5-2 典型环节和开环系统频率特性曲线绘制

包括：

- 幅相曲线的绘制
- 对数频率特性曲线的绘制

§5-2 典型环节和开环系统频率特性曲线绘制

将系统开环传递函数G(s)H(s)分子、分母多项式因式分解,常见的有七种因式,称为**典型环节**

常见的典型环节

比例环节、惯性环节、一阶微分环节、积分环节、微分环节、振荡环节、二阶微分环节

本节着重介绍幅相曲线图和对数频率特性图的绘制

典型环节

$G(s)=k$ 比例环节

$G(s)=s$ 微分环节

$G(s)=\frac{1}{s}$ 积分环节

$G(s)=Ts+1$ 一阶微分 $\Phi(s)=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$

$G(s)=\dfrac{1}{Ts+1}$ 惯性环节 欠阻尼二阶系统

$G(s)=s^2/\omega_n^2+2\xi s/\omega_n+1$ 二阶微分

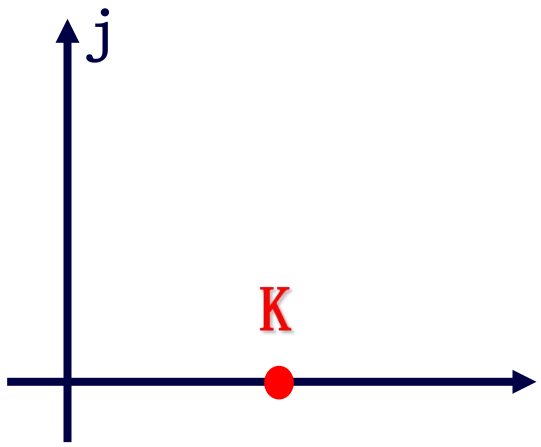
$G(s)=\dfrac{1}{s^2/\omega_n^2+2\xi s/\omega_n+1}$ $(0<\xi<1)$ 振荡环节

一、典型环节幅相曲线的绘制

1. 比例环节　G(s)=K

$$G(j\omega)=K=Ke^{j0^{o}}\quad\begin{cases}\omega=0 & G(j\omega)=K\\ \omega\to+\infty & G(j\omega)=K\end{cases}$$

$$A(\omega)=K\qquad \varphi(\omega)=0^{0}$$



幅相曲线

步骤：

①确定起点和终点

②与负实轴交点

③ 确定相角变化趋势，作图

2. 积分环节和微分环节 G(s)=1/s   G(s)=s

(1) G(s)=1/s

$$G(j\omega)=\frac{1}{j\omega}=\frac{1}{\omega}e^{-90^{o}}$$

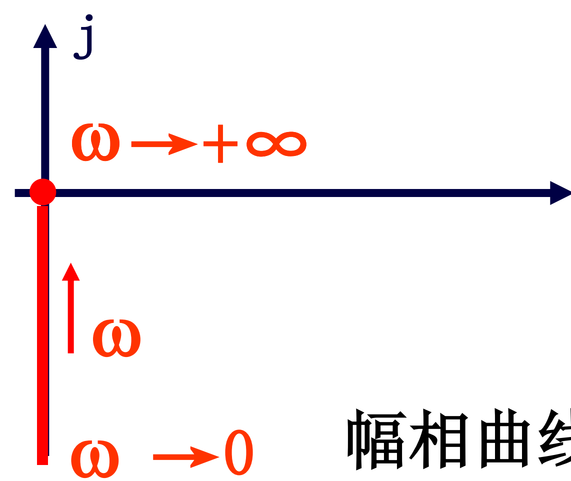
讨论:

$\omega \to 0$ $G(j\omega)=?$

$\omega\to+\infty$ $G(j\omega)=?$

$$A(\omega)=\frac{1}{\omega}$$

$$\varphi(\omega)=-90^{0}$$



幅相曲线

相角为90度

矢量的模随着ω的增大而减小

(2)G(s)=S

讨论:

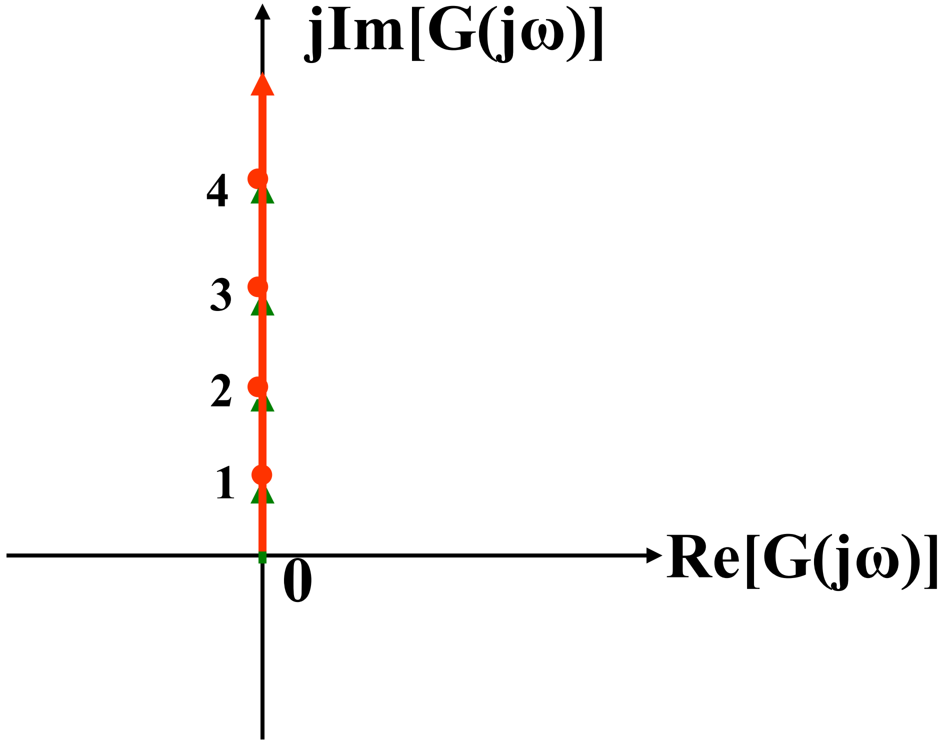
$\omega \to 0 \quad G(j\omega)=?$

$\omega \to +\infty \quad G(j\omega)=?$

$$G(j\omega) = j\omega = \omega e^{90^o}$$

$$A(\omega) = \omega; L(\omega) = 20\lg\omega$$

$$\varphi(j\omega) = 90^0$$



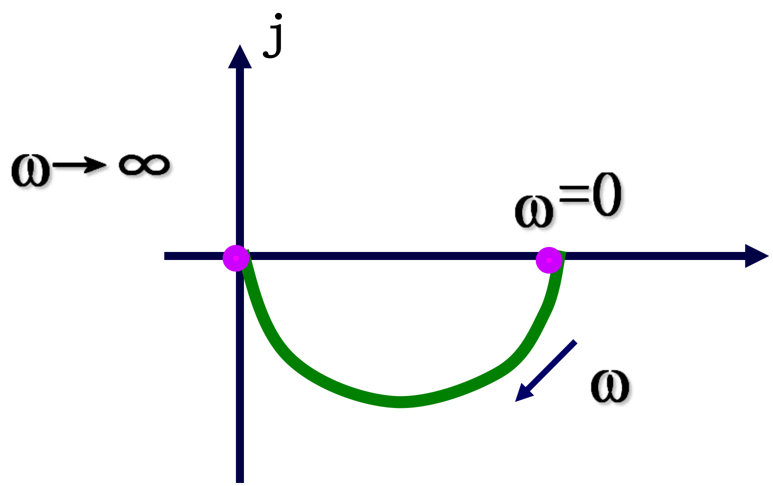
3、惯性环节和一阶微分环节

(1) G(s)=1/(Ts+1)

$$G(j\omega)=\frac{1}{j\omega T+1}=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}e^{-j\arctan\omega T}$$

$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}},$$

$$\varphi(\omega)=-\arctan\ \omega T$$



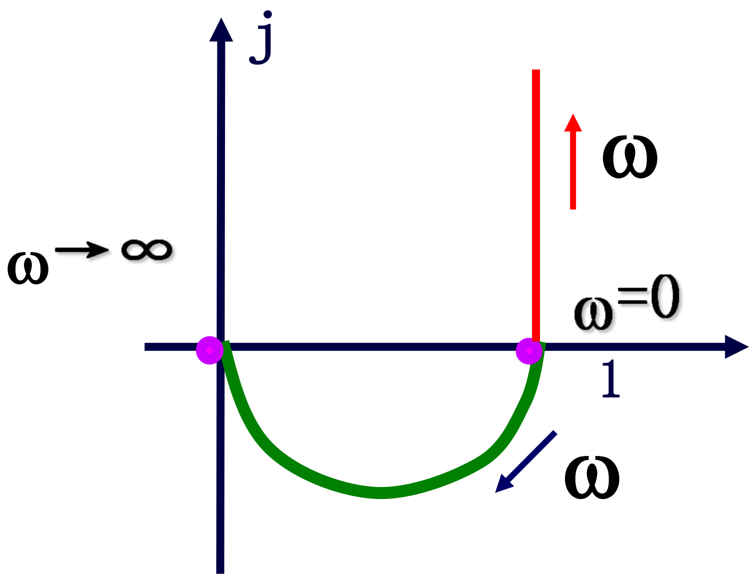
幅相曲线

(2) G(s)=Ts+1

$$G(j\omega) = j\omega T + 1 = \sqrt{1+\omega^2 T^2}\, e^{j\arctan\omega T}$$

$$A(\omega) = \sqrt{1+\omega^2 T^2},$$

$$\varphi(\omega) = \arctan\omega T$$



幅相曲线

4、振荡环节和二阶微分环节

(1)振荡环节

$$G(s)=\frac{1}{[(\frac{s}{\omega_n})^2+2\xi(\frac{s}{\omega_n})+1]} \qquad (0<\xi<1)$$

$$G(j\omega)=\frac{1}{(\frac{j\omega}{\omega_n})^2+2\xi(\frac{j\omega}{\omega_n})+1}=\frac{1}{1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2+j2\xi(\frac{\omega}{\omega_n})}$$

幅频特性:

$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^{\ 2}})^2+4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_n^{\ 2}}}}$$

相频特性:

$$\varphi(\omega)=\begin{cases}-arctg\dfrac{2\xi\,\omega/\omega_n}{1-\omega^2/\omega_n^{\ 2}} & (\omega\le\omega_n)\\ -(\pi-arctg\dfrac{2\xi\,\omega/\omega_n}{\omega^2/\omega_n^{\ 2}-1}) & (\omega>\omega_n)\end{cases}$$

$$G(j\omega)=\frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2+2\xi\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)+1}=\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2+j2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}$$

