



第三章 轨道位置的时间函数

2025年12月3日星期三

Page 1

对于椭圆轨道，以下哪个量不守恒？

- ☐ A 半长轴
- ☐ B 轨道角动量
- ☐ C 飞行路径角
- ☒ D 轨道能量

下面哪种轨道机械能等于0

- ☐ A 圆轨道
- ☐ B 椭圆轨道
- ☐ C 抛物线轨道
- ☐ D 双曲线轨道



决定轨道形状的轨道根数分别是什么？ [填空1]、
[填空2]



已知中心引力常数为 μ ，试利用抛物线轨道机械能特性，推导轨道任一点 r 处的速度大小 v ，并指出该速度是圆轨道（半径为 r ）速度的多少倍？

1. 引言



思考?

核心问题

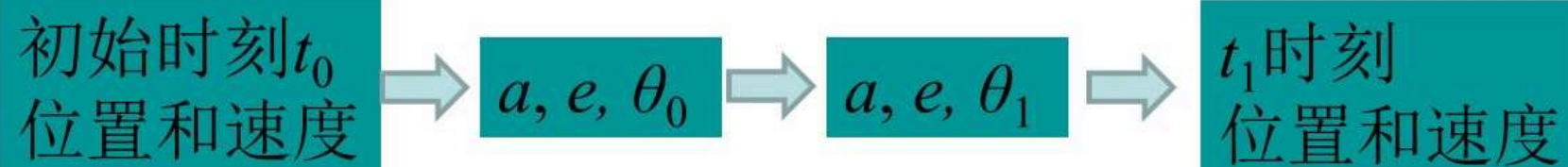
- Q1: 二体问题解可以分为几类 (即开普勒轨道类型)? 各有什么不同特性? 如何区分? ✓
- Q2: 开普勒轨道有哪些守恒量?
- Q3: 如何计算某一时刻航天器的位置?

1. 引言



轨道递推问题：若已知初始时刻位置和速度，如何求解目标时刻的位置和速度？

平面情形



若可以知道 t_1 时刻的真近点角 θ_1 值，则采用拉格朗日系数方法可以求解该时刻的位置和速度。

如何建立时间与真近点的关系？

2. 近地点时刻



$$r = \frac{(h^2/\mu)}{(1 + e \cos \theta)} \quad \leftarrow \text{时间的隐函数}$$

如何计算飞过任意两真近点角所需的时间 ?

$$h = r^2 \dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu^2}{h^3} dt = \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2}$$

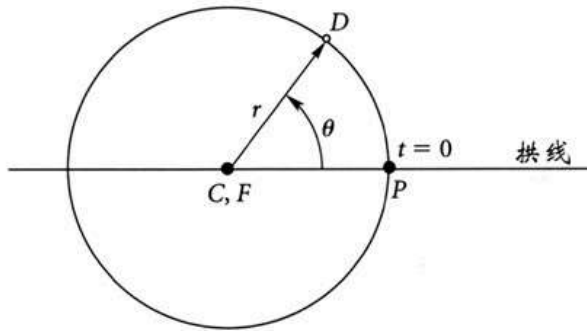
方程两边积分

$$\frac{\mu^2}{h^3} (t - t_p) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2}$$

$t_p = 0$

$$\frac{\mu^2}{h^3} t = \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \quad \dots \quad \text{通用}$$

3. 圆轨道



$$e=0 \quad \frac{\mu^2}{h^3} t = \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+e \cos \theta)^2}$$

$$\frac{\mu^2}{h^3} t = \int_0^\theta d\theta$$

$$t = \frac{h^3}{\mu^2} \theta$$

$$r = \frac{h^2}{\mu}$$

$$t = \frac{r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \theta$$

$$T = 2\pi r^{\frac{3}{2}} / \sqrt{\mu}$$

$$t = \frac{\theta}{2\pi} T \quad \text{或} \quad \theta = \frac{2\pi}{T} t$$



4. 椭圆轨道

$$\begin{aligned} & \text{0} < e < 1 \quad \frac{\mu^2}{h^3} t = \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \\ & \frac{\mu^2}{h^3} t = \frac{1}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}} \left[2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e \sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \right] \\ & \quad \downarrow \\ & \frac{\mu^2}{h^3} (1 - e^2)^{\frac{3}{2}} \quad t = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e \sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \\ & \quad \downarrow \\ & 2\pi / \left[\frac{2\pi \left(\frac{h}{\mu^2 \sqrt{1 - e^2}} \right)^3}{\downarrow T_{\text{椭圆}}} \right] \quad \left. \vphantom{\frac{2\pi \left(\frac{h}{\mu^2 \sqrt{1 - e^2}} \right)^3}} \right\} \frac{2\pi}{T_{\text{椭圆}}} \end{aligned}$$

4. 椭圆轨道

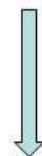


$$n = \frac{2\pi}{T_{\text{椭圆}}} \dots \text{椭圆轨道的平均角速度}$$

$$nt = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e\sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1+e \cos \theta}$$

