4-3 广义根轨迹

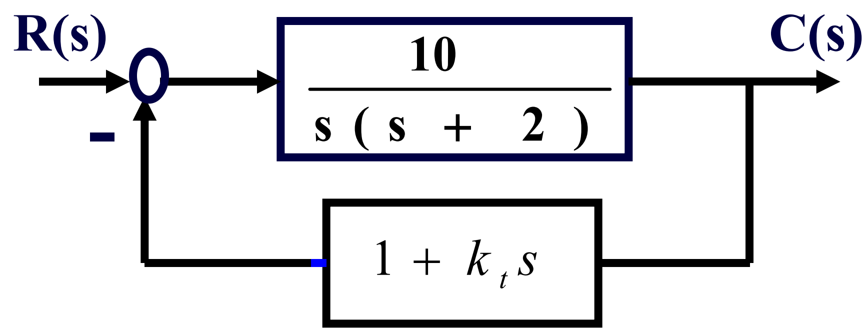
- 常规根轨迹
- 广义根轨迹
  - 参数根轨迹
  - 零度根轨迹
  - 开环传递函数中零点数大于极点数的根轨迹

一、参数根轨迹

定义：以开环增益为参变量，相角180°--常规根轨迹

以非开环增益为参变量---参数根轨迹

[例]系统如图，kt为测速反馈系数，试绘其概略根轨迹。 （ $k_t : 0 \to +\infty$ ）



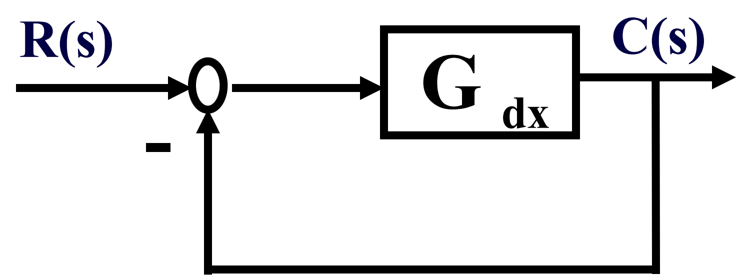
解: 开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{10(1+k_t s)}{s(s+2)}$$

特征方程: $s^2 + 2s + 10k_t s + 10 = 0$

1) 以不含K_t各项除以方程两边

$$1 + \frac{10k_t s}{s^2 + 2s + 10} = 0$$



2) “等效” 开环传递函数

$$G_{dx} = \frac{10k_t s}{s^2 + 2s + 10} = \frac{k_t^* s}{(s+1+j3)(s+1-j3)} \qquad (k_t^* = 10k_t)$$

$$G_{dx}=\frac{10k_t s}{s^2+2s+10}=\frac{k_t^* s}{(s+1+j3)(s+1-j3)}\qquad (k_t^*=10k_t)$$

a.开环零点 $m=1,\ z_1=0$;

