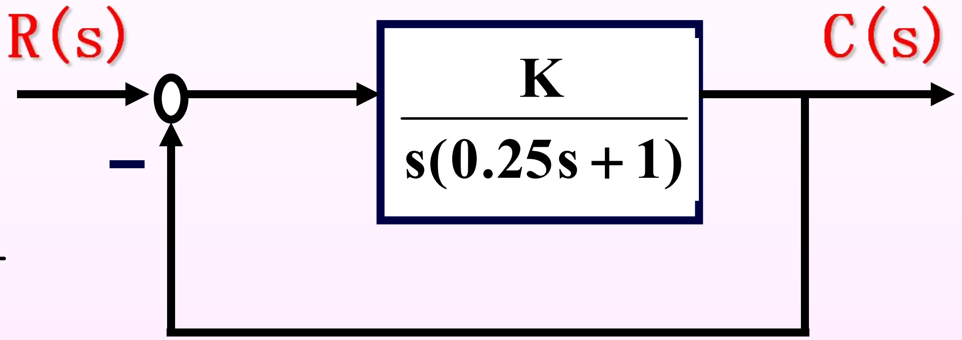
4-1 根轨迹的基本概念

一、根轨迹的概念

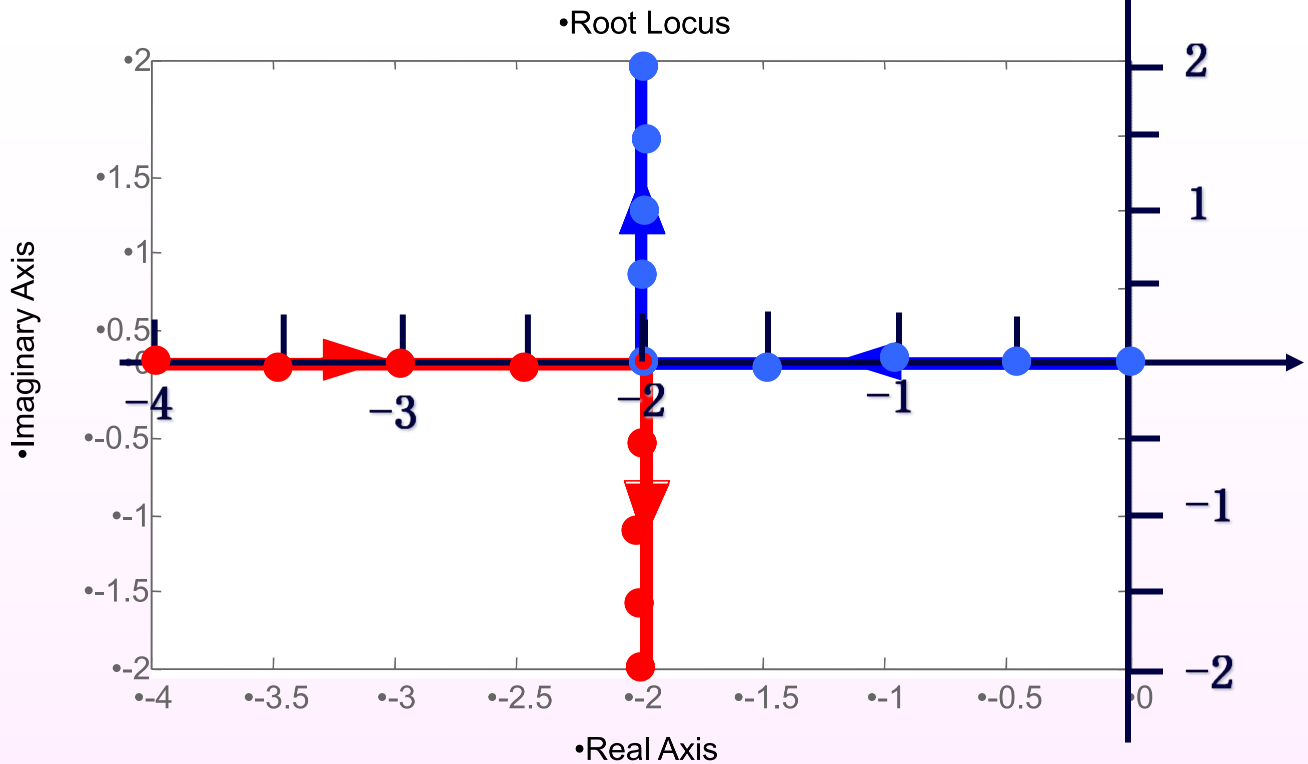
[例]当开环增益K从0→+∞时，求闭环极点，并在s平面作出轨迹。



解：$\phi(s)=\dfrac{4k}{s^2+4s+4k}$

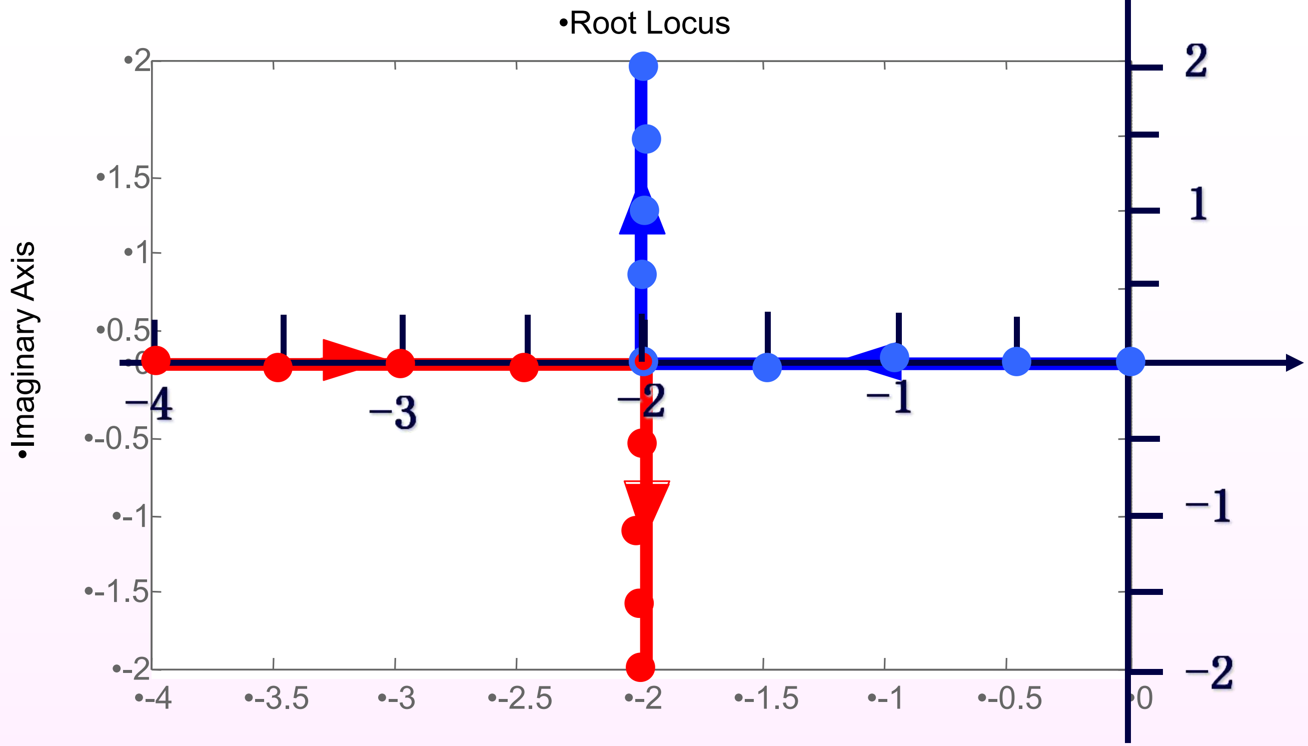