平近点角

$$M_e = nt$$

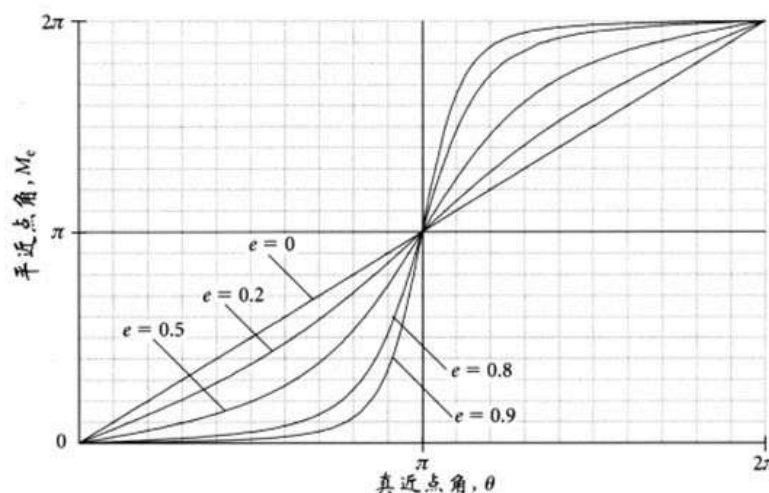


$$M_e = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e\sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1+e \cos \theta}$$

$$M_e = \frac{\mu^2}{h^3} (1-e^2)^{\frac{3}{2}} t$$

M_e 可看成是一假想物体沿椭圆轨道以常量角速度值为 n 运行时所形成的方位角

4. 椭圆轨道



→ M_e 为 θ 的单调递增函数

$t \rightarrow \theta$

$t \rightarrow M_e$

$M_e \rightarrow \theta$

$$\frac{\mu^2}{h^3} t = \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \left[2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e\sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1+e \cos \theta} \right]$$

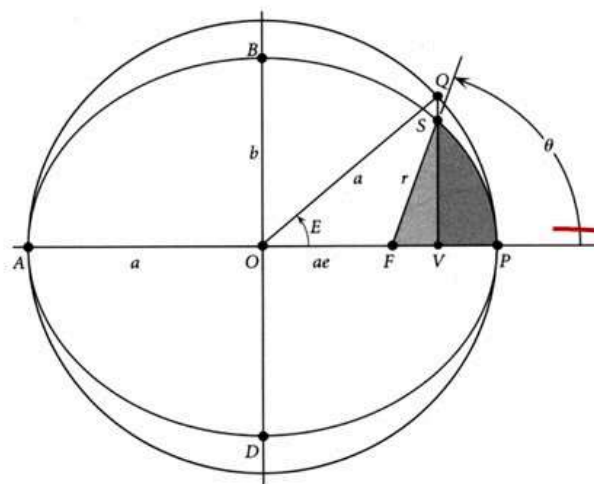
$$M_e = nt$$

$$M_e = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e\sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1+e \cos \theta}$$

4. 椭圆轨道



$$\begin{array}{ccc}
 & M_e \rightarrow \theta & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 M_e \rightarrow E & & E \rightarrow \theta
 \end{array}$$



偏近点角

$$\overline{OV} = a \cos E$$

$$\overline{OV} = ae + r \cos \theta$$

$$a \cos E = ae + r \cos \theta$$

$$r = a(1 - e^2) / (1 + e \cos \theta)$$

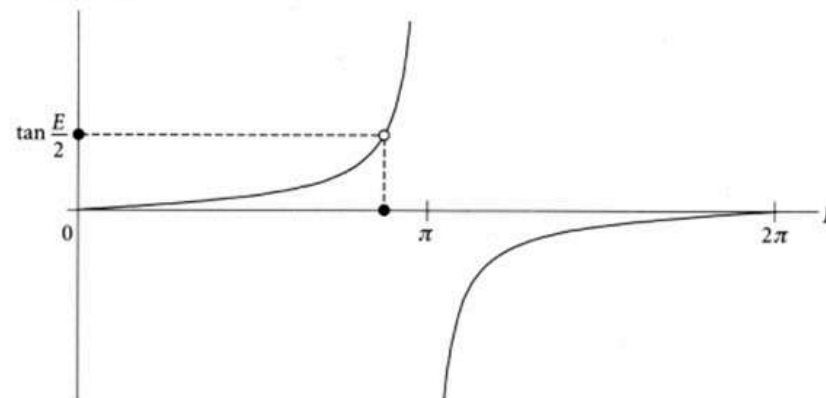
$$\begin{aligned}
 \cos E &= \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \\
 \sin E &= \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \\
 \cos \theta &= \frac{e - \cos E}{e \cos E - 1}
 \end{aligned}$$

4. 椭圆轨道



问题：不能确定 E 的项限

$$\begin{cases} \cos E = \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \\ \sin E = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \end{cases} \xrightarrow{\theta \text{ 已知}} \cos E, \sin E$$



$$\tan^2 \frac{E}{2} = \frac{1 - \cos E}{1 + \cos E}$$

$$\tan^2 \frac{E}{2} = \frac{1 - e}{1 + e} \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - e}{1 + e} \tan^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{\theta}{2} \quad \text{or} \quad E = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tan \frac{\theta}{2} \right)$$

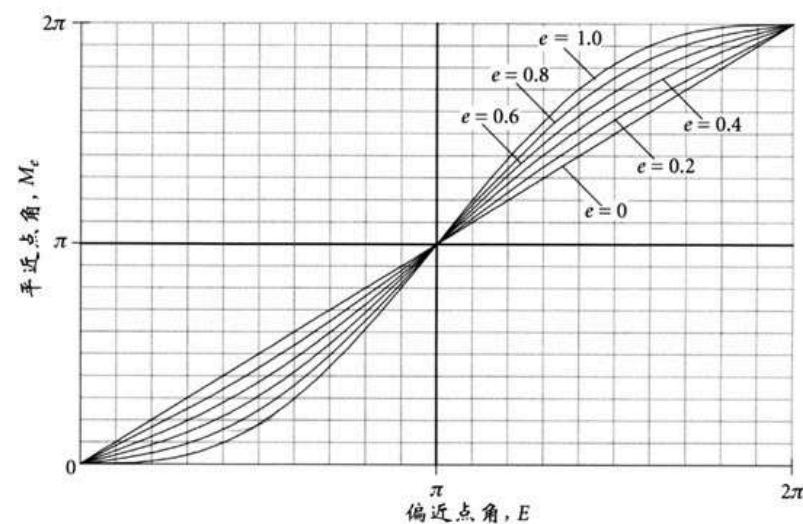
4. 椭圆轨道



$$E = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) \quad \sin E = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1+e \cos \theta}$$

$$M_e = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e \sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1+e \cos \theta}$$

