



第二章 二体问题

1. 引言



引子

“三体”小说里面一个核心点：
预测“三体人”世界中三颗恒星
引力作用下行星的运动轨迹

思考？

在已知牛顿万有引力定律的基础
上，如何预测天体的运行轨迹？





1. 引言

什么是二体问题？

研究**两**物体（天体/航天器）**仅**在其相互之间的万有引力作用下的**动力学**问题。

航天器二体问题

开普勒轨道

航天器在**地球的引力场**中运动，忽略太阳、月球的引力，不考虑其它干扰因素的二体问题。

目标

寻找运动微分方程的解，即独立的积分常数(?)。
手段：矢量解法。

1. 引言



2025年11月19日星期三

Page 4

1. 引言



思考?

核心问题

- Q1: 二体问题解可以分为几类 (即开普勒轨道类型)? 各有什么不同特性? 如何区分?
- Q2: 开普勒轨道有哪些守恒量?
- Q3: 如何计算某一时刻航天器的位置?

此题未设置答案，请点击右侧设置按钮



请点击此处编辑题干，在浮窗中选择对应按钮添加空格。

作答



此处添加投票内容

- A 此处添加选项内容
- B 此处添加选项内容
- C 此处添加选项内容
- D 此处添加选项内容

此题未设置答案，请点击右侧设置按钮



开普勒轨道可以

- A 此处添加选项内容
- B 此处添加选项内容
- C 此处添加选项内容
- D 此处添加选项内容

提交

2. 惯性系中的运动方程



二体系统质心 G 的位置矢量

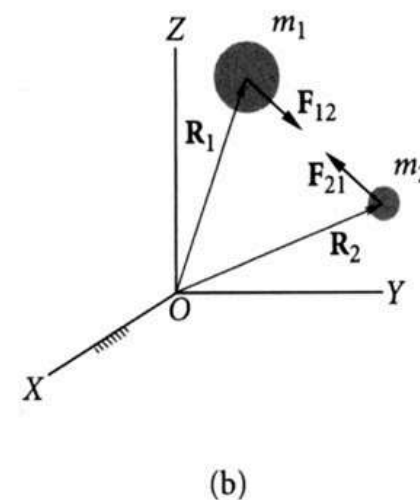
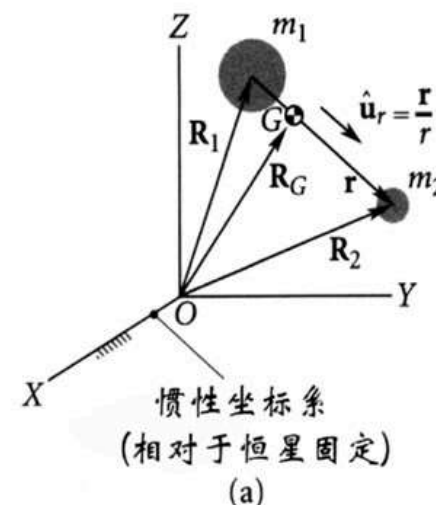
$$\mathbf{R}_G = \frac{m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2}{m_1 + m_2}$$

质心 G 的绝对速度

$$\mathbf{v}_G = \dot{\mathbf{R}}_G = \frac{m_1 \dot{\mathbf{R}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{R}}_2}{m_1 + m_2}$$

质心 G 的绝对加速度

$$\mathbf{a}_G = \ddot{\mathbf{R}}_G = \frac{m_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{R}}_2}{m_1 + m_2}$$



2. 惯性系中的运动方程

设 $\hat{\mathbf{u}}_r$ 为 m_1 指向 m_2 的单位矢量 $\hat{\mathbf{u}}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$

m_1 作用在 m_2 上的力

$$\mathbf{F}_{21} = \frac{Gm_1m_2}{r^2}(-\hat{\mathbf{u}}_r) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r$$