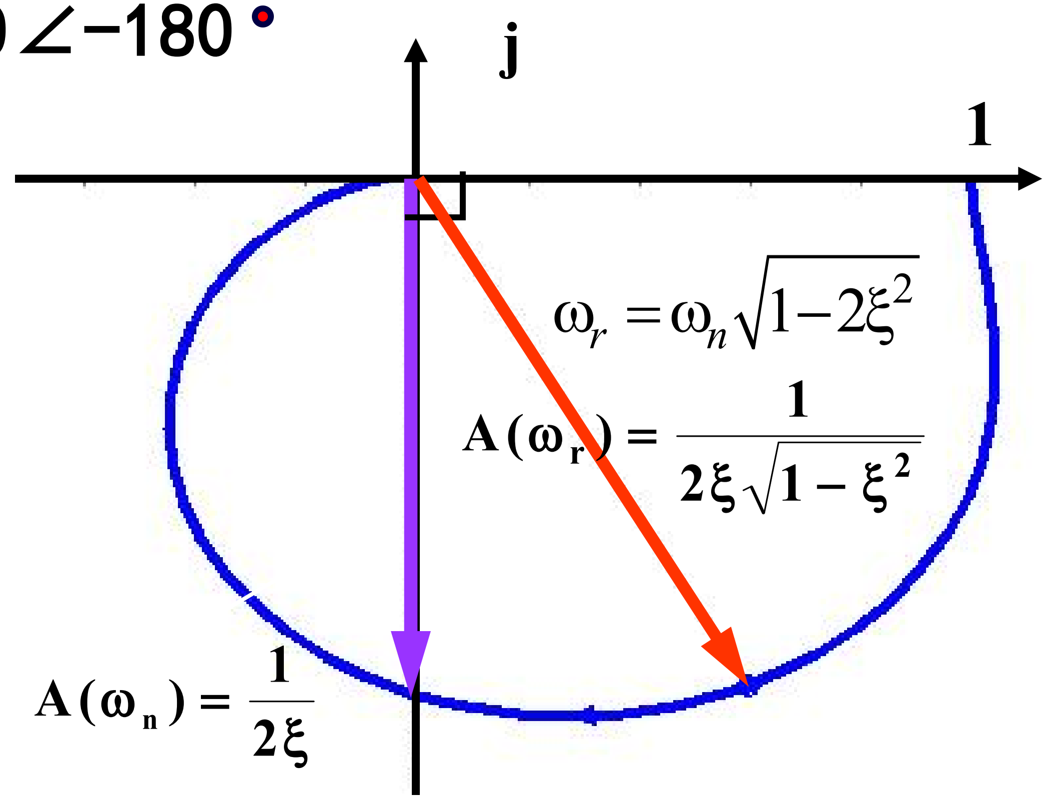
幅相曲线

$$\begin{cases}\omega=0 \quad G(j\omega)=1\angle 0^{\circ} \\ \omega=\omega_n \quad G(j\omega)=1/(2\xi)\angle -90^{\circ} \\ \omega\to+\infty \quad G(j\omega)=0\angle -180^{\circ}\end{cases}$$

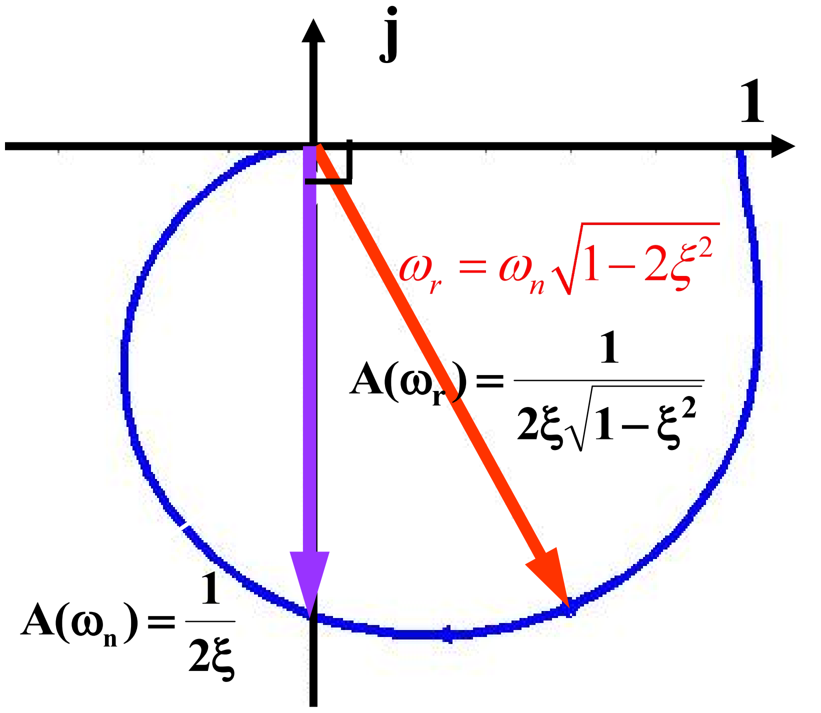
$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+4\zeta^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega}=0\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned}\omega_r&=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}\\ A_m(\omega)&=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}\end{aligned}}$$



$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{(1-\frac{\omega}{\omega_n})^2+4\xi^2\frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$



$$\frac{dA(\omega)}{d\omega}=0\Rightarrow \boxed{\begin{aligned}&\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}\\&A_m(\omega)=\frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}\end{aligned}}$$

（ξ ≤0.707）

ω_r —— 谐振频率

Am ——谐振峰值

结论： ξ ↓ →Am↑ ⟷ ξ ↓ →σ %↑

Am可反映σ%的大小

ξ ↓ →Am↑ → σ%↑→ 动态过程平稳性差

(2)二阶微分环节

$$G(s)=(\frac{s}{\omega_n})^2+2\xi\frac{s}{\omega_n}+1$$

$$G(j\omega)=\sqrt{(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2+(2\xi\frac{\omega}{\omega_n})^2}e^{j\varphi(\omega)}$$

