T) = A_r |\Phi(j\omega)| \sin[\omega t + \angle \Phi(j\omega)]$$

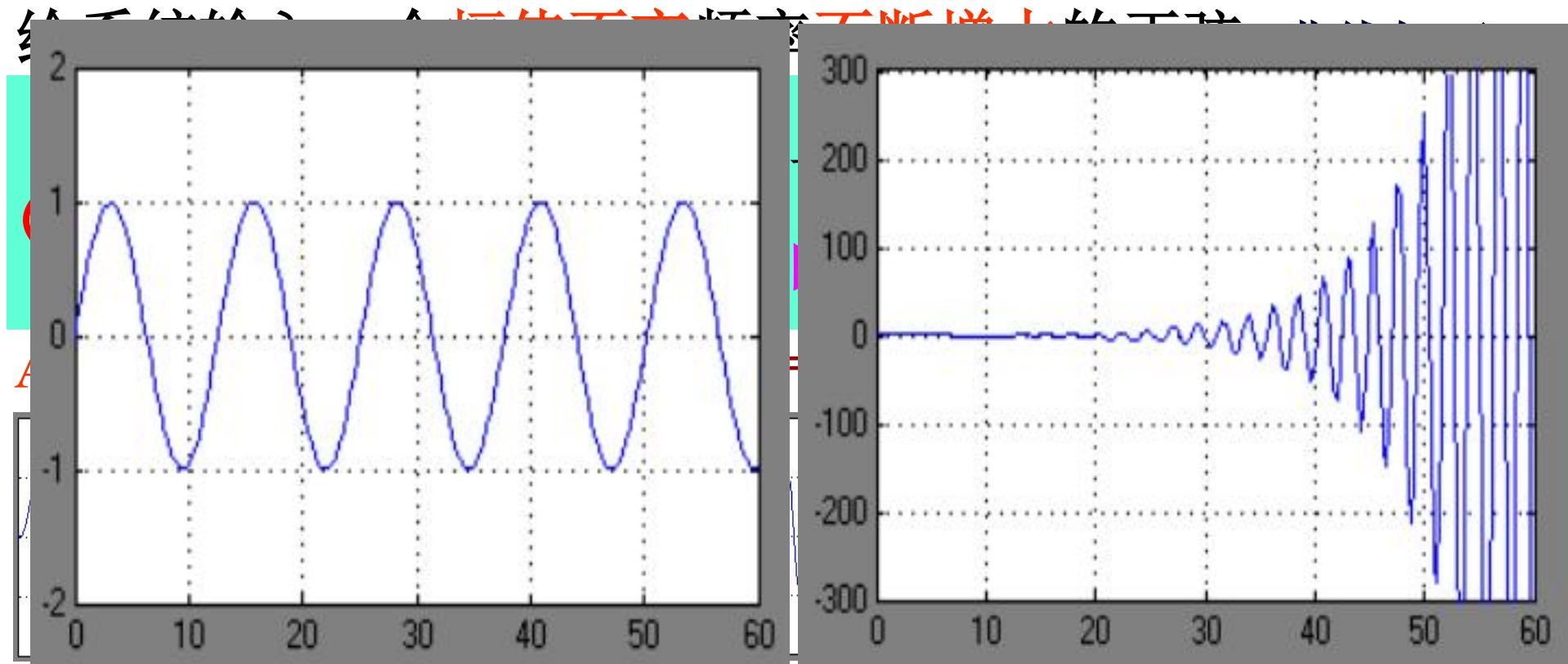
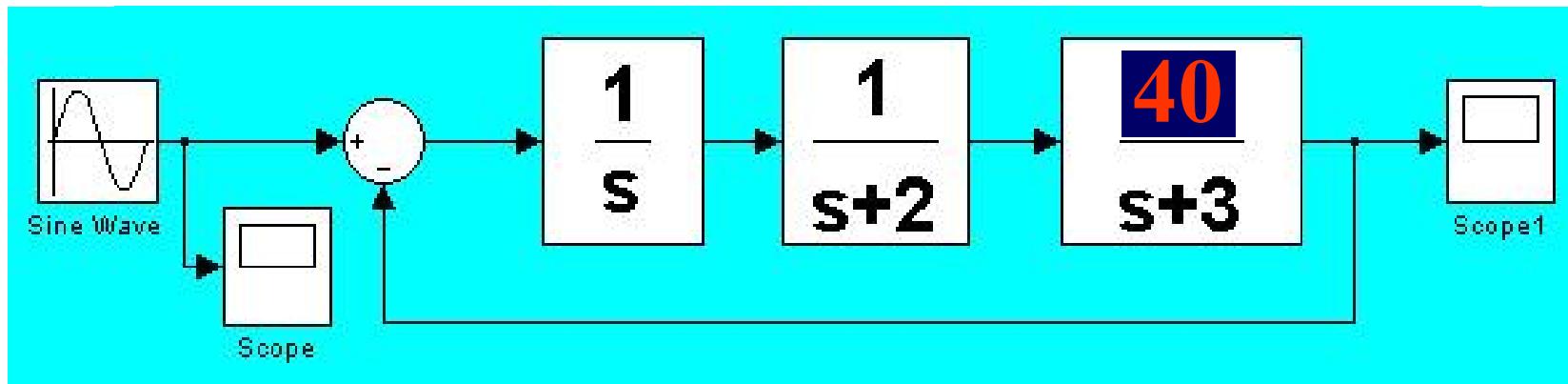


