§6-3 z变换理论

连续信号 ----- 拉氏变换

采样信号 ------ z变换

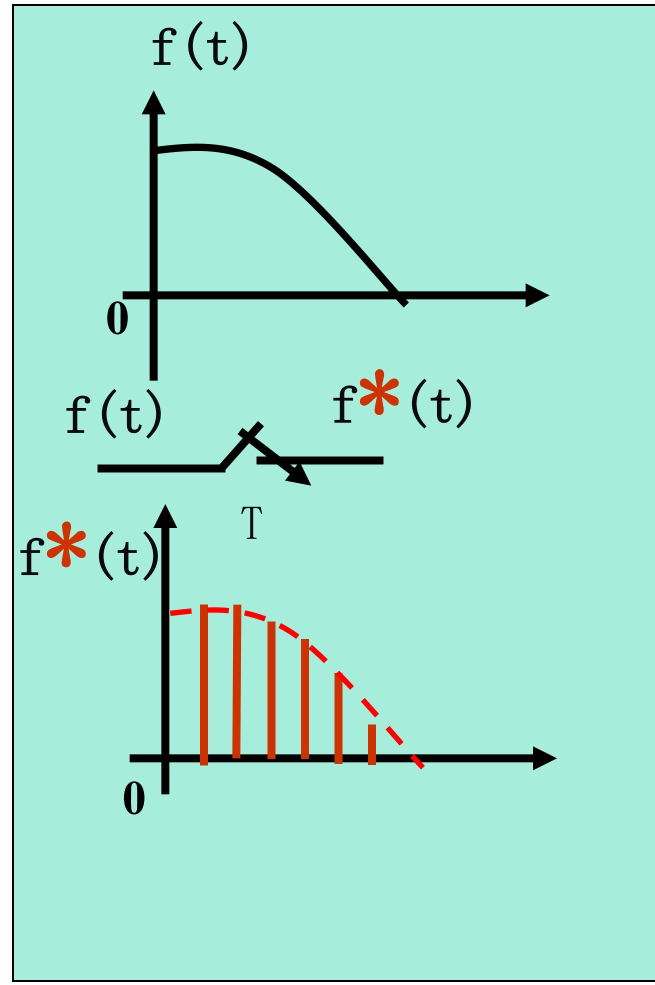
一、Z变换

1. 定义：$$f^*(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)\delta(t-nT)$$

拉氏变换：$$F^*(S)=\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)e^{-nTs}$$

令 $z=e^{Ts}$ 则

$$F(z)\triangleq F^*(s)\Big|_{s=\frac{\ln z}{T}}=\sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)z^{-n}$$



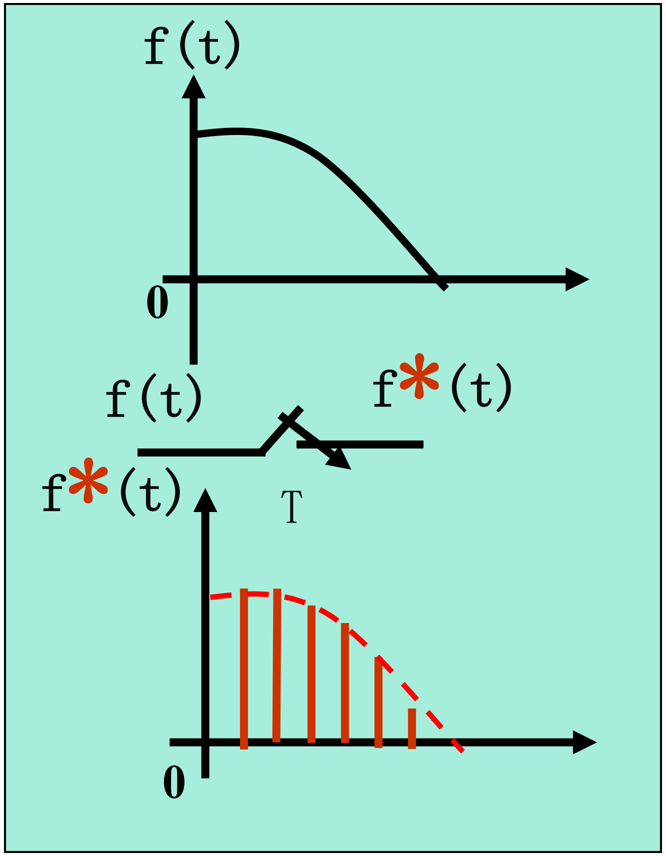
一、 Z变换

1. 定义: $$f^*(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)\delta(t-nT)$$

拉氏变换: $$F^*(S)=\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)e^{-nTs}$$

令 $z=e^{Ts}$

则 $$\boxed{F(z)\overset{\Delta}{=}\sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)z^{-n}}$$



结论: 1. 只有采样信号 f*(t) 才有z 变换

2. z^{-n} 系数为采样脉冲的强度

3. 它的幂次指 nT时刻 进行采样

也记作:F(z)=Z[f(t)]

2. 求法

a.级数求和法 (即定义法)

步骤: 由f(t)和T → f(nT) → $F(z)=Z[f^*(t)]=\sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)z^{-n}$

[例]求单位阶跃函数1(t)的Z变换.

解: $f(nT)=1(nT)$

$$\therefore F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} 1^* z^{-n}=1+z^{-1}+\ldots=\frac{1}{1-z^{-1}} \quad (|z^{-1}|<1)$$

b.部分分式法(常用方法)

步骤: f(t)----F(s) --- 部分分式之和 --- F(z)

[例] 求$F(s)=\frac{a}{s(s+a)}$的Z变换

解: $$F(s)=\frac{a}{s(s+a)}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}$$

查Z变换表，得

$$\therefore F(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}=\frac{z(1-e^{-aT})}{z^2-(1+e^{-aT})z+e^{-aT}}$$

二、Z变换基本定理

1. 线性定理

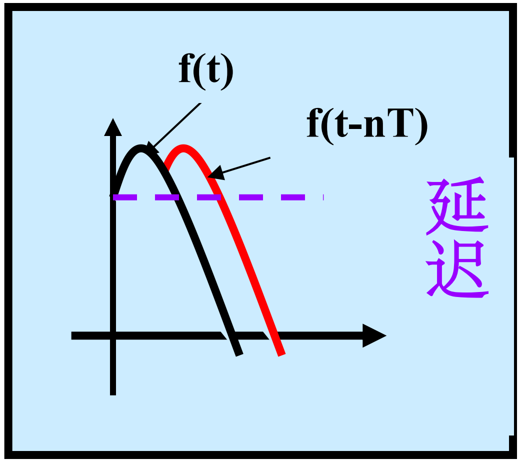
$Z[f(t)]=F(z)$　　　　$Z[af_1(t)+bf_2(t)]=aF_1(z)+bF_2(z)$