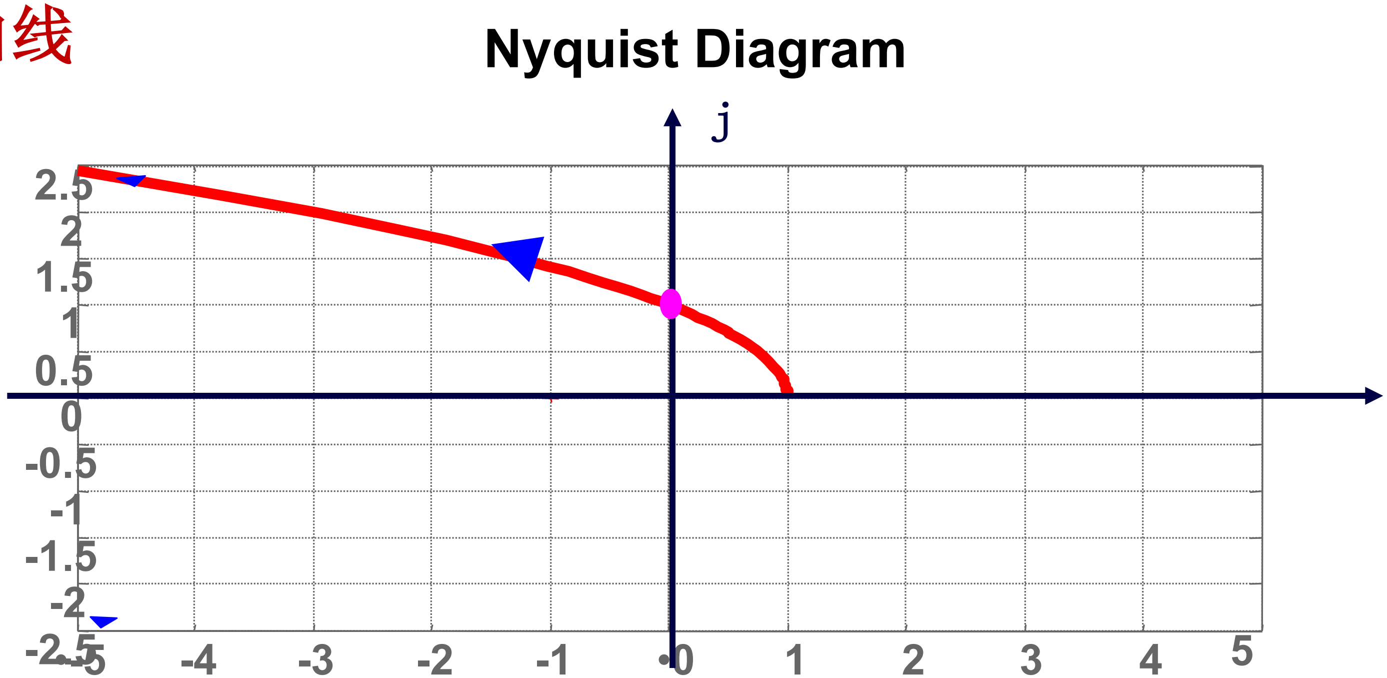
$$\varphi(\omega)=\begin{cases}\mathrm{arctg}\dfrac{2\zeta\,\omega/\omega_n}{1-\omega^2/\omega_n{}^2} & (\omega\le\omega_n)\\[2ex] -[\pi-\mathrm{arctg}\dfrac{2\zeta\,\omega/\omega_n}{\omega^2/\omega_n{}^2-1}] & (\omega>\omega_n)\end{cases}$$

$$G(s)=1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2+j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}$$

讨论：

$$\begin{cases} \omega=0 & G(\omega)=1\angle 0^0 \\ \omega=\omega_n & G(\omega)=2\xi\angle 90^0 \\ \omega\to+\infty & G(\omega)=\infty\angle 180^0 \end{cases}$$

幅相曲线



二、开环幅相曲线的绘制

［例］ 已知一零型单位反馈系统其开环传递函数 $G(s)=\dfrac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$ 试绘制概略开环幅相曲线.

绘制步骤

首先将开环传递函数按典型环节分解，然后按照下面步骤绘图

①确定起点和终点

②与负实轴交点

③确定相角变化趋势, 作图

二、开环幅相曲线的绘制

[例]已知一零型单位反馈系统其开环传递函数 $G(s)=\dfrac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$

试绘制概略开环幅相曲线。

解： 开环传递函数按典型环节分解

$$G(j\omega)=\frac{K}{(j\omega T_1+1)(j\omega T_2+1)}=\frac{K}{\sqrt{T_1^2\omega^2+1}\sqrt{T_2^2\omega^2+1}}e^{-j(\arctan\omega T_1+\arctan\omega T_2)}$$

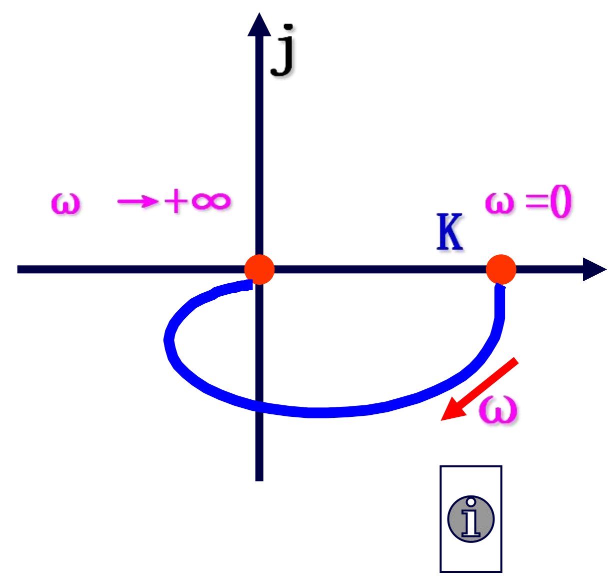
① 确定起点和终点

$\omega=0$ 时　　$G(j\omega)=K\angle 0^0$;