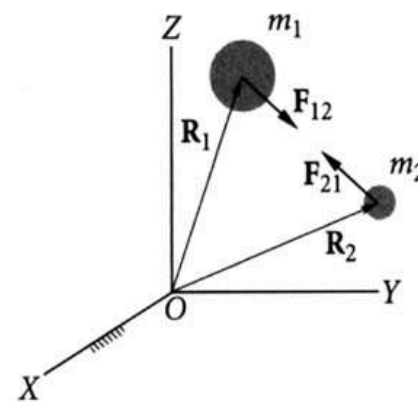
$$-\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r = m_2\ddot{\mathbf{R}}_2 \quad \frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r = m_1\ddot{\mathbf{R}}_1$$



$$m_1\ddot{\mathbf{R}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{R}}_2 = 0$$

$$\mathbf{R}_G = \mathbf{R}_{G_0} + \mathbf{v}_G t$$

$$\mathbf{a}_G = \ddot{\mathbf{R}}_G = \frac{m_1\ddot{\mathbf{R}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{R}}_2}{m_1 + m_2}$$



(b)

一个二体系统的质心可以作为一个惯性坐标系的原点

3. 相对运动方程



$$\begin{aligned} -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r &= m_2\ddot{\mathbf{R}}_2 \\ \frac{Gm_1m_2}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r &= m_1\ddot{\mathbf{R}}_1 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} -\frac{Gm_1^2m_2}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r &= m_1m_2\ddot{\mathbf{R}}_2 \\ \frac{Gm_1m_2^2}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r &= m_1m_2\ddot{\mathbf{R}}_1 \end{aligned}$$

$$m_1m_2(\ddot{\mathbf{R}}_2 - \ddot{\mathbf{R}}_1) = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}(m_1 + m_2)\hat{\mathbf{u}}_r$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^2}\hat{\mathbf{u}}_r$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{r} \quad \longleftarrow m_2 \text{ 相对于 } m_1 \text{ 运动的二阶微分方程}$$

在惯性系中定义

3. 相对运动方程

在运动坐标系 xyz 中的表达式为

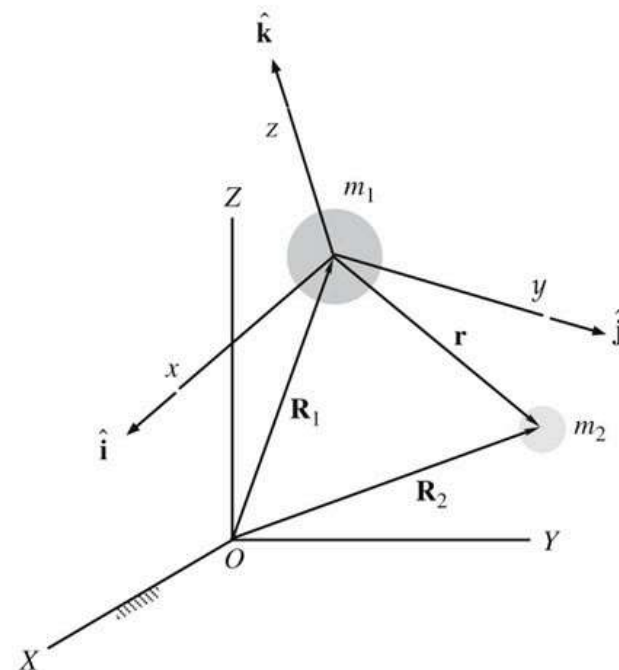
$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{\text{相对}} = \dot{x}\hat{\mathbf{i}} + \dot{y}\hat{\mathbf{j}} + \dot{z}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_{\text{相对}} = \ddot{x}\hat{\mathbf{i}} + \ddot{y}\hat{\mathbf{j}} + \ddot{z}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_{\text{相对}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}_{\text{相对}}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = 0, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_{\text{相对}}?$$