2. 实域位移定理

- 延迟定理　　设f(t)的z变换为F(z)

$$\boxed{Z[f(t-nT)]=z^{-n}F(z)}$$

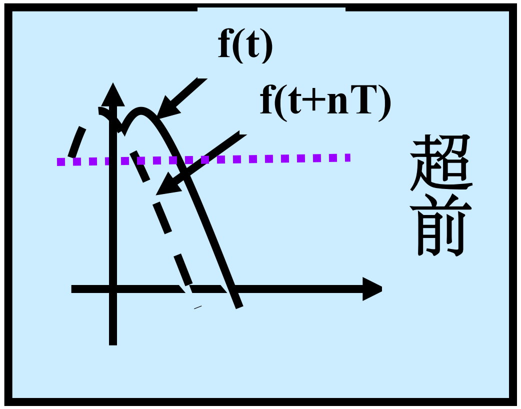
延迟环节



- 超前定理

$$\boxed{Z[f(t+nT)]=z^{n}[F(z)-\sum_{k=0}^{n-1}f(nT)z^{-n}]}$$

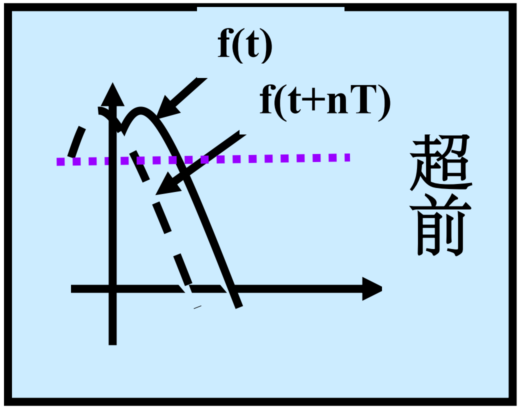
超前环节



- 超前定理

$$Z[f(t+nT)] = z^{n}[F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f(nT)z^{-n}]$$

超前环节



【例】 试用位移定理计算延迟一个采样周期的指数函数$e^{-a(t-T)}$的z变换。

解 $z[e^{-a(t-T)}] = z^{-1}Z[e^{-at}]$

$$= z^{-1}\frac{z}{z-e^{-aT}} = \frac{1}{z-e^{-aT}}$$

3. 复域位移定理

$$Z[e^{\mp at}f(t)] = F(e^{\pm aT}z)$$

4. 初值定理 $f(0) = \lim_{n\to 0} f(nT) = \lim_{z\to\infty} F(Z)$

5. 终值定理 **[计算离散系统e(+∞) 有力工具]**

$$\boxed{f(+\infty) = \lim_{n\to\infty} f(nT) = \lim_{z\to 1}[(1-z^{-1})F(z)] = \lim_{z\to 1}[(z-1)F(z)]}$$

条件:

在单位圆上解析,即F(z)的闭环极点位于单位圆内。

［例］ 设z变换函数 $E(z) = \dfrac{0.792z}{z^2 - 0.461z + 0.208}$

试利用终值定理确定e(nT)的终值。

解

$$e(\infty) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{0.792z}{z^2 - 0.461z + 0.208} = 0$$

三、Z反变换

1 定义：由F(z)→f*(t)　即　$Z^{-1}[F(z)]=f(nT)$

$$f^*(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} f(nT)\delta(t-nT)$$

注意：

Z反变换 只能给出 采样信号f*(t), 而不能提供连续信号f(t)

2 求法

长除法

用长除法把 $F(z)$ 按降幂展成幂级数，然后求得 $f(nT)$

$$F(z)=\frac{b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n},\quad n>m$$

即

$$F(z)=c_0z^0+c_1z^{-1}+c_2z^{-2}+\cdots$$

$$f^*(t)=c_0\delta(t)+c_1\delta(t-T)+c_2\delta(t-2T)+\cdots$$

［例］ 试用长除法求$E(z)=\dfrac{10z}{(z-1)(z-2)}$的Z反变换。

解： $$E(z)=\frac{10z}{z^2-3z+2}$$

将E(z)分子被分母除，得

$$E(z)=10z^{-1}+30z^{-2}+70z^{-3}+150z^{-4}+\cdots$$

采样脉冲序列为

$$e^*(t)=10\delta(t-T)+30\delta(t-2T)+70\delta(t-3T)$$
$$+150\delta(t-4T)+\cdots$$

思考：

如何求$e(1),e(3)$？

部分分式法

步骤: F(z)/z展成部分分式之和

查表　得各项对应的$f_i(nT)$

得采样信号f*(t)

[例]已知 $E(z)=\dfrac{10\ z}{(z-1)(z-2)}$,试求其反变换.

解: $\dfrac{E(z)}{z}=\dfrac{10}{(z-1)(z-2)}=\dfrac{-10}{z-1}+\dfrac{10}{z-2}$

$\therefore E(z)=\dfrac{-10z}{z-1}+\dfrac{10z}{z-2}$　查表得: $z^{-1}[\dfrac{z}{z-1}]=1\quad z^{-1}[\dfrac{z}{z-2}]=2^n$

$\therefore e(nT)=-10+10*2^n$ (单个脉冲)

$$e^*(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}e(nT)\delta(t-nT)=\sum_{n=0}^{+\infty}10(2^n-1)\delta(t-nT)$$ (脉冲序列)

