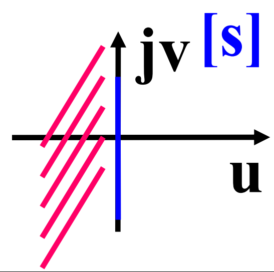
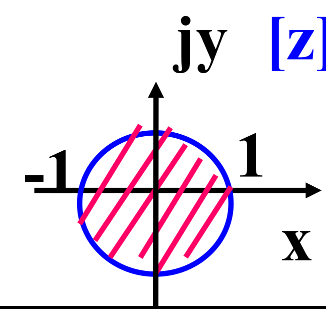
# 第六章 小结

| | 连续系统 | 离散系统 |
|---|---|---|
| 数学模型 | 微分方程<br>传递函数 | 差分方程<br>脉冲传递函数 |
| 稳定充要条件 |  |  |
| 稳定性 | 1.直接求根法;<br>2.劳斯判据 关键: $z=\dfrac{w+1}{w-1}$ | |

续上页:

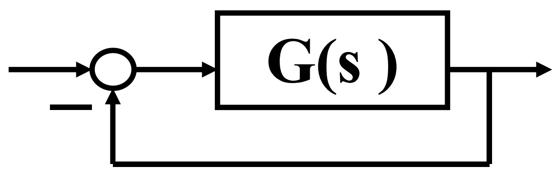
**稳态性能**

① $e_{ss} = \lim\limits_{s\to 0} sE(s)$

sE(s)解析(包括原点)

②误差系数法

适用范围:




| r(t) | K | $e_{ss}$ |
|---|---|---|
| 1(t) | $k_p = \lim\limits_{s\to 0} G(s)$ | $\dfrac{1}{1+k_p}$ |
| t | $k_v = \lim\limits_{s\to 0} sG(s)$ | $\dfrac{1}{k_v}$ |
| $1/2t^2$ | $k_a = \lim\limits_{s\to 0} s^2G(s)$ | $\dfrac{1}{k_a}$ |

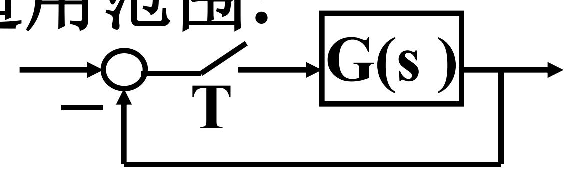
①

$e(+\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} e(nT) = \lim\limits_{z\to 1} (z-1)E(z)$

$\Phi er(z)$全部极点位于单位圆内

②误差系数法

适用范围:

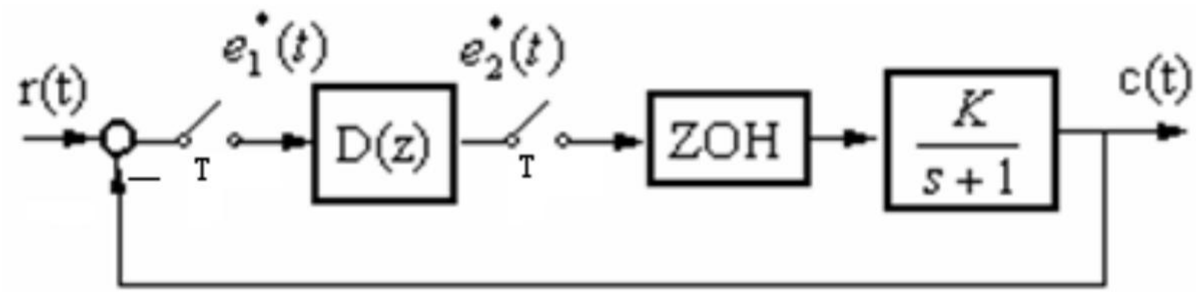



| r(t) | K | $e(+\infty)$ |
|---|---|---|
| 1(t) | $k_p = \lim\limits_{z\to 1} G(z)$ | $\dfrac{1}{1+k_p}$ |
| t | $k_v = \lim\limits_{z\to 1} (z-1)G(z)$ | $\dfrac{T}{k_v}$ |
| $1/2t^2$ | $k_a = \lim\limits_{z\to 1} (z-1)^2G(z)$ | $\dfrac{T^2}{k_a}$ |