$$D(s)=s^2+4s+4k=0$$

$$s_{1,2}=-2\pm2\sqrt{1-k}$$



$$s_{1,2} = -2 \pm 2\sqrt{1-k}$$

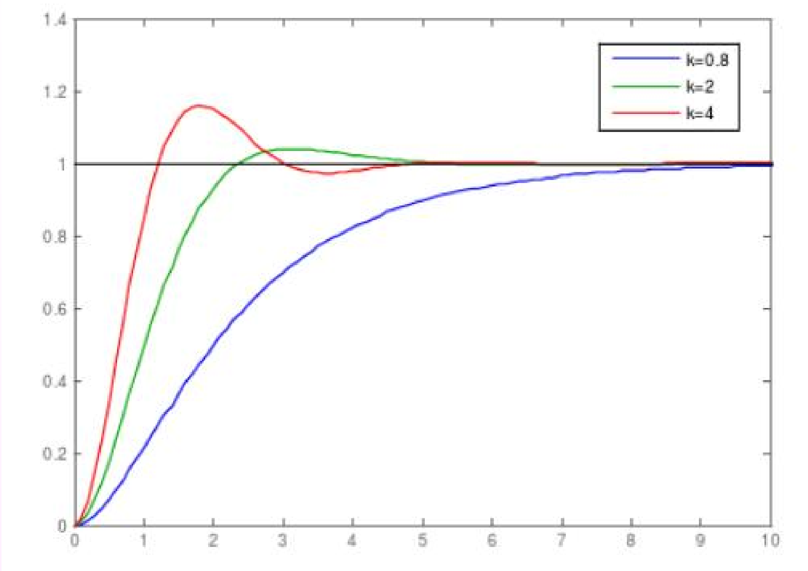
k	s_1	s_2
0	0	-4
1	-2	-2
2	$-2+j2$	$-2-j2$
$+\infty$	$-2+j\infty$	$-2-j\infty$

