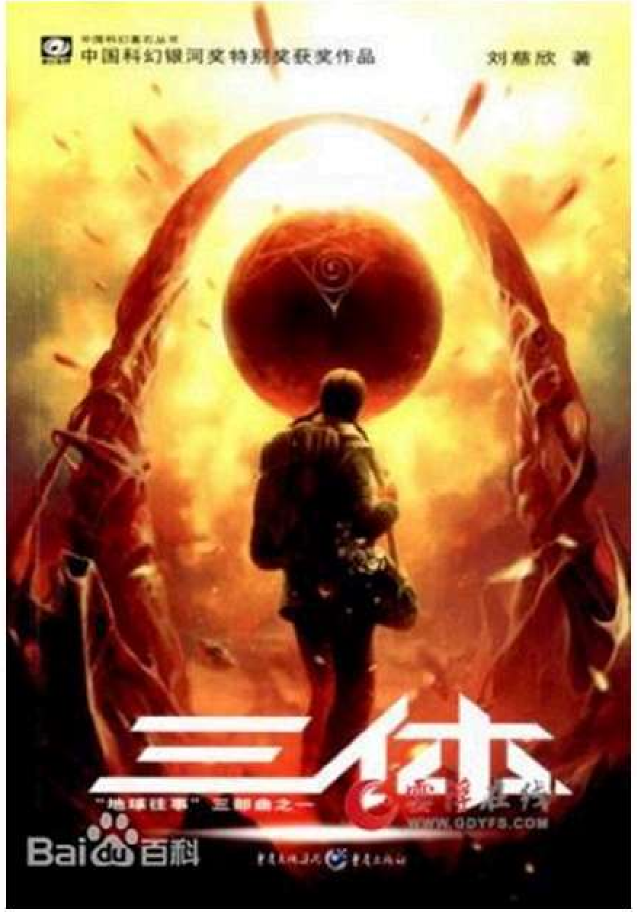
第二章 二体问题

1. 引言



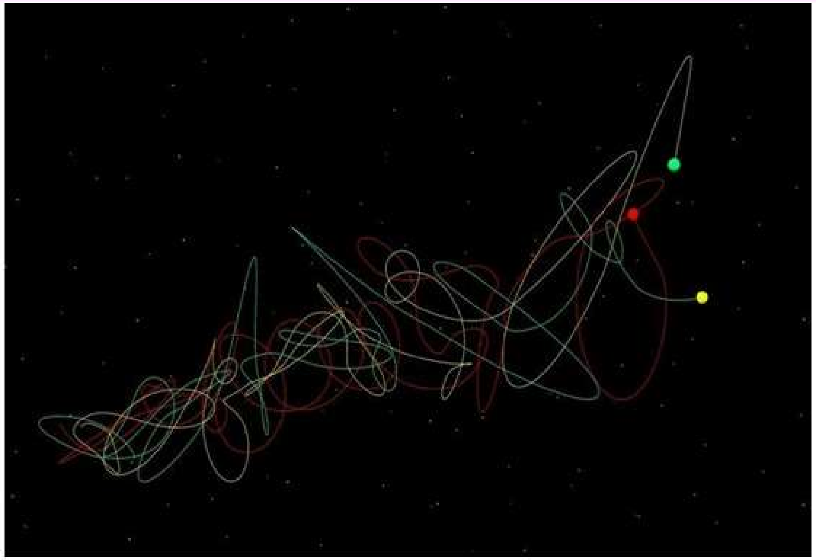
引子

“三体”小说里面一个核心点：预测“三体人”世界中三颗恒星引力作用下行星的运动轨迹

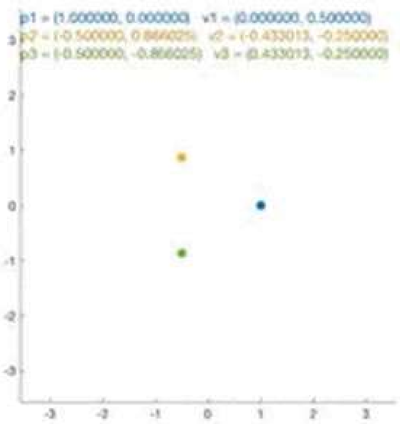
思考？

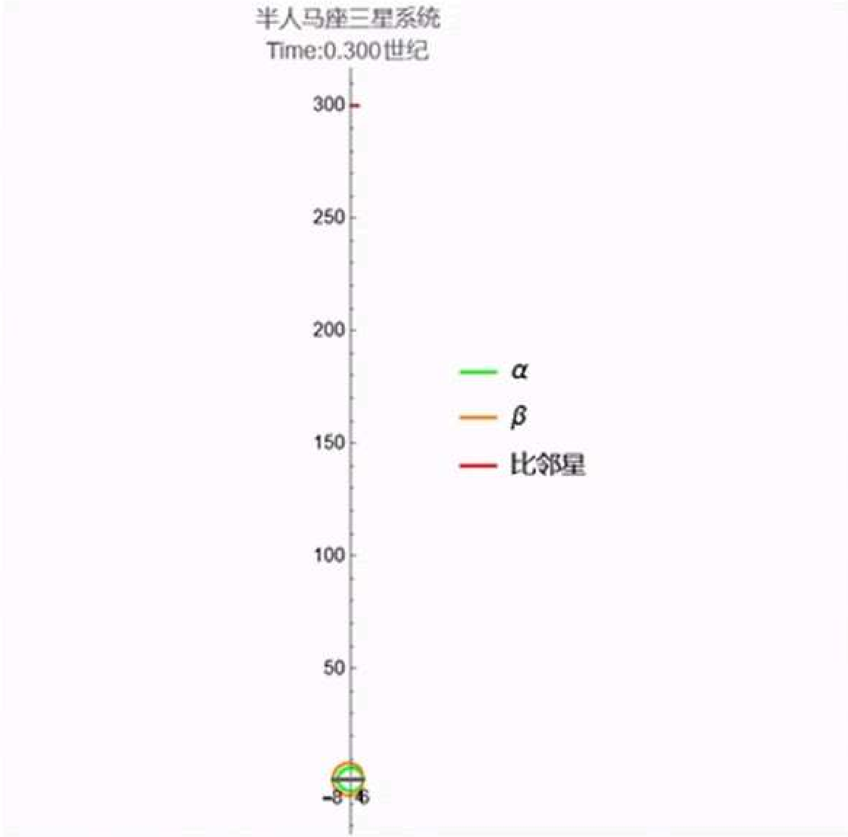
在已知牛顿万有引力定律的基础上，如何预测天体的运行轨迹？

1. 引言



三体星系


p1 = (1.000000, 0.000000) v1 = (0.000000, 0.500000)


半人马座三星系统
Time:0.300世纪
300
250
200
150
100
50
α
β
比邻星

1. 引言

什么是二体问题?

