

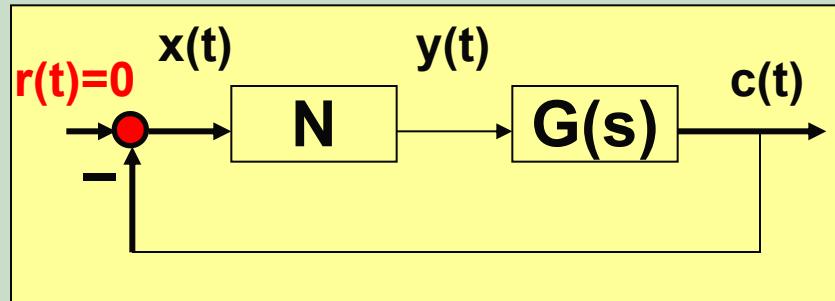
7-3 描述函数法

§ 7-3 描述函数法

一. 基本概念

分析无外作用的情况下，非线性系统的稳定性和自振问题。

1. 应用条件

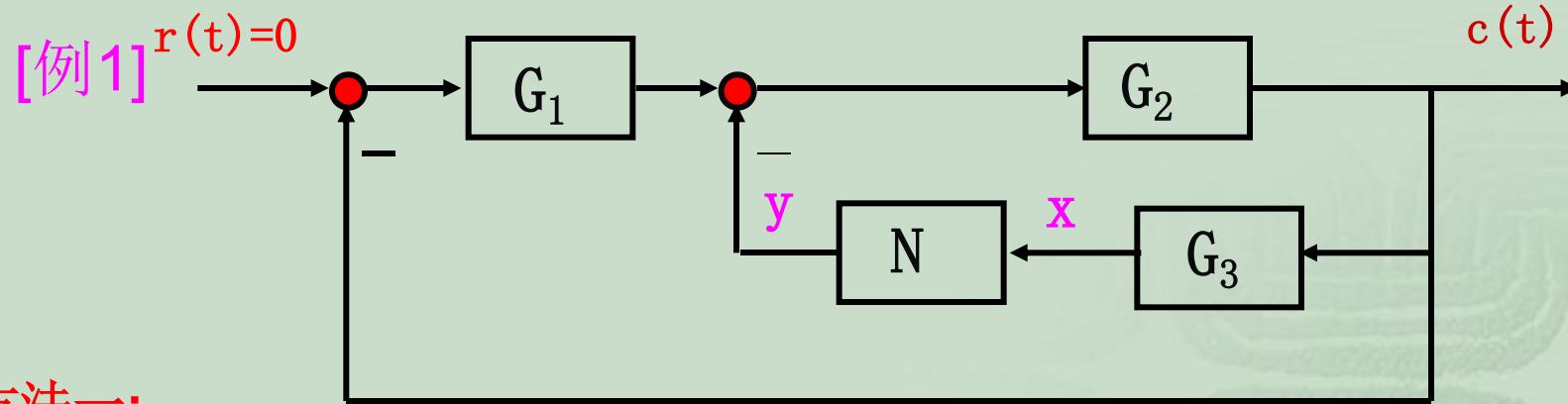


- a. 非线性系统应简化为一个非线性环节N和一个线性部分G(s)串联.

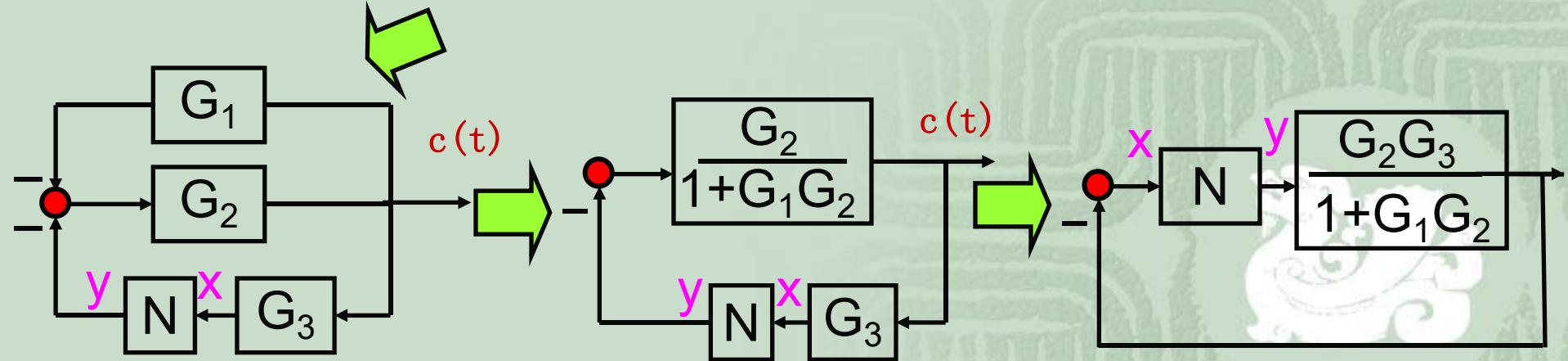
等效变换的原则是：非线性环节输入 $x(t)$ 和输出信号 $y(t)$ 的关系不变化，系统输出量 $c(t)$ 可看成中间变量，设 $r(t)=0$

a. 非线性系统应简化为一个非线性环节N和一个线性部分G(s)串联。

等效变换的原则是：非线性环节输入x(t)和输出信号y(t)的关系不变化，系统输出量 c(t) 可看成中间变量，设r(t)=0

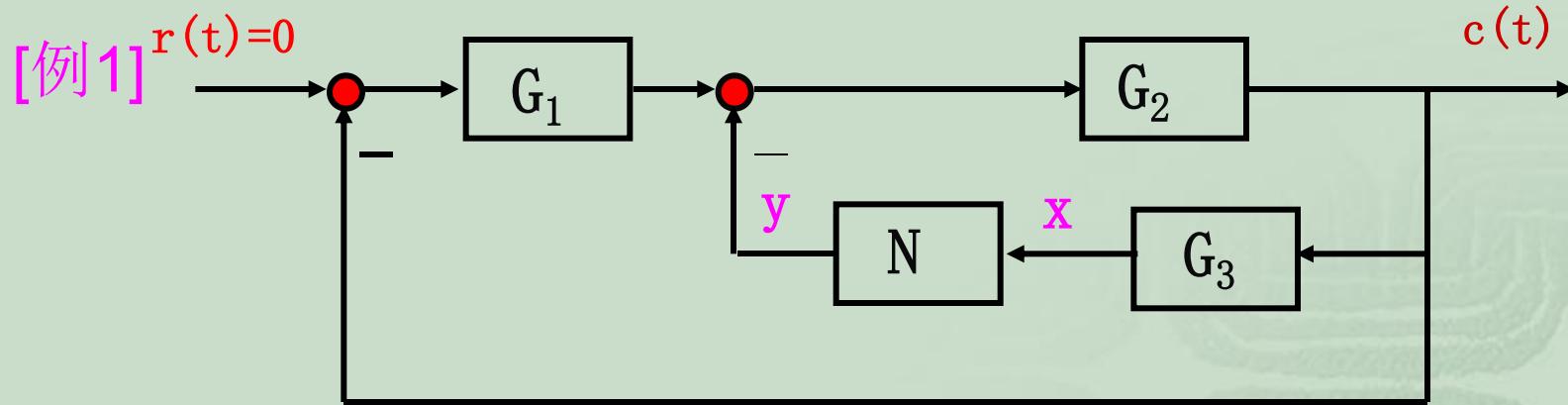


方法一：



a. 非线性系统应简化为一个非线性环节N和一个线性部分G(s)串联.