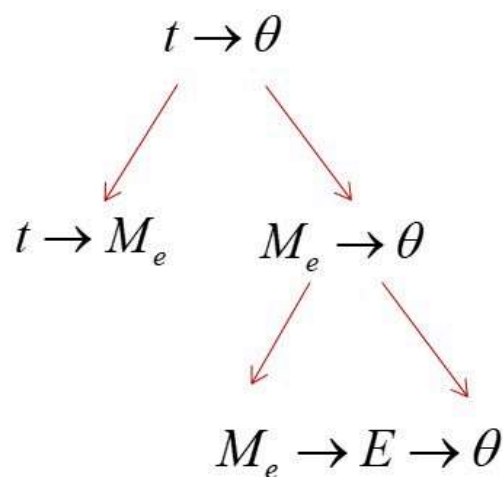
$$M_e = E - e \sin E \quad \text{开普勒方程}$$



4. 椭圆轨道



$$\frac{\mu^2}{h^3} t = \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \left[2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e\sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1+e \cos \theta} \right]$$



$$nt = M_e$$

$$M_e = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right) - \frac{e\sqrt{1-e^2} \sin \theta}{1+e \cos \theta}$$

$$nt = M_e$$

$$M_e = E - e \sin E$$

$$E = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right)$$

4. 椭圆轨道



真近点角 $\theta \rightarrow t$

$$\theta \xrightarrow{E = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right)} E \xrightarrow{M_e = E - e \sin E} M_e \xrightarrow{M_e = \frac{2\pi}{T} t} t$$

$t \rightarrow \theta$

$$t \xrightarrow{M_e = \frac{2\pi}{T} t} M_e \xrightarrow{M_e = E - e \sin E} E \xrightarrow{\tan \frac{\theta}{2} = \tan \frac{E}{2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}} \theta$$

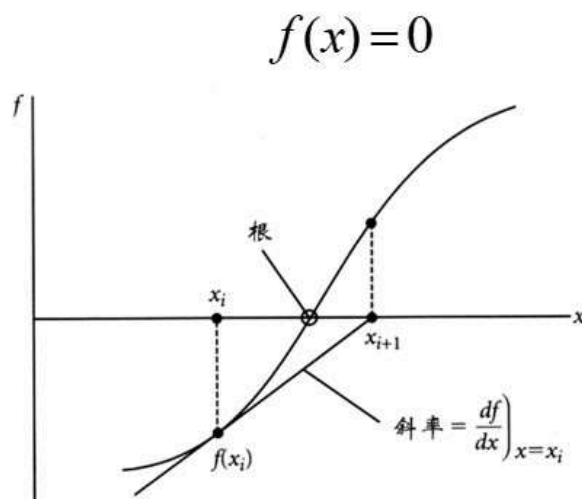
超越方程，不能直接求出 E

图解法，数值法，近似迭代法（牛顿迭代法）或其他方法求解 E

4. 椭圆轨道



牛顿法



估计 x_i

$$f'(x_i) = \frac{0 - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

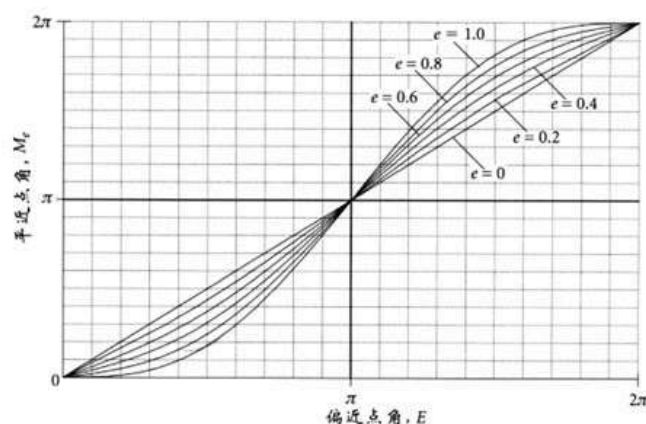
利用牛顿法解开普勒方程需要建立如下函数关系

$$f(E) = E - e \sin E - M_e$$

$$f'(E) = 1 - e \cos E$$

$$E_{i+1} = E_i - \frac{E_i - e \sin E_i - M_e}{1 - e \cos E_i}$$

4. 椭圆轨道



算法 3.1

已知偏心率 e 和平近点角 M_e ，从开普勒方程中解出偏近点角 E 。附录 D.2

将此算法在 MATLAB 中予以实现。

1. 按如下标准选择根 E 的初始估计值：若 $M_e < \pi$ ，则 $E = M_e + e/2$ ；若 $M_e > \pi$ ，则 $E = M_e - e/2$ 。注意： E 和 M_e 的单位均为弧度。 $E = M_e + e \sin(M_e)$
2. 在上步确定 E_i 值后，可在之后任意步中算出 $f(E_i) = E_i - e \sin E_i - M_e$ 和 $f'(E_i) = 1 - e \cos E_i$ 。
3. 算出比值 $ratio_i = f(E_i) / f'(E_i)$ 。
4. 若 $|ratio_i|$ 超出所要求的精度范围（如 10^{-8} ），则重新估计 E 值，