开环极点 $n=2$，$p_{1,2}=-1\pm j3$

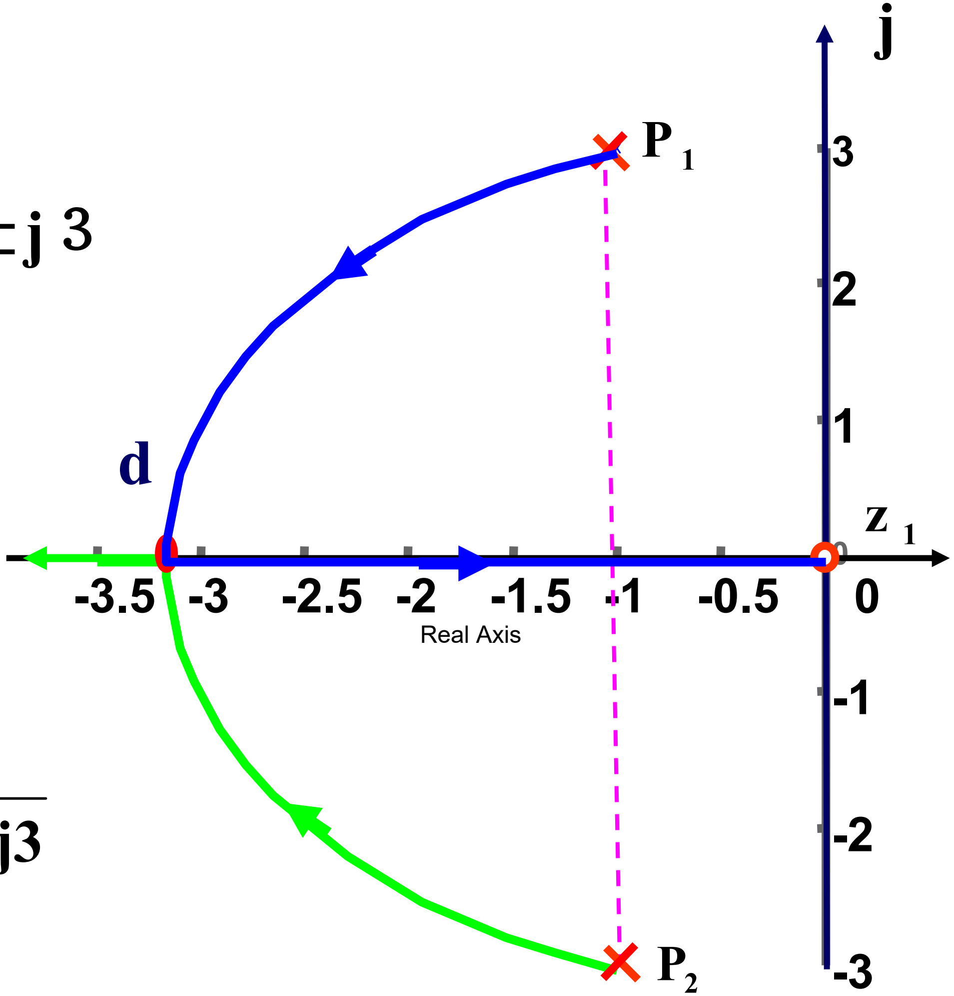
b．实轴上的根轨迹

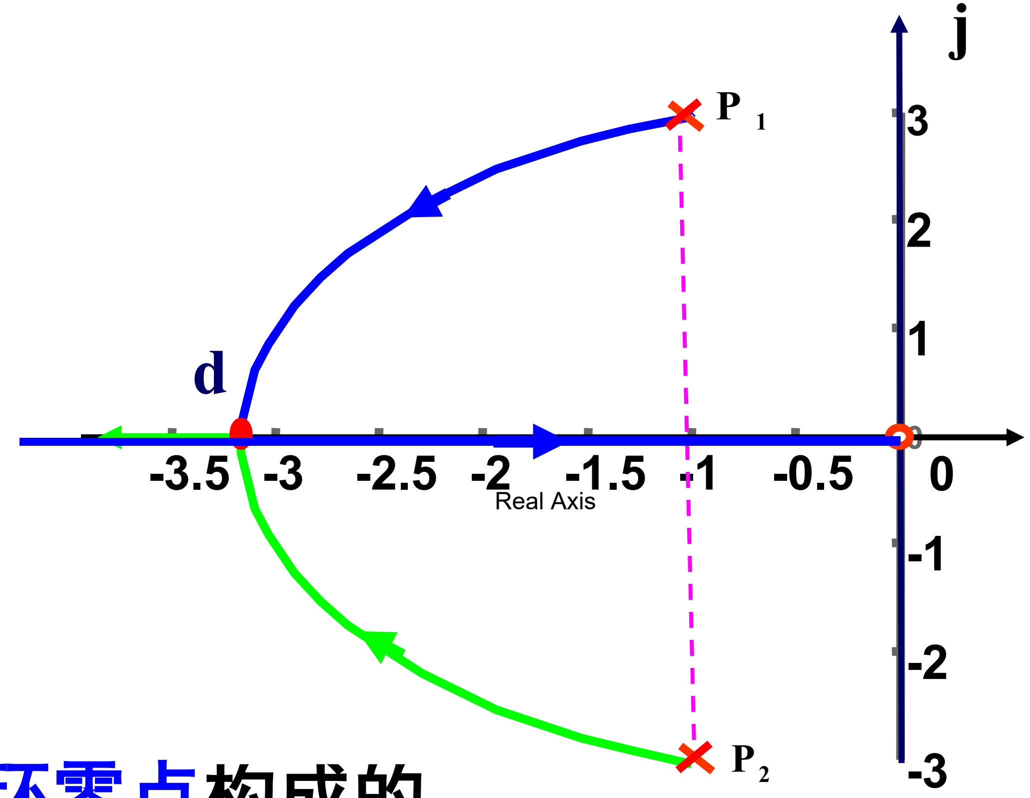
c．渐近线 $n-m=1$

d.分离点

$$\frac{1}{d}=\frac{1}{d+1+j3}+\frac{1}{d+1-j3}$$

得 $d\approx-3.16$





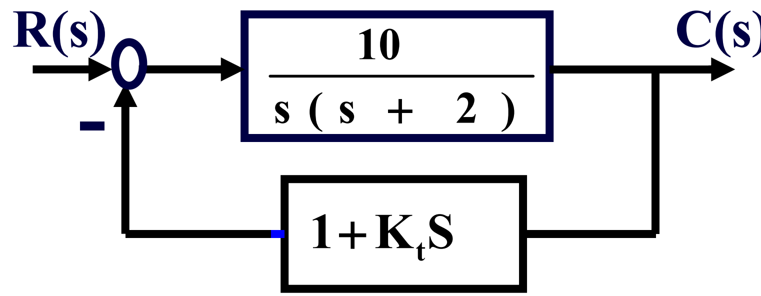
结论

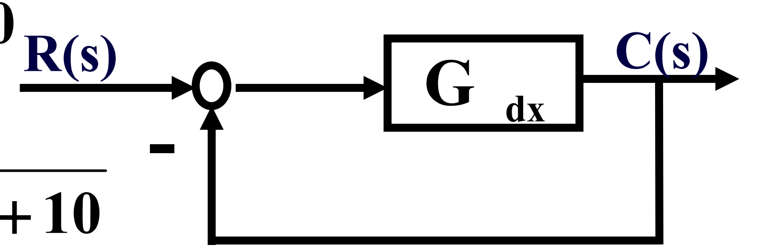
两开环极点与一个开环零点构成的系统，根轨迹为以零点为圆心，它到分离点d的半径的圆或圆的一部分.

[例]系统如图，kt为测速反馈系数，试绘其概略根轨迹。 （$k:0\rightarrow+\infty$）

结论

两开环极点与一个开环零点构成的系统，根轨迹为以零点为圆心，它到分离点d的半径的圆或圆的一部分。





$$原系统\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}=\frac{10}{s^2+2s+10k_ts+10}$$