等效变换的原则是：非线性环节输入x(t)和输出信号y(t)的关系，不变化系统输出量 c(t)可看成中间变量，设r(t)=0



方法二：令 $D(s)=1+G(s)N(A)=0$

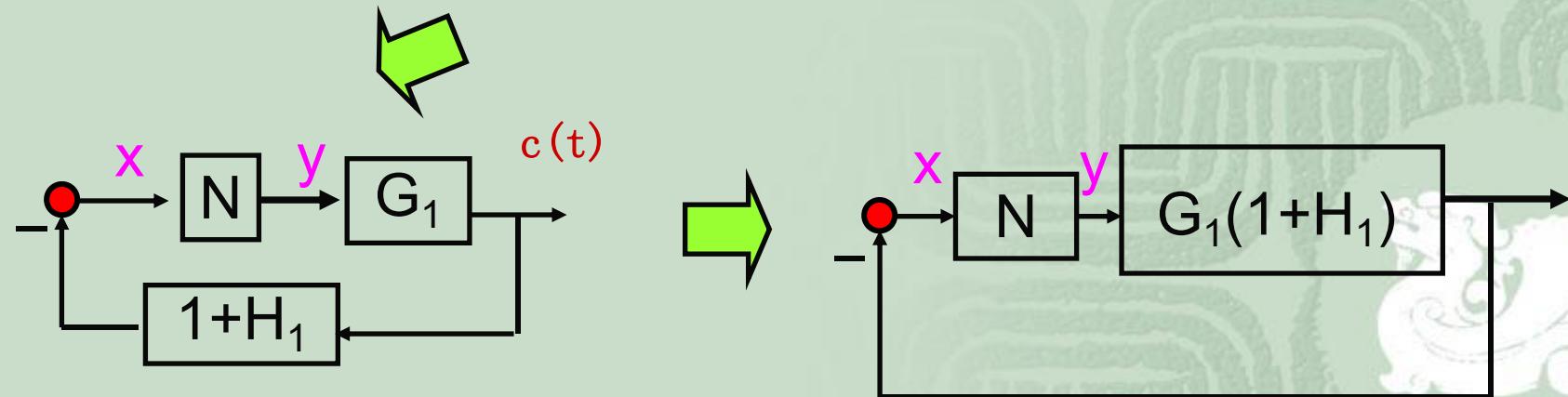
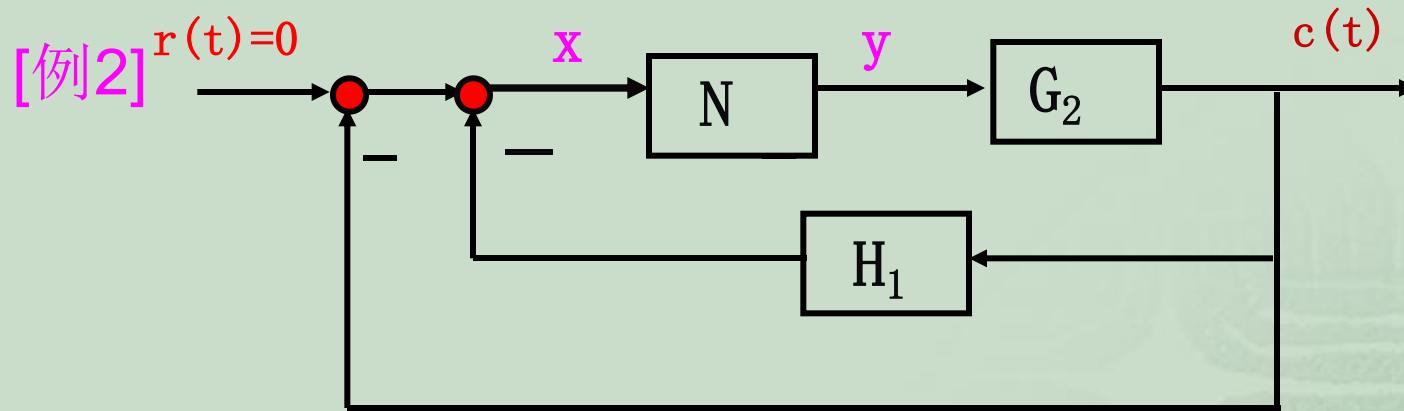
$$D(s)=1+G_1G_2+G_2G_3N=0$$

$$\therefore 1 + \frac{G_2G_3}{1+G_1G_2} N = 0$$

则: $G(s) = \frac{G_2G_3}{1+G_1G_2}$

a. 非线性系统应简化为一个非线性环节N和一个线性部分G(s)串联.

等效变换的原则是：非线性环节输入x(t)和输出信号y(t)的关系不变化系统输出量 $c(t)$ 可看成中间变量，设 $r(t)=0$

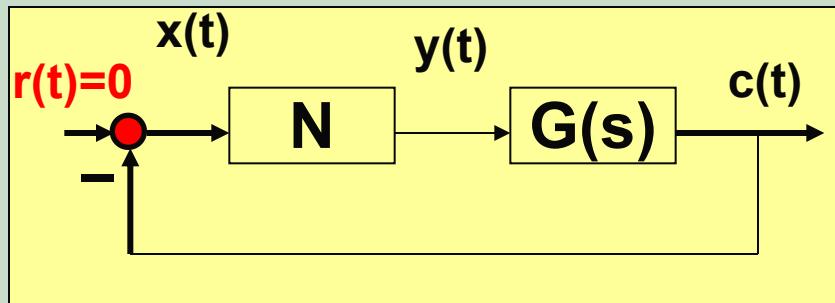


$$D(s) = ?$$

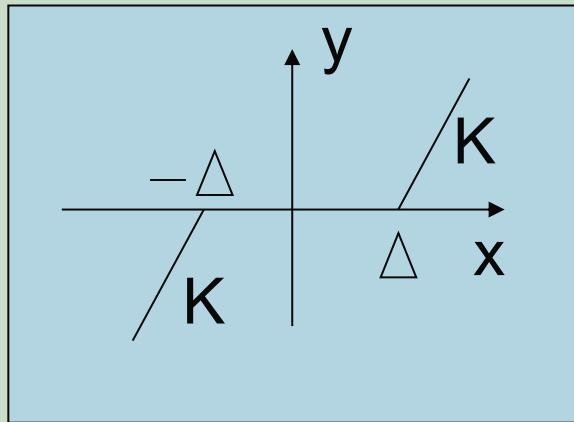
一. 基本概念

描述函数法, 是线性系统频率特性法的一种推广.

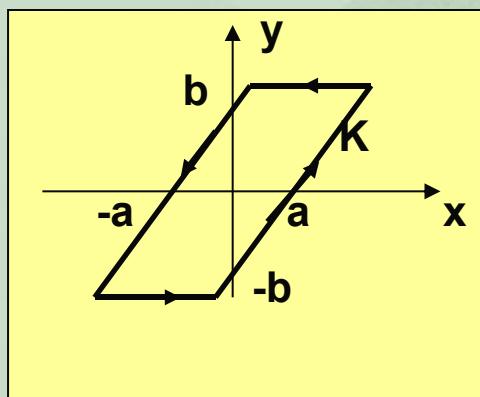
1. 应用条件



b. 非线性环节N特点应为奇对称, 即 $y(x) = -y(-x)$



死区特性



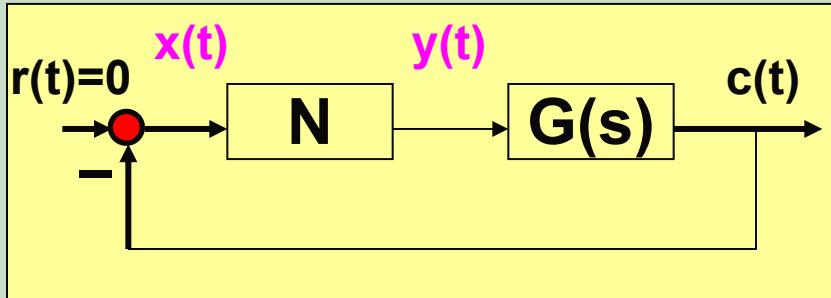
间隙特性

(关于原点对称)

一. 基本概念

描述函数法, 是线性系统频率特性法的一种推广.

1. 应用条件



b. 非线性环节N特点应为奇对称, 即 $y(x) = -y(-x)$

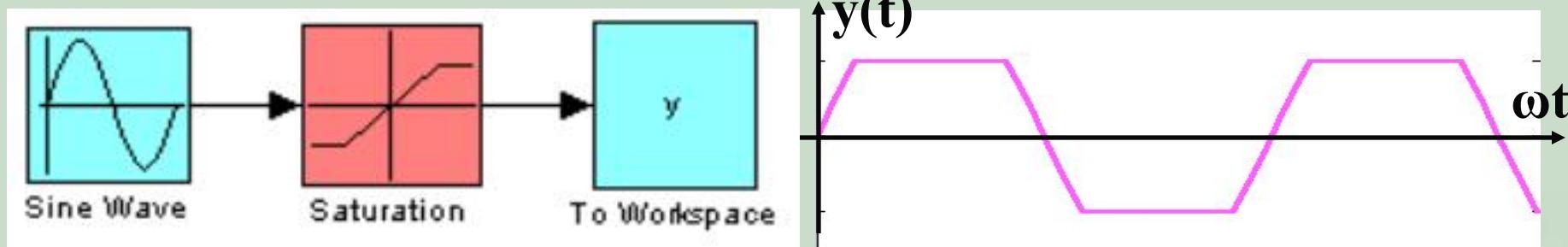
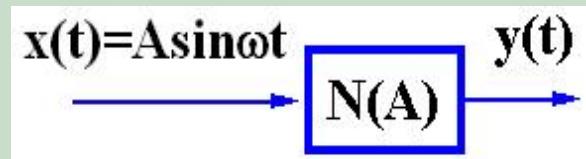
(关于原点对称)

c. 线性部分具有良好的低通滤波特性.

它保证当 $x(t)$ 为正弦信号, $y(t)$ 高次谐波分量被大大削弱, 此时闭环通道可近似为只有一次谐波信号通过.

