1523301、1523302 班《控制系统设计与数值仿真》第 04 次上机实验

第 1 题：

质点单自由度受扰动力学方程是

$\ddot{x}=\dfrac{1}{m}(u+f)$ （1）

x 表示其位置坐标，u 是控制力，$f=f_0+a\sin(\Omega t+\phi)$ 是外部干扰，且 Ω 是已知且恒定的，f_0,a,ϕ 是未知且恒定的。试设计闭环控制律 u，使输出 x 稳定在零值。

仿真入口参数：

$$\begin{cases} m=1(\mathrm{kg}),\ \Omega=1(\mathrm{rad/s}) \\ a=5(\mathrm{N}),\ \phi=30^{\circ},\ f_0=6(\mathrm{N}) \\ x(0)=0(\mathrm{m}),\ \dot{x}(0)=0(\mathrm{m/s}) \end{cases}$$

提示：

现在需要构造一个虚拟的动态，以产生常值加正弦信号，该动态有两个模态，常值模态和正弦振荡模态，其对应的复频域特征值就是 $s_1=0, s_{2,3}=\pm j\Omega$. 这样的线性系统其特征多项式是

$$D(s)=(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)=s(s+j\Omega)(s-j\Omega)=s(s^2+\Omega^2)=s^3+\Omega^2 s$$

即

$$D(s)=s^3+\Omega^2 s \qquad (2)$$

以此特征多项式构造传函，并以位置误差 x 驱动的线性系统复频域描述为

$$y=\frac{1}{s^3+\Omega^2 s}x \qquad (3)$$

其时域高阶微分方程为

$$\dddot{y}+\Omega^2\dot{y}=x \qquad (4)$$

定义状态变量

$$\{\eta_1=y,\ \eta_2=\dot{y},\ \eta_3=\ddot{y} \qquad (5)$$

则其状态空间实现如下

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1=\eta_2 \\ \dot{\eta}_2=\eta_3 \\ \dot{\eta}_3=-\Omega^2\eta_2+x \end{cases} \qquad (6)$$

原受控对象写成状态方程形式如下

$$\begin{cases} \dot{x}=v \\ \dot{v}=\dfrac{1}{m}(u+f) \end{cases} \qquad (7)$$

将式（6）（7）合并成增广系统如下

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1=\eta_2,\ \dot{\eta}_2=\eta_3 \\ \dot{\eta}_3=-\Omega^2\eta_2+x \\ \dot{x}=v,\ \dot{v}=\dfrac{1}{m}(u+f) \end{cases} \qquad (8)$$

定义状态变量

$$\{z_1=\eta_1, z_2=\eta_2, z_3=\eta_3, z_4=x, z_5=v \qquad (9)$$

则

$$
\begin{cases}
\dot{z}_1 = z_2,\ \dot{z}_2 = z_3 \\
\dot{z}_3 = -\Omega^2 z_2 + z_4 \\
\dot{z}_4 = z_5,\ \dot{z}_5 = \dfrac{1}{m}(u+f)
\end{cases}
$$

写成矩阵形式如下

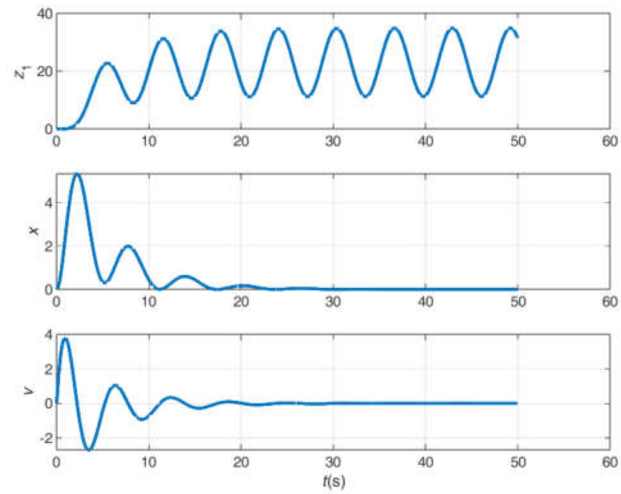
$\dot{z} = Az + B(u+f)$ （10）

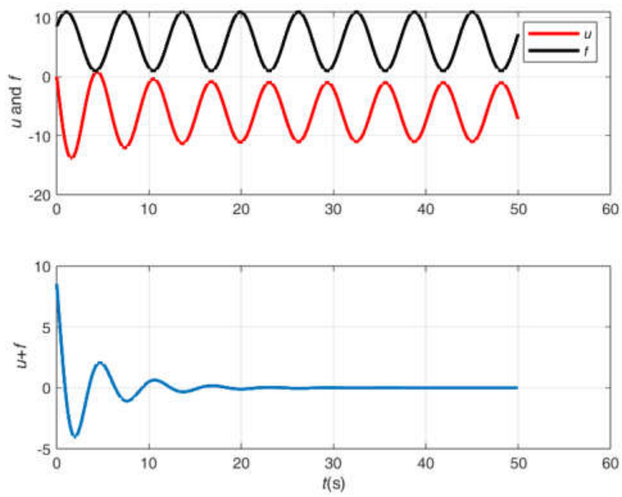
其中

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\Omega^2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B = (0,0,0,0,\frac{1}{m})^{\mathrm{T}} \qquad （11）
$$