§6-4 离散系统的数学模型

连续系统的数学模型：微分方程，传递函数

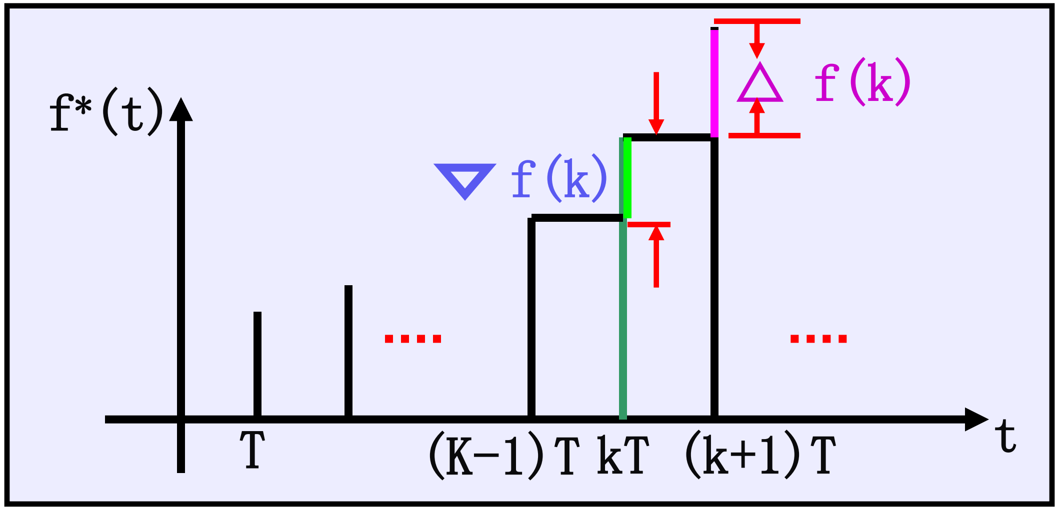
离散系统的数学模型：差分方程，脉冲传递函数

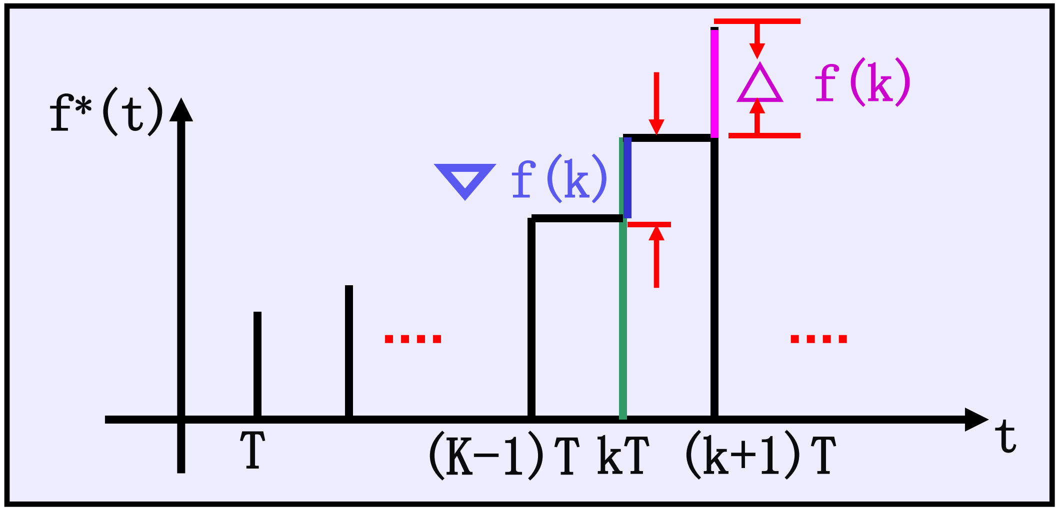
一、差分方程

函数y=f(t) 在每两相邻采样时刻之间的增量称为差分.

f(k+1)-f(k):函数在 kt 时刻的一阶前向差分

f(k)-f(k-1):函数在kt时刻的一阶后向差分





一阶后向差分 $\nabla f(k)=f(k)-f(k-1)$

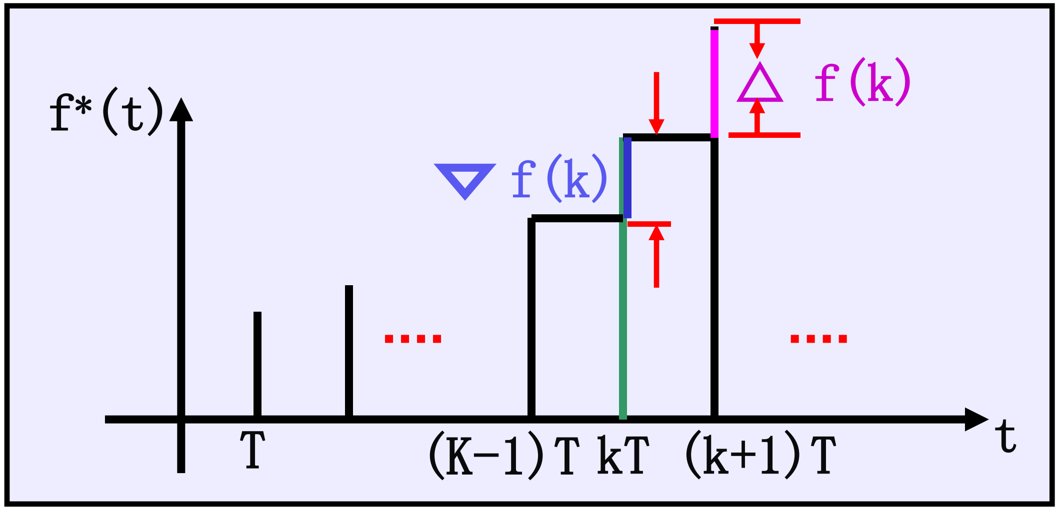
二阶后向差分

$$\nabla^2 f(k)=\nabla[\nabla f(k)] =\nabla[f(k)-f(k-1)]=\nabla f(k)-\nabla f(k-1)$$

$$=[f(k)-f(k-1)]-[f(k-1)-f(k-2)] = f(k)-2f(k-1)+f(k-2)$$

⋮

n阶后向差分 $\nabla^n f(k)=\nabla^{n-1}[\nabla f(k)]=\nabla^{n-1}[f(k)-f(k-1)]$



同理

一阶前向差分 $\triangle f(k)=f(k+1)-f(k)$

二阶前向差分

$$\triangle^2 f(k)=\triangle[\triangle f(k)]=\triangle[f(k+1)-f(k)]$$

$$=[f(k+2)-f(k+1)]-[f(k+1)-f(k)]=f(k+2)-2f(k+1)+f(k)$$

⋮

n阶前向差分 $\triangle^n f(k)=\triangle^{n-1}[\triangle f(k)]=\triangle^{n-1}[f(k)-f(k-1)]$