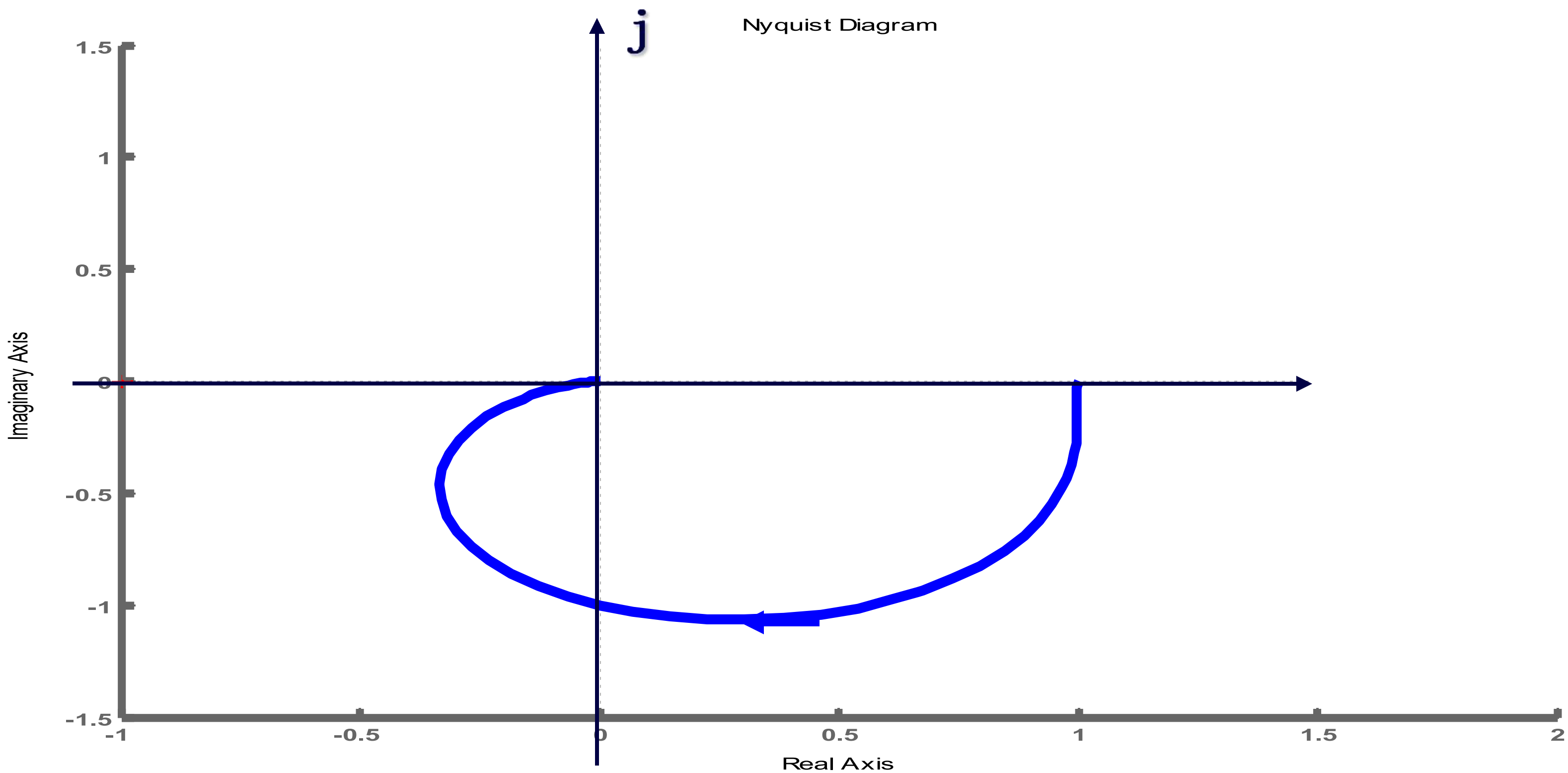
$\omega\to+\infty$时　$G(j\omega)=0\angle -180^0$

② 与负实轴交点

③ 确定相角变化趋势，作图

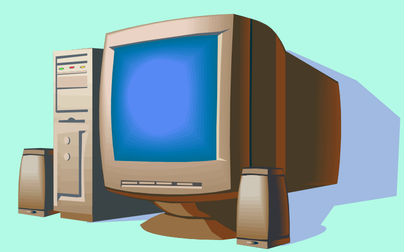


图为 $G(s)=\dfrac{1}{(2s+1)(s+1)}$ 时的幅相曲线



源程序

```
num=[1];
den1=[2 1];den2=[1 1];
den=conv(den1,den2);
sys=tf(num,den);
nyquist(sys);  % ω 从−∞变到+∞
```