2. 描述函数定义

设 $x(t) = A \sin \omega t$, $y(t) = ?$



一个周期函数在一定条件下,可展成 Fourier 级数

$$\text{则 } y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(n\omega t + \phi_n)$$

$y(t)$ 为一系列谐波分量之和

其中

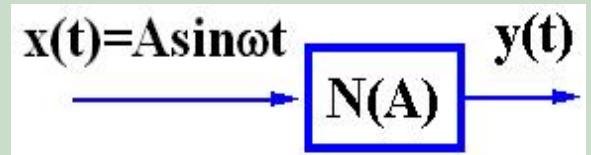
$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos n\omega t d(\omega t), B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin n\omega t d(\omega t)$$

$$Y_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}, \phi_n = \arctan \frac{A_n}{B_n}$$

A_0 --- 平均值(直流分量)

这里 $A_0 = 0$

2. 描述函数定义



设 $x(t) = A \sin \omega t$, $y(t) = ?$

一个周期函数在一定条件下,可展成 Fourier 级数

则

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t)$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(n\omega t + \phi_n)$$

y(t)为一系列谐波分量之和

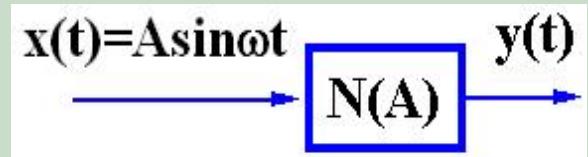
这里 $A_0 = 0$

由于线性部分具有良好低通滤波特性(条件c),将y(t)高频成分滤掉,只剩下一次谐波分量

$$y(t) \approx y_1(t) = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t = Y_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$

2. 描述函数定义

设 $x(t) = A \sin \omega t$, $y(t) = ?$



$$y(t) \approx y_1(t) = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t = Y_1 \sin(\omega t + \phi_1)$$

结论

N 非线性环节，输入 $x(t) = A \sin \omega t$, 则其输出 $y(t)$ 为与输入同频率正弦信号, 只是幅值与相角不同.

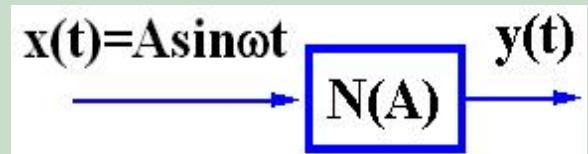
描述函数:

$$N(A) = \frac{Y_1}{A} \angle \Phi_1 = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{A} \angle \arctan \frac{A_1}{B_1}$$

非线性特性的输出一次谐波分量与输入正弦量复数比

2. 描述函数定义

设 $x(t) = A \sin \omega t$, $y(t) = ?$



$$y(t) \approx y_1(t) = Y_1 \sin(\omega t + \Phi_1)$$

描述函数:

$$N(A) = \frac{Y_1}{A} \angle \Phi_1 = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{A} \angle \arctan \frac{A_1}{B_1}$$

非线性特性的输出一次谐波分量与输入正弦量复数比

A ----- 非线性环节 输入正弦函数幅值

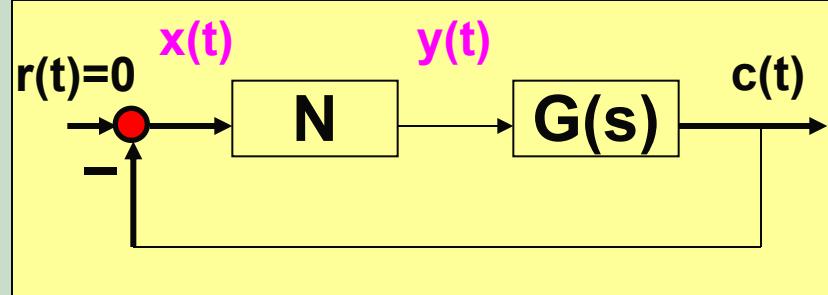
Y_1 ----- 非线性环节一次谐波幅值输出

Φ_1 ----- 输出一次谐波与输入正弦信号的相位差

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos \omega t d(\omega t) \quad B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t)$$

2.描述函数定义

设 $x(t) = A \sin \omega t$, $y(t) = ?$



描述函数:

$$N(A) = \frac{Y_1}{A} \angle \Phi_1 = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{A} \angle \arctan \frac{A_1}{B_1}$$

非线性特性的输出一次谐波分量与输入正弦量复数比

A ——输入正弦函数幅值

Y_1 ——输出一次谐波幅值

Φ_1 ——输出一次谐波与输入正弦信号的相位差

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos \omega t d(\omega t) \quad B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t)$$

注: 线性系统频率特性与输入正弦信号的 ω 有关, 与 A 无关; 而一般描述函数只与输入正弦信号的 A 有关, 与 ω 无关. 故可将描述函数看成 A 的函数记作 $N(A)$.

二. 典型非线性特性描述函数

■ 饱和特性

$$x(t) = A \sin \omega t$$

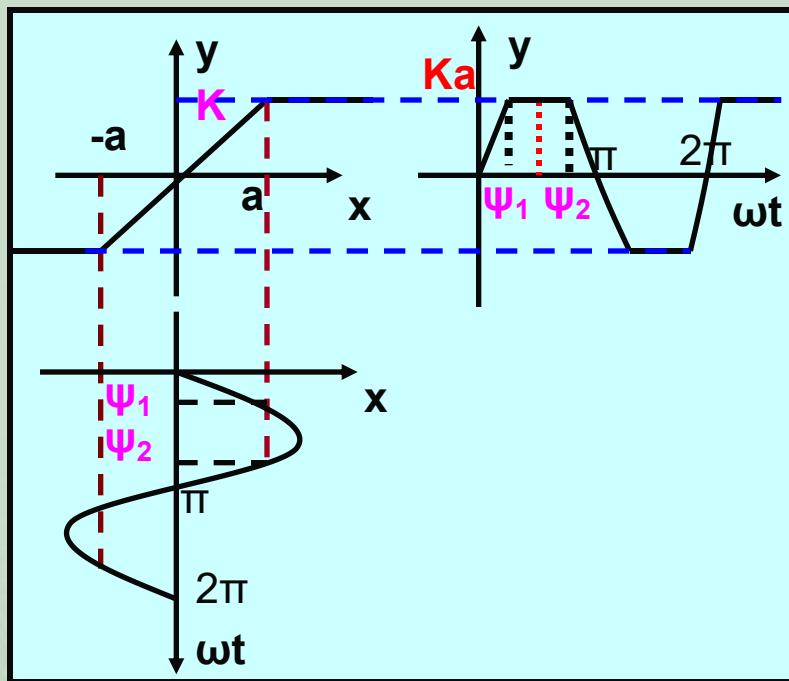
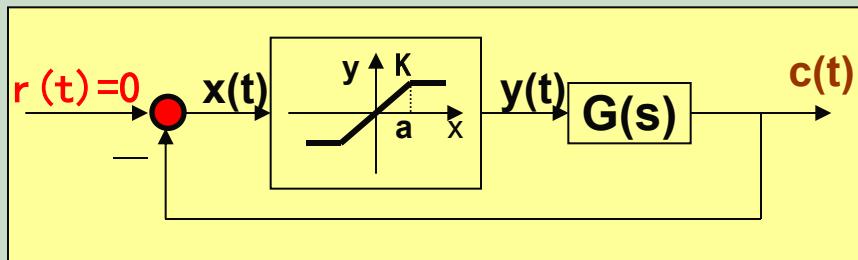
$$y(t) = \begin{cases} KA \sin \omega t & 0 \leq \omega t \leq \Psi_1 \\ Ka & \Psi_1 \leq \omega t \leq \pi/2 \end{cases}$$

$\therefore y(t)$ 是奇函数, $\therefore A_1=0, \Phi_1=0$

解释:

$$N(A) = \frac{Y_1}{A} \angle \Phi_1 = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{A} \angle \arctan \frac{A_1}{B_1}$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \cos \omega t d(\omega t) \quad B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t)$$



二. 典型非线性特性描述函数

■ 饱和特性

$$x(t) = A \sin \omega t$$

$$y(t) = \begin{cases} KA \sin \omega t & 0 \leq \omega t \leq \Psi_1 \\ Ka & \Psi_1 \leq \omega t \leq \pi/2 \end{cases}$$

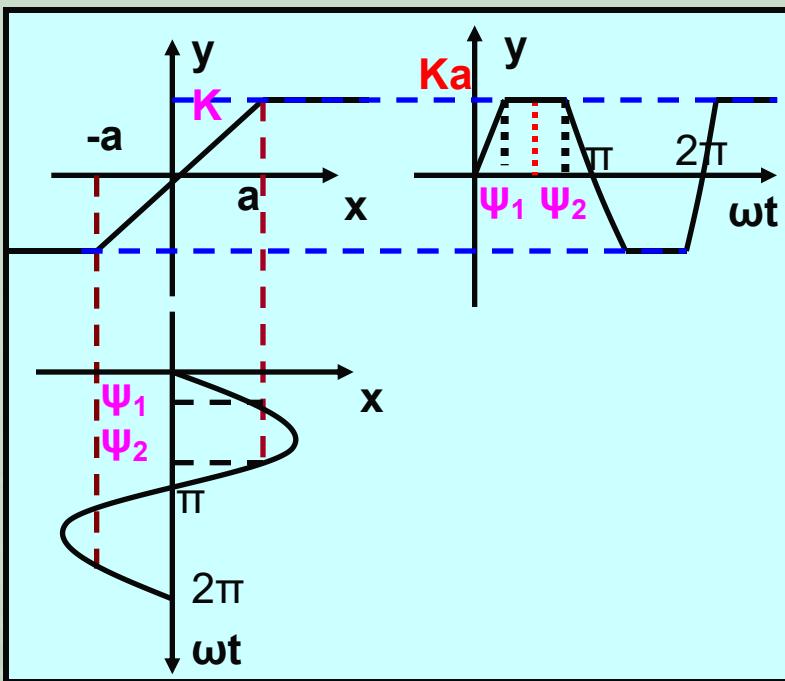
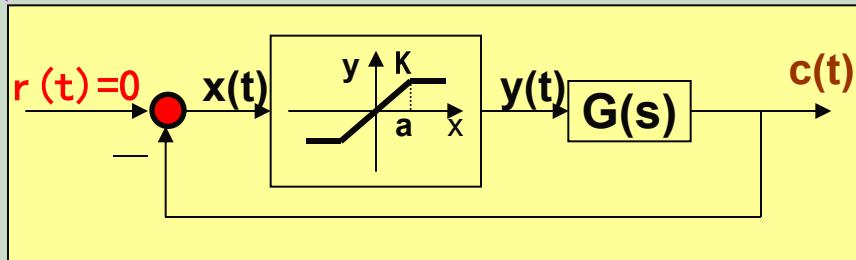
$\therefore y(t)$ 是奇函数, $\therefore A_1=0, \Phi_1=0$

$$\text{则 } B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t)$$

$$= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} y(t) \sin \omega t d(\omega t)$$

$$= -\frac{4}{\pi} \int_0^{\Psi_1} KA \sin^2 \omega t d(\omega t) + \frac{4}{\pi} \int_{\Psi_1}^{\pi/2} Ka \sin \omega t d(\omega t)$$

$$= \frac{2KA}{\pi} \left[\arcsin\left(\frac{a}{A}\right) + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right]$$