[题1] 如图所示采样系统，采样周期$T=1\,s$，

$$e_2(k)=e_2(k-1)+e_1(k)$$

试确定系统稳定时的$K$值范围。

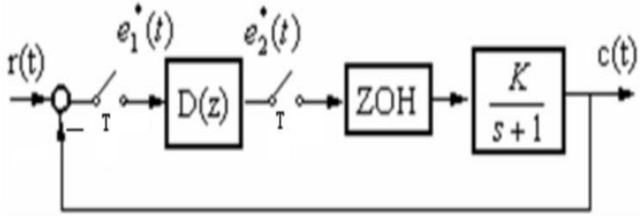



解：由于
$$e_2(k)=e_2(k-1)+e_1(k)$$
$$E_2(z)=z^{-1}E_2(z)+E_1(z)$$
$$D(z)=\frac{E_2(z)}{E_1(z)}=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

广义对象脉冲传递函数

$$G(z)=Z\left[\frac{(1-e^{-Ts})K}{s(s+1)}\right]=(1-z^{-1})Z\left[\frac{K}{s(s+1)}\right]=(1-z^{-1})\left[\frac{(1-e^{-1})Kz}{(z-1)(z-e^{-1})}\right]=\frac{0.632K}{z-0.368}$$

开环脉冲传递函数为




$$D(z)G(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}\cdot\frac{0.632K}{z-0.368}=\frac{0.632Kz}{(z-1)(z-0.368)}$$

闭环特征方程

$$1+D(z)G(z)=z^2+(0.632K-1.368)z+0.368=0$$

$$z=\frac{1+w}{1-w}\qquad (2.736-0.632)w^2+1.264w+0.632K=0$$

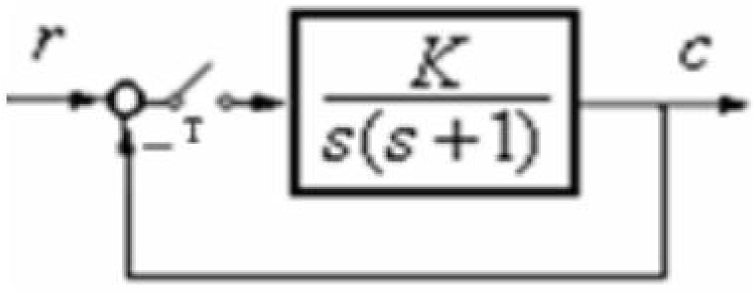
列出劳斯表如下

| | | |
|---|---|---|
| $w^2$ | $2.736-0.632K$ | $0.632K$ |
| $w^1$ | $1.264$ | $0$ |
| $w^0$ | $0.632K$ | |

若系统稳定，必须满足$2.736-0.632K>0$， $K>0$

即 $0<K<4.329$

[题2] 如图所示的采样控制系统，要求在 $r(t)=t$ 作用下的稳态误差 $e(+\infty)=0.25T$，试确定放大系数 $K$ 及系统稳定时 $T$ 的取值范围。




解：

$$G(z)=Z\left[\frac{K}{s(s+1)}\right]=KZ\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right]=K\left[\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-T}}\right]=\frac{Kz(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

因为

$$E(z)=\frac{1}{1+G(z)}R(z)=\frac{(z-1)(z-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})+Kz(1-e^{-T})}\cdot\frac{Tz}{(z-1)^2}$$

所以

$$e(+\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)\cdot\frac{(z-1)(z-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})+Kz(1-e^{-T})}\cdot\frac{Tz}{(z-1)^2}=0.25T$$