$$新系统\Phi'(s)=\frac{G_{dx}(s)}{1+G_{dx}(s)}=\frac{10k_t\ s}{s^2+2s+10k_ts+10}$$

①“等效” 即为闭环极点相同，闭环零点不同

②由闭环零、极点分布分析系统性能，要采用原闭环系统零点

一、参数根轨迹

定义：以开环增益为参变量，相角180°--常规根轨迹

以非开环增益为参变量---参数根轨迹

设系统特征方程为：$\mathbf{D(S)=1+G(S)H(S)=0}$

步骤小结：

（1） 以不含参变量各项除以方程两边，并改写为

$$A\frac{P(s)}{Q(s)}=-1$$

其中， A为可变参数， $P(S),Q(S)$与A无关的首一多项式

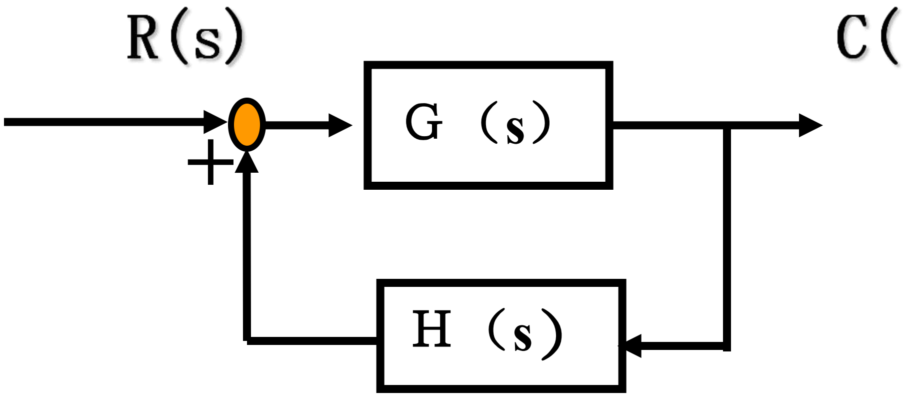
（2） 构造等效开环传递函数

$$G_{dx}(s)=A\frac{P(s)}{Q(s)}$$

（3）绘根轨迹

二、零度根轨迹

$$D(s)=1-G(s)H(s)=0$$



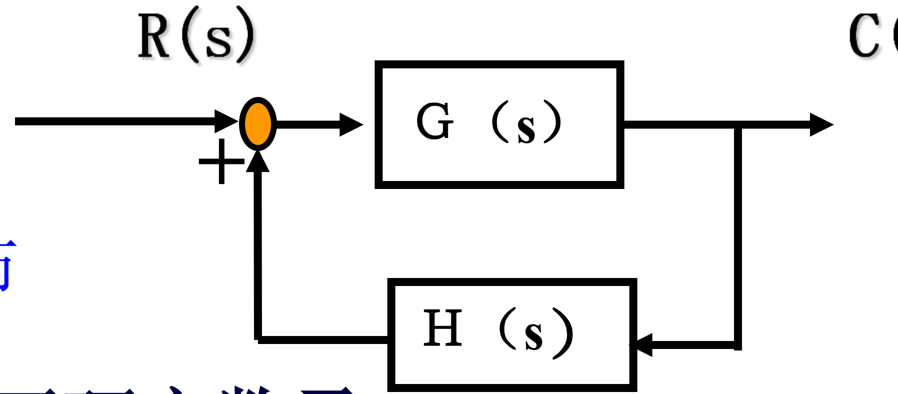
根轨迹方程：$G(s)H(s)=1$

模值方程： $|G(s)H(s)|=1$

相角方程：$\angle G(s)H(s)=2k\pi+0°$

定义：相角条件为零度的根轨迹，称零度根轨迹

二、零度根轨迹



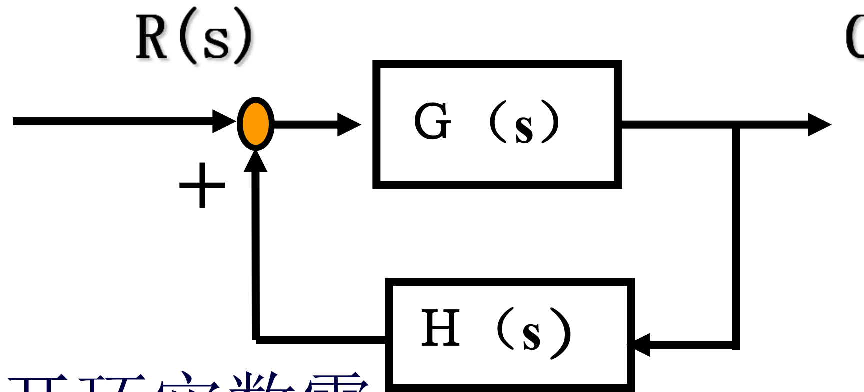
法则3　根轨迹在实轴上的分布

实轴上的某一区域，若其右边开环实数零极点个数之和为偶数，则该区域必是根轨迹。