二阶前向差分

$$\Delta^2 f(k)=\Delta[\Delta f(k)]=\Delta[f(k+1)-f(k)]$$

$$=[f(k+2)-f(k+1)]-[f(k+1)-f(k)]=f(k+2)-2f(k+1)+f(k)$$

n阶前向差分 $\Delta^{n} f(k)=\Delta^{n-1}[\Delta f(k)]=\Delta^{n-1}[f(k)-f(k-1)]$

2. 差分方程

线性定常离散系统可由线性定常后向差分方程描述为:

$$c(k)+a_1c(k-1)+a_2c(k-2)+\cdots+a_nc(k-n)$$

$$=b_0r(k)+b_1r(k-1)+\cdots b_mr(k-m)$$

也可用线性定常前向差分方程来描述:

$$c(k+n)+a_1c(k+n-1)+a_2c(k+n-2)+\cdots+a_nc(k)$$

$$=b_0r(k+m)+b_1r(k+m-1)+\cdots b_mr(k)$$

求解差分方程常用的有迭代法和Z变换法。

（1）迭代法

[例] 已知差分方程 $c(k+1) + 0.2c(k)=2r(k)$

$r(nT)=1 \quad c(0)=0 \quad (k=0,\ldots)$ 试用迭代法求解差分方程

解: $c(k+1) = -0.2c(k)+2r(k)$

$k=0 \quad c(1) = -0.2c(0)+2r(0)$

$k=1 \quad c(2) = -0.2c(1)+2r(1)$

$\vdots$

小结: 这种方法, 不能得到c(nT)的一般表达式

（2）Z变换法

步骤：差分方程 $\xrightarrow{Z}$ Z域代数方程 $\rightarrow$ 求其解 $\xrightarrow{Z^{-1}}$ 时域解

[例] 已知差分方程 $c(k+2) + 3c(k+1)+2c(k) =0 \quad c(0)=0,c(1)=1$
试用Z变换法求解差分方程

解: 对差分方程每项进行Z变换

$$Z[c(k+2)] = z^2c(z)-z^2c(0)-zc(1)=z^2c(z)-z$$

$$Z[3c(k+1)]=3zc(z)-3zc(0)=3zc(z)$$

$$Z[2c(k)]=2c(z)$$

则 $(z^2+3z+2)c(z)=z$ 即 $c(z)=\dfrac{z}{z^2+3z+2}=\dfrac{z}{z+1}-\dfrac{z}{z+2}$

进行Z反变换 得: $c(n)=(-1)^n-(-2)^n \qquad (n=0,1,2.....)$

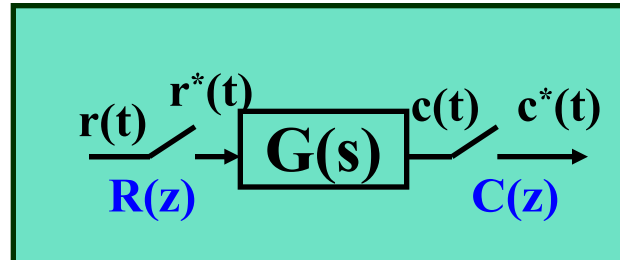
即 $$c^*(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}[(-1)^n-(-2)^n]\delta(t-nT)$$

二、 脉冲传递函数

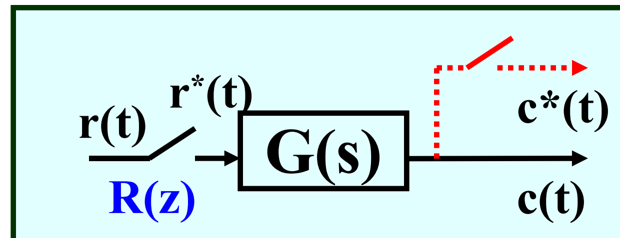
1.定义: 设系统初始条件为零,

$r(t)$经采样$r^*(t)\to R(z)$,

在连续部分输出为$c(t)$,经采样$c^*(t)\to C(z)$



开环离散系统



实际的开环离散系统

$$G(z)=C(z)/R(z)$$

脉冲传递函数　　输出量的Z变换　　输入量的Z变换

则$C(z)=G(z)\,R(z)$　　$c^*(t)=Z^{-1}[C(z)]=Z^{-1}[G(z)R(z)]$

[注]多数控制输出c(t)为**连续信号**，而非c*(t)，可在输出端虚设一个与输入采样开关同步的采样开关，当采样频率f_s较高时，可用c*(t)近似描述c(t).

2.G(s)求G(z)的方法

步骤: $G(s)\rightarrow$ 部分分式之和 $\xrightarrow[\text{表}]{\text{查}} G(z)$

[例]求 $G(s)=\dfrac{s+1}{s^2+5s+6}$ 相应的G(z)

解:

$$G(s)=\frac{s+1}{s^2+5s+6}=\frac{2}{s+3}-\frac{1}{s+2}$$

查Z变换表,得

$$G(z)=\frac{2z}{z-e^{-3T}}-\frac{z}{z-e^{-2T}}$$

三、开环系统与闭环系统的脉冲传递函数

求取脉冲传递函数或输出z变换的原则：信号经开关输出，或环节输入、输出前后都有开关，才能写出Z变换表达式

采样拉氏变换$F^*(s)$ 重要性质:

- 若采样函数拉氏变换$F^*(s)$与连续函数的拉氏变换$G(s)$ 相乘后再离散化，则$F^*(s)$可从离散信号中提出来

$$\boxed{[F^*(s)G(s)]^* = F(s)^* G(s)^*}$$

列基本方程求取脉冲传递函数的步骤

1）确定输入信号和输出信号；

2）从输出信号开始，列写各采样开关采样前的连续信号拉氏变化表达式；

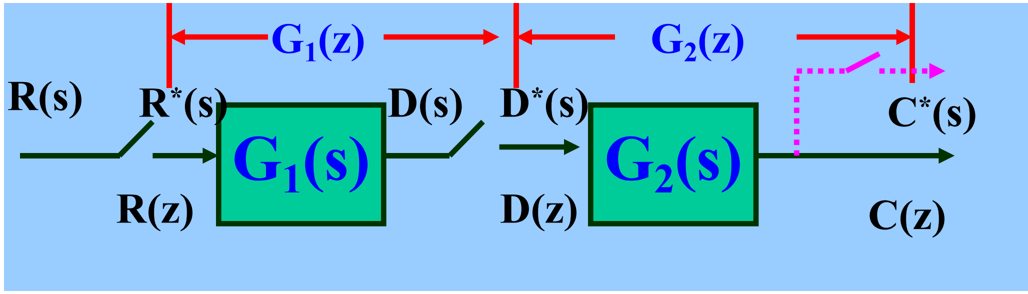
3）对各采样开关采样前的连续信号拉氏变化表达式进行离散化；

4） 消去中间变量，得到输出信号离散化表达式；

5）对输出信号做Z变换，写出脉冲传递函数。

1. 开环系统

a. 串联环节间有采样开关



$$C(s)=G_2(s)D^*(s) \qquad (1)$$

$$D(s)=G_1(s)R^*(s) \qquad (2)$$

(2)式，两边离散化，得

$$D^*(s)=G_1^*(s)R^*(s)$$

代入(1)式，得

$$C(s)=G_2(s)G_1^*(s)R^*(s)$$

上式两边离散化，得

$$C^*(s)=G_2^*(s)G_1^*(s)R^*(s)$$

上式做Z变换，得：

$$\therefore C(z)=G_1(z)G_2(z)R(z)$$

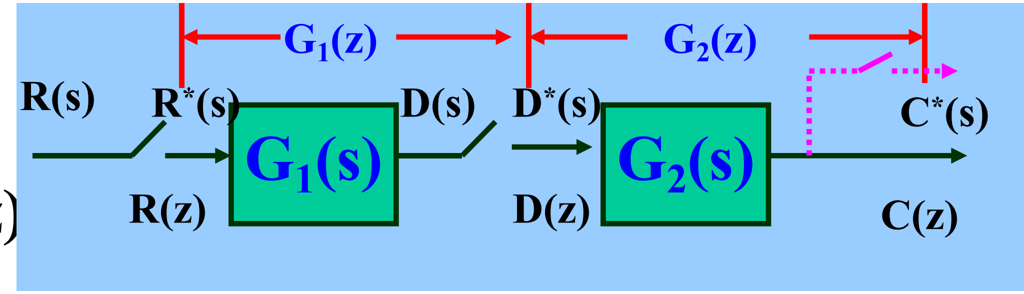
则 $$\frac{C(z)}{R(z)}=G_1(z)G_2(z)$$

结论

有理想采样开关隔开的两连续环节串联,
等效脉冲传递函数 = 两个串联环节脉冲传递函数之积.