■ 饱和特性

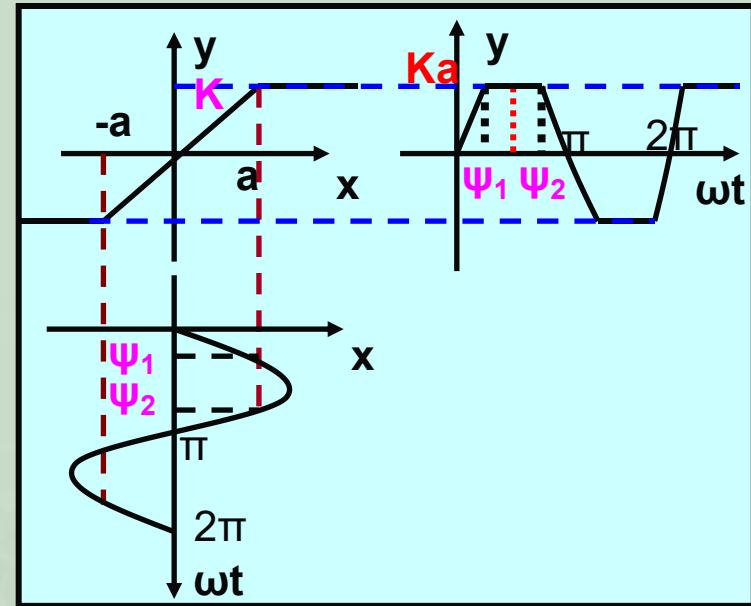
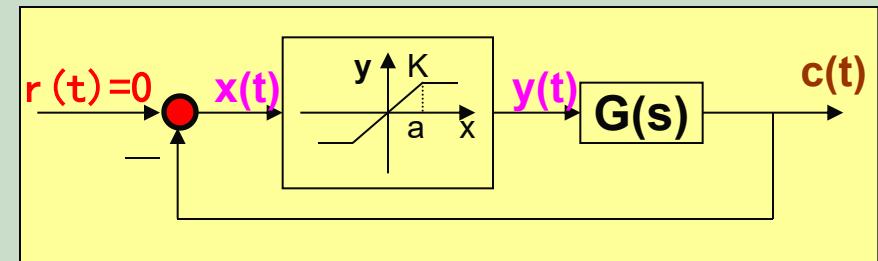
$$x(t) = A \sin \omega t$$

$$y(t) = \begin{cases} KA \sin \omega t & 0 \leq \omega t \leq \Psi_1 \\ Ka & \Psi_1 \leq \omega t \leq \pi/2 \end{cases}$$

$$A_1 = 0, \Phi_1 = 0$$

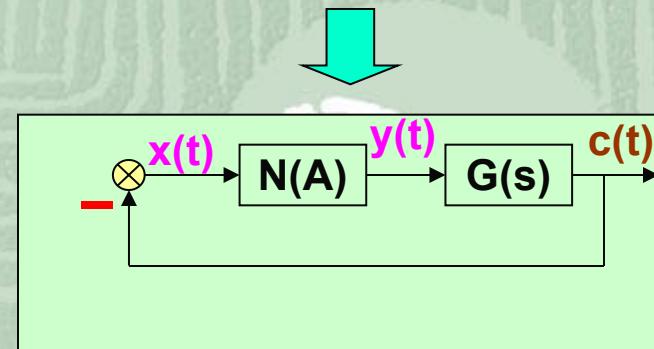
则 $B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} y(t) \sin \omega t d(\omega t)$

$$= \frac{2KA}{\pi} \left[\arcsin\left(\frac{a}{A}\right) + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right]$$



$$N(A) = \frac{Y_1}{A} \angle \Phi_1 = \frac{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{A} \angle \arctan \frac{A_1}{B_1}$$

则 $N(A) = \frac{2K}{\pi} \left[\arcsin\left(\frac{a}{A}\right) + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right]$

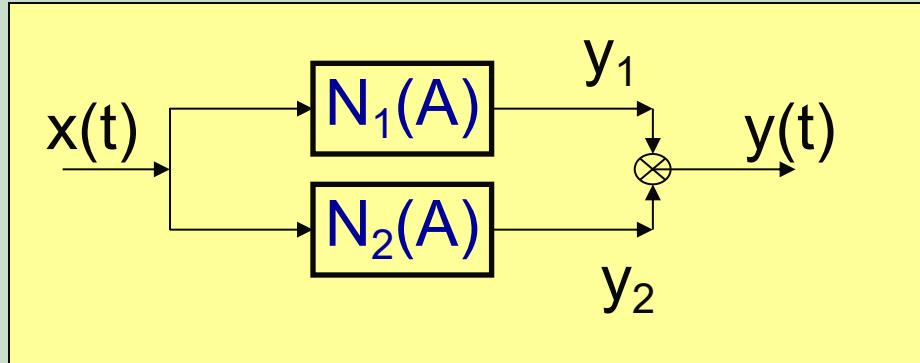


■ 2.组合非线性特性

a)并联

$$y_1 = N_1(A) A \sin \omega t$$

$$y_2 = N_2(A) A \sin \omega t$$



$$\therefore y = y_1 + y_2 = N_1(A) A \sin \omega t + N_2(A) A \sin \omega t = (N_1(A) + N_2(A)) A \sin \omega t$$