$$E_{i+1} = E_i - ratio_i$$

再返回第二步。

5. 如果 $|ratio_i|$ 小于所要求的精度范围，则此时 E_i 就是所设精度范围内的解。

4. 椭圆轨道



例3.1 一地心椭圆轨道，近地点半径为**9600**千米，远点半径为**21000**千米。求出由近地点**P**飞行至真近点角**120°**处所需要的时间

$$\theta \xrightarrow{E = 2 \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} \right)} E \xrightarrow{M_e = E - e \sin E} M_e \xrightarrow{M_e = \frac{2\pi}{T} t} t \quad e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = \frac{21000 - 9600}{21000 + 9600} = 0.37255$$

$$r = \frac{h^2}{\mu (1 + e \cos \theta)} \rightarrow 9600 = \frac{h^2}{398600 (1 + 0.37255 \cos(0))} \Rightarrow h = 72472 \text{ 千米}^2/\text{秒}$$

$$T = \frac{2\pi}{\mu^2} \left(\frac{h}{\sqrt{1-e^2}} \right)^3 = \frac{2\pi}{398600^2} \left(\frac{72472}{\sqrt{1-0.37255^2}} \right)^3 = 18834 \text{ 秒}$$

$$\tan \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-0.37255}{1+0.37255}} \tan \frac{120^\circ}{2} = 1.1711 \Rightarrow E = 1.7281 \text{ 弧度}$$

$$M_e = E - e \sin E \longrightarrow M_e = 1.7281 - 0.37255 \sin 1.7281 = 1.3601 \text{ 弧度}$$

$$t = \frac{M_e}{2\pi} T = \frac{1.3601}{2\pi} 18834 = 4077 \text{ 秒} \quad (1.132 \text{ 小时})$$

4. 椭圆轨道



例3.2:

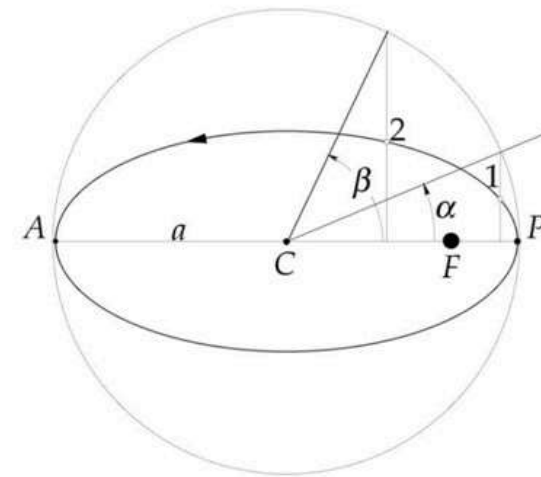
在例3.1中，分别求出自近地点起**1 h**和**3 h**后的真近点角
要求求解精度为 10^{-6}

作业



1. 一颗卫星在绕地轨道上运行，近地点高度为 200km ，远地点高度为 600km 。求出此卫星两次高度为 400km 时的时间间隔。

C为椭圆中心。已知偏心率 e ，轨道周期 T 和夹角 α 、 β ，推导从点1飞到点2的时间 t



C为椭圆中心。已知偏心率 e ，轨道周期 T 和夹角 α 、 β ，
推导从点1飞到点2的时间 t

$$t_{12} = t_2 - t_1 = \frac{M_2}{2\pi} T - \frac{M_1}{2\pi} T$$

$$t_{12} = \frac{T}{2\pi} (M_2 - M_1)$$

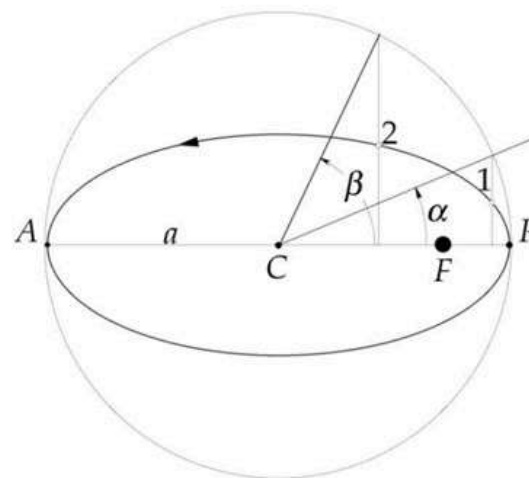
$$M_1 = E_1 - e \sin E_1 = \alpha - e \sin \alpha$$

$$M_2 = E_2 - e \sin E_2 = \beta - e \sin \beta$$

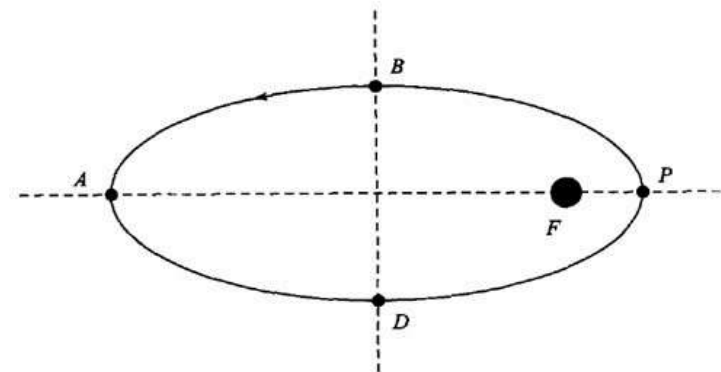
$$t_{12} = \frac{T}{2\pi} [(\beta - e \sin \beta) - (\alpha - e \sin \alpha)] = \frac{T}{2\pi} [\beta - \alpha + e(\sin \alpha - \cos \beta)]$$

$$\sin \alpha - \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\therefore t_{12} = \frac{T}{2\pi} \left[\beta - \alpha + 2e \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right]$$