频率特性表示系统对不同频率正弦信号的“跟踪”能力

频率特性的概念

不

设系统结构如图，由劳斯判据知系统稳定。

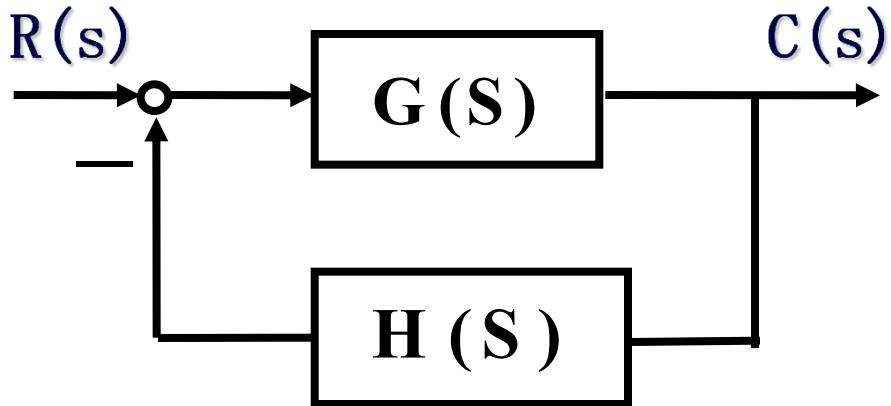


频率特性的重要应用

已知：对于稳定的系统

$$r(t) = A \sin(\omega t + \varphi_r)$$

求： $C_{ss}=?$



解： $C_{ss} = A_c * \sin(\omega t + \varphi_c)$

$$= A(\omega) * A \sin[\omega t + \varphi(\omega) + \varphi_r]$$

$$= |\phi_{cr}(j\omega)| A_r \sin(\omega t + \angle \phi_{cr}(j\omega) + \varphi_r)$$

其中： $A(\omega) = \frac{A_c}{A_r} = |\Phi_{cr}(j\omega)|$

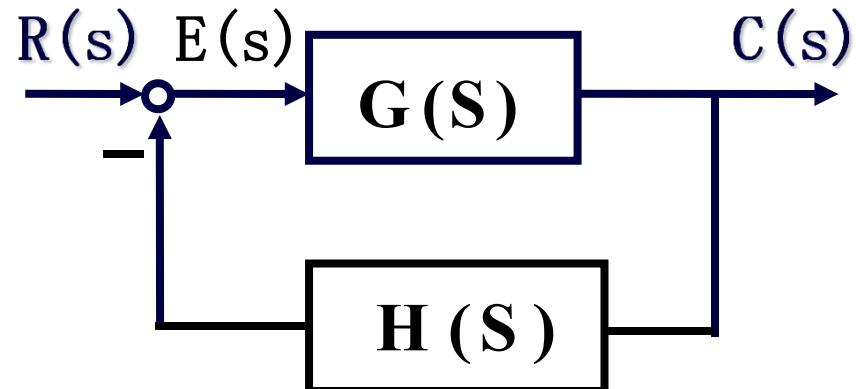
$$\varphi(\omega) = \varphi_c - \varphi_r = \angle \Phi_{cr}(j\omega)$$

频率特性的应用

已知：对于稳定的系统

$$r(t) = A_r \sin(\omega t + \varphi_r)$$

求：ess=?