1. 开环系统

a. 串联环节间有采样开关

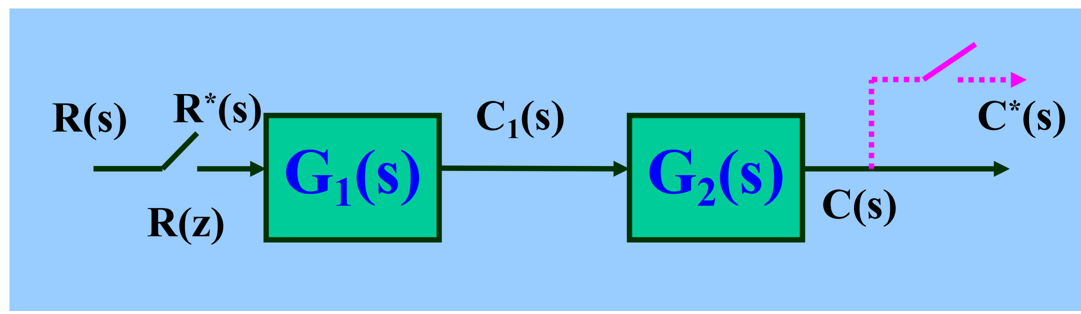


$D(z)=G_1(z)R(z), C(z)=G_2(z)D(z)$

$\therefore C(z)=G_1(z)G_2(z)R(z)$

则 $\dfrac{C(z)}{R(z)}=G_1(z)G_2(z)$

b. 串联环节间无采样开关



$C(s)=G_2(s)C_1(s)= G_2(s)G_1(s)R^*(s)$

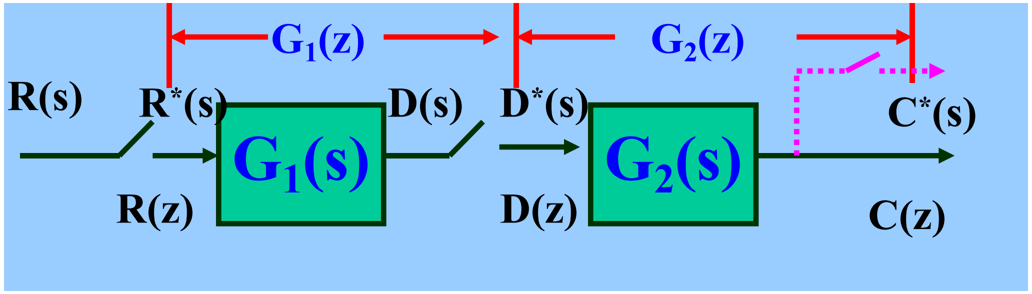
两边离散化得 $C^*(s)=R^*(s)[G_1(s)G_2(s)]^*$

Z变换得 $C(z)=G_1G_2(z)R(z)$ $\therefore \dfrac{C(z)}{R(z)}=G_1G_2(z)$

1. 开环系统

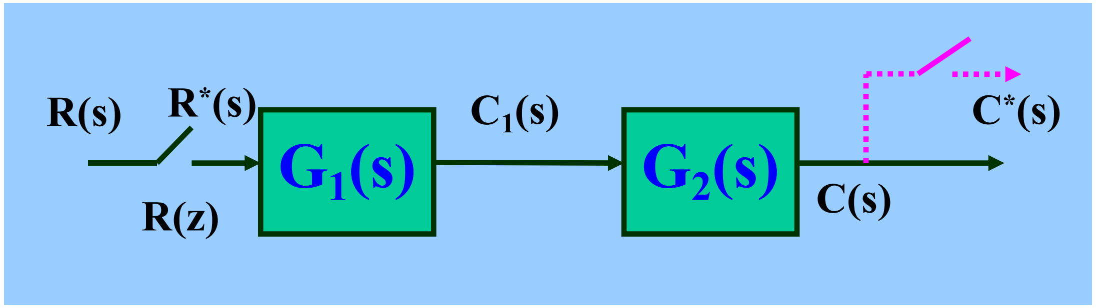
a. 串联环节间有采样开关

$$\frac{C(z)}{R(z)} = G_1(z)G_2(z)$$



b. 串联环节间无采样开关

$$\frac{C(z)}{R(z)} = G_1G_2(z)$$



结论

无理想采样开关隔开的两连续环节串联，等效脉冲传递函数＝两个串联环节传递函数乘积后的相应得Z 变换．

1. 开环系统

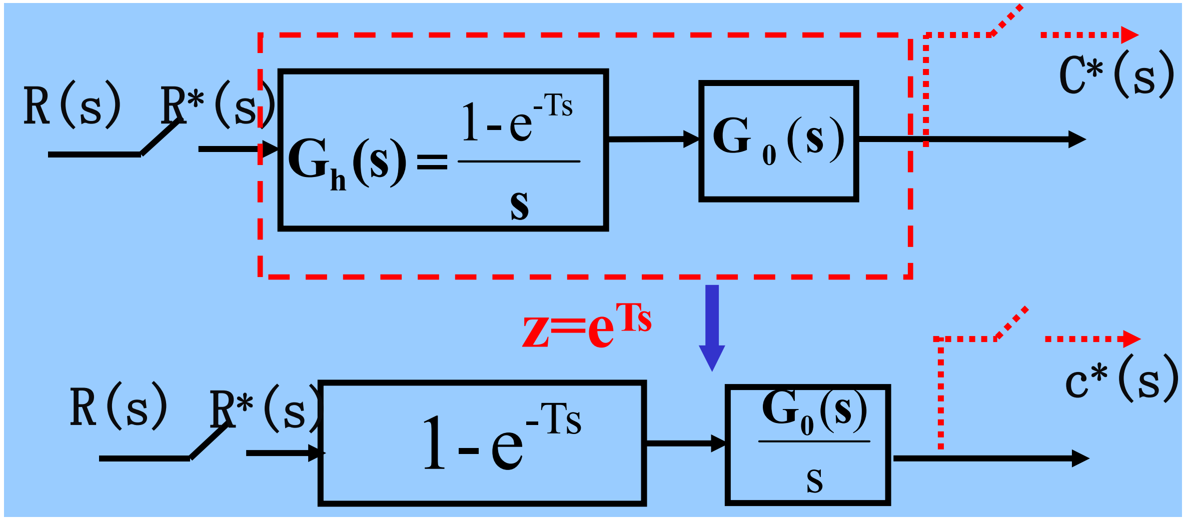
a. 串联环节间有采样开关

b. 串联环节间无采样开关

$$G_1G_2(z) \neq G_1(z)G_2(z)$$

c. 有零阶保持器的情况

$$C(s) = (G_0(s) \bullet \frac{1-e^{-Ts}}{s})R^*(s)$$



两边离散化

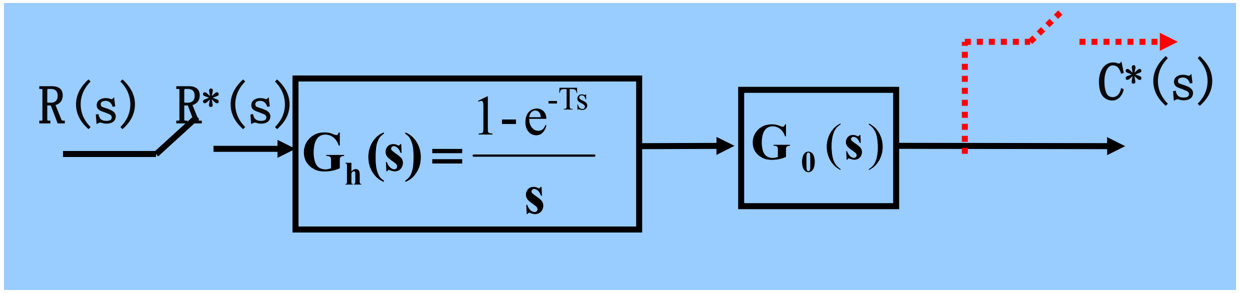
$$C^*(s) = (1-z^{-1})(\frac{G_0(s)}{s})^* R^*(s)$$

Z变换得

$$C(z) = (1-z^{-1})Z[\frac{G_0(s)}{s}]\ R(z)$$

$$\therefore \frac{C(z)}{R(z)} = (1-z^{-1})Z[\frac{G_0(s)}{s}]$$

[例]设离散系统如图,已知$G_0(s)=\dfrac{a}{s(s+a)}$,试求脉冲传递函数G(z).



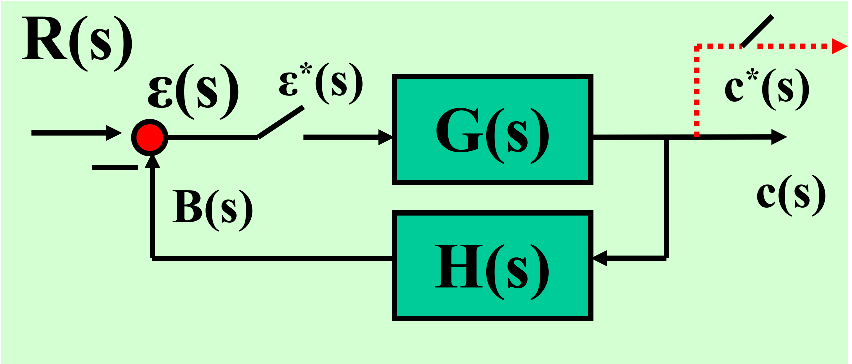
解: $$\because\ \frac{G_0(s)}{s}=\frac{a}{s^2(s+a)}=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{a}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+a}\right)$$

$$Z\left[\frac{G_0(s)}{s}\right]=\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{1}{a}\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)$$

$$\therefore G(z)=(1-z^{-1})\ Z\left[\frac{G_0(s)}{s}\right]=\frac{\frac{1}{a}[(e^{-aT}+aT-1)z+(1-aTe^{-aT}-e^{-aT})]}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

2.闭环系统的脉冲传递函数

右边是一种较常见的闭环采样系统结构图



解：基本方程为:

$$\begin{cases} C(s)=G(s)\varepsilon^*(s) & (1) \\ \varepsilon(s)=R(s)-B(s) & (2) \\ B(s)=H(s)C(s) & (3) \end{cases}$$

由(1)(2)(3)式得$\varepsilon(s)=R(s)-HG(s)\varepsilon^*(s)$

两边离散化,得$\varepsilon^*(s)=R^*(s)-HG^*(s)\varepsilon^*(s)$

即$\varepsilon^*(s)=R^*(s)/(1+GH^*(s)$

代入(1),得

$$C(s)=\frac{G(s)}{1+GH^*(s)}R^*(s)$$

两边离散化,得

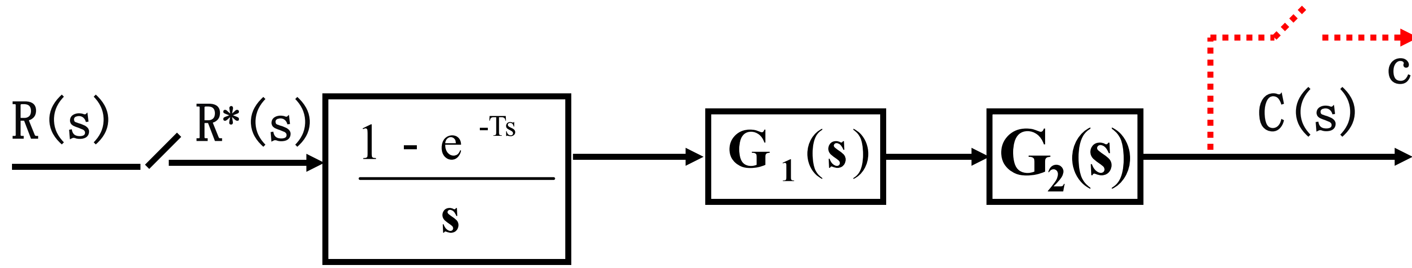
$$\frac{C^*(s)}{R^*(s)}=\frac{G^*(s)}{1+GH^*(s)}$$