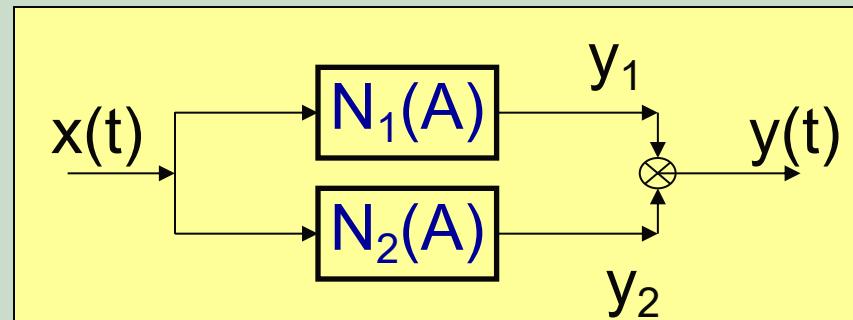
总描述函数: $N(A) = N_1(A) + N_2(A)$

结论:N个非线性环节**并联**, 总描述函数
等于各环节描述函数的**代数和**

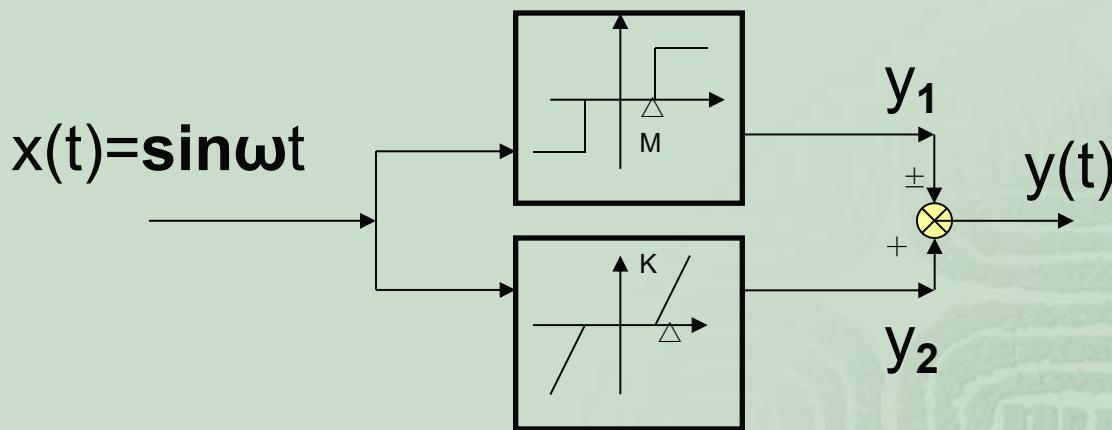
■ 2. 组合非线性特性

a) 并联

总描述函数: $N(A) = N_1(A) + N_2(A)$

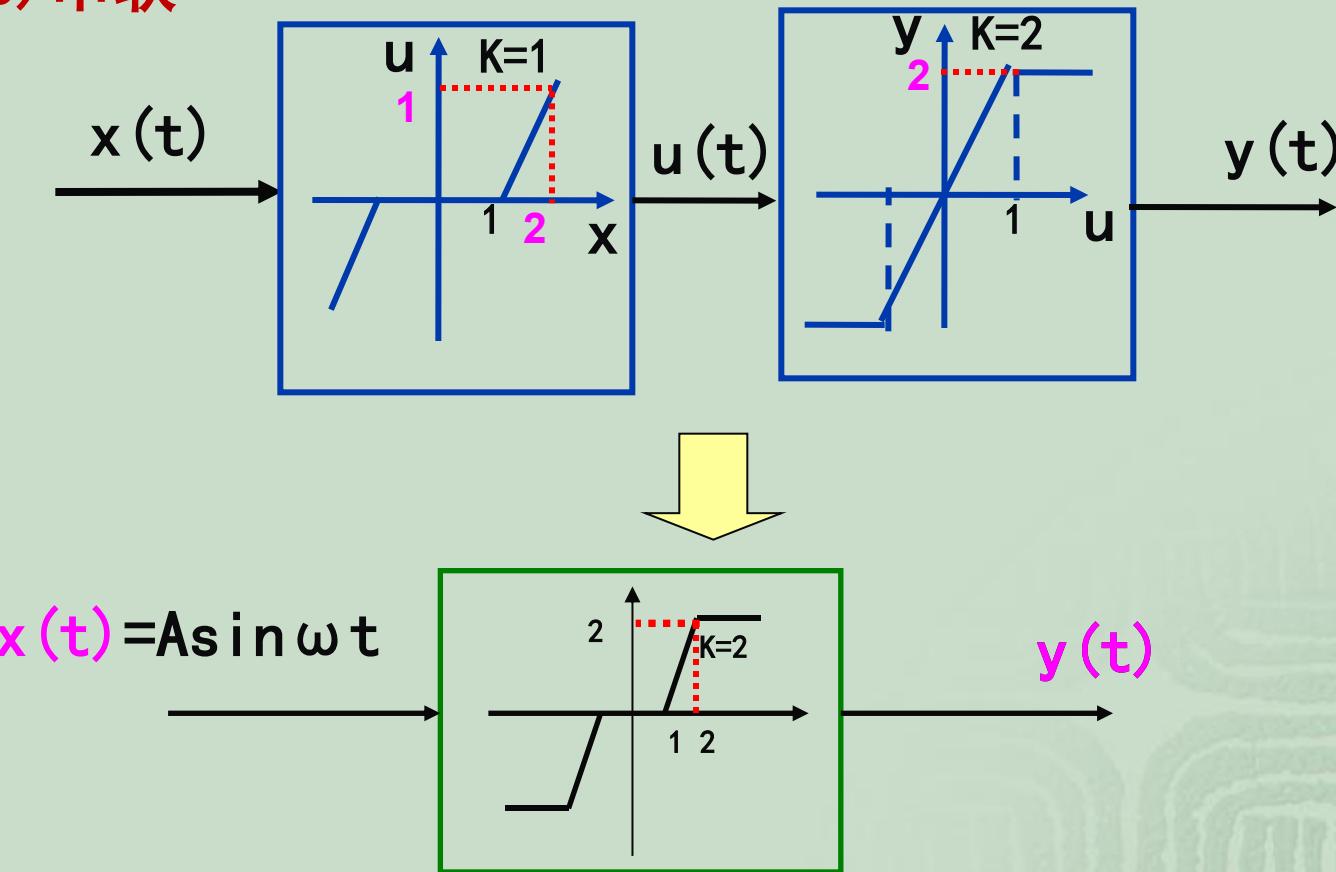


[例]



$$N(A) = \frac{4M}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{A}\right)^2} \pm \frac{2K}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\Delta}{A} - \frac{\Delta}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta}{A}\right)^2} \right] \quad (A \geq \Delta)$$

b) 串联



I. 求等效非线性特性；

II. 求描述函数 $N(A) = \frac{4}{\pi} [\arcsin \frac{2}{A} - \arcsin \frac{1}{A} + \frac{2}{A} \sqrt{1 - (\frac{2}{A})^2} - \frac{1}{A} \sqrt{1 - (\frac{1}{A})^2}]$ ($A > 2$)

注：两非线性环节次序变换，则总描述函数不一样。

三、用描述函数法分析非线性系统

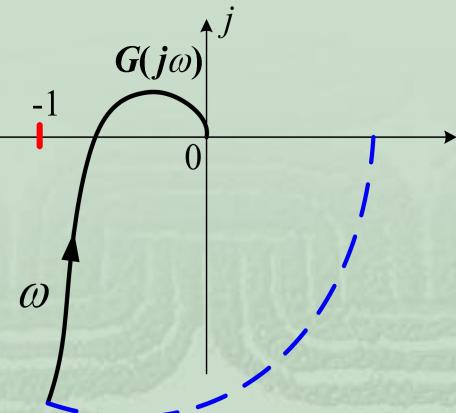
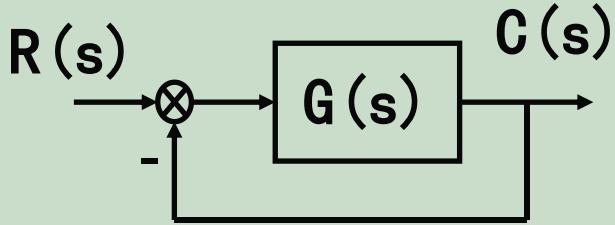
1). 稳定性

线性系统：

特征方程: $1+G(s)=0$ 即 $G(j\omega)=-1$

奈氏判据: $G(j\omega)$ 是否包围临界点 $(-1, j0)$

$(G(j\omega))$ 与 $(-1, j0)$ 的相对位置)



非线性系统：

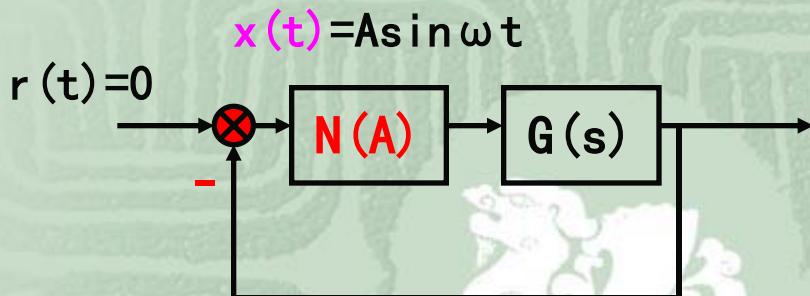
特征方程: $1+N(A)G(s)=0$

即

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$$

线性部分
频率特性

负倒描述
函数



1). 稳定性

线性系统：

特征方程: $1+G(s)=0$ 即 $G(j\omega)=-1$

奈氏判据： $G(j\omega)$ 是否包围临界点 $(-1, j0)$
 $(G(j\omega))$ 与 $(-1, j0)$ 的相对位置)

非线性系统：

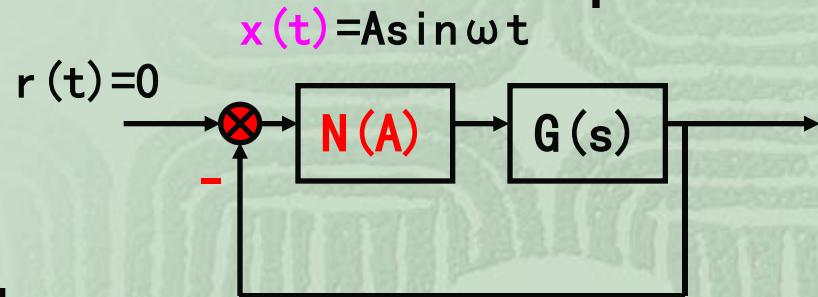
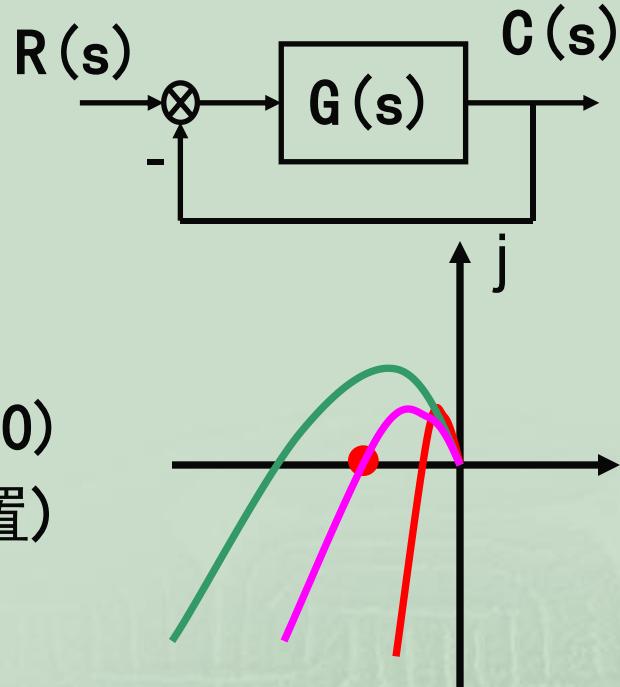
特征方程: $1+N(A)G(s)=0$