法则4　根轨迹的渐近线

与实轴交角：$\varphi_a = \dfrac{2k\pi}{n-m}$

二、零度根轴迹



法则3　根轨迹在实轴上的分布

实轴上的某一区域，若其右边开环实数零极点个数之和为偶数，则该区域必是根轨迹。

法则4　根轨迹的渐近线

与实轴交角：$\varphi_a = \dfrac{2k\pi}{n-m}$

法则6　根轨迹起始角和终止角

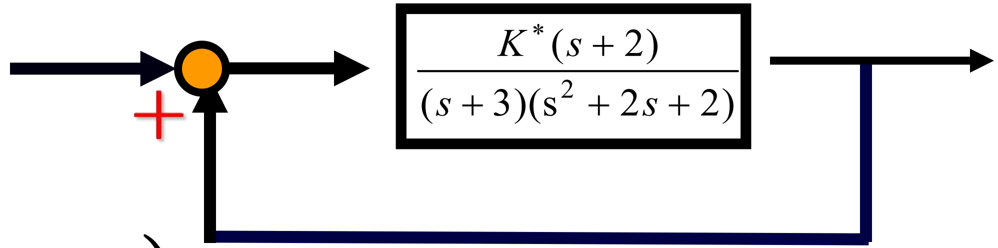
$$\theta_{pl} = \sum_{i=1}^{m} \angle p_l - z_i - \sum_{i=1(i \neq l)}^{n} \angle p_l - p_i$$

$$\varphi_{zl} = \sum_{i=1}^{n} \angle z_l - p_i - \sum_{i=1(i \neq l)}^{m} \angle z_l - z_i$$

其他法则不变

［例］ 已知单位正反馈系统，开环传递函数

$$G(s)=\frac{K^{*}(s+2)}{(s+3)(s^{2}+2s+2)}$$



试绘制其概略根轨迹。（$k^{*}:0\rightarrow+\infty$）

解： $$G(s)=\frac{K^{*}(s+2)}{(s+3)(s+1+j)(s+1-j)}$$

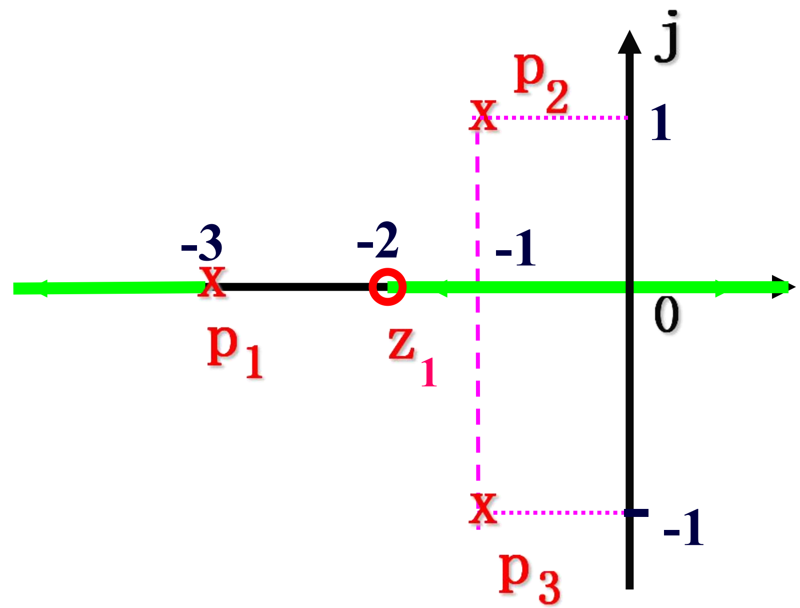
1. 开环零点m=1，z_1=-2;开环极点n=3, p_1=-3, $p_{2,3}$=-1±j