Z变换得

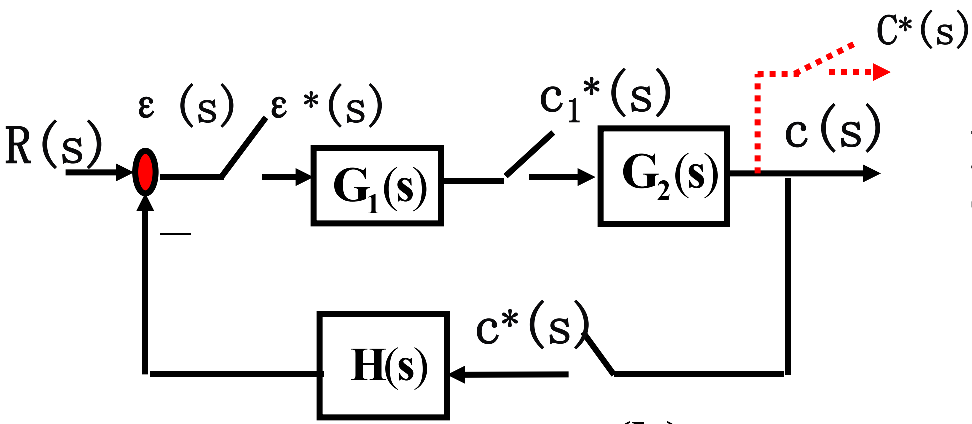
$$\frac{C(z)}{R(z)}=\frac{G(z)}{1+GH(z)}$$

特征方程为:$1+GH(z)=0$

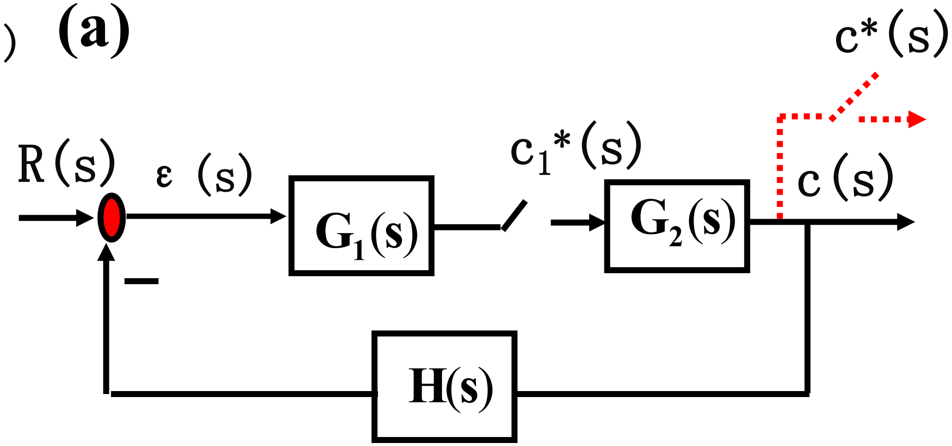
[例]下列系统均采用单通同步采样,采样时间为T,试求C(z)的表达式



(a)



(b)

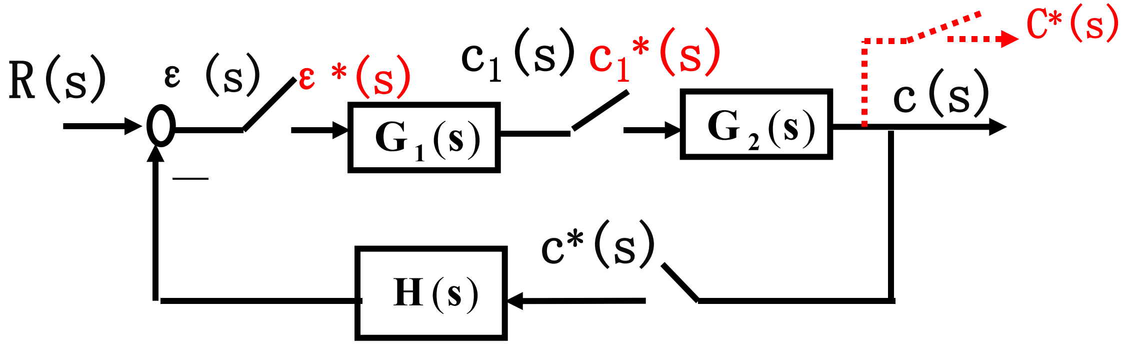


(c)

解: (a) $C(s)=G_1(s)G_2(s)\dfrac{(1-e^{-Ts})}{s}R^*(s)$

两边离散化得 $C^*(s)=[\dfrac{1-e^{-Ts}}{s}G_1(s)G_2(s)]^*R^*(s)$

Z变换得 $C(z)=(1-z^{-1})[\dfrac{G_1G_2(s)}{s}]R(z)$



(b)

(b)基本方程

$$\begin{cases} C(s)=G_2(s)C_1^*(s) & (1) \\ C_1^*(s)=G_1^*(s)\varepsilon^*(s) & (2) \\ \varepsilon(s)=R(s)-H(s)C^*(s) & (3) \end{cases}$$

由(3)两边离散化得 $\varepsilon^*(s)=R^*(s)-H^*(s)C^*(s)$ (5)