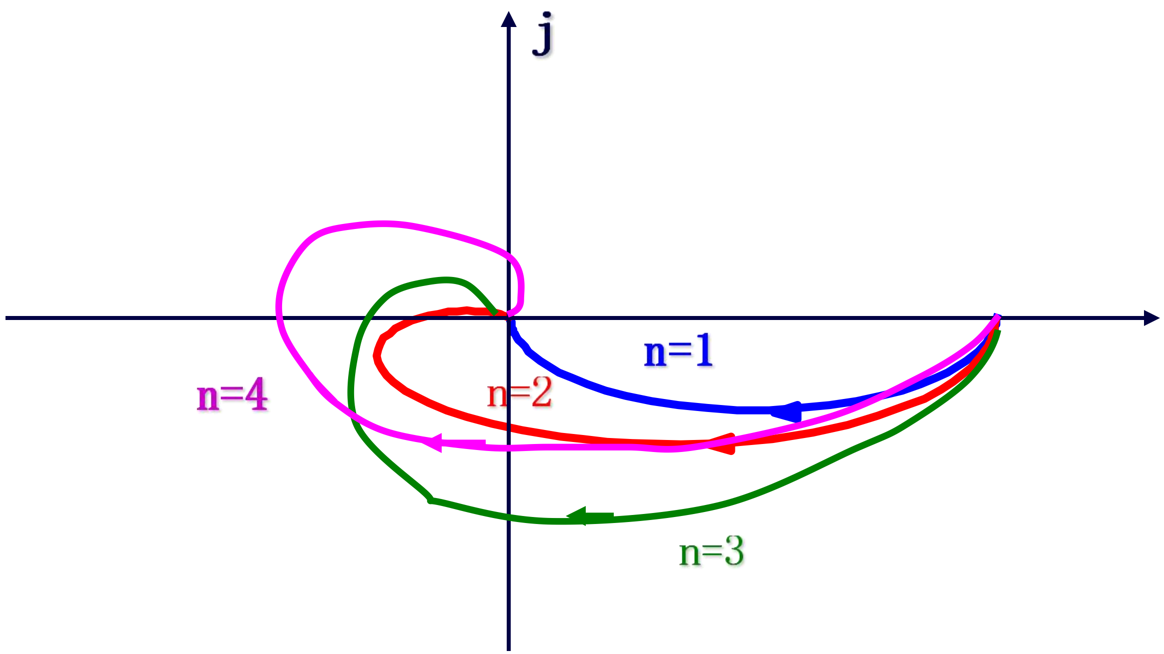
小结:

$$G(s)=\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)\cdots(Ts_n+1)}$$

Ⅰ. 0型系统　ω=0时, 幅值= 开环传递系数K;

Ⅱ. 系统包含n个惯性环节，　$\omega\to+\infty$, 终点$G(jw)=0\angle(m-n)*90^0$

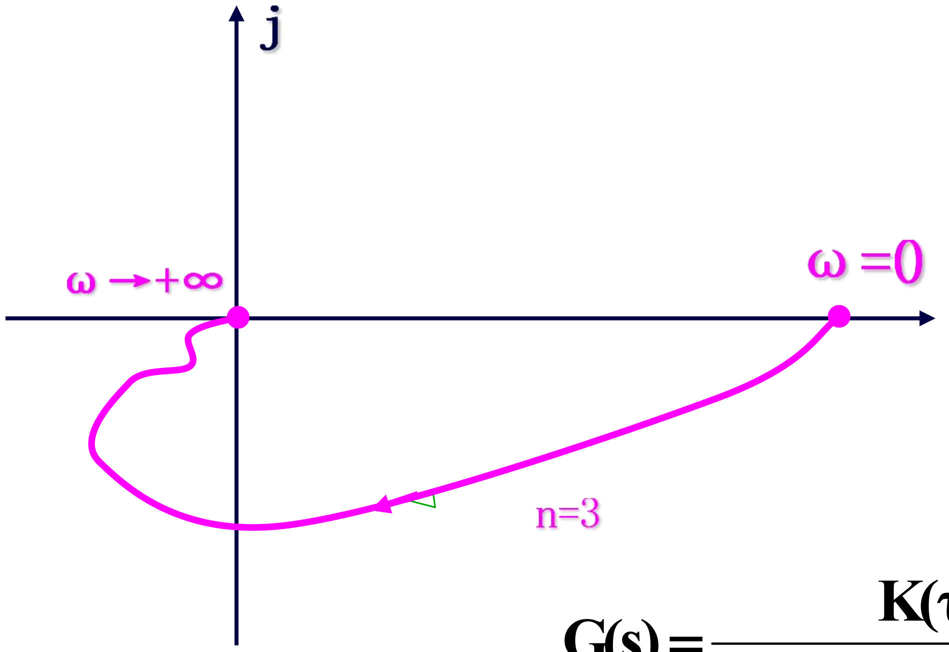
下面是0 型系统 包含(n为1~4时)n个惯性环节幅相曲线大致形状



Nyquist Diagram

$$G(s)=\frac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T s_n+1)}$$

III. 0型系统包含一阶微分环节，幅相出现凹凸现象



$$G(s)=\frac{K(\tau s+1)}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)(T_3 s+1)}$$

[例]某单位反馈系统$G(s)=\dfrac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$ 试绘制开环幅相曲线。

解： G(s)化成典型环节乘积形式

$$G(j\omega)=\frac{K}{j\omega(j\omega T_1+1)(j\omega T_2+1)}$$

$$=\frac{K}{\omega\sqrt{1+(T_1\omega)^2}\sqrt{1+(T_2\omega)^2}}\angle(-90^\circ-\arctan\omega T_1-\arctan\omega T_2)$$

① 起点和终点

$\omega\to0^+$ $G(j\omega)=K/\underline{(j\omega)}=\infty\angle-90^0$

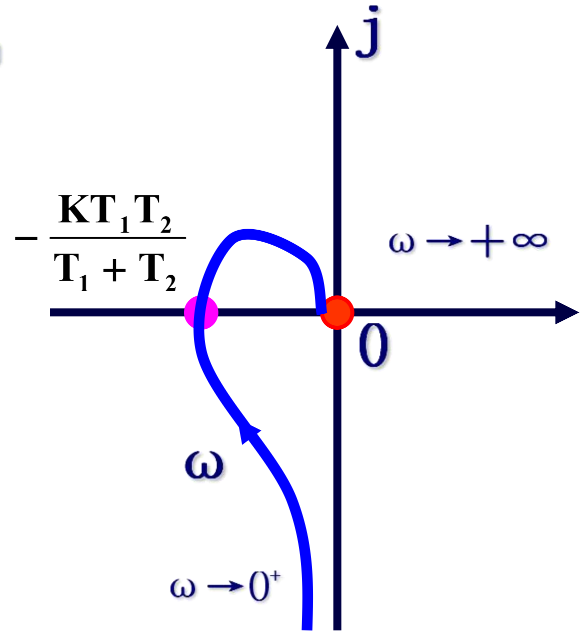
$\omega\to+\infty$ $G(j\omega)=0\angle-270^0$