解：ess=A_e sin(ωt+φ_e)

$$= |\Phi_{er}(j\omega)| A_r \sin[\omega t + \varphi_r + \angle \Phi_{er}(j\omega)]$$

其中：

$$A(\omega) = \frac{A_e}{A_r} = |\Phi_{er}(j\omega)|$$

$$\varphi(\omega) = \varphi_e - \varphi_r = \angle \Phi_{er}(j\omega)$$

[例] 单位反馈系统开环传递函数 $G(s) = \frac{1}{s+1}$
 求 $r(t) = \sin 2t$ 的作用下稳态输出 c_{ss} 和稳态误差 e_{ss} 。

解: $\Phi_{cr}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{1}{s + 2}$

$$\Phi_{cr}(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 2} = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 4}} \angle -\arctan \omega / 2$$

$$c_{ss} = |\Phi_{cr}(j\omega)| A_r \sin[\omega t + \varphi_r + \angle \Phi_{cr}(j\omega)]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} \sin(2t - 45^\circ)$$

[例] 单位反馈系统开环传递函数 $G(s) = \frac{1}{s+1}$
 求 $r(t) = \sin 2t$ 的作用下稳态输出 c_{ss} 和稳态误差 e_{ss} 。

解：

$$\Phi_{er}(s) = \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{s + 1}{s + 2}$$

$$\Phi_{er}(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{j\omega + 2} = \frac{\sqrt{\omega^2 + 1}}{\sqrt{\omega^2 + 4}} \angle \arctan \omega - \arctan \omega / 2$$

$$e_{ss} = |\Phi_{er}(j\omega)| A_r \sin[\omega t + \varphi_r + \angle \Phi_{er}(j\omega)]$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{4} \sin(2t - \arctan 1/3)$$