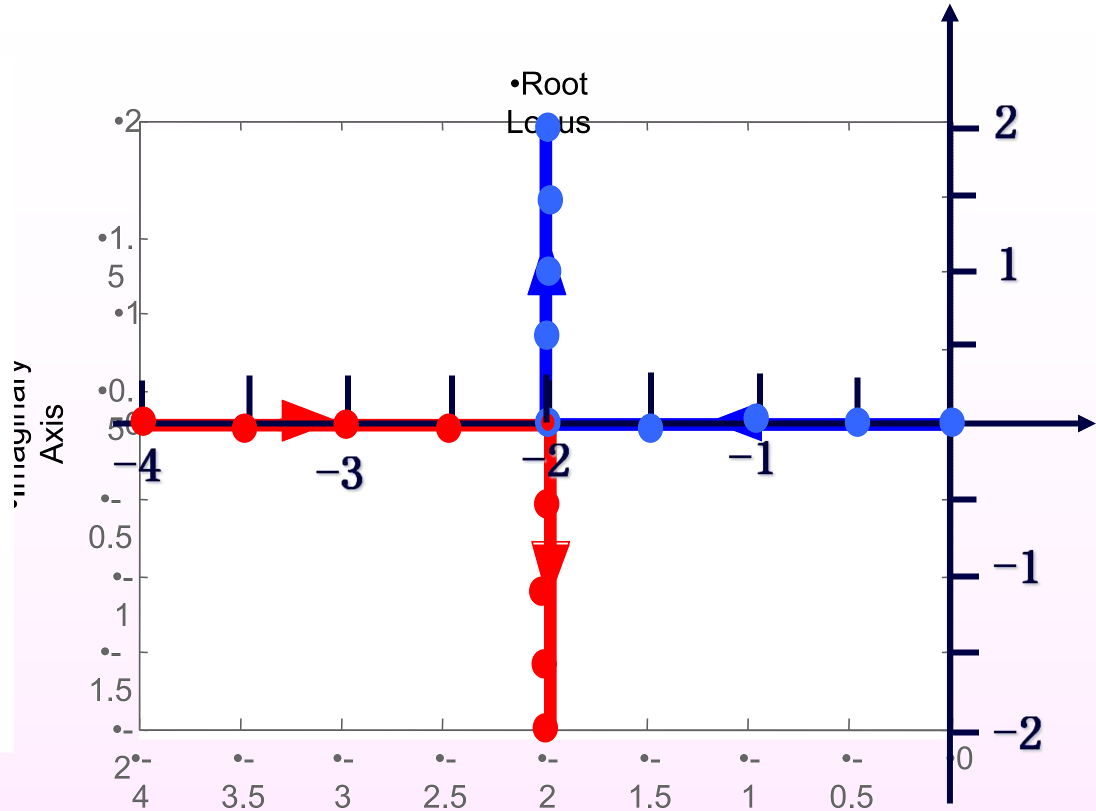


1、借助 Control System Toolbox 提供的 rltool 可视化分析界面进行分析：

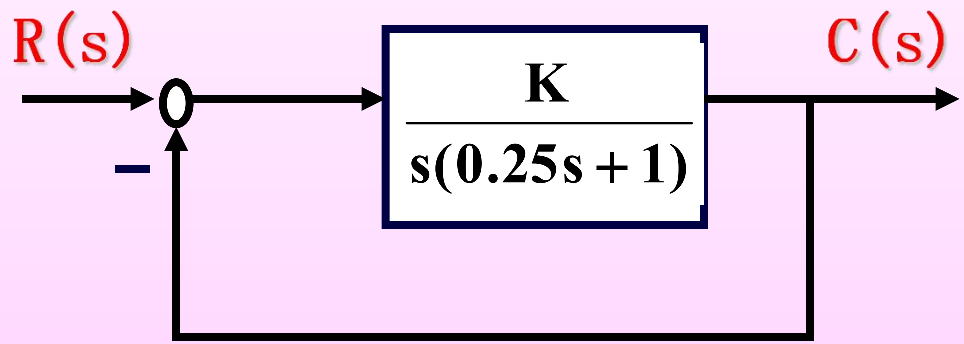
```
clc;
clear;
num=1;
den=[1 4 0];
gs=tf(num,den); % 开环传递函数
rltool(gs)   %通过控制工具箱中的 rltool 可视化分析界面可方便地进行系统分析
```