3.6 如图 P.3.6 所示, 已知偏心率 e 和周期 T 。求(1)由点 D 经近地点飞行至点 B 所需要的时间;
(2)由点 B 经远地点飞行至点 D 所需要的时间。

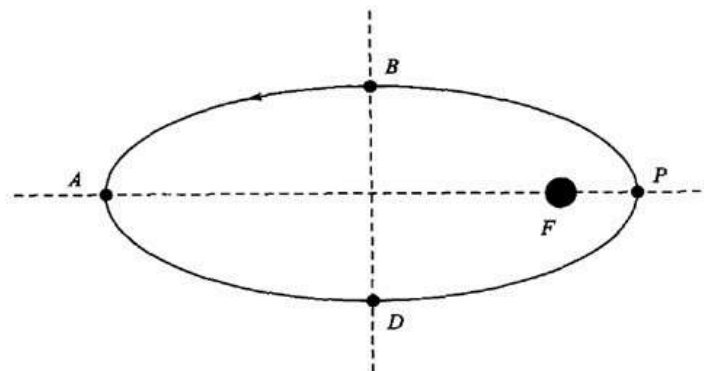


3.6 如图 P.3.6 所示,已知偏心率 e 和周期 T 。求(1)由点 D 经近地点飞行至点 B 所需要的时间;
(2)由点 B 经远地点飞行至点 D 所需要的时间。

$$M_B = E_B - e \sin E_B$$

$$2\pi \frac{t_B}{T} = \frac{\pi}{2} - e \sin \frac{\pi}{2}$$

$$t_B = \frac{\frac{\pi}{2} - e \sin \frac{\pi}{2}}{2\pi} T = \boxed{\left(\frac{1}{4} - \frac{e}{2\pi} \right) T}$$



$$t_{DB} = 2t_B, \quad t_{BD} = T - 2t_B$$

3.7 如图 P.3.7 所示,若椭圆的偏心率为 0.3,用周期 T 表示由点 P 飞行至点 B 所需要的时间。

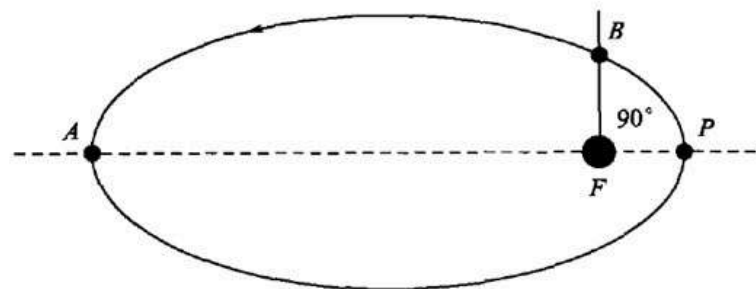


图 P.3.7

3.7 如图 P.3.7 所示,若椭圆的偏心率为 0.3,用周期 T 表示由点 P 飞行至点 B 所需要的时间。

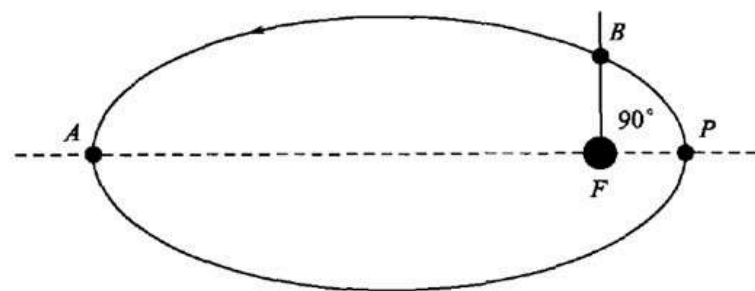


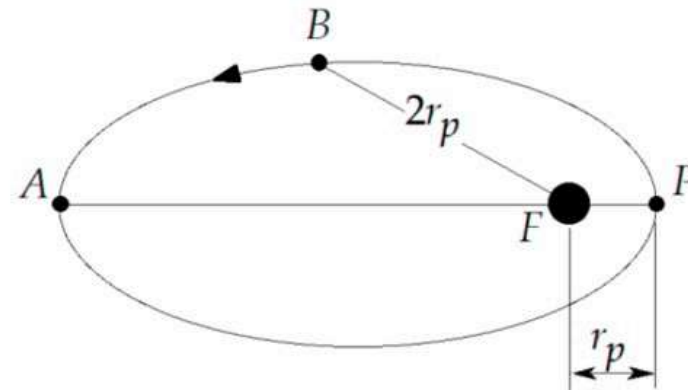
图 P.3.7

$$\tan \frac{E_B}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta_B}{2} = \sqrt{\frac{1-0.3}{1+0.3}} \tan \frac{\pi}{4} = 0.73380 \Rightarrow E_B = 1.2661 \text{ rad}$$

$$M_B = E_B - e \sin E_B = 1.2661 - 0.3 \sin 1.2661 = 0.97992 \text{ rad}$$

$$t_B = \frac{M_B}{2\pi} T = \frac{0.97992}{2\pi} T = \boxed{0.15596T}$$

若椭圆轨道的偏心率为0.5，周期为 T ，计算从P飞到B的时间



若椭圆轨道的偏心率为0.5，周期为T，计算从P飞到B的时间

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos \theta} \\ r_{\text{perigee}} &= \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e} \end{aligned} \right\} \Rightarrow r = \frac{r_{\text{perigee}} (1 + e)}{1 + e \cos \theta}$$