3. 相对运动方程

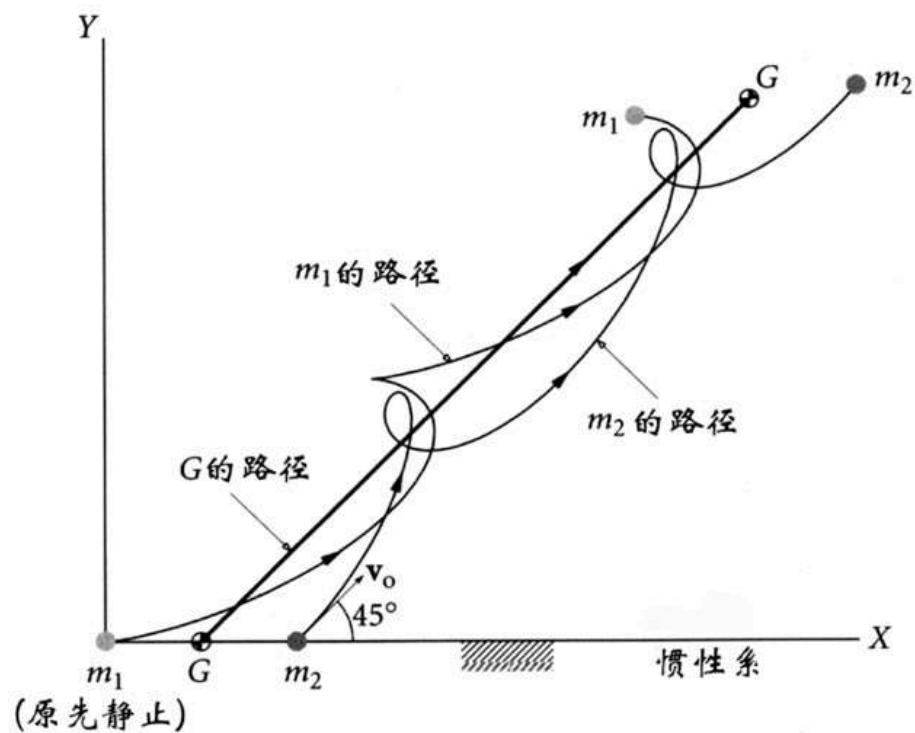
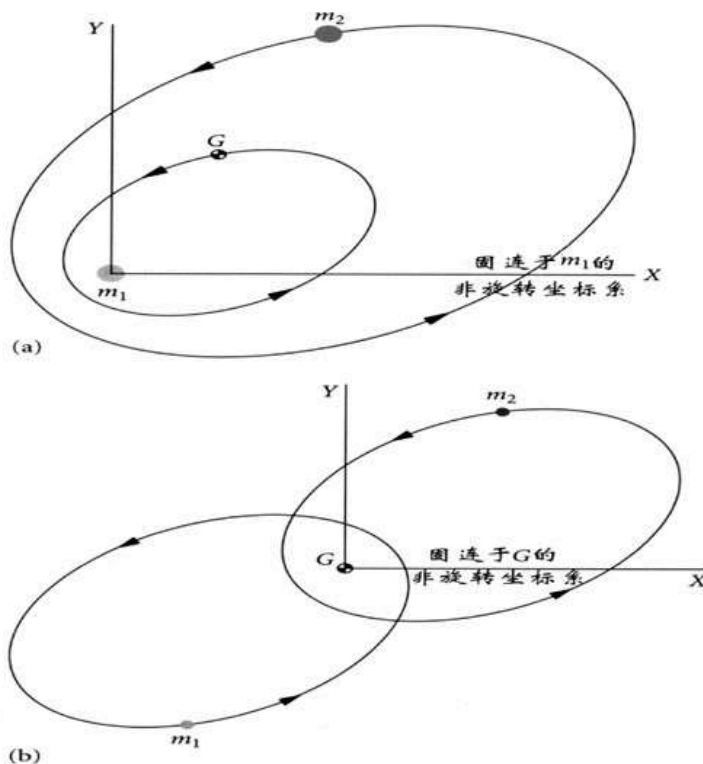