根轨迹的作用





$$s_{1,2} = -2 \pm 2\sqrt{1-k}$$



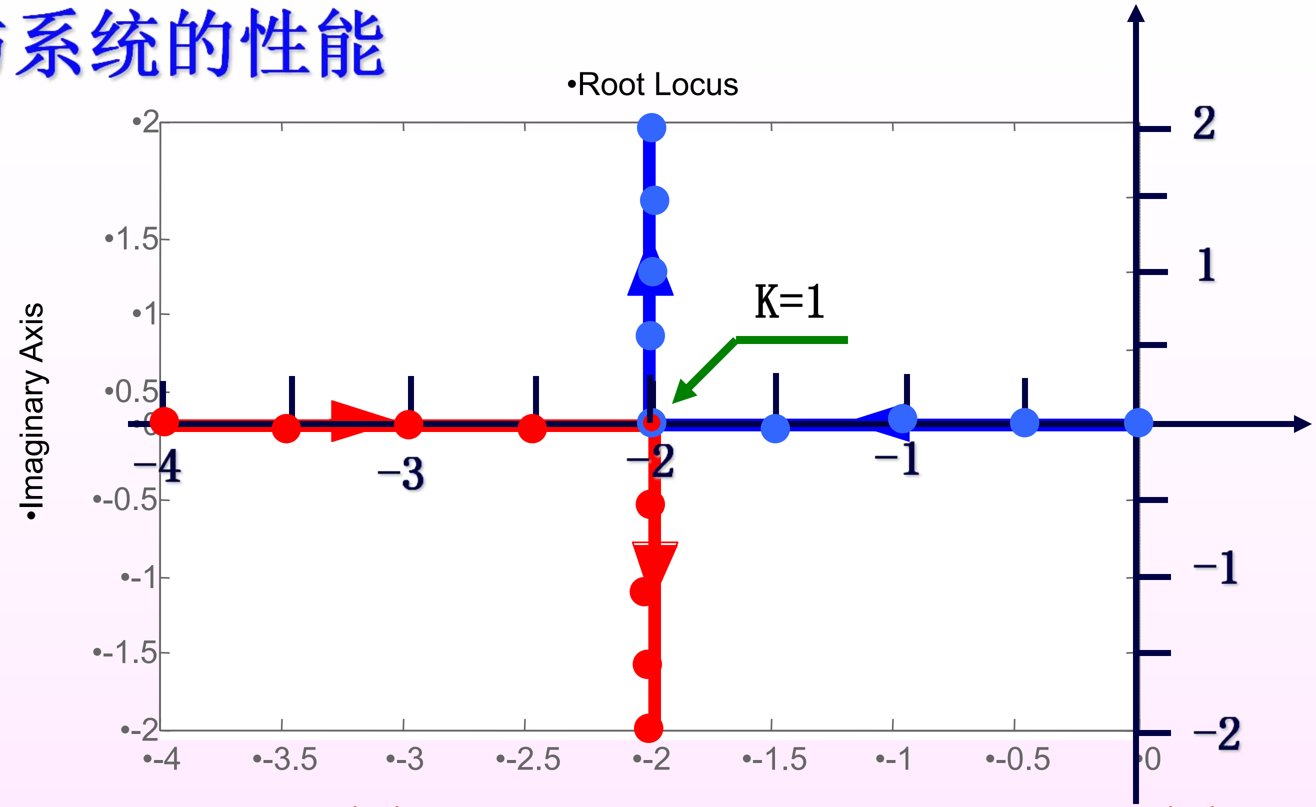
定义:开环系统某一参数从零变化到无穷大时，闭环系统特征方程式的根在s平面上变化的轨迹。