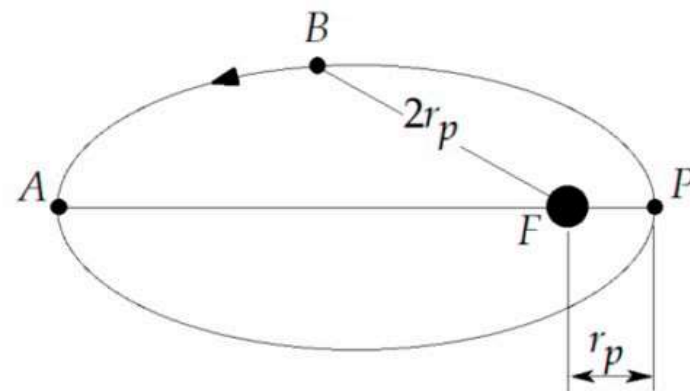
$$2r_{\text{perigee}} = \frac{r_{\text{perigee}} (1 + 0.5)}{1 + 0.5 \cos \theta_B}$$

$$\cos \theta_B = -0.5 \Rightarrow \theta_B = 120^\circ$$

$$\tan \frac{E_B}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \tan \frac{\theta_B}{2} = \sqrt{\frac{1-0.5}{1+0.5}} \tan \frac{120^\circ}{2} \Rightarrow E_B = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

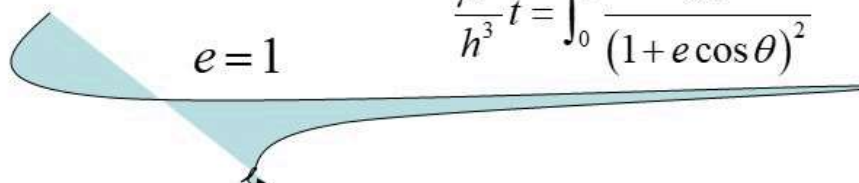
$$M_B = E_B - e \sin E_B = \frac{\pi}{2} - 0.5 \sin \frac{\pi}{2} = 1.0708 \text{ rad}$$

$$t_B = \frac{M_B}{2\pi} T = \frac{1.0708}{2\pi} T = \boxed{0.17042T}$$



5. 抛物线





$e=1$

$$\frac{\mu^2}{h^3}t = \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$
$$\frac{\mu^2}{h^3}t = \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2}$$

查积分表可以求得

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2} = \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{\theta}{2}$$

抛物线真近点角与时间的函数关系式

$$\frac{\mu^2}{h^3}t = \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{\theta}{2}$$

抛物线轨道的平近点角

$$M_p = \frac{\mu^2}{h^3}t$$

$$M_p = \frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2} + \frac{1}{6}\tan^3\frac{\theta}{2}$$

5. 抛物线



真近点角 $\theta \rightarrow t$

$$\frac{1}{2} \tan \frac{\theta}{2} + \frac{1}{6} \tan^3 \frac{\theta}{2} = \frac{\mu^2}{h^3} t$$

$\theta \quad \longrightarrow \quad t$

$t \rightarrow \theta$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \left[3M_p + \sqrt{(3M_p)^2 + 1} \right]^{\frac{1}{3}} - \left[3M_p + \sqrt{(3M_p)^2 + 1} \right]^{-\frac{1}{3}}$$

\longleftarrow

$$M_p = \frac{1}{2} \tan \frac{\theta}{2} + \frac{1}{6} \tan^3 \frac{\theta}{2}$$

$t \quad \longrightarrow \quad M_p \triangleq \frac{\mu^2}{h^3} t \quad \longrightarrow \quad \theta$

6. 双曲线



$$e > 1 \quad \frac{\mu^2}{h^3} t = \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2}$$

查积分表

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = \frac{1}{e^2 - 1} \left[\frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta} - \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} \ln \left(\frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)} \right) \right]$$

双曲线轨道的位置时间函数

$$\frac{\mu^2}{h^3} t = \frac{1}{e^2 - 1} \frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta} - \frac{1}{(e^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \ln \left(\frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)} \right)$$

两边同乘以 $(e^2 - 1)^{\frac{3}{2}}$ 可得

$$\frac{\mu^2}{h^3} (e^2 - 1)^{\frac{3}{2}} t = \frac{e \sqrt{e^2 - 1} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} - \ln \left(\frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)} \right)$$