研究两物体（天体/航天器）仅在其相互之间的万有引力作用下的动力学问题。

航天器二体问题

开普勒轨道

航天器在地球的引力场中运动，忽略太阳、月球的引力，不考虑其它干扰因素的二体问题。

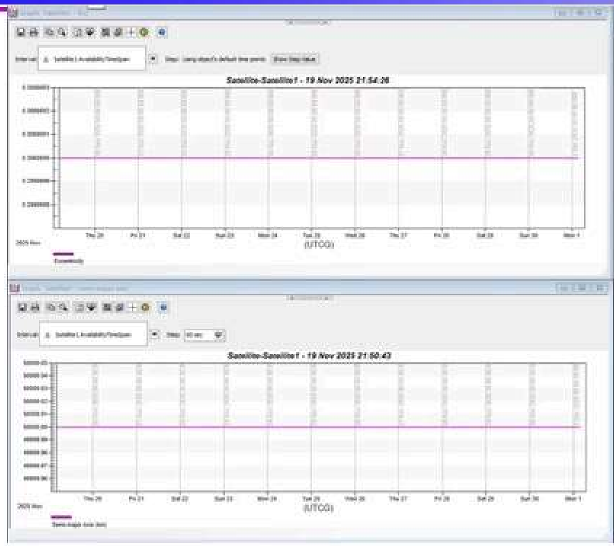
目标

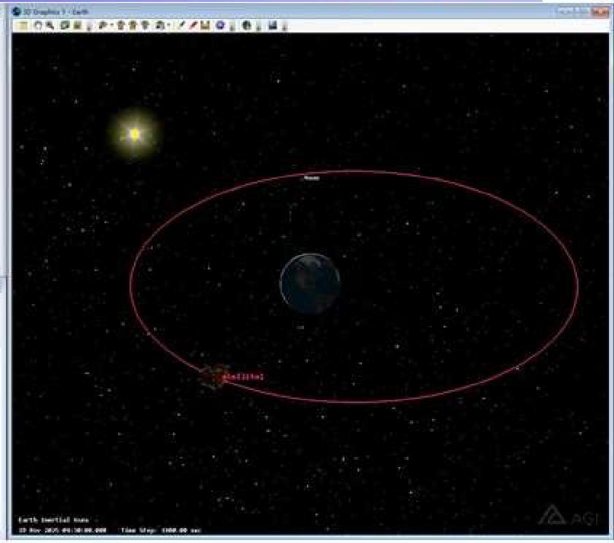
寻找运动微分方程的解，即独立的积分常数(?)。

手段：矢量解法。

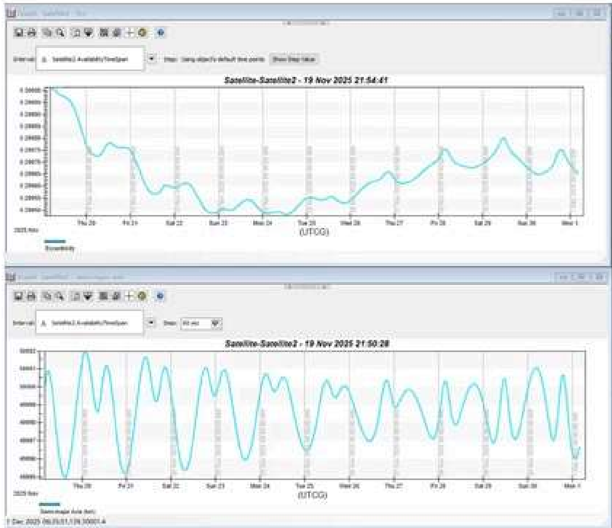
1. 引言

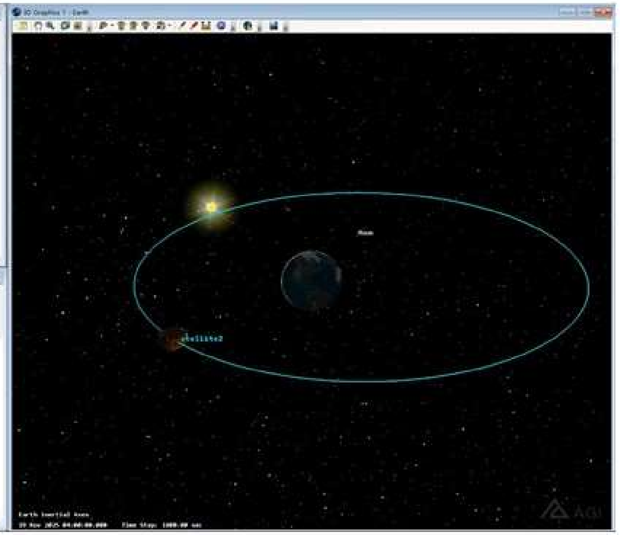
二体问题





考虑日、月
引力作用





1. 引言

积分常数C_1，C_2

特征方程$r^2+pr+q=0$的两个根r_1，r_2	微分方程$y''+py'+qy=0$的通解
两个不相等的实根r_1，r_2	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等的实根$r=r_1=r_2$	$y=(C_1+C_2x)e^{rx}$
一对共轭复根$r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

1. 引言

思考？

核心问题

- Q1：二体问题解可以分为几类（即开普勒轨道类型）？各有什么不同特性？如何区分？
- Q2：开普勒轨道有哪些守恒量？（即积分常数）
- Q3：如何计算某一时刻航天器的位置？

单选题 1分

二体问题可以找到几个独立的积分常数?

A 4个

B 5个

C 6个

D 7个

主观题 3分

根据理论力学知识，或者物理直觉，你觉得开普勒轨道存在哪些守恒量呢?

2. 惯性系中的运动方程

二体系统质心G的位置矢量

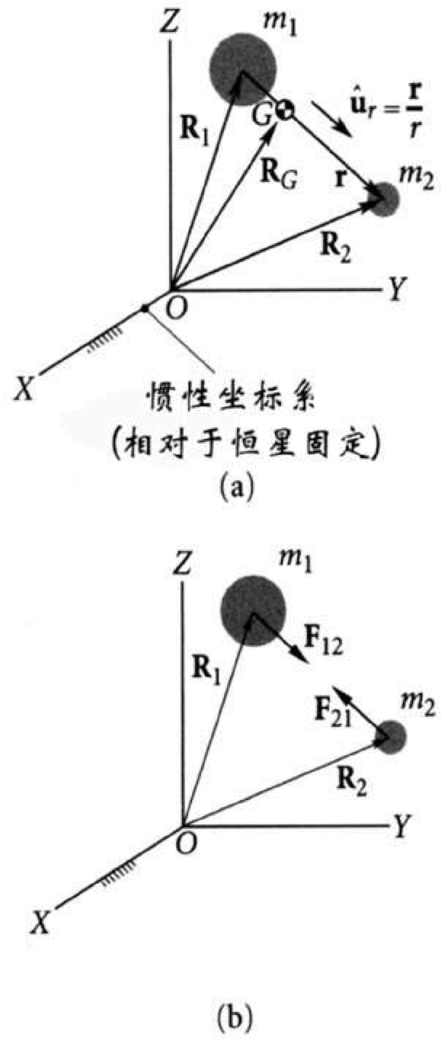
$$\mathbf{R}_G=\frac{m_1\mathbf{R}_1+m_2\mathbf{R}_2}{m_1+m_2}$$

质心G的绝对速度

$$\mathbf{v}_G=\dot{\mathbf{R}}_G=\frac{m_1\dot{\mathbf{R}}_1+m_2\dot{\mathbf{R}}_2}{m_1+m_2}$$