只须设计状态反馈控制律 $u = -Kz$，使得式（10）的闭环系统 $\dot{z} = (A-BK)z + Bf$ 是稳定的线性系统，即其状态矩阵 $\overline{A} = A - BK$ 的特征值均具有负实部即可。这可以容易地通过 place 函数实现，此不赘述。

可望的仿真结果如下：





第 2 题（预先探究型题目）：

已知火箭增程弹的飞行力学方程如下

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta \\ \dot{y} = v\sin\theta \\ \dot{v} = -g\sin\theta - \dfrac{Q}{m} + P\cos\alpha \\ v\dot{\theta} = -g\cos\theta + \dfrac{Y}{m} + \dfrac{P\sin\alpha}{m} \end{cases} \tag{1}$$

其中 x, y 分别是火箭弹的飞行纵程和飞行高度，v, θ 分别是飞行速度大小和弹道倾角（弹道高低角），Q, Y 分别是气动阻力和气动升力，P 是火箭发动机推力，α 是火箭弹攻角（即弹体纵轴与飞行速度矢量间的夹角），g 是重力加速度，m 是火箭弹质量。

已知气动阻力和气动升力的计算公式为

$$\begin{cases} Q = \dfrac{1}{2}\rho v^2 S C_Q,\ Y = \dfrac{1}{2}\rho v^2 S C_Y \end{cases} \tag{2}$$

其中 ρ 是大气密度，S 是导弹气动特征面积（常参数），C_Q, C_Y 分别是气动阻力系数和气动升力系数。

请用 while 循环仿真如下飞行场景：

火箭弹以初速 v_0 和初始弹道倾角 θ_0 被推出发射筒后惯性爬升飞行 1 秒后，发动机点火，作动力飞行，发动机以恒定的推力 P 持续工作 10 秒后燃料耗尽，火箭弹继续惯性滑行，直至落地。

仿真入口参数如下：

$m = 100(\text{kg})$

$x(0) = 0,\ y(0) = 0,\ v_0 = 50(\text{m/s}),\ \theta_0 = 30^{\circ}$

$g = 9.8(\text{m/s}^2),\ \rho = 1.225(\text{kg/m}^3)$

$S = 0.01(\text{m}^2),\ C_{\text{Q}} = 1,\ C_Y = 0.2$

$\alpha = 3^{\circ}(\text{常值}),\ P = 500(\text{N})$

看看该弹射程多远？

并请绘制仿真结果曲线如下：

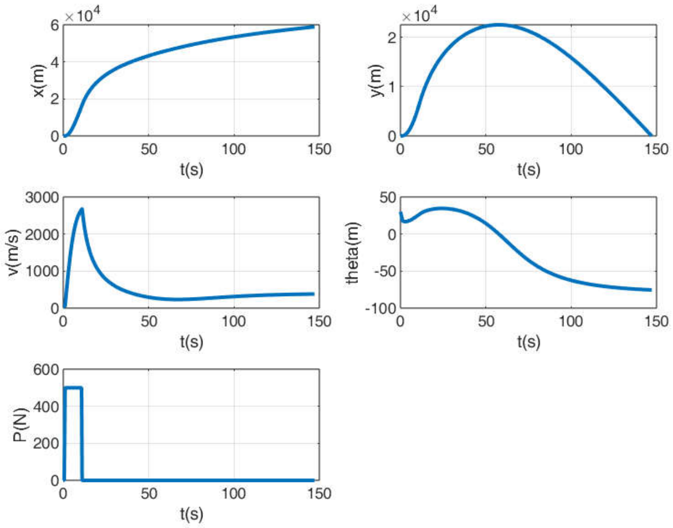


图 1 各状态变量和发动机推力曲线

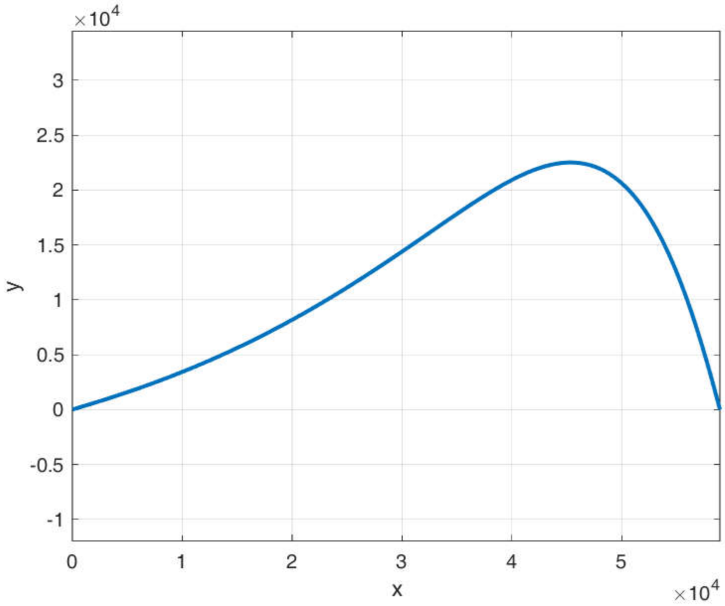


图 2 火箭增程弹的弹道