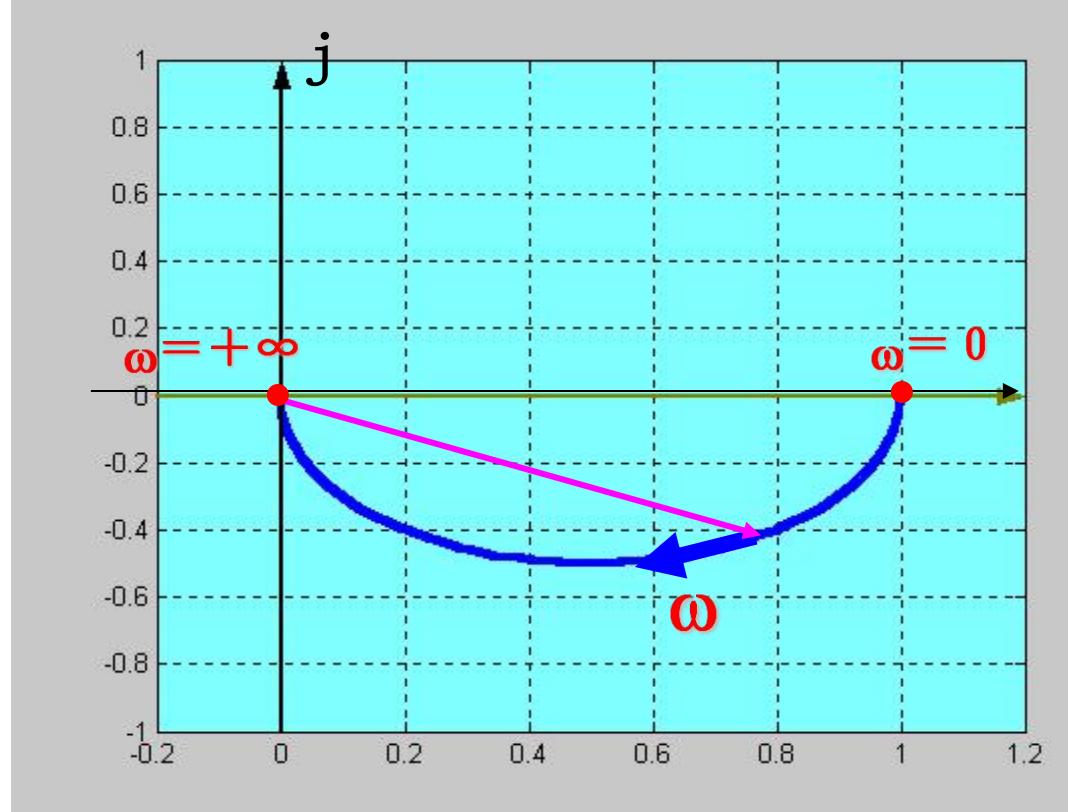
二、图示法

1. 幅相曲线（极坐标图，奈奎斯特图）

设系统频率特性

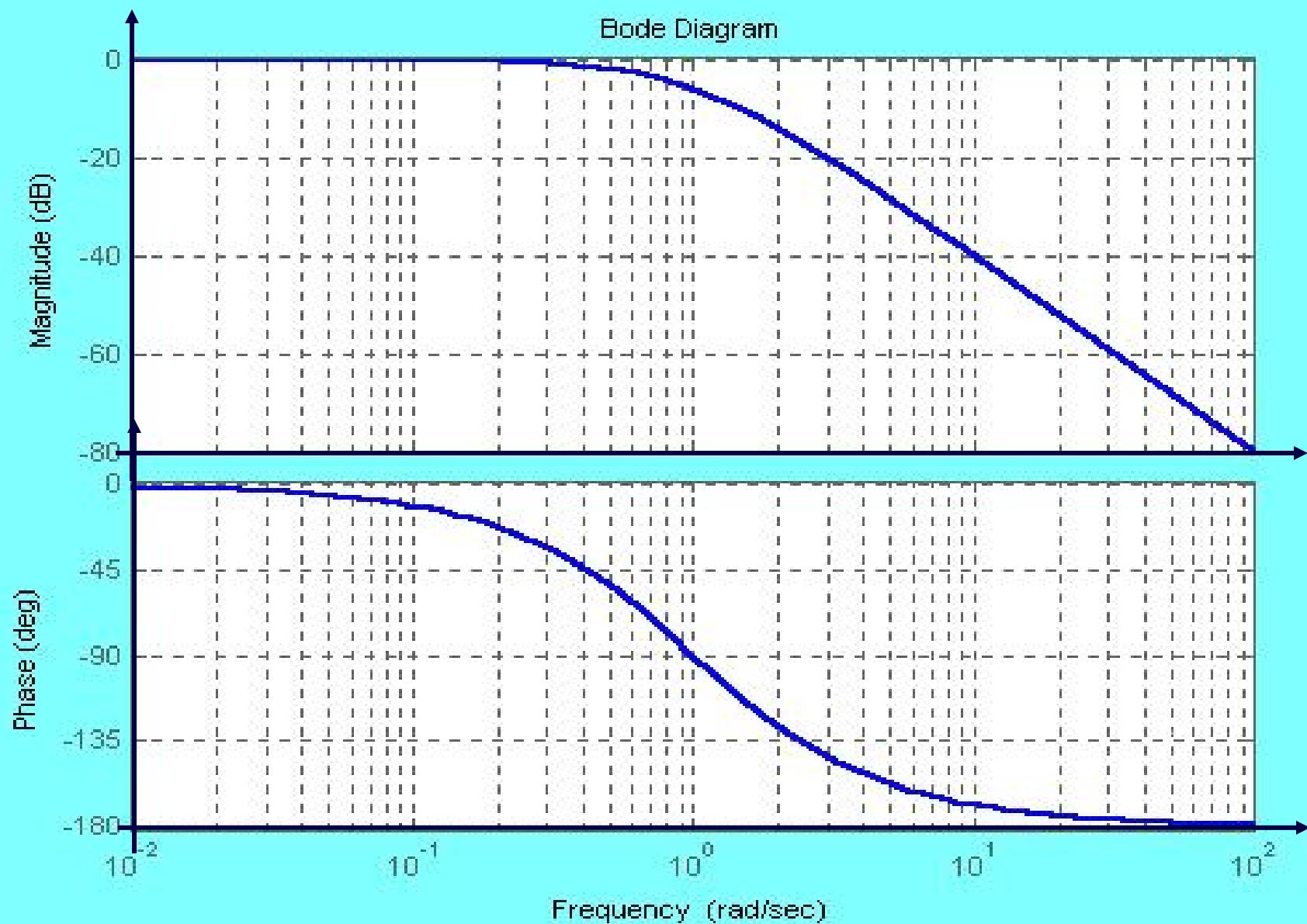
$$\begin{aligned} G(j\omega) &= A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} \\ &= \text{Re}G(j\omega) + j\text{Im}G(j\omega) \end{aligned}$$