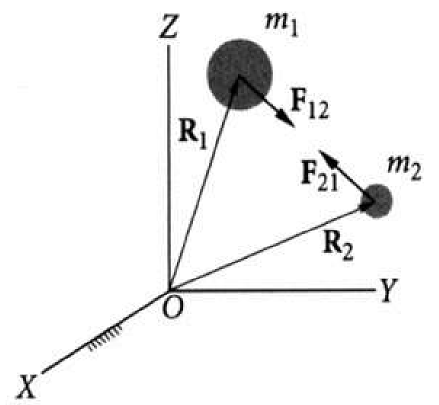
质心G的绝对加速度

$$\mathbf{a}_G=\ddot{\mathbf{R}}_G=\frac{m_1\ddot{\mathbf{R}}_1+m_2\ddot{\mathbf{R}}_2}{m_1+m_2}$$



2. 惯性系中的运动方程

设 $\hat{u}_r$ 为m_1指向m_2的单位矢量 $\hat{\mathbf{u}}_r = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$



(b)

m_1作用在m_2上的力

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}(-\hat{\mathbf{u}}_r) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r$$

$$-\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r = m_2\ddot{\mathbf{R}}_2 \qquad \frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r = m_1\ddot{\mathbf{R}}_1$$

$$m_1\ddot{\mathbf{R}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{R}}_2 = 0$$

$$\mathbf{R}_G = \mathbf{R}_{G_0} + \mathbf{v}_G t$$

$$\mathbf{a}_G = \ddot{\mathbf{R}}_G = \frac{m_1\ddot{\mathbf{R}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{R}}_2}{m_1 + m_2}$$

一个二体系统的质心可以作为一个惯性坐标系的原点

3. 相对运动方程

$$-\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r = m_2\ddot{\mathbf{R}}_2 \qquad -\frac{Gm_1^2m_2}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r = m_1m_2\ddot{\mathbf{R}}_2$$

$$\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r = m_1\ddot{\mathbf{R}}_1 \qquad \frac{Gm_1m_2^2}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r = m_1m_2\ddot{\mathbf{R}}_1$$

$$m_1m_2\left(\ddot{\mathbf{R}}_2-\ddot{\mathbf{R}}_1\right) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\left(m_1+m_2\right)\hat{\mathbf{u}}_r$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G\left(m_1+m_2\right)}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}$$

m_2相对于m_1运动的二阶微分方程

在惯性系中定义

3. 相对运动方程

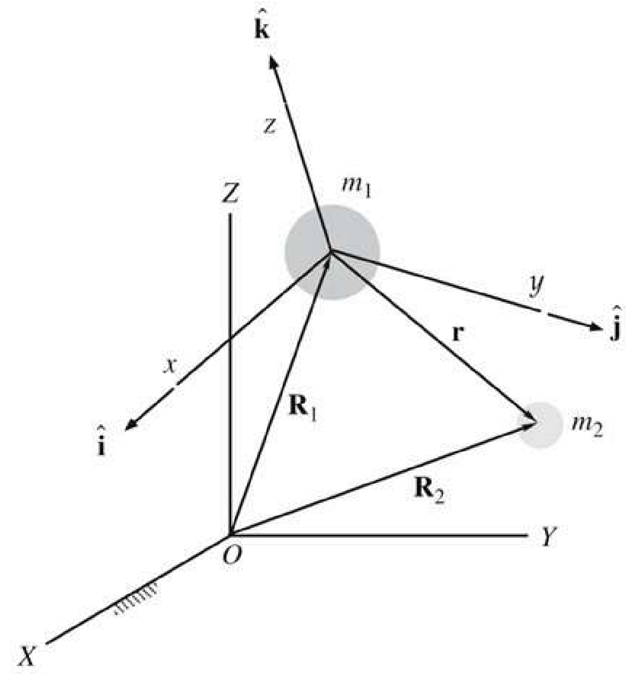
在运动坐标系*xyz*中的表达式为

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{\text{相对}} = \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\text{相对}} = \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_{\text{相对}} + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\mathbf{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}_{\text{相对}}$$