②与负实轴交点

令 $\mathrm{Im}[G(j\omega_x)H(j\omega_x)]=0$ 得 $\omega_x=\dfrac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$

$$G(j\omega_x)H(j\omega_x)=-\frac{KT_1T_2}{T_1+T_2}$$

ω_x称穿越频率



③ 确定相角变化趋势, 作图

[例]已知单位反馈系统开环传递函数为 $G(s)=\dfrac{K(s+4)}{s(s-1)}$，要求绘制开环幅相曲线。

解： $G(j\omega)=\dfrac{K(j\omega+4)}{j\omega(j\omega-1)}$

$$=\frac{K\sqrt{\omega^2+16}}{\omega\sqrt{1+\omega^2}}\angle[\arctan\frac{\omega}{4}-90^0-(180^0-\arctan\omega)]$$

① 起点和终点

$\omega\to 0+\qquad G(j\omega)=\infty\angle -270^0$

$\omega\to +\infty\qquad G(j\omega)=0\angle -90^0$

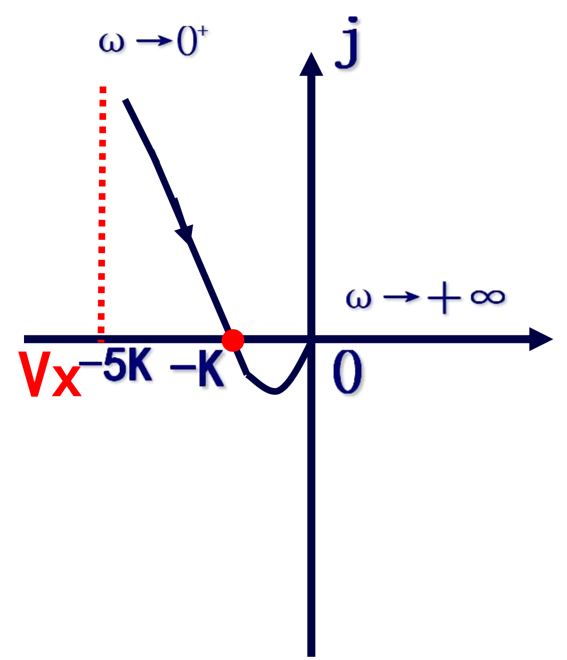
Ⅰ型系统，低频渐近线 $V_x=\lim\limits_{\omega\to0^+}\mathrm{Re}[G(j\omega)]=-5K$

② 与负实轴交点

令 $\mathrm{Im}[G(j\omega_x)H(j\omega_x)]=0$ 得 $\omega_x=2$

$G(j\omega_x)H(j\omega_x)=-K$

③ 确定相角变化趋势，作图



$$G(s)=\frac{K(\tau_1 s+1)\ldots(\tau_m s+1)}{s^{\nu}(T_1 s+1)\ldots(T_n s+1)}$$

绘制幅相曲线的规律

① $\omega\to 0$时 曲线由K和 ν 确定 $G(s)=\dfrac{K}{s^{\nu}}$

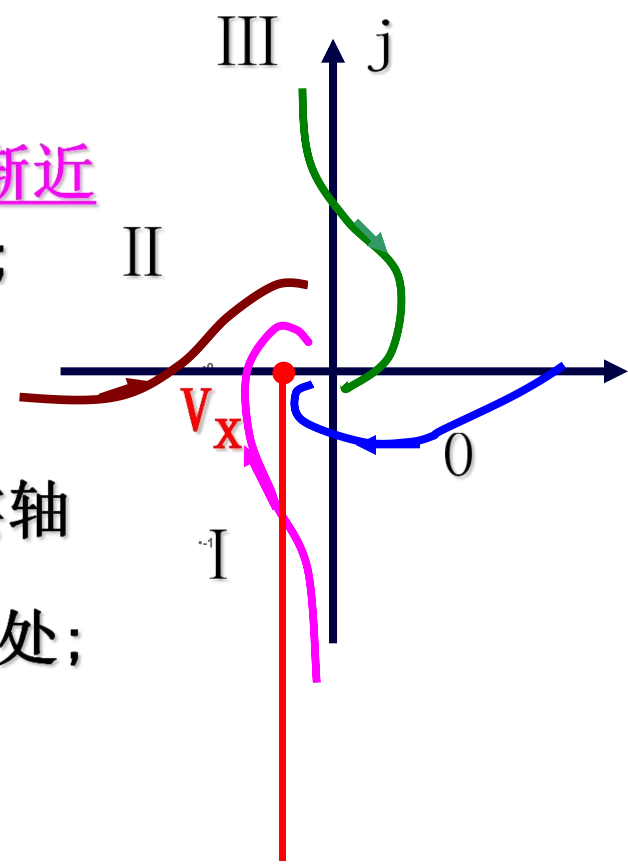
讨论: $\nu=0$ $G(j0)=K$ 起始于实轴;

$\nu=1$ $G(j0^+)=\infty\angle-90^0$ 起始于低频渐近线无穷远处;