2. 实轴根轨迹

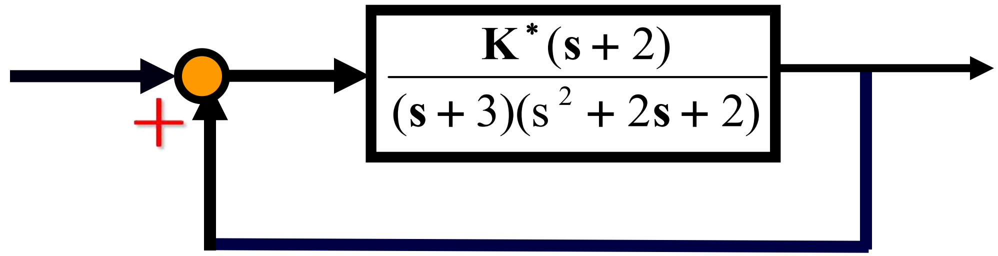
3. 渐近线 n-m=2 条

$$\sigma_a=\frac{(-5)-(-2)}{2}=\frac{-3}{2}$$

$$\varphi_a=\frac{2k\pi}{2}(k=0,1)\rightarrow\varphi_a=0,\pi$$



$$G(s)=\frac{K^{*}(s+2)}{(s+3)(s+1+j)(s+1-j)}$$



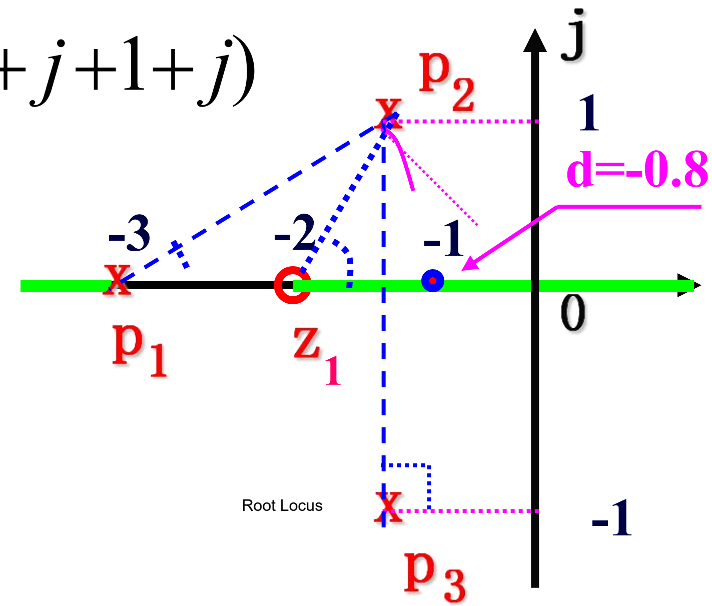
4. 起始角

$$\theta_{p2}=\angle(p_2-z_1)-\angle(p_2-p_1)-\angle(p_2-p_3)$$

$$=\angle(-1+j+2)-\angle(-1+j+3)-\angle(-1+j+1+j)$$

$$=45^{0}-26.6^{0}-90^{0}=-72^{0}$$

由对称性 $\theta_{p_3}=72^{0}$



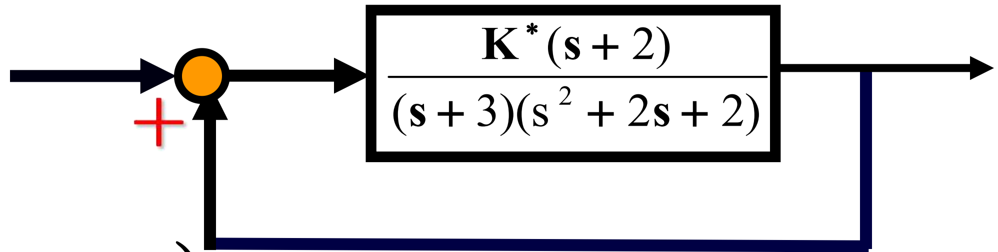
5. 分离点

$$\frac{1}{d+2}=\frac{1}{d+3}+\frac{1}{d+1+j}+\frac{1}{d+1-j}$$