3. 相对运动方程

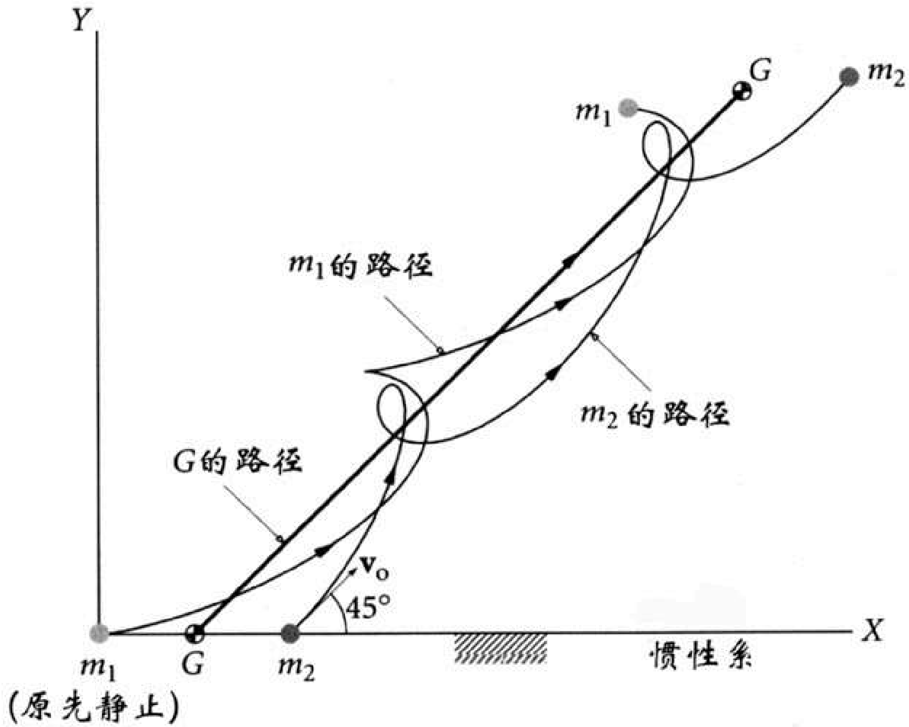
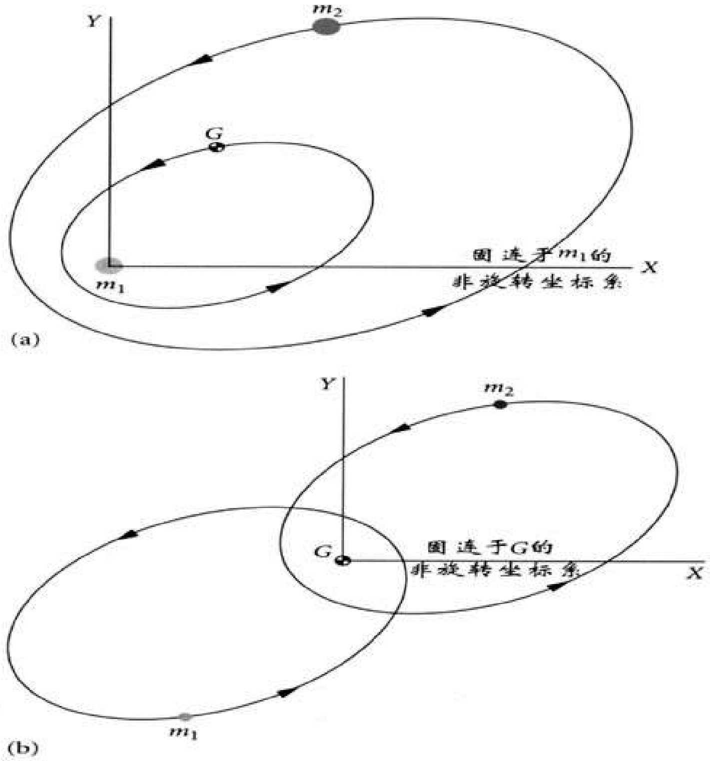