幅相曲线



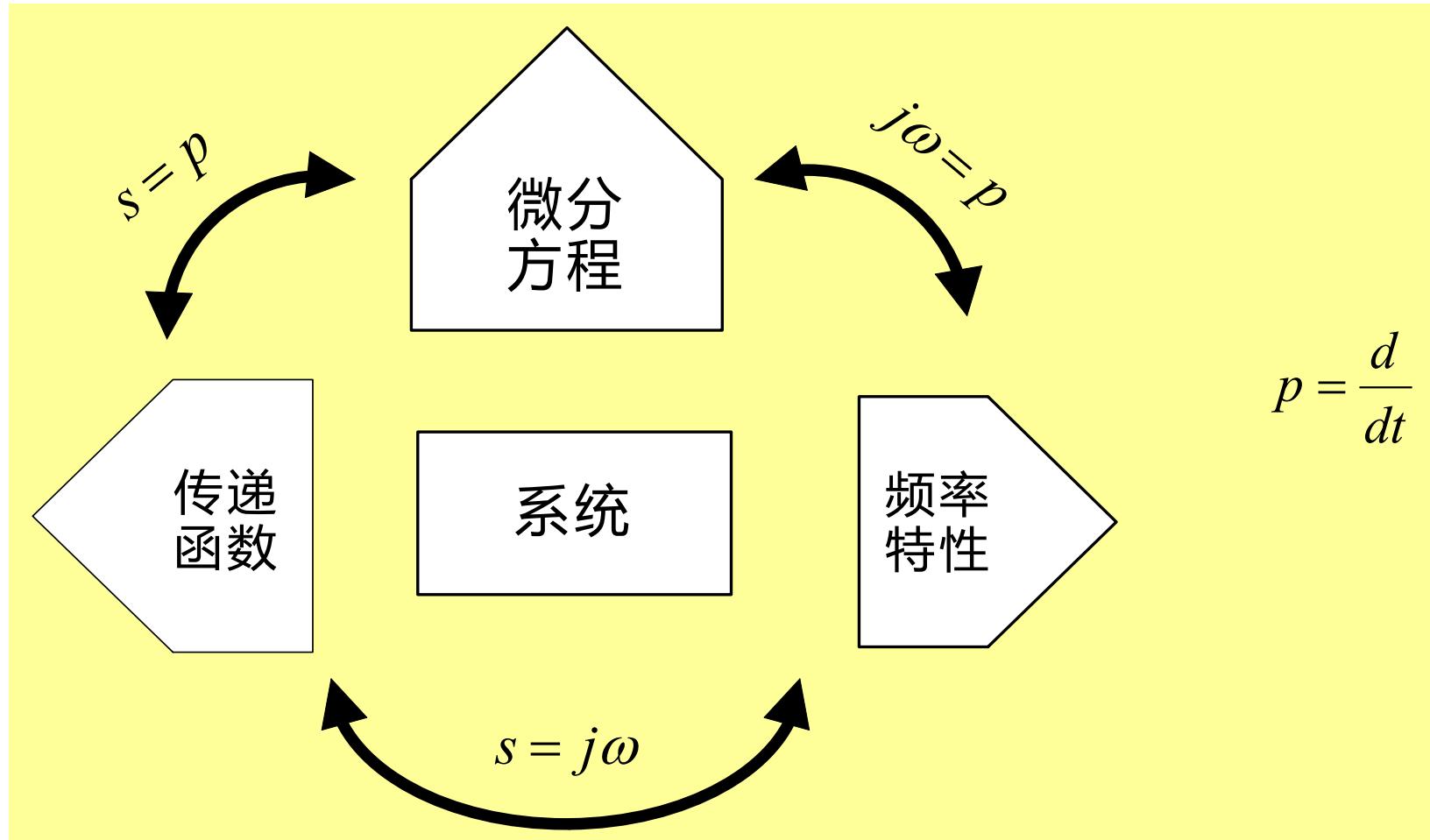
$$G(s) = \frac{1}{Ts+1} \quad \text{幅相曲线}$$

2. 伯德图 (Bode图、对数频率特性曲线)



频率特性与传递函数关系:

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$$



小结：

定义：

频率特性

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

幅频特性

$$A(\omega) = \frac{A_c}{A_r}$$

稳态输出振幅

输入信号振幅

相频特性

$$\varphi(\omega) = \varphi_c - \varphi_r$$

稳态输出相角

输入信号相角

小结：

1. 频率特性的定义、求取
2. 频率特性的物理含义
3. 频率特性的重要应用

正（余）弦信号作用下， 稳态输出和稳态误差求取