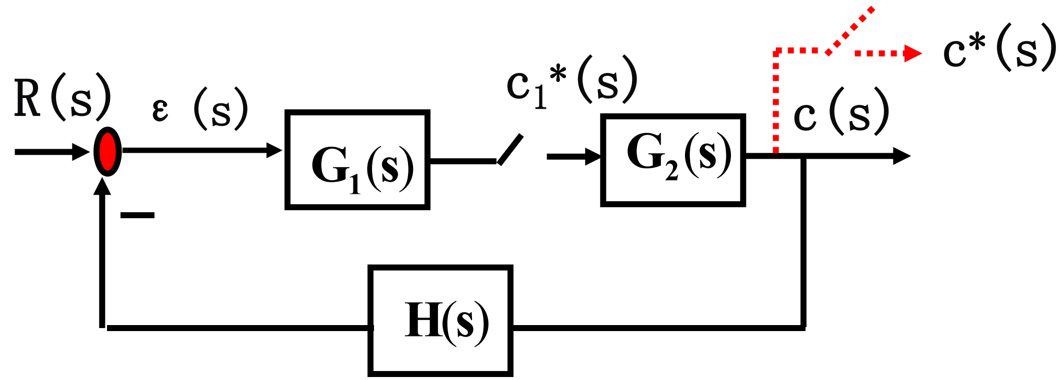
将(5)代入(2)得 $C_1^*(s)=G_1^*(s)[R^*(s)-H^*(s)C^*(s)]$ 代入(4)

由(1)两边离散化得 $C^*(s)=G_2^*(s)C_1^*(s)$ (4)

即 $C^*(s)=G_2^*(s)G_1^*(s)[R^*(s)-H^*(s)C^*(s)]$

整理得

$$C^*(s)=\frac{G_1^*(s)G_2^*(s)R^*(s)}{1+G_1^*(s)G_2^*(s)H^*(s)} \qquad C(z)=\frac{G_1(z)G_2(z)R(z)}{1+G_1(z)G_2(z)H(z)}$$



(c)

(c)基本方程为:

$$
\begin{cases}
C^*(s)=G_2^*(s)C_1^*(s) & (1) \\
C_1(s)=[R(s)-H(s)G_2(s)C_1^*(s)]G_1(s) & (2)
\end{cases}
$$

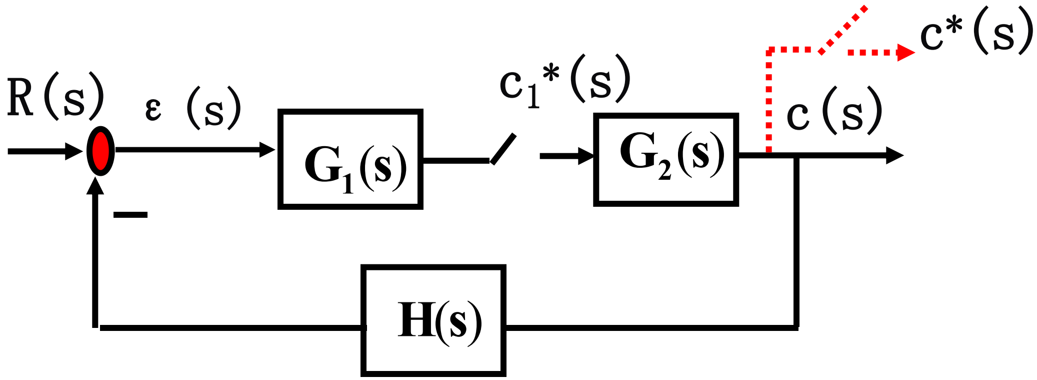
(2)式两边离散化得: $C_1^*(s)=G_1R^*(s)-G_1G_2H^*(s)C_1^*(s)$

即 $C_1^*(s)=\dfrac{G_1R^*(s)}{1+G_1G_2H^*(s)}$

代入(1)得 $C^*(s)=G_2^*(s)\dfrac{G_1R^*(s)}{1+G_1G_2H^*(s)}$

Z变换得

$$C(z)=\frac{G_1R(z)G_2(z)}{1+G_1G_2H(z)}$$

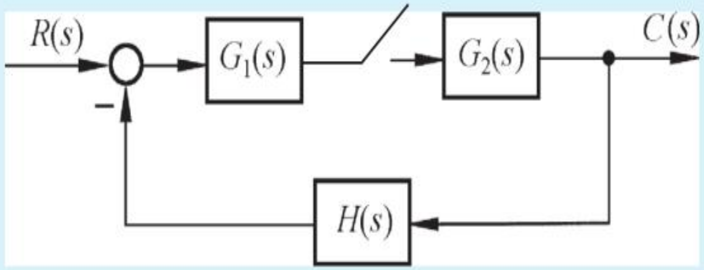
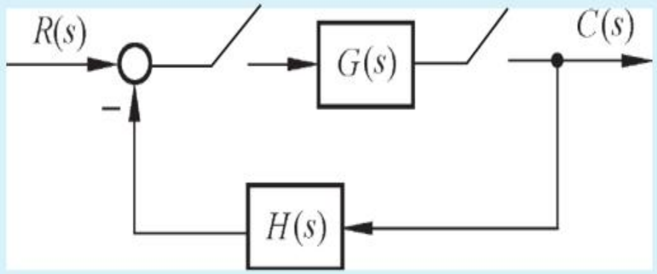
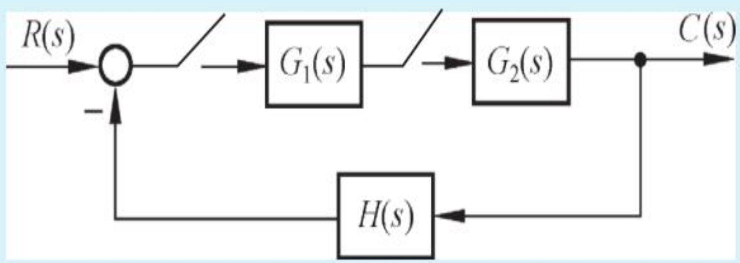


(c)

$$C(z)=\frac{G_1R(z)G_2(z)}{1+G_1G_2H(z)}$$

结论:

若输入信号不经过采样,则求不出其闭环脉冲传递函数,但能求出输出信号的z变换

序号	系统结构图	C(z)计算式
2		$\dfrac{RG_1(z)G_2(z)}{1+G_2HG_1(z)}$
3		$\dfrac{G(z)R(z)}{1+G(z)H(z)}$
4		$\dfrac{G_1(z)G_2(z)R(z)}{1+G_1(z)G_2H(z)}$

需要注意的是，离散系统并不是总能够写出脉冲传递函数，只要误差信号处没有开关，输入采样信号r*(t) 不存在，就不能求出R(Z），但总是能求出C（Z）。

四、 Z变换法分析离散系统局限性

1.一般只能求出c(t)在采样时刻值

2. $c^*(t)$代替c(t)条件:连续部分传递函数极点数至少比零点数多两个,否则产生错误结论.