由上式求得 $K=4$。

该系统的特征方程为

$$1+G(z)=(z-1)(z-e^{-T})+4z(1-e^{-T})=0$$

即 $$z^2+(3-5e^{-T})z+e^{-T}=0$$

令 $z=\dfrac{1+w}{1-w}$ 代入上式得

$$4(1-e^{-T})w^2+2(1-e^{-T})w+6e^{-T}-2=0$$

列出劳斯表如下

| | | |
|---|---|---|
| $w^2$ | $4(1-e^{-T})$ | $6e^{-T}-2$ |
| $w^1$ | $2(1-e^{-T})$ | 0 |
| $w^0$ | $6e^{-T}-2$ | |

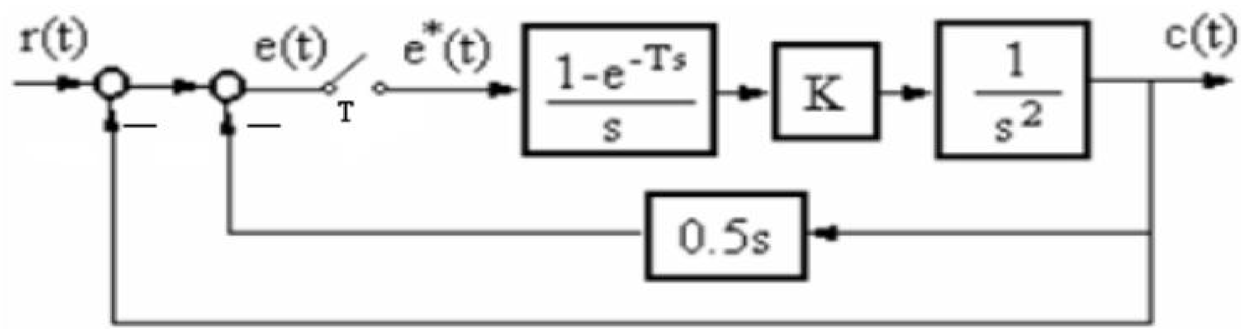
系统若要稳定，则劳斯表得第一列系数必须全部为正值，即有

$$1-e^{-T}>0,\qquad T>0$$

$$6e^{-T}-2>0,\qquad T<\ln 3$$

由此得出$0<T<\ln 3$时，该系统是稳定的。

[题3] 设离散系统如图所示，其中，采样周期$T=0.2s$，k=10，输入信号$r(t)=1+t+t^2/2$，试用终值定理计算系统的稳态误差$e(\infty)$。




解：

系统开环脉冲传递函数为

$$G(z)=Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{10(1+0.5s)}{s^2}\right]=(1-z^{-1})Z\left[\frac{10(1+0.5s)}{s^3}\right]$$

将$T=0.2$代入并整理得

$$G(z)=\frac{1.2z-0.8}{(z-1)^2}$$

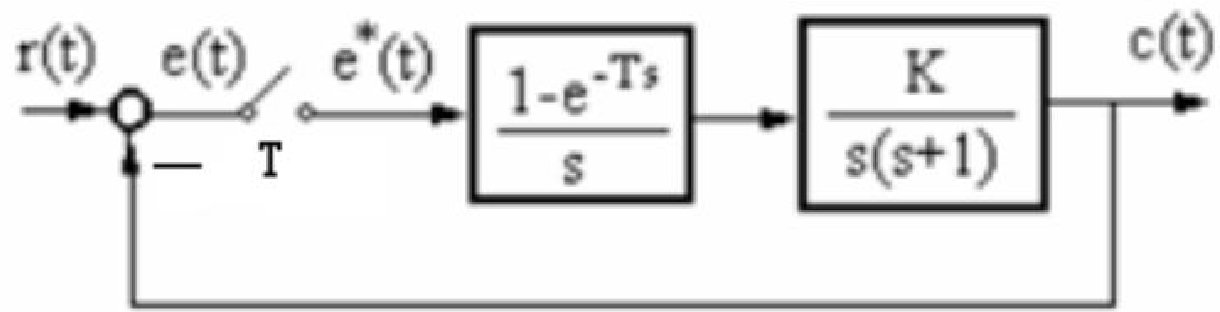
$$\Phi_e(z)=\frac{E(z)}{R(z)}=\frac{1}{1+G(z)}=\frac{(z-1)^2}{(z-1)^2+1.2z-0.8}=\frac{z^2-2z+1}{z^2-0.8z+0.2}$$