二、根轨迹与系统的性能

1 稳定性

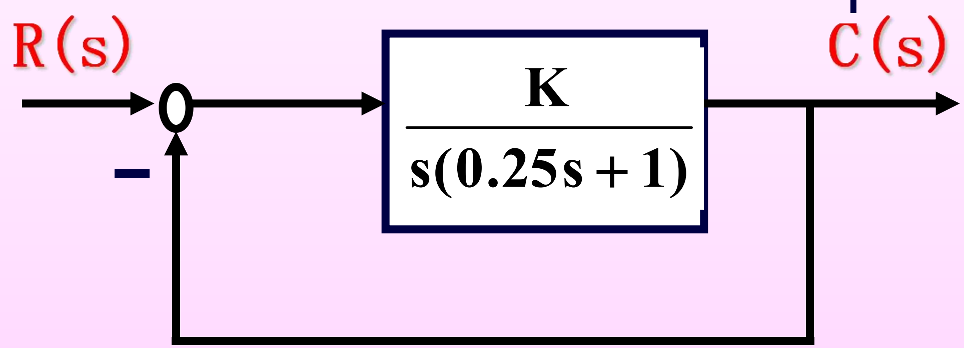
2 动态性能

3 稳态性能



$$\phi(s)=\frac{4k}{s^2+4s+4k}$$

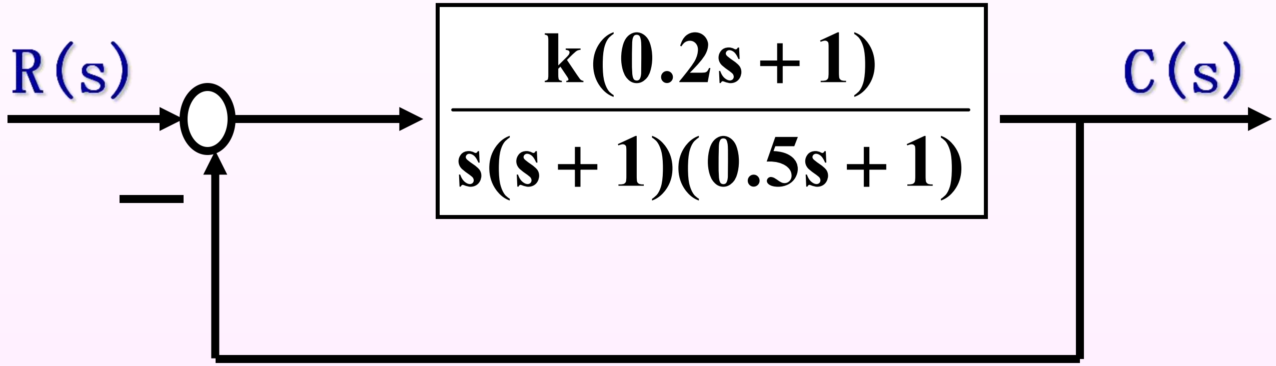
$$s_{1,2}=-2\pm 2\sqrt{1-k}$$



结论：根轨迹与系统的性能密切相关。

三、闭环零、极点与开环零、极点的关系

1. 根轨迹增益



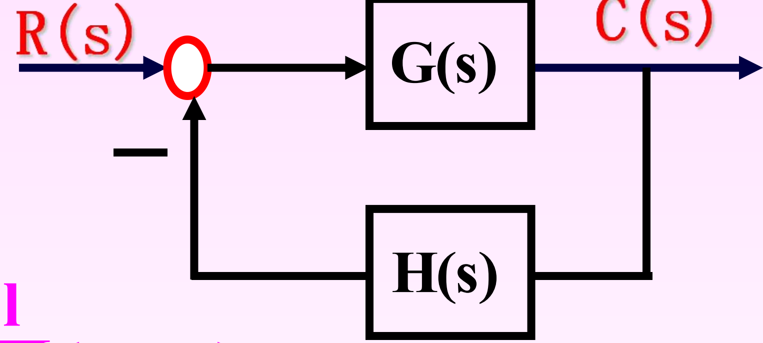
$$G(s)=\frac{k(0.2s+1)}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

$$=\frac{2k(s+5)}{5s(s+1)(s+2)}$$

根轨迹增益

$K^{*}=10k$

2. 闭环零、极点与开环零、极点的关系？



系统结构图

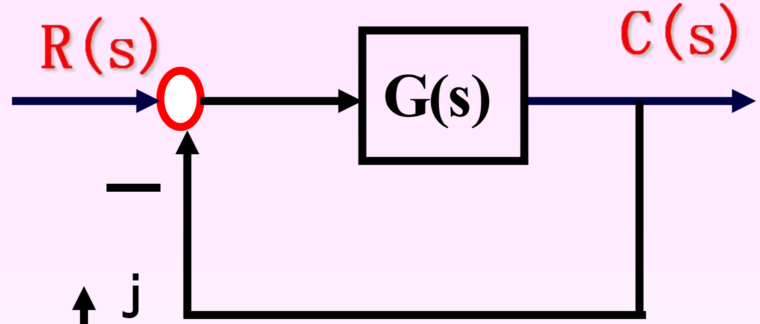
$$G(s)=K_G^*\frac{\prod_{i=1}^{f}(s-z_i)}{\prod_{i=1}^{q}(s-p_i)}\qquad H(s)=K_H^*\frac{\prod_{j=1}^{l}(s-z_j)}{\prod_{j=1}^{h}(s-p_j)}$$