解得$d_1=-0.8,\ d_{2,3}=-2.35\pm0.77$ （舍去）

[例] 已知单位正反馈系统，开环传递函数

$$G(s)=\frac{K^*(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

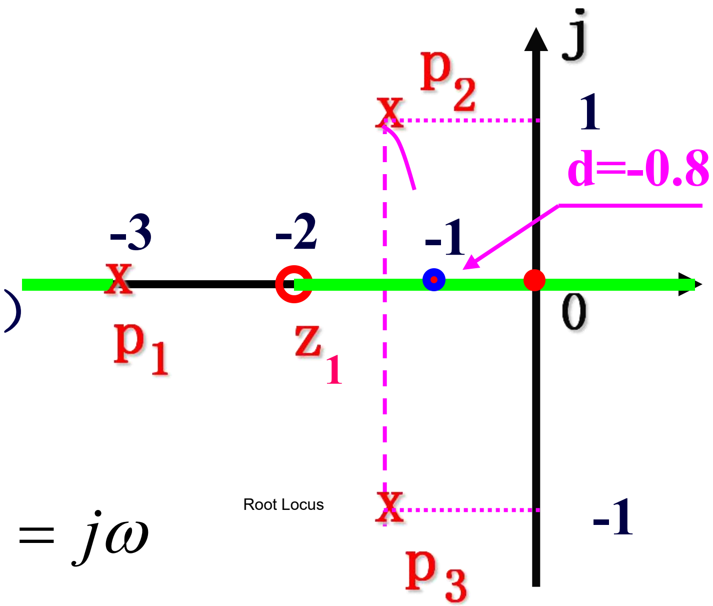


试绘制其概略根轨迹。（$k^*: 0 \to +\infty$）

5. 分离点

$$\frac{1}{d+2}=\frac{1}{d+3}+\frac{1}{d+1+j}+\frac{1}{d+1-j}$$

解得 $d_1=-0.8,\ d_{2,3}=-2.35\pm 0.77$（舍去）



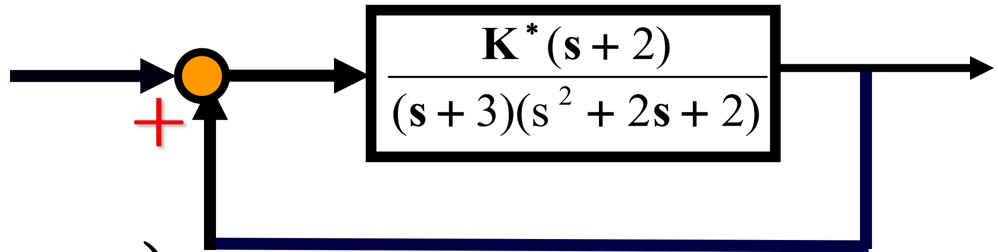
6. 与虚轴交点

$D(s)=(s+3)(s^2+2s+2)+K^*(s+2)=0$ 令 $s=j\omega$

解得s=0 $K^*=\frac{|s+3||s+1+j||s+1-j|}{|s+2|}\Big|_{s=0}=3 \qquad k=\frac{K^*}{3}=1$