$$R(z)=Z\left[1+t+\frac{t^2}{2}\right]=\left[\frac{z}{z-1}+\frac{0.2z}{(z-1)^2}+\frac{0.04z(z+1)}{2(z-1)^3}\right]$$

$$e(+\infty)=\lim_{z\to1}(1-z^{-1})\Phi_e(z)R(z)$$

$$=\lim_{z\to1}\left[1+\frac{0.2}{z-1}+\frac{0.04(z+1)}{2(z-1)}\right]\left[\frac{(z-1)^2}{z^2-0.8z+0.2}\right]=0.1$$

[题4] 设离散系统如图所示，其中$T=0.1\ s$, $K=1$，，试求静态误差系数 $k_p$、$k_v$；并求系统在$r(t)=t$作用下的稳态误差$e^*(\infty)$。




解： 系统开环脉冲传递函数为

$$G(z)=(1-z^{-1})Z\left[\frac{1}{s^2(s+1)}\right]=(1-z^{-1})\left[\frac{Tz}{(z-1)^2}-\frac{(1-e^{-T})z}{(z-1)(z-e^{-T})}\right]$$

将$T=0.1$代入并整理得 $\mathrm{G(z)}=\dfrac{0.005(\mathrm{z}+0.9)}{(\mathrm{z}-1)(\mathrm{z}-0.905)}$，

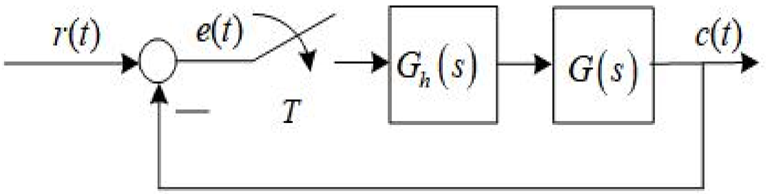
$$K_p=\lim_{z\to1}[1+G(z)]=\lim_{z\to1}\left[1+\frac{0.005(z+0.9)}{(z-1)(z-0.905)}\right]=\infty$$

$$K_v=\lim_{z\to1}(z-1)G(z)=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{0.005(z+0.9)}{(z-1)(z-0.905)}=0.1$$

$$e(\infty)=\frac{T}{K_v}=1$$

[题5] 某线性定常离散系统如图所示，已知采样周期$T=0.2s$，参考输入为$r(t)=2+t$，图中$G_h(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}$，$G(s)=\frac{Ke^{-Ts}}{s}$；要使系统的稳态误差小于 0.25，试确定$K$的取值范围。

（附 Z 变换表：$Z\left[\frac{1}{s+a}\right]=\frac{z}{z-e^{-aT}}$，$Z\left[\frac{1}{s}\right]=\frac{z}{z-1}$, $Z\left[\frac{1}{s^2}\right]=\frac{Tz}{(z-1)^2}$）




解：由题意，$Z\left[\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{Ke^{-Ts}}{s}\right]=Kz^{-1}\left(1-z^{-1}\right)Z\left[\frac{1}{s^2}\right]=\frac{KT}{z(z-1)}=\frac{0.2K}{z(z-1)}$

$$K_p=\lim_{z\to1}\left[1+G(z)\right]=\infty, e_{ssp}=\frac{2}{K_p}=0, K_v=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{0.2K}{z(z-1)}=0.2K, e_{ssv}=\frac{T}{K_v}=\frac{1}{K}$$

于是当输入为$r(t)=2\cdot1(t)+t$时，$e_{ss}=e_{ssp}+e_{ssv}=\frac{1}{K}$，由题意$\frac{1}{K}<0.25$，得$K>4$。

还要考虑系统的稳定性，系统的特征方程为

$$D(z)=z(z-1)+0.2K=z^2-z+0.2K=0$$

令 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$，代入整理可以得到

$$0.2Kw^2+\left(2-0.4K\right)w+2+0.2K=0$$

系统稳定时，$2-0.4K>0$，$K<5$

故 $4<K<5$。