图. 由惯性系观察两个相同的物体仅在引力作用下的运动

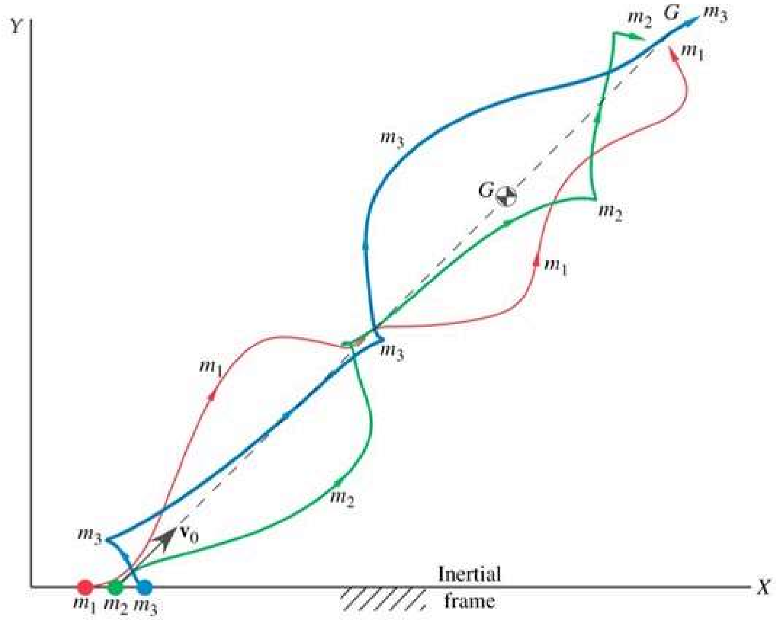
3. 相对运动方程



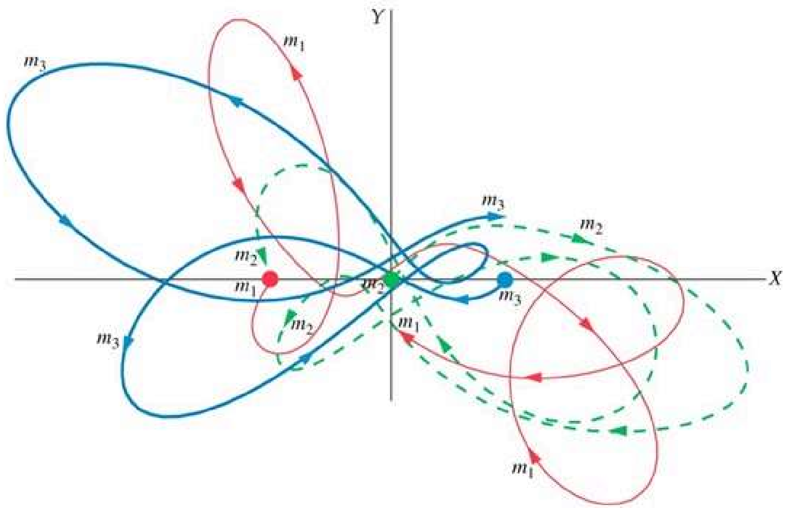
二体中的任一物体相对于质心的运动方程均与二体中一个物体相对于另一个物体的运动方程有相同的形式。亦即选择不同的参照物时，二体运动方程的形式均是类似的。

3. 相对运动方程

N > 2



由惯性系观察三个相同的物体的运动



由固连于质心G的惯性系中观测到的运动

4. 角动量和轨道方程

m_2相对于m_1的角动量 $\mathbf{H}_{2/1}=\mathbf{r}\times m_2\dot{\mathbf{r}}$

$$\mathbf{h}=\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}$$

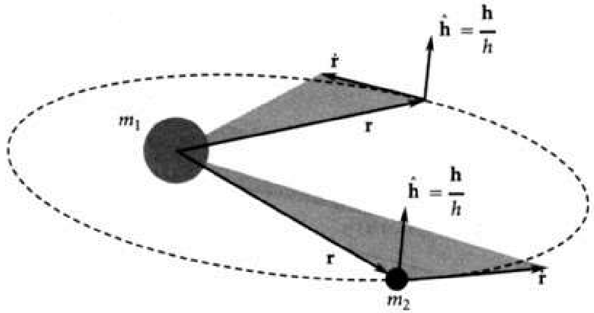


图. M_2绕M_1的运动位于一平面之内

求导

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt}=\dot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}}+\mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}}$$

$$\dot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}}=0 \qquad \ddot{\mathbf{r}}=-(u/r^3)\mathbf{r} \qquad \mathbf{r}\times\ddot{\mathbf{r}}=\mathbf{r}\times\left(-\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r}\right)=-\frac{\mu}{r^3}(\mathbf{r}\times\mathbf{r})=0$$

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt}=0 \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{h}\text{常量}$$

动量矩积分

$$\hat{\mathbf{h}}=\frac{\mathbf{h}}{h}$$

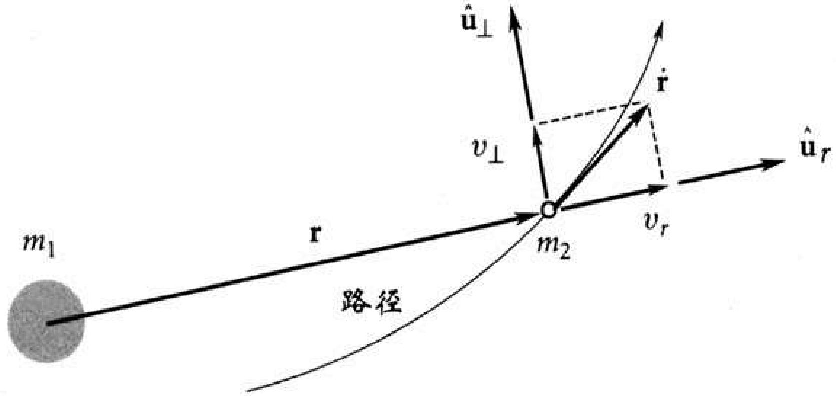
4. 角动量和轨道方程

径向，切向，横向，法向

$$\mathbf{h} = r\hat{\mathbf{u}}_r \times \left(v_r\hat{\mathbf{u}}_r + v_\perp\hat{\mathbf{u}}_\perp\right) = rv_\perp\hat{\mathbf{h}}$$

$$h = rv_\perp$$

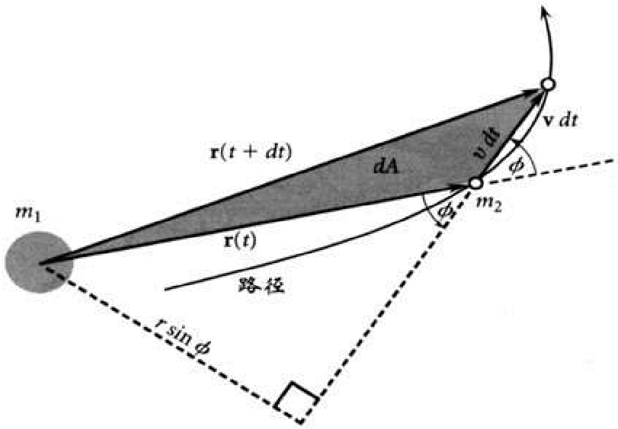
角动量的大小仅取决于相对速度的垂直分量。



$$dA = \frac{1}{2}\times\text{底}\times\text{高} = \frac{1}{2}\times vdt\times r\sin\phi$$
$$= \frac{1}{2}r\left(v\sin\phi\right)dt = \frac{1}{2}rv_\perp dt$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2}$$