即

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$$

线性部分
频率特性

负倒描述
函数

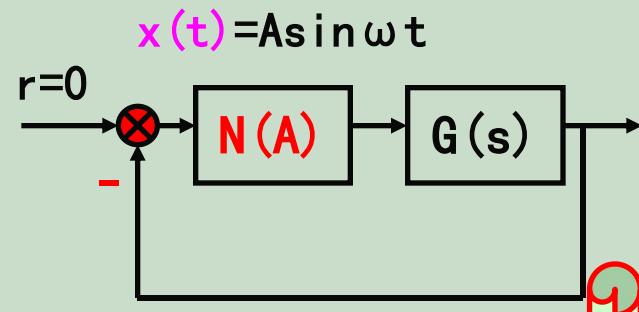


将 $-1/N(A)$ 看成临界点，它为随 A 变化的一条曲线；将 $-1/N(A)$ 和 $G(j\omega)$ 随 ω 变化的曲线绘制在同一复平面上，由它们的相对位置判稳。

非线性系统：特征方程： $1+N(A)G(s)=0$

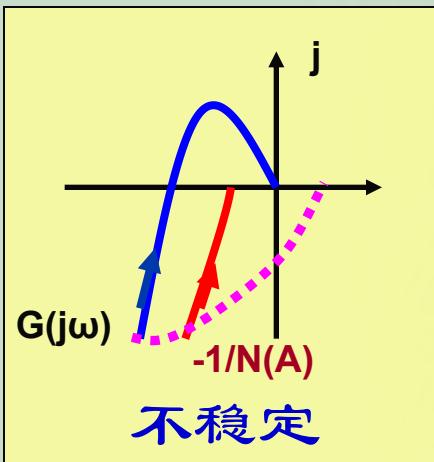
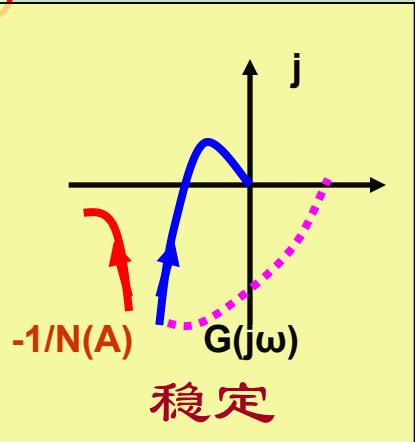
即

$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$$

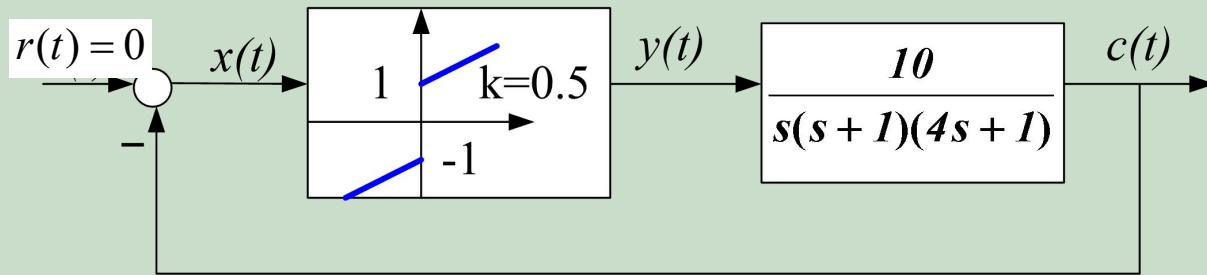


稳定判据：

- ① 若 $G(j\omega)$ 不包围 $-1/N(A)$ 轨迹， 系统稳定
且 $G(j\omega)$ 远离 $-1/N(A)$ ， 系统相对稳定性越好.
- ② 若 $G(j\omega)$ 包围 $-1/N(A)$ ， 系统不稳定， 其响应发散.



【例】 已知非线性系统结构如图



试分析该系统的稳定性。

解 1、非线性环节为库仑摩擦加黏性摩擦

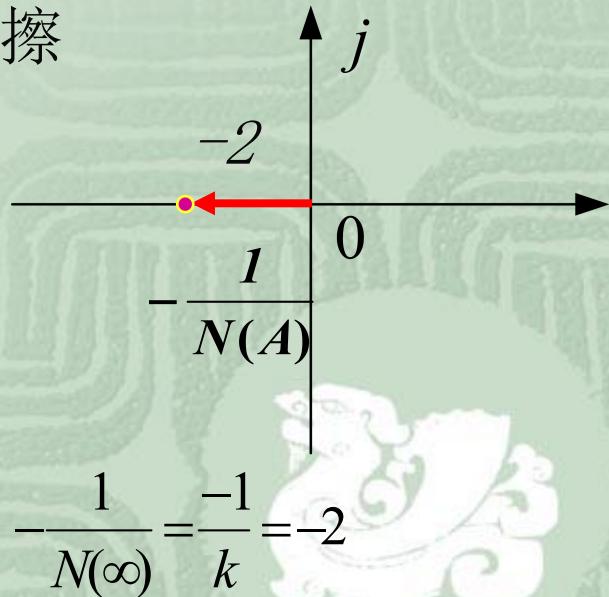
查表得描述函数 $N(A) = K + \frac{4M}{\pi A}$

负倒描述函数 $-\frac{1}{N(A)} = \frac{-1}{K + \frac{4M}{\pi A}}$

起点: $-\frac{1}{N(0)} = 0$

终点: $-\frac{1}{N(\infty)} = \frac{-1}{k} = -2$

趋势: 沿实轴单调 如图



2、线性环节

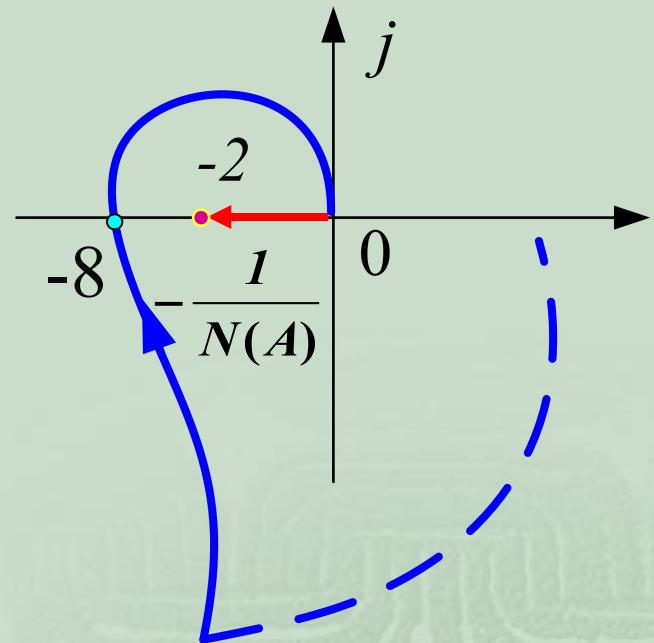
$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)(4s+1)}$$

$$G(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+1)(4j\omega+1)}$$

$$\omega_x = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = 0.5$$

$$G(j\omega_x) = \frac{-KT_1 T_2}{T_1 + T_2} = -8$$

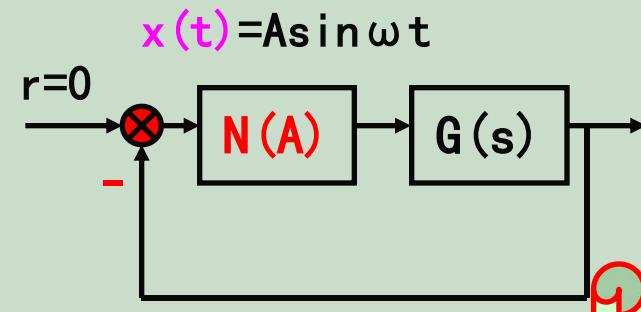
$G(j\omega)$ 曲线包围 $-\frac{1}{N(A)}$, 系统不穩定