图. 由惯性系观察两个相同的物体仅在引力作用下的运动

3. 相对运动方程

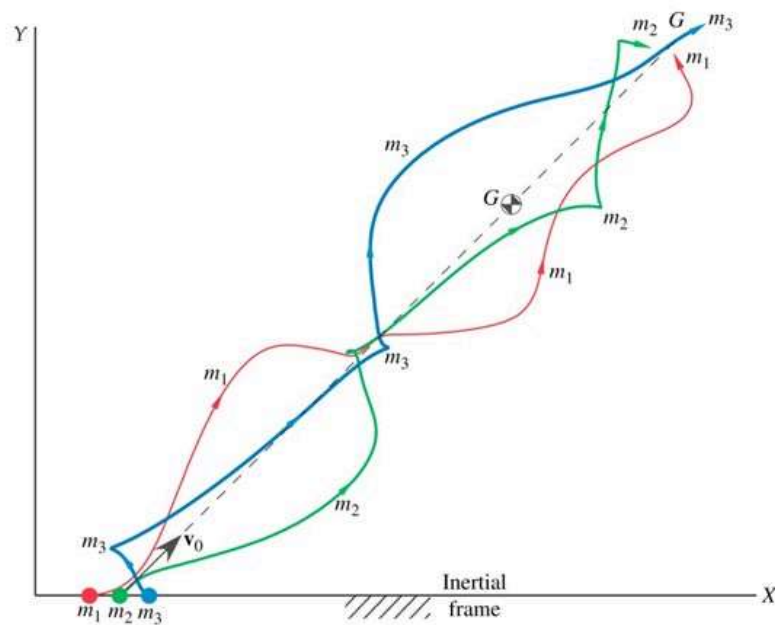


二体中的任一物体相对于质心的运动方程均与二体中一个物体相对于另一个物体的运动方程有相同的形式。亦即选择不同的参照物时，二体运动方程的形式均是类似的。

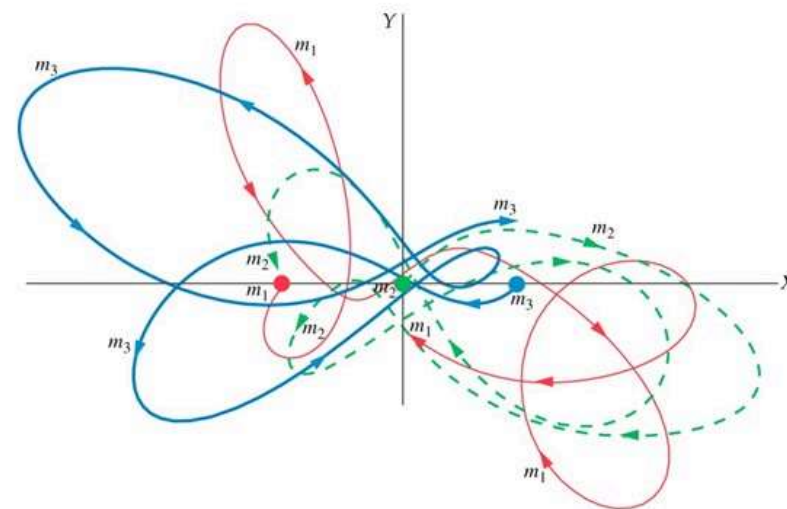
3. 相对运动方程



$$N > 2$$



由惯性系观察三个相同的物体的运动



由固连于质心G的惯性系中观测到的运动

4. 角动量和轨道方程



m_2 相对于 m_1 的角动量 $\mathbf{H}_{2/1} = \mathbf{r} \times m_2 \dot{\mathbf{r}}$

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

求导

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}$$

$$\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = 0 \quad \ddot{\mathbf{r}} = -(u/r^3)\mathbf{r} \quad \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \left(-\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \right) = -\frac{\mu}{r^3} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = 0$$

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = 0 \rightarrow \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h} \text{ 常量}$$