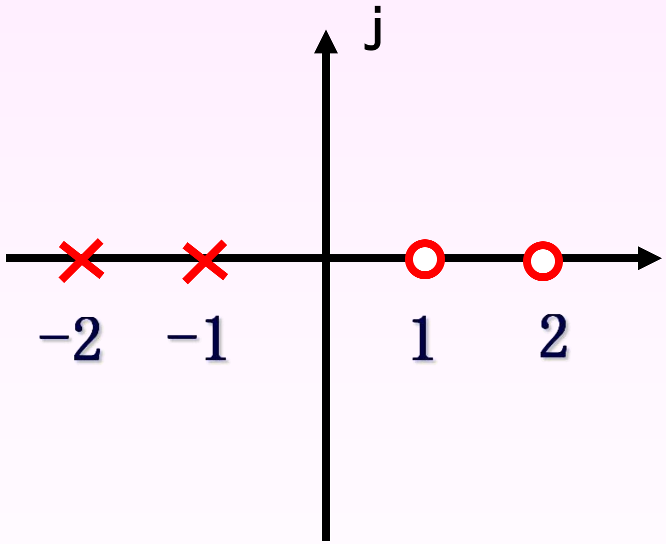
$$\Phi(s)=\frac{K_G^*\prod_{i=1}^{f}(s-z_i)\prod_{j=1}^{h}(s-p_j)}{\underbrace{\prod_{i=1}^{q}(s-p_i)\prod_{j=1}^{h}(s-p_j)}_{\text{开环极点}}+\underbrace{k_G^*\,k_H^*}_{\text{根轨迹增益}}\underbrace{\prod_{i=1}^{f}(s-z_i)\prod_{j=1}^{l}(s-z_j)}_{\text{开环零点}}}$$

结论： 1 闭环极点和 开环零点、开环极点、 根轨迹增益有关

2 根轨迹的任务是如何由开环零点、开环极点、 根轨迹增益找到闭环极点

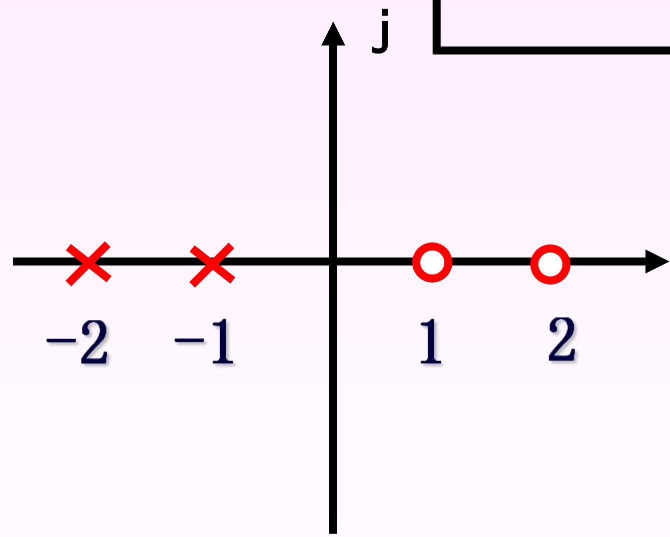
[例]单位反馈系统，求闭环传递函数。





开环零、极点分布图

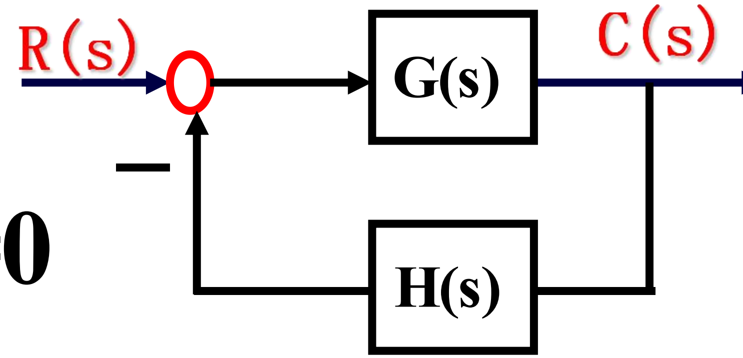
$$G(s)=\frac{K^*(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)}$$



闭环零、极点分布图

$$\phi(s)=\frac{K^*(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)}$$

四、根轨迹方程



特征方程 $1+G(s)H(s)=0$

$$1+K^{*}\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=0$$

$$K^{*}\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)}=-1$$

根轨迹方程 $$K^* \frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{i=1}^{n}(s-p_i)} = -1$$

$$-1 = 1e^{j(2k+1)\pi}$$

模值条件 $$K^* \frac{\prod_{j=1}^{m}|s-z_j|}{\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|} = 1$$

180^0相角条件

相角条件

$$\sum_{i=1}^{m}\angle s-z_i - \sum_{j=1}^{n}\angle s-p_j = (2k+1)\pi = 2k\pi + 180^0$$

$(k=0,\quad \pm 1,\quad \cdots)$

模值条件 $$K^*\frac{\prod_{i=1}^{m}|s-z_j|}{\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|}=1$$

相角条件 $$\sum_{i=1}^{m}\angle s-z_i-\sum_{j=1}^{n}\angle s-p_j=(2k+1)\pi$$

$$(k=0,\quad \pm1,\quad \cdots)$$

结论:1 模值条件与K^*与有关,相角条件与K^*无 关

2 相角条件是根轨迹的充要条件

思考: 1 s 的含义是什么?