[例] 已知单位正反馈系统，开环传递函数

$$G(s)=\frac{K^*(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$



试绘制其概略根轨迹。（$k^*:0\to+\infty$）

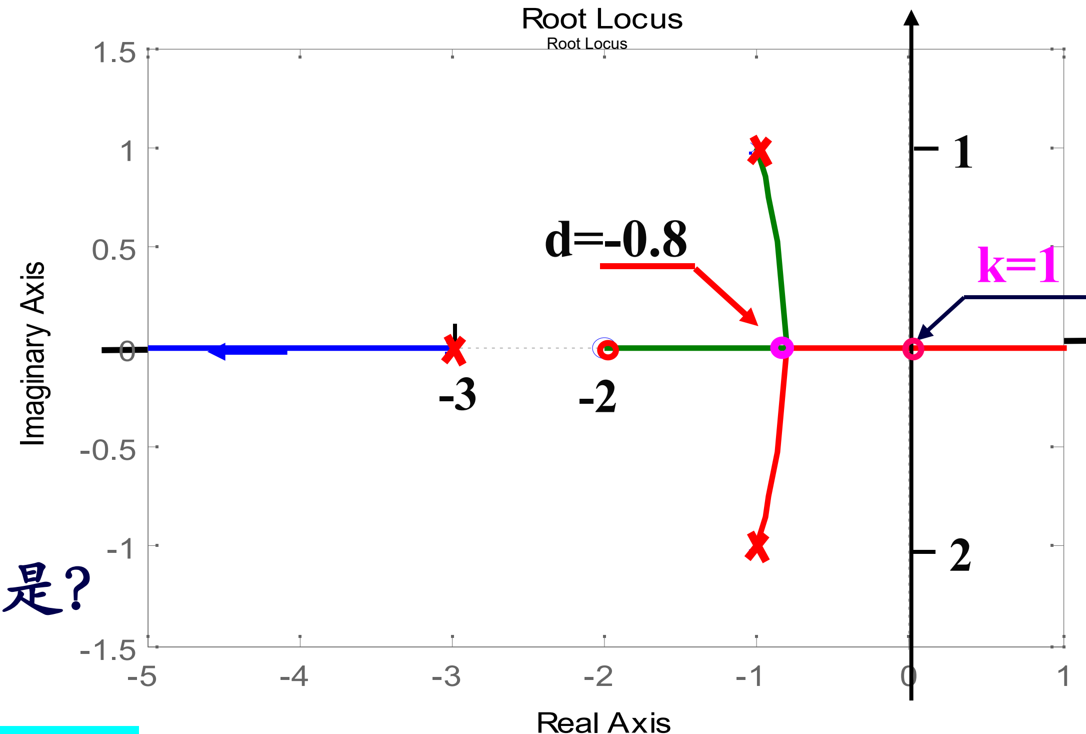
6. 与虚轴交点

解得 s=0

$$K^*=\frac{|s+3||s+1+j||s+1-j|}{|s+2|}\Big|_{s=0}=3$$

$$k=\frac{K^*}{3}=1$$

问题：稳定的 k 的取值范围是?



结论

当 $0<k<1$ 时，稳定；

$k\geq1$ 时，不稳定

正反馈系统并非都不稳定

小结：

1. 参数根轨迹绘制

以非开环增益为参变量---参数根轨迹

设系统特征方程为：$D(S) = 1 + G(S)H(S) = 0$

步骤：

（1） 以不含参变量各项除以方程两边，并改写为

$$A\frac{P(s)}{Q(s)} = -1$$

其中， A为可变参数， P(S), Q(S)与A无关的首一多项式

（2）构造等效开环传递函数

$$G_{dx}(s) = A\frac{P(s)}{Q(s)}$$

（3）绘根轨迹

2. 零度根轨迹的绘制

零度根轨迹 - 相角条件满足零度

注意相角条件变化引起的相应根轨迹法则的改变