$$\hat{\mathbf{h}} = \frac{\mathbf{h}}{h}$$

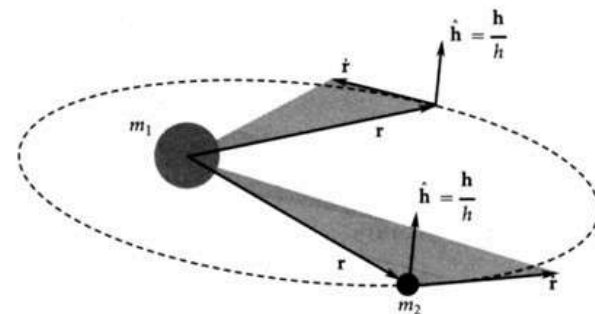


图. M_2 绕 M_1 的运动位于一平面之内

动量矩积分

4. 角动量和轨道方程

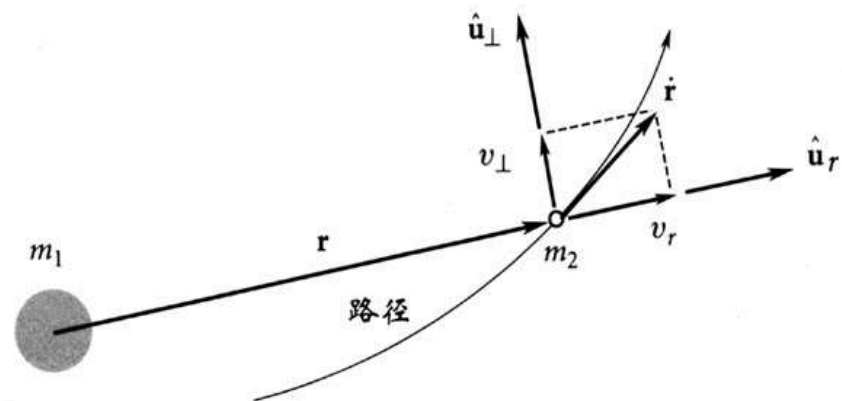


径向，切向，横向，法向

$$\mathbf{h} = r\hat{\mathbf{u}}_r \times (v_r\hat{\mathbf{u}}_r + v_\perp\hat{\mathbf{u}}_\perp) = rv_\perp\hat{\mathbf{h}}$$

$$h = rv_\perp$$

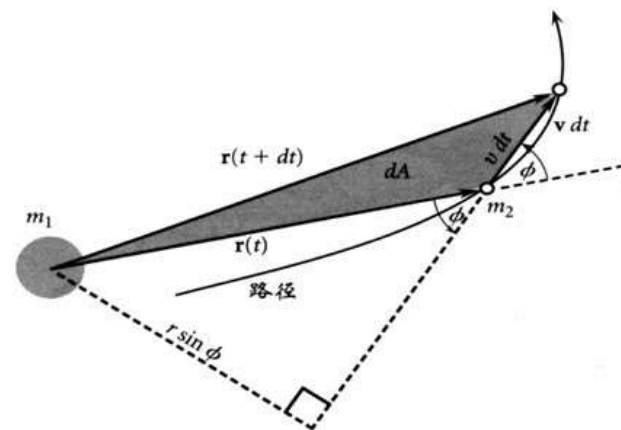
角动量的大小仅取决于
相对速度的垂直分量。



$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高} = \frac{1}{2} \times v dt \times r \sin \phi \\ &= \frac{1}{2} r (v \sin \phi) dt = \frac{1}{2} rv_\perp dt \end{aligned}$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{h}{2}$$

开普勒第二定律：行
星在相同时间内扫过
的面积相等。



轨道方程推导:

$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2 \longrightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = 2r \frac{dr}{dt} \\ \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{r} = 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \end{cases}$

$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = r\dot{r} \longleftrightarrow \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{r}\| \frac{d\|\mathbf{r}\|}{dt}$

★

4. 角动量和轨道方程



$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \xrightarrow{\text{两边同时与单位角动量叉乘}} \quad \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \mathbf{h}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \frac{d(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h})}{dt} - \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{h}}$$

$$\downarrow \quad \frac{d(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h})}{dt} = \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} + \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{h}}$$

\mathbf{h} 为常量

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} = \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h})$$



4. 角动量和轨道方程

bac-cab 法则

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{h} &= \frac{1}{r^3} [\mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})] \\ &= \frac{1}{r^3} [\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})] \\ &= \frac{1}{r^3} [\mathbf{r} \cdot (r\dot{\mathbf{r}}) - \dot{\mathbf{r}}r^2] \\ &= \frac{(r\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}r)}{r^2} \end{aligned}$$

$$\frac{(r\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}r)}{r^2} = -\frac{(\dot{\mathbf{r}}r - r\dot{\mathbf{r}})}{r^2} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{h}$$