6. 双曲线

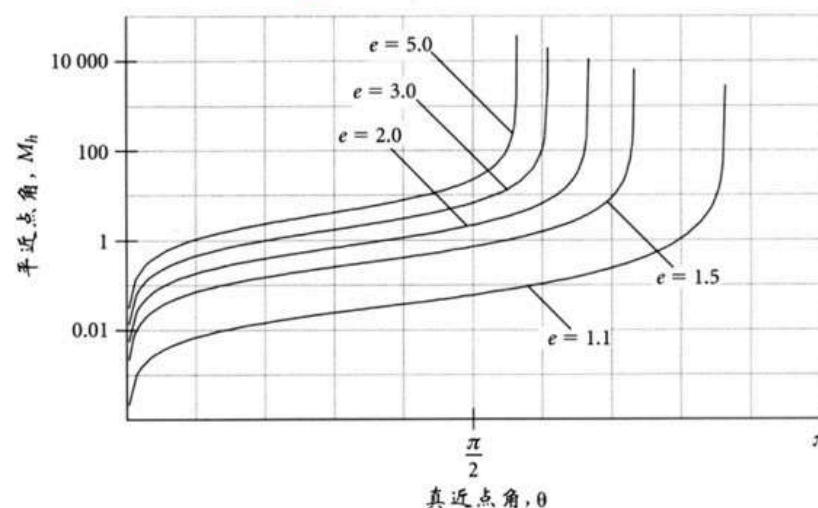


$$\frac{\mu^2}{h^3}(e^2-1)^{\frac{3}{2}}t = \frac{e\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta} - \ln\left(\frac{\sqrt{e+1}+\sqrt{e-1}\tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1}-\sqrt{e-1}\tan(\theta/2)}\right)$$

$$M_h = \frac{\mu^2}{h^3}(e^2-1)^{\frac{3}{2}}t$$

$$t = \frac{h^3}{\mu^2} \frac{1}{(e^2-1)^{\frac{3}{2}}} M_h$$

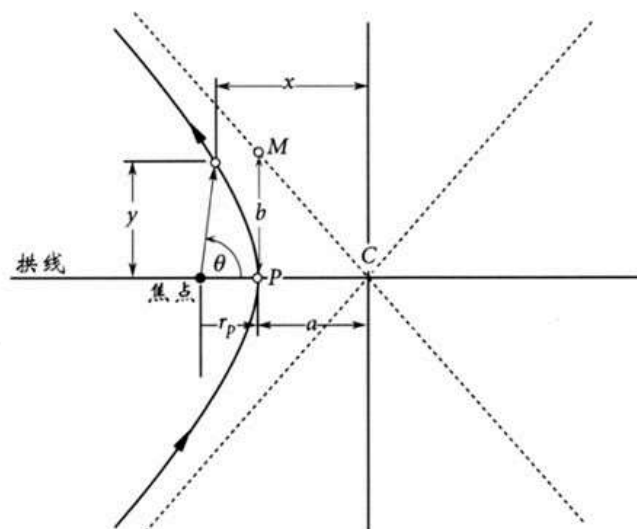
$$M_h = \frac{e\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta} - \ln\left(\frac{\sqrt{e+1}+\sqrt{e-1}\tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1}-\sqrt{e-1}\tan(\theta/2)}\right)$$



6. 双曲线



像在椭圆轨道中引入偏近点角 E 可以简化椭圆轨道真近点角和平近点角之间的关系一样，这里我们也可引入一辅助角 F 作为双曲线轨道的偏近点角。



$$\sinh F = \frac{y}{b}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\sinh x = (e^x - e^{-x})/2, \quad \cosh x = (e^x + e^{-x})/2$$

$$\cosh F = \frac{x}{a}$$

$$y = r \sin \theta$$

$$r = a(e^2 - 1)/(1 + e \cos \theta) \quad b = a\sqrt{e^2 - 1}$$

$$\sinh F = \frac{y}{b} \longrightarrow \sinh F = \frac{\sqrt{e^2 - 1} \sin \theta}{1 + e \cos \theta}$$

6. 双曲线



可以解得用真近点角表示的 F 为

$$F = \sinh^{-1} \left(\frac{\sqrt{e^2 - 1} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \right)$$

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$F = \ln \left(\frac{\sin \theta \sqrt{e^2 - 1} + \cos \theta + e}{1 + e \cos \theta} \right)$$

$$\sin \theta = \frac{2 \tan(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)}, \quad \cos \theta = \frac{1 - \tan^2(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)}$$

$$F = \ln \left(\frac{1 + e + (e - 1) \tan^2(\theta/2) + 2 \tan(\theta/2) \sqrt{e^2 - 1}}{1 + e + (1 - e) \tan^2(\theta/2)} \right)$$

$$F = \ln \left(\frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)} \right)$$

6. 双曲线



$$F = \ln \left(\frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)} \right)$$

任务：进一步简化由真近点角求偏近点角的公式

$$\begin{aligned} \sinh F &= \frac{\sqrt{e^2 - 1} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \\ \cosh^2 F - \sinh^2 F &= 1 \\ \cosh F &= \frac{\cos \theta + e}{1 + e \cos \theta} \Rightarrow \cos \theta = \frac{\cosh F - e}{1 - e \cosh F} \\ \tanh F &= \frac{\sinh F}{\cosh F} \\ \text{查数学手册} \quad \downarrow \quad \tanh \frac{F}{2} &= \frac{\sinh F}{1 + \cosh F} \\ \tan \frac{\theta}{2} &= \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \\ \tanh \frac{F}{2} &= \frac{\sqrt{e-1}}{\sqrt{e+1}} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \Rightarrow \tanh \frac{F}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \tan \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