非线性系统：特征方程： $1+N(A)G(s)=0$

即

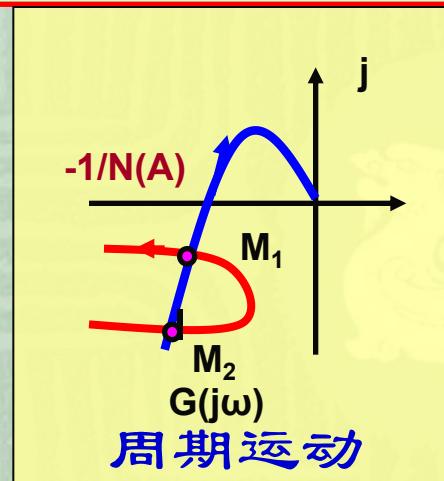
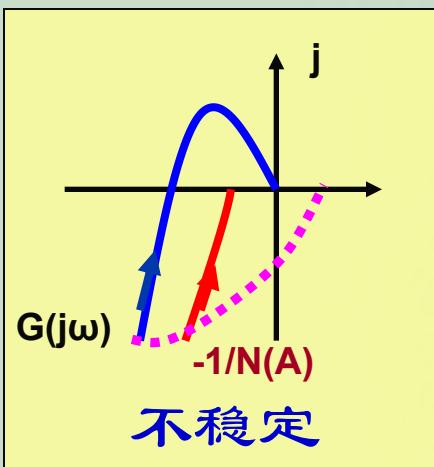
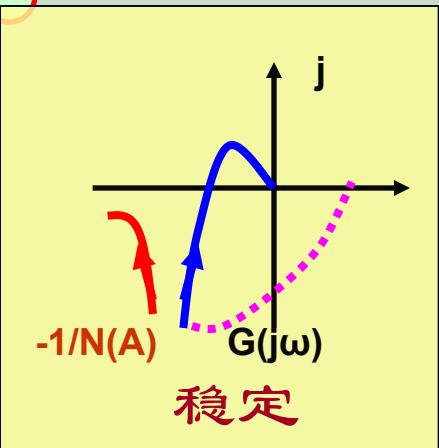
$$G(j\omega) = -\frac{1}{N(A)}$$



i 稳定判据：

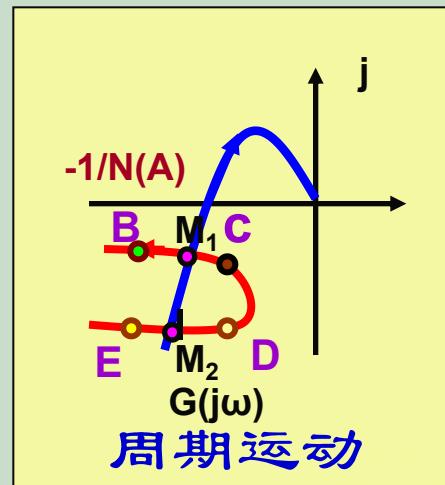
- ① 若 $G(j\omega)$ 不包围 $-1/N(A)$ 轨迹， 系统稳定
且 $G(j\omega)$ 远离 $-1/N(A)$ ， 系统相对稳定性越好.
- ② 若 $G(j\omega)$ 包围 $-1/N(A)$ ， 系统不稳定， 其响应发散.
- ③ 若 $G(j\omega)$ 与 $-1/N(A)$ 相交， 交点处 ω_0 和 A_0 对应系统的一个周期运动。

只有稳定的周期运动 才是自激振荡



二). 周期运动的稳定性

图中 $G(j\omega)$ 和 $-1/N(A)$ 有两个交点 M_1 和 M_2 , 系统产生两个不同的 ω 和 T 周期运动, 它们是否稳定呢?



最初工作点	加 $n(t)$ 后	系统稳定性	响应	非线性元件输入振幅 A	能否回到起点
M_1	$B(A \uparrow)$	√	收敛	$A \downarrow$	√
	$C(A \downarrow)$	✗	发散	$A \uparrow$	√
M_2	$D(A \uparrow)$	✗	发散	$A \uparrow$	✗
	$E(A \downarrow)$	√	收敛	$A \downarrow$	✗

结论: M_1 点 **周期运动稳定**, 即系统产生**自激振荡**;

M_2 点 **周期运动不稳定**, 即系统**不能产生自激振荡**;

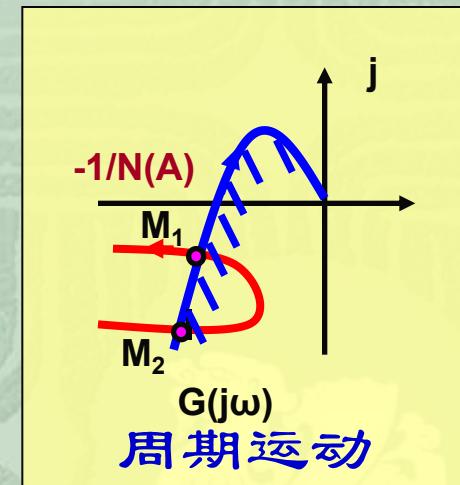
1. 非线性系统周期运动稳定性判据:

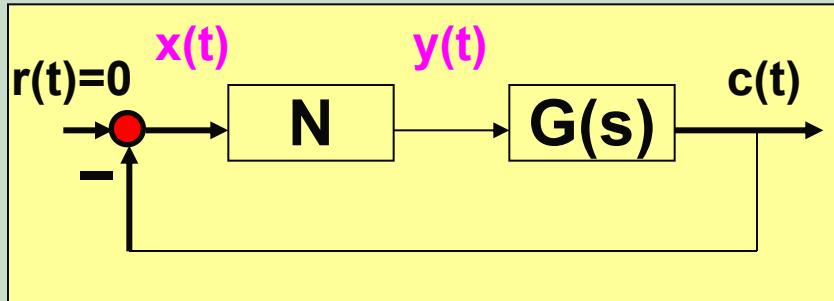
在复平面内，将线性部分 $G(j\omega)$ 包围的区域看成不稳定区，
不被 $G(j\omega)$ 包围的区域看成稳定区，

- 1) 若交点处 $-1/N(A)$ 曲线沿着 $A \uparrow$ 从不稳定区 → 稳定区，则该点代表的周期运动稳定，即可产生自振；
- 2) 若交点处 $-1/N(A)$ 曲线沿着 $A \uparrow$ 从稳定区 → 不稳定区，则该点代表的周期运动不稳定，即不可产生自振；

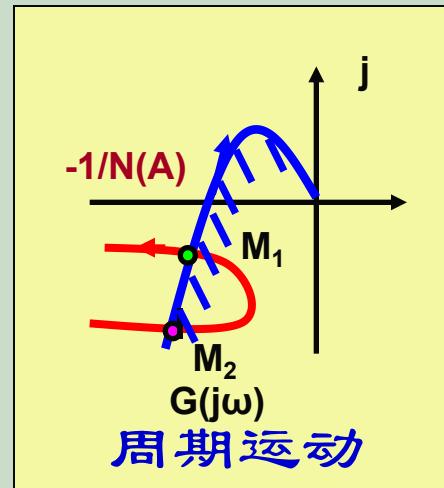
【自振分析小结】

$-\frac{1}{N(A)}$ 穿入/穿出 $G(j\omega)$ 的点
不是/是自振点。





1. 非线性系统周期运动稳定性判据:



在复平面内，将线性部分 $G(j\omega)$ 包围的区域看成不 稳 定区，
不被 $G(j\omega)$ 包围的区域看成 稳 定区，

1) 若交点处 $-1/N(A)$ 曲线沿着 $A \uparrow$ 从不 稳 定区 \rightarrow 稳定区，则该点代表的周期运动 稳 定，即**可产生自振**；

2) 若交点处 $-1/N(A)$ 曲线沿着 $A \uparrow$ 从稳定区 \rightarrow 不 稳 定区，则该点代表的周期运动不 稳 定，即**不可产生自振**；

2. 自振 ω 和 A 的确定

解析法

$$\begin{cases} |N(A)G(j\omega)| = 1 \\ \angle N(A)G(j\omega) = -180^\circ \end{cases}$$

图解法

$$\begin{cases} \text{由 } G(j\omega) \text{ 确定 } \omega \\ -1/N(A) \text{ 确定 } A \end{cases}$$

2. 自振 ω 和A的确定

解析法

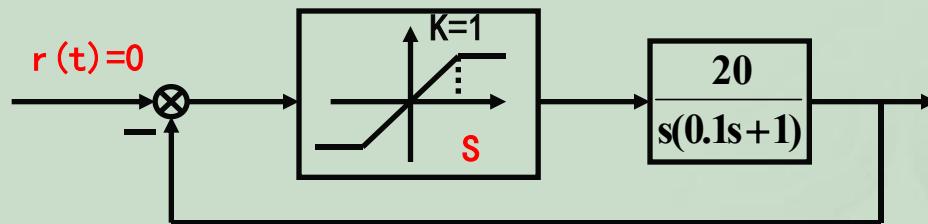
$$\begin{cases} |N(A)G(j\omega)| = 1 \\ \angle N(A)G(j\omega) = -180^\circ \end{cases}$$

图解法

$$\begin{cases} \text{由 } G(j\omega) \text{ 确定 } \omega \\ -1/N(A) \text{ 确定 } A \end{cases}$$

三). 例题

[例] 用描述函数法分析非线性系统稳定性.



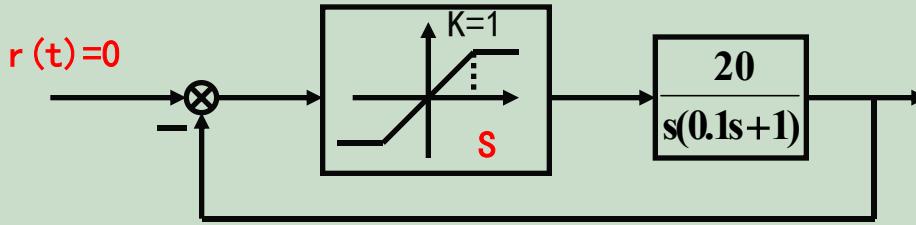
解：① 求 $-1/N(A)$

饱和特性描述函数为：

$$N(A) = \frac{2}{\pi} \left[\arcsin \frac{S}{A} + \frac{S}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{S}{A}\right)^2} \right], (A > S) \quad -\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi}{2 \left[\arcsin \frac{S}{A} + \frac{S}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{S}{A}\right)^2} \right]}, (A > S)$$

② 作 $-1/N(A)$ 曲线和 $G(j\omega)$ 幅相曲线

[例] 用描述函数法分析非线性系统稳定性.