4. 角动量和轨道方程

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) &= \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} & -\frac{1}{r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{h} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \\ \ddot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} &= -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \mathbf{h} \\ \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) &= \frac{d}{dt} \left(\mu \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \\ \frac{d}{dt} \left(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r} \right) &= 0 \\ \ddot{\mathbf{r}} &= -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad \xrightarrow{\text{一次积分}} \quad \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{C} \end{aligned}$$



4. 角动量和轨道方程

$$(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} - \mu \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{h}}{r} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{h}$$

$$(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} = 0 \quad \downarrow \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{h} = 0$$

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{h} = 0$$

C位于轨道平面内?

$$\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h} - \mu \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{C} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{\mathbf{C}}{\mu} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}}{\mu}$$

偏心率矢量 $\mathbf{e} \triangleq \mathbf{C} / \mu$

$$\frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}}{\mu}$$

4. 角动量和轨道方程



$$\frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}}{\mu}$$



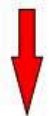
为了得到一阶微分方程的标量形式

$$\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r} + \mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = \frac{1}{\mu} \mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h})$$



$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}$$

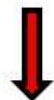
$$\mathbf{r} \cdot (\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = h^2$$



$$r + \mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = \frac{h^2}{\mu}$$

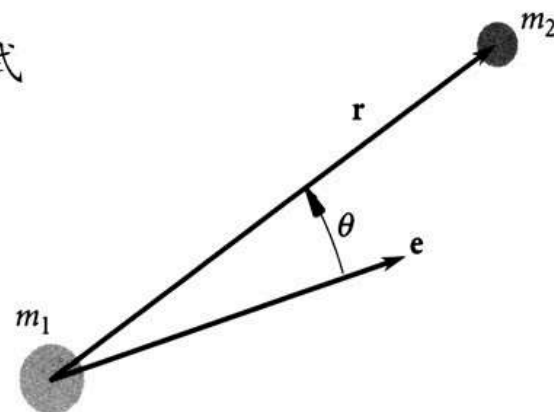


$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = r e \cos \theta$$



$$r + r e \cos \theta = \frac{h^2}{\mu} \text{ 或者表示成}$$

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos \theta}$$



轨道积分，
 h, e, μ 均为常数，
二体问题轨道又叫
开普勒轨道

4. 角动量和轨道方程

位置矢量 \mathbf{r} 的角速度为 $\dot{\theta}$ 垂直于位置矢量的速度分量可由角速度表示

$$v_{\perp} = r\dot{\theta}$$

$$h = r v_{\perp}$$

$$h = r^2 \dot{\theta}$$

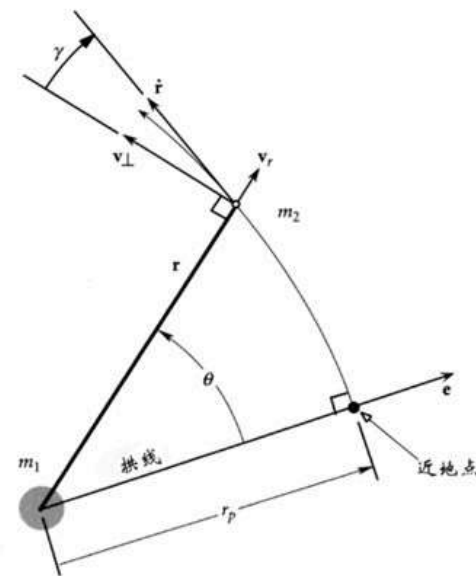
速度表达式

$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos \theta}$$

$$v_{\perp} = \frac{\mu}{h} (1 + e \cos \theta)$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{h^2}{\mu} \left[-\frac{e(-\dot{\theta} \sin \theta)}{(1 + e \cos \theta)^2} \right] = \frac{h^2}{\mu} \frac{e \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \frac{h}{r^2}$$

$$v_r = \frac{\mu}{h} e \sin \theta$$



4. 角动量和轨道方程



$$r = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e \cos \theta}$$

近地点, $\theta=0$

$$\begin{cases} r_p = \frac{h^2}{\mu} \frac{1}{1 + e} \\ v_r = 0 \end{cases}$$

飞行路径角 $\tan \gamma = \frac{v_r}{v_\perp} \iff \tan \gamma = \frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta}$

半通径 $p = \frac{h^2}{\mu}$