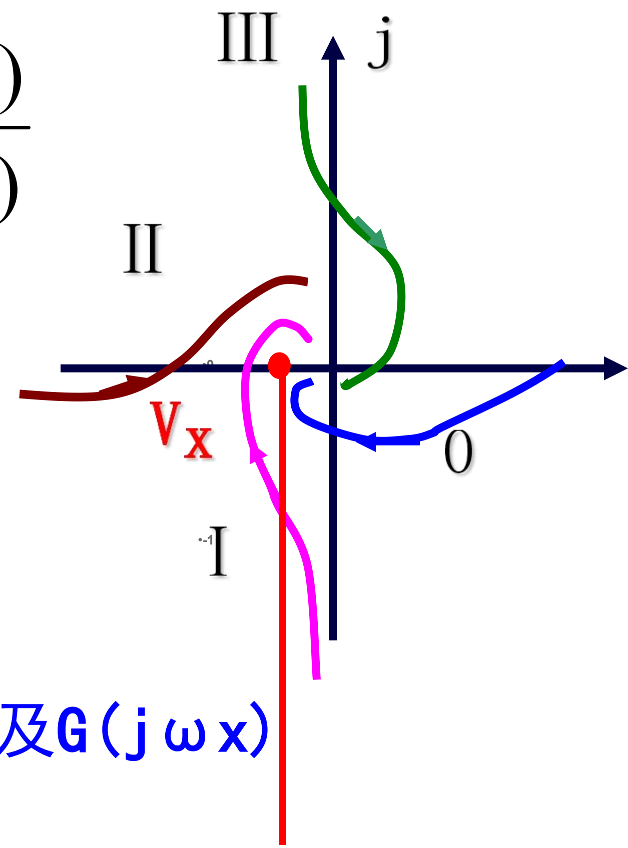
注: Ⅰ型系统, $V_x=\lim\limits_{\omega\to 0^+}\mathrm{Re}[G(j\omega)]$

$\nu=2$ $G(j0^+)=\infty\angle-180^0$ 起始于负实轴的无穷远处;

$\nu=3$ $G(j0^+)=\infty\angle-270^0$



$$G(s)=\frac{K(\tau_1 s+1)\ldots(\tau_m s+1)}{s^{\nu}(T_1 s+1)\ldots(T_n s+1)}$$



② $\omega\to+\infty$ $G(j\omega)=0\angle(m-n-\nu)\times 90^0$

即以$(m-n-\nu)\times 90^0$的幅角与原点相切

③ 与负实轴交点

$\mathrm{Im}G(j\omega x)=0^0$

或$\angle G(j\omega x)=-180^0$

} 相角交界频率ωx及G(jωx)

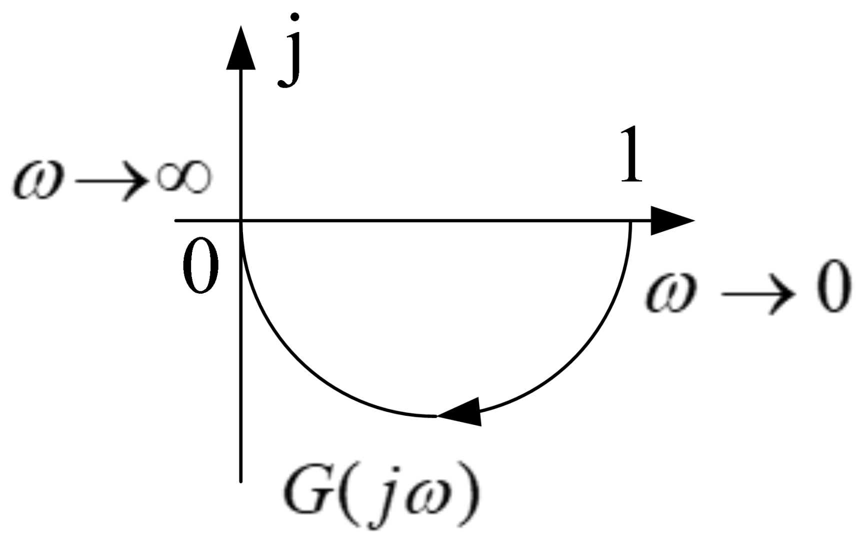
④ 开环传递函数无一阶微分环节，相角连续减少，幅相曲线无凹凸现象

开环传递函数有一阶微分环节，相角不连续减少，幅相曲线可能出现凹凸现象

[注]凹凸程度对系统性能分析影响不大，故无需准确反映。

[练习]

某典型环节，其幅相曲线是个半圆，如图所示，求其传递函数。



[练习]

已知某单位反馈三阶系统，系统开环幅相曲线如图所示，试求开环传递函数。

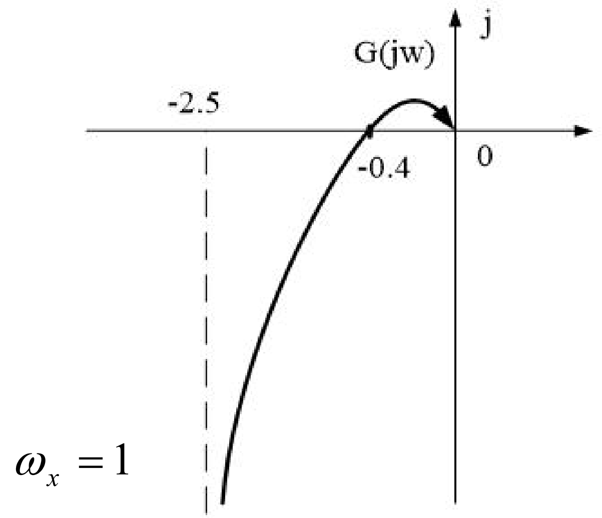


图 2