2 正反馈系统的根轨迹方程满足什么条件?

正反馈系统　特征方程　$1-G(s)H(s)=0$

根轨迹方程　$$K^*\frac{\prod^{m}(s-z_j)}{\prod^{n}(s\ p_i)}=1$$

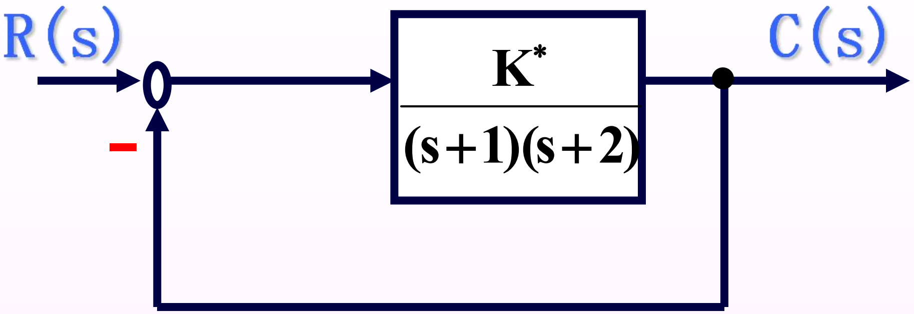
模值条件　$$K^*\frac{\prod_{j=1}^{m}|s-z_j|}{\prod_{i=1}^{n}|s-p_i|}=1$$

