第三章 轨道位置的时间函数

单选题 1分

对于椭圆轨道，以下哪个量不守恒?

A 半长轴

B 轨道角动量

C 飞行路径角

D 轨道能量

单选题 1分

下面哪种轨道机械能等于0

A 圆轨道

B 椭圆轨道

C 抛物线轨道

D 双曲线轨道

填空题 2分

决定轨道形状的轨道根数分别是什么？ [填空1]、[填空2]

主观题 10分

已知中心引力常数为μ，试利用抛物线轨道机械能特性，推导轨道任一点r处的速度大小v，并指出该速度是圆轨道（半径为r）速度的多少倍？

1. 引言

思考？

核心问题

- Q1：二体问题解可以分为几类（即开普勒轨道类型）？各有什么不同特性？如何区分？√
- Q2：开普勒轨道有哪些守恒量？
- Q3：如何计算某一时刻航天器的位置？

1. 引言

轨道递推问题：若已知初始时刻位置和速度，如何求解目标时刻的位置和速度？

平面情形

初始时刻t_0位置和速度 → a, e, θ_0 → a, e, θ_1 → t_1时刻位置和速度

若可以知道**t1**时刻的真近点角***θ*1**值，则采用拉格朗日系数方法可以求解该时刻的位置和速度。

如何建立时间与真近点的关系？

2. 近地点时刻

$$r=\frac{(h^2/\mu)}{(1+e\cos\theta)}$$ ← 时间的隐函数

如何计算飞过任意两真近点角所需的时间？

$$h=r^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{\mu^2}{h^3}dt=\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

方程两边积分

$$\frac{\mu^2}{h^3}(t-t_p)=\int_0^\theta\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

$t_p=0$

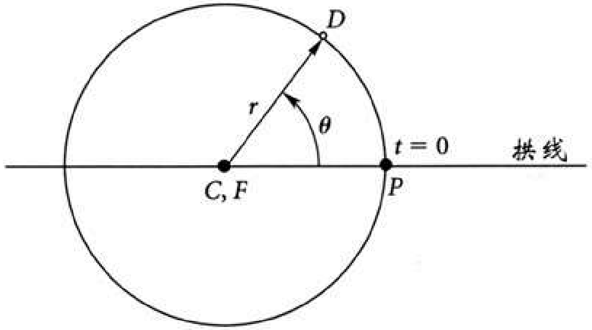
$$\frac{\mu^2}{h^3}t=\int_0^\theta\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$ …通用

3. 圆轨道

e=0

$$\frac{\mu^2}{h^3}t=\int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

$$\frac{\mu^2}{h^3}t=\int_0^\theta d\theta$$



$$t=\frac{h^3}{\mu^2}\theta \qquad r=\frac{h^2}{\mu}$$

$$t=\frac{r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}}\theta \qquad T=2\pi r^{\frac{3}{2}}/\sqrt{\mu}$$

$$t=\frac{\theta}{2\pi}T$$ **或** $$\theta=\frac{2\pi}{T}t$$

4. 椭圆轨道

0<*e*<1

$$\frac{\mu^2}{h^3}t=\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

$$\frac{\mu^2}{h^3}t=\frac{1}{\left(1-e^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left[2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right)-\frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\frac{\mu^2}{h^3}\left(1-e^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,t=2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right)-\frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} 2\pi\Bigg/\left[\dfrac{2\pi}{\mu^2}\left(\dfrac{h}{\sqrt{1-e^2}}\right)^3\right] \\ \Downarrow \\ T_{椭圆} \end{array}\right\}\quad \frac{2\pi}{T_{椭圆}}$$

4. 椭圆轨道

$$n = \frac{2\pi}{T_{椭圆}}$$ 椭圆轨道的平均角速度

$$nt = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right) - \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

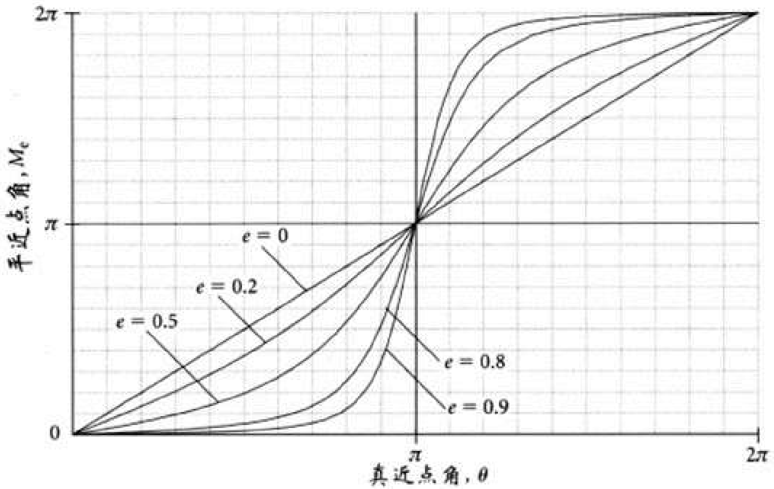
平近点角 $M_e = nt$

$$M_e = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right) - \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

$$M_e = \frac{\mu^2}{h^3}\left(1-e^2\right)^{\frac{3}{2}} t$$

M_e可看成是一假想物体沿椭圆轨道以常量角速度值为n运行时所形成的方位角

4. 椭圆轨道



M_e为θ的单调递增函数

$$t \to \theta$$

$$t \to M_e \qquad M_e \to \theta$$

$$\frac{\mu^2}{h^3} t = \frac{1}{\left(1-e^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left[2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right) - \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right]$$

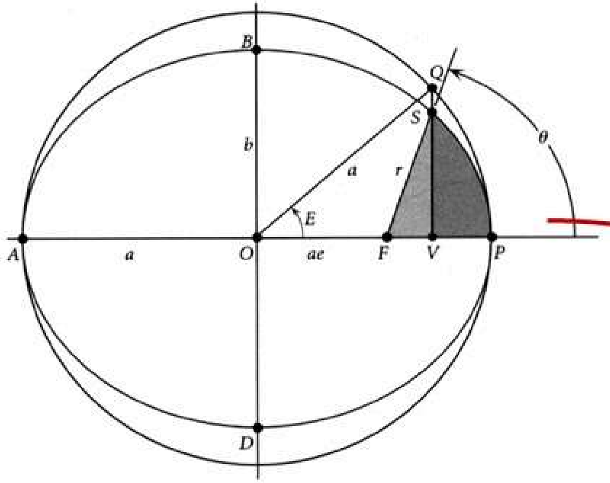
$$M_e = nt$$

$$M_e = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right) - \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

4. 椭圆轨道

$$M_e \to \theta$$

$$M_e \to E \qquad E \to \theta$$



$$\overline{OV} = a\cos E \qquad \overline{OV} = ae + r\cos\theta$$

$$a\cos E = ae + r\cos\theta \xrightarrow{r = a(1-e^2)/(1+e\cos\theta)}$$

$$\cos E = \frac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta}$$