开普勒第二定律：行星在相同时间内扫过的面积相等。



4. 角动量和轨道方程

轨道方程推导：

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}=r^2 \longrightarrow \begin{cases}\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})=2r\dfrac{dr}{dt}\\[2ex] \dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}+\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\boldsymbol{r}=2\boldsymbol{r}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}=r\dot{r} \Longleftrightarrow \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=\|\boldsymbol{r}\|\frac{d\|\boldsymbol{r}\|}{dt}$$

4. 角动量和轨道方程

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\mu \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \xrightarrow{\text{两边同时与单位角动量叉乘}} \ddot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{h} = -\mu \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \times \boldsymbol{h}$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{h} = \frac{d\left(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{h}\right)}{dt} - \dot{\boldsymbol{r}} \times \dot{\boldsymbol{h}}$$

$$\frac{d\left(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{h}\right)}{dt} = \ddot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{h} + \dot{\boldsymbol{r}} \times \dot{\boldsymbol{h}}$$

$\boldsymbol{h}$为常量

$$\ddot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{h} = \frac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{h}\right)$$

4. 角动量和轨道方程

bac-cab法则 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{h}&=\frac{1}{r^3}\left[\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})\right]\\&=\frac{1}{r^3}\left[\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})-\dot{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\right]\\&=\frac{1}{r^3}\left[\boldsymbol{r}\cdot(r\dot{r})-\dot{\boldsymbol{r}}r^2\right]\\&=\frac{(\boldsymbol{r}\dot{r}-\dot{\boldsymbol{r}}r)}{r^2}\end{aligned}$$

$$\frac{(\boldsymbol{r}\dot{r}-\dot{\boldsymbol{r}}r)}{r^2}=-\frac{(\dot{\boldsymbol{r}}r-\boldsymbol{r}\dot{r})}{r^2}=-\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{h}$$

4. 角动量和轨道方程

$$\frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{h})=\ddot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{h} \qquad -\frac{1}{r^3}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{h}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{h}=-\mu\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\times\boldsymbol{h}$$

$$\frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{h})=\frac{d}{dt}\left(\mu\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{h}-\mu\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=0$$

$$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\mu\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \xrightarrow{\text{一次积分}} \dot{\boldsymbol{r}}\times\mathbf{h}-\mu\frac{\boldsymbol{r}}{r}=\mathbf{C}$$

4. 角动量和轨道方程

$$(\dot{\boldsymbol r}\times\boldsymbol h)\cdot\boldsymbol h-\mu\frac{\boldsymbol r\cdot\boldsymbol h}{r}=\mathbf C\cdot\boldsymbol h$$

$(\dot{\boldsymbol r}\times\boldsymbol h)\cdot\boldsymbol h=0$ $\Downarrow$ $\boldsymbol r\cdot\boldsymbol h=0$

$$\mathbf C\cdot\boldsymbol h=0$$

C位于轨道平面内？

$$\dot{\boldsymbol r}\times\mathbf h-\mu\frac{\boldsymbol r}{r}=\mathbf C \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\boldsymbol r}{r}+\frac{\mathbf C}{\mu}=\frac{\dot{\boldsymbol r}\times\boldsymbol h}{\mu}$$

偏心率矢量 $\mathbf e\triangleq\mathbf C/\mu$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\boldsymbol r}{r}+\boldsymbol e=\frac{\dot{\boldsymbol r}\times\boldsymbol h}{\mu}$$

4. 角动量和轨道方程

$$\frac{\boldsymbol{r}}{r}+\boldsymbol{e}=\frac{\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{h}}{\mu}$$

为了得到一阶微分方程的标量形式

$$\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}{r}+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}=\frac{1}{\mu}\underline{\boldsymbol{r}\cdot(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{h})}$$

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$$

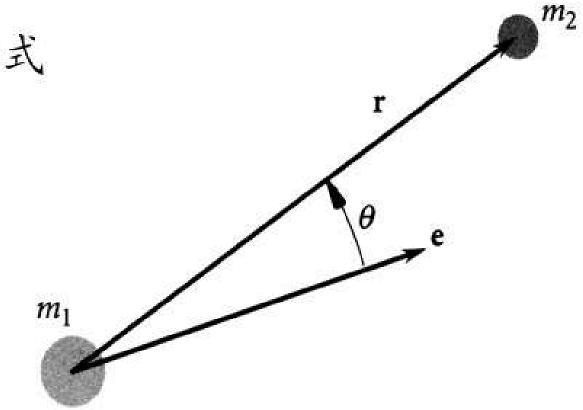
$$\boldsymbol{r}\cdot(\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{h})=(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}})\cdot\boldsymbol{h}=\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{h}=h^2$$