6. 双曲线

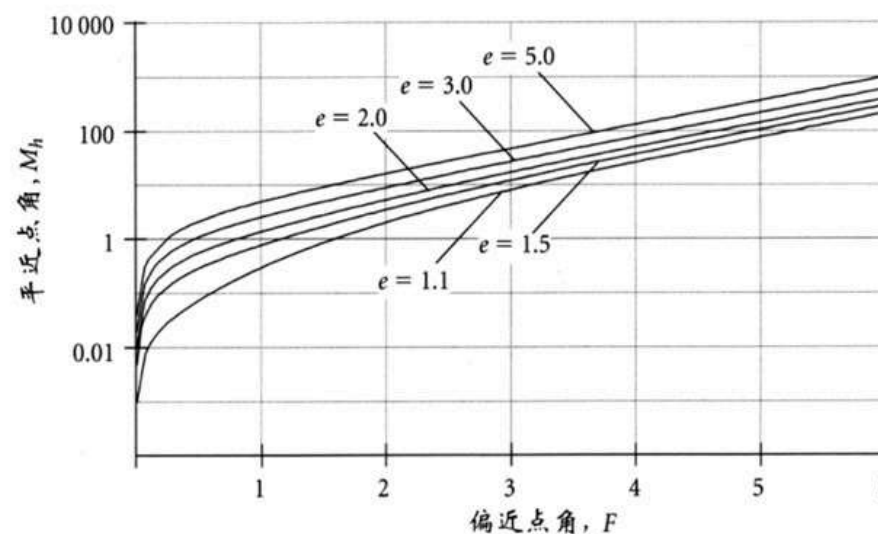


$$\sinh F = \frac{\sqrt{e^2 - 1} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} \quad F = \ln \left(\frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)} \right)$$

$$M_h = \frac{e\sqrt{e^2 - 1} \sin \theta}{1 + e \cos \theta} - \ln \left(\frac{\sqrt{e+1} + \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1} - \sqrt{e-1} \tan(\theta/2)} \right)$$



$$M_h = e \sinh F - F \quad \text{双曲线的开普勒方程}$$



6. 双曲线



真近点角 $\theta \rightarrow t$

$$\theta \xrightarrow{\tanh \frac{F}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \tan \frac{\theta}{2}} F \xrightarrow{M_h = e \sinh F - F} M_h \xrightarrow{t = \frac{h^3}{\mu^2} \frac{1}{(e^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} M_h} t$$

$t \rightarrow \theta$

$$t \xrightarrow{M_h \triangleq \frac{\mu^2}{h^3} (e^2 - 1)^{\frac{3}{2}} t} M_h \xrightarrow{M_h = e \sinh F - F} F \xrightarrow{\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \tanh \frac{F}{2}} \theta$$

超越方程，不能直接求出 F

牛顿迭代法

7. 全局变量



椭圆方程→双曲线方程

$$a \leftarrow -a$$

$$b \leftarrow ib$$

$$M_e \leftarrow iM_h$$

$$E \leftarrow iF$$

$$\sin(iF) = i \sinh F, \cos(iF) = \cosh F$$

研究全局变量的目的: 将开普勒方程的不同形式合并为单一通用的开普勒方程

一般	特殊
$r \leftrightarrow \theta$	$\theta \leftrightarrow t$
一般	一般
$r \leftrightarrow \chi$	$\chi \leftrightarrow t$

7. 全局变量



程 适用于所有形式的轨道方

轨道半径 r :

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos \theta}$$

长半轴 a :

$$a = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 - e^2}$$

假设: 双曲线的长半轴为负值

能量函数:

$$\frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \Rightarrow a = \frac{1}{\frac{2}{r} - \frac{v^2}{\mu}} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \Rightarrow \text{椭圆轨道} \\ a < 0 \Rightarrow \text{双曲线轨道} \end{cases}$$

全局近点角 χ (chi) ← 全局变量

$$r \leftarrow \chi \leftarrow t$$

7. 全局变量



设 t_0 表示全局变量为零的时刻, χ 表示 $t_0 + \Delta t$ 时刻的全局近点角值 (全局变量), 单位是千米的平方根

全局开普勒方程:

$t=t_0$ 时刻的半径

$t=t_0$ 时刻的径向速度

$$\alpha = \frac{1}{a} \begin{cases} > 0 & \text{椭圆} \\ = 0 & \text{抛物线} \\ < 0 & \text{双曲线} \end{cases}$$

$$\sqrt{\mu} \Delta t = \frac{r_0 v_{r0}}{\sqrt{\mu}} \chi^2 C(\alpha \chi^2) + (1 - \alpha r_0) \chi^3 S(\alpha \chi^2) + r_0 \chi$$

$\alpha \chi^2$ 是无量纲的

$C(z), S(z)$ 斯达姆夫函数的无穷级数定义

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{(2k+3)!} = \frac{1}{6} - \frac{z}{120} + \frac{z^2}{5040} - \frac{z^3}{362880} + \frac{z^4}{39916800} - \frac{z^5}{6227020800} + \dots$$

$$C(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{(2k+2)!} = \frac{1}{2} - \frac{z}{24} + \frac{z^2}{720} - \frac{z^3}{40320} + \frac{z^4}{3628800} - \frac{z^5}{479001600} + \dots$$

7. 全局变量



$S(z), C(z)$ 与圆周三角函数和双曲三角函数的关系为

$$S(z) = \begin{cases} \frac{\sqrt{z} - \sin \sqrt{z}}{(\sqrt{z})^3} & (z > 0) \\ \frac{\sinh \sqrt{-z} - \sqrt{-z}}{(\sqrt{-z})^3} & (z < 0) \\ \frac{1}{6} & (z = 0) \end{cases} \quad (z = \alpha \chi^2)$$

$$C(z) = \begin{cases} \frac{1 - \cos \sqrt{z}}{z} & (z > 0) \\ \frac{\cosh \sqrt{-z} - 1}{-z} & (z < 0) \\ \frac{1}{2} & (z = 0) \end{cases} \quad (z = \alpha \chi^2)$$