0^0相角条件

相角条件　$$\sum_{i=1}^{m}\angle s-z_i-\sum_{j=1}^{n}\angle s-p_j=(2k+0)\pi$$

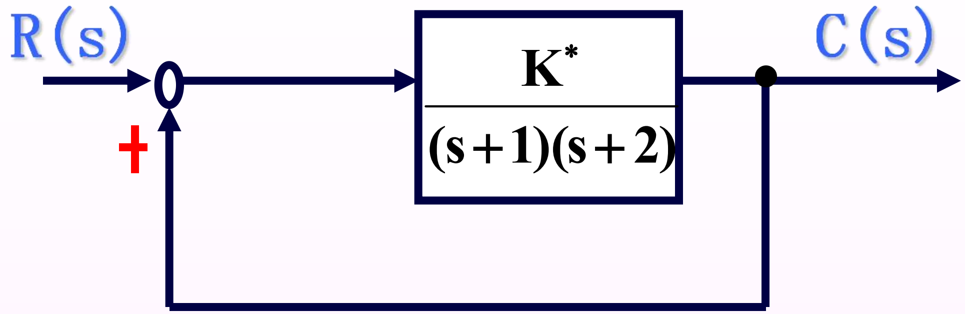
$(k=0,\quad \pm1,\quad \cdots)$

判断相角条件为180^0 还是0^0



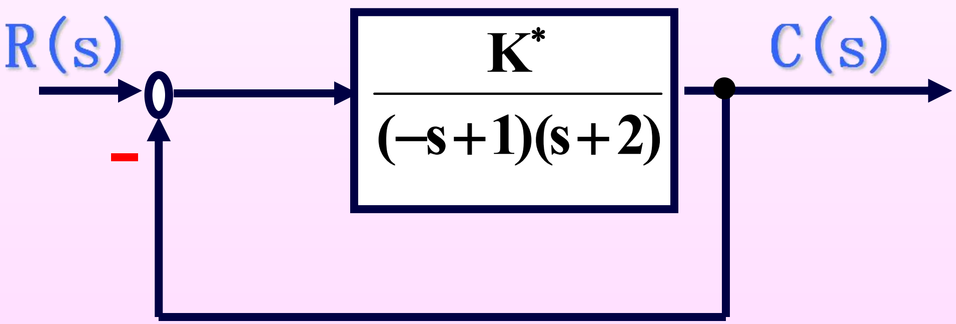
$K^*: 0 \rightarrow +\infty$

(a) 180^0



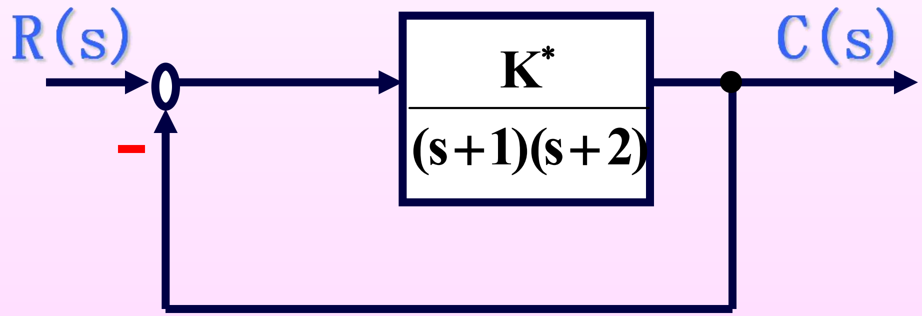
$K^*: 0 \rightarrow +\infty$

(b) 0^0



$K^*: 0 \rightarrow +\infty$

(c) 0^0



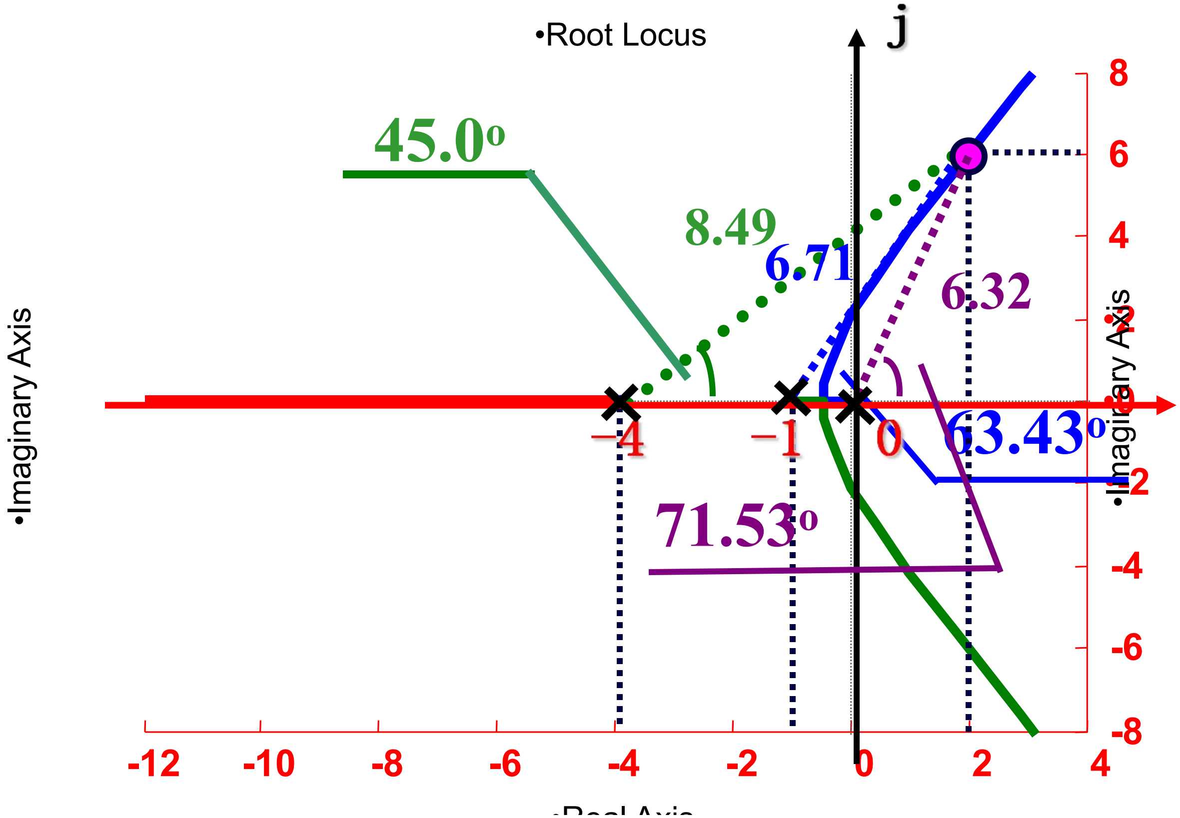
$K^*: -\infty \rightarrow 0$

(d) 0^0

[思考] 如何证明某点为根轨迹上的点?

$$G(S)=\frac{k^*}{s(s+1)(s+4)}$$

s=2+j6 在根轨迹上吗?



L_i	θ_i
8.49	45.0
6.71	63.43
6.32	71.53
360.0	179.9º

k*=360.0

$$\sum_{i=1}^{m}\angle s-z_i-\sum_{j=1}^{n}\angle s-p_j=(2k+1)\pi \quad -(\angle s+\angle s+1+\angle s+4)\Big|_{s=2+j6}=(2k+1)\pi\,?$$