$$r+\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}=\frac{h^2}{\mu}$$

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{e}=re\cos\theta$$

$$r+re\cos\theta=\frac{h^2}{\mu}$$ 或者表示成

$$r=\frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos\theta}$$



轨道积分，h,e,μ均为常数，二体问题轨道又叫开普勒轨道

4. 角动量和轨道方程

位置矢量***r***的角速度为$\dot{\theta}$，垂直于位置矢量的速度分量可由角速度表示

$$v_{\perp} = r\dot{\theta}$$

速度表达式

$$h = rv_{\perp}$$

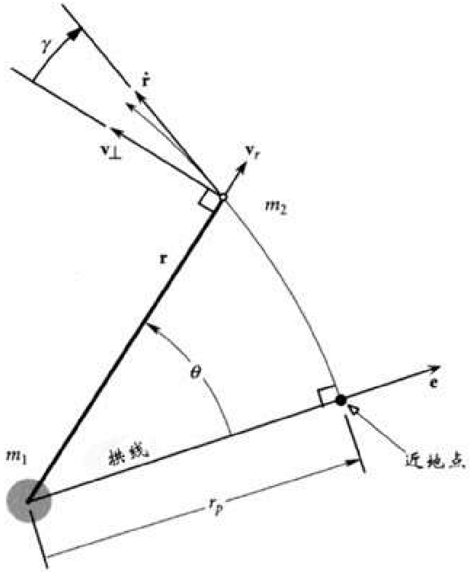
$$h = r^2\dot{\theta}$$

$$r = \frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos\theta}$$

$$v_{\perp} = \frac{\mu}{h}\left(1+e\cos\theta\right)$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{h^2}{\mu}\left[-\frac{e\left(-\dot{\theta}\sin\theta\right)}{\left(1+e\cos\theta\right)^2}\right] = \frac{h^2}{\mu}\frac{e\sin\theta}{\left(1+e\cos\theta\right)^2}\frac{h}{r^2}$$

$$\rightarrow \quad v_r = \frac{\mu}{h}e\sin\theta$$



4. 角动量和轨道方程

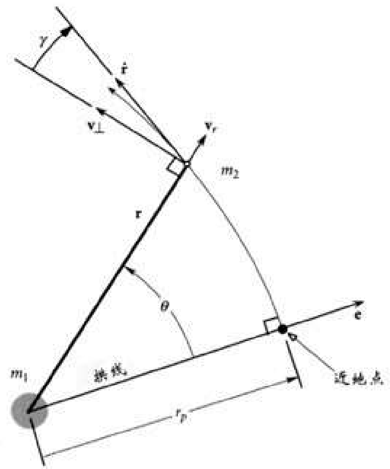
$$r=\frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos\theta}$$

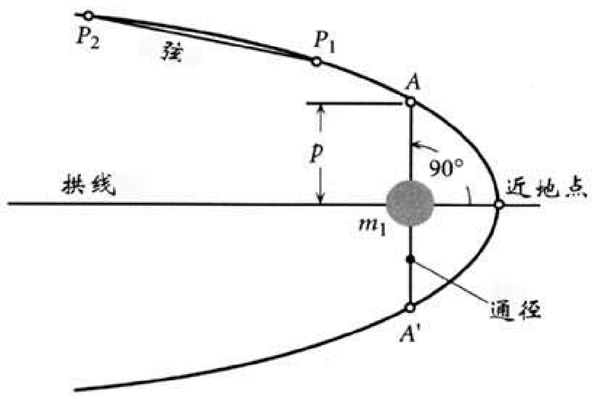
近地点，θ=0

$$\begin{cases} r_p=\dfrac{h^2}{\mu}\dfrac{1}{1+e} \\ v_r=0 \end{cases}$$

飞行路径角 $\tan\gamma=\dfrac{v_r}{v_\perp}$ ⟺ $\tan\gamma=\dfrac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}$

半通径 $p=\dfrac{h^2}{\mu}$





主观题 3分

请证明：对于任何轨道而言，总有

$$v = \frac{\mu}{h}\sqrt{1 + 2e\cos\theta + e^2}$$

2025年11月20日星期四 Page 27

4. 角动量和轨道方程

$$v_r = \frac{\mu}{h} e \sin\theta$$

$$v_\perp = \frac{h}{r} = \frac{h}{\dfrac{h^2}{\mu}\dfrac{1}{1+e\cos\theta}} = \frac{\mu}{h}(1+e\cos\theta)$$

$$v = \sqrt{{v_r}^2 + {v_\perp}^2}$$

$$v = \frac{\mu}{h}\sqrt{e^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + 2e\cos\theta + 1}$$

$$\boxed{v = \frac{\mu}{h}\sqrt{e^2 + 2e\cos\theta + 1}}$$

主观题 3分

令vp和va分别为航天器在近地点和远地点的速度大小，请推导

$$(1-e)v_p = (1+e)v_a$$