解: ① 求 $-1/N(A)$

饱和特性描述函数为:

$$N(A) = \frac{2}{\pi} \left[\arcsin \frac{S}{A} + \frac{S}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{S}{A}\right)^2} \right], (A > S) \quad -\frac{1}{N(A)} = -\frac{\pi}{2 \left[\arcsin \frac{S}{A} + \frac{S}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{S}{A}\right)^2} \right]}, (A > S)$$

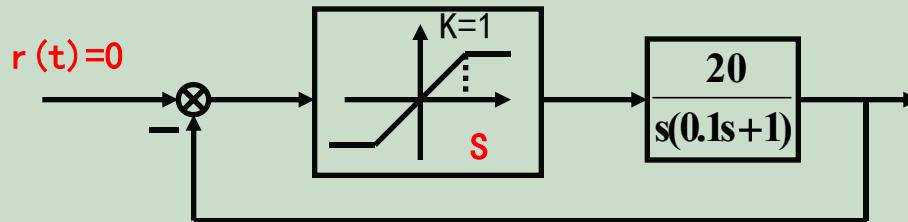
② 作 $-1/N(A)$ 曲线和 $G(j\omega)$ 幅相曲线

$-1/N(A)$ 计算数据

A/S	1	1.5	2	2.5	3	4	5
$-1/N(A)$	-1.0	-1.35	-1.64	-2.0	-2.38	-3.12	-4.00

$$G(j\omega) = \frac{20}{j\omega(0.1j\omega + 1)} = \frac{20}{\omega\sqrt{(0.1\omega)^2 + 1}} e^{-(90^\circ + \arctan 0.1\omega)}$$

[例]用描述函数法分析非线性系统稳定性.



② 作 $-1/N(A)$ 曲线和 $G(j\omega)$ 幅相曲线

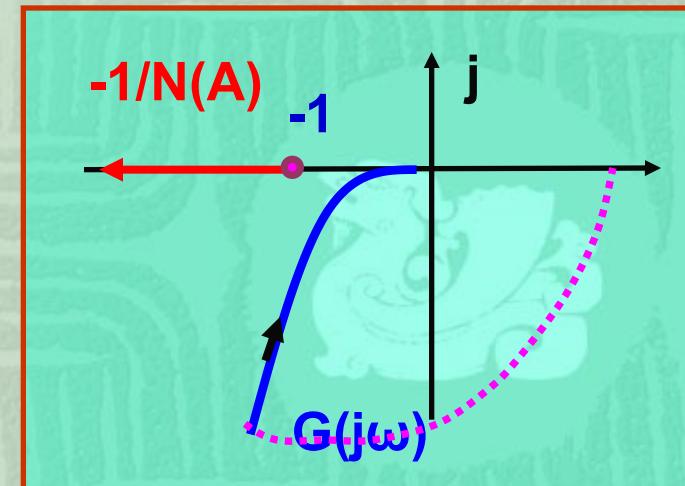
$-1/N(A)$ 计算数据

A/S	1	1.5	2	2.5	3	4	5
$-1/N(A)$	-1.0	-1.35	-1.64	-2.0	-2.38	-3.12	-4.00

$$G(j\omega) = \frac{20}{j\omega(0.1j\omega + 1)} = \frac{20}{\omega\sqrt{(0.1\omega)^2 + 1}} e^{-(90^\circ + \arctan 0.1\omega)}$$

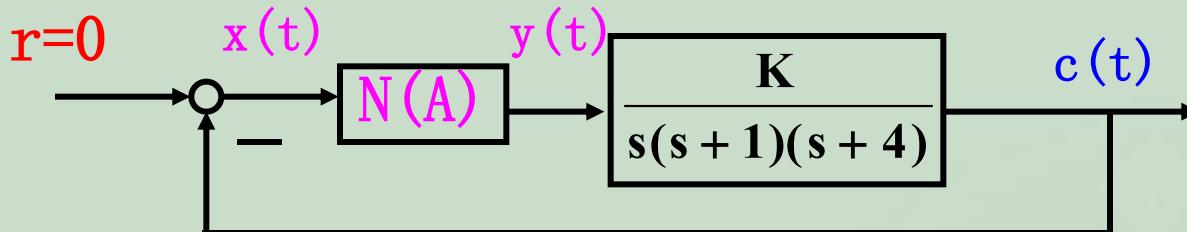
③ 判稳

由稳定判据得: 系统稳定。



[例] 图示非线性系统, $T>0$, $N(A)=\frac{A+2}{3A+1}$

- ① 分析K对自由运动的影响.
- ② 若有自振,求振幅为2时,振频 $\omega=?$ $K=?$ $c(t)=?$



其中 $N(A)=(A+2)/(3A+1)$

解: ① $N(A)=(A+2)/(3A+1)$

$$-1/N(A)=-(3A+1)/(A+2)$$

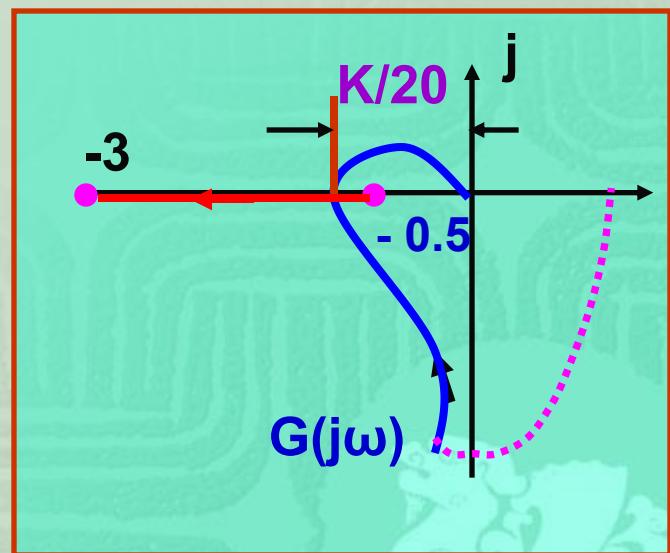
$$A=0 \quad -1/N(A)=-1/2$$

$$A \rightarrow +\infty \quad -1/N(A)=-3$$

$$G(j\omega)=\frac{\frac{1}{4}K}{j\omega(j\omega+1)(\frac{j\omega}{4}+1)}$$

$$\omega_x=2$$

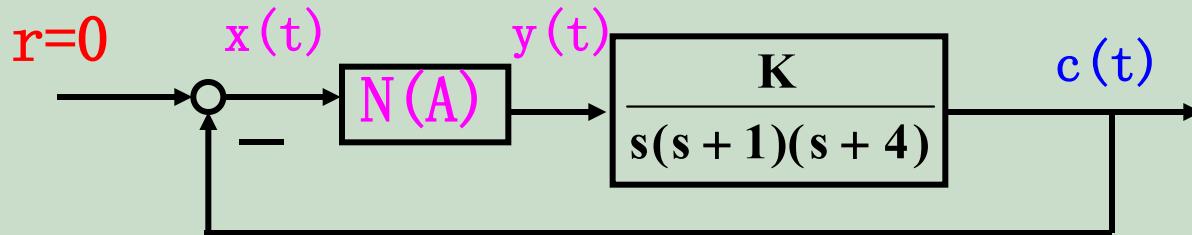
$$G(j\omega_x)=-K/20$$



[例] 图示非线性系统, $T>0$, $N(A) = \frac{A+2}{3A+1}$

① 分析K对自由运动的影响.

② 若有自振,求振幅为2时,振频 $\omega=?$ $K=?$ $c(t)=?$



解:

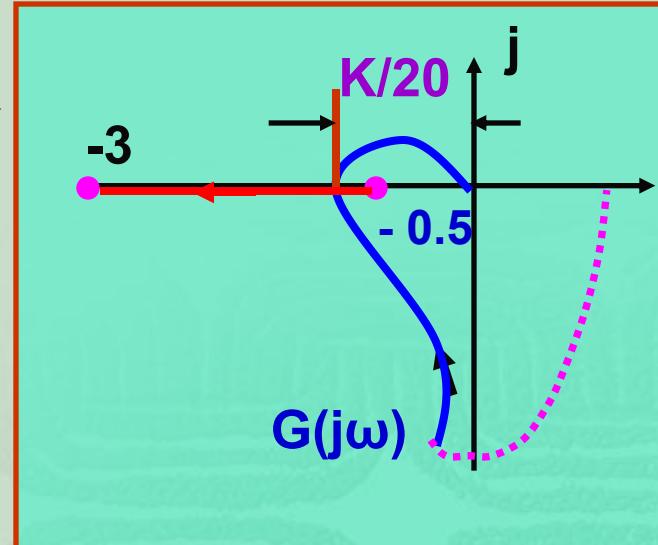
$K/20 < 1/2$	$0 < K < 10$	系统稳定
$K/20 > 3$	$K > 60$	系统不稳定
$1/2 < K/20 < 3$	$10 < K < 60$	系统自振

②

$$\omega_x = 2 \quad |G(j\omega_x)N(A)| = 1$$

$$\because A=2, \therefore K=35$$

$$c(t) = -2\sin 2t$$



说明:
非线性元件输入端
存在一个稳定的周期
运动,且 $x(t) = 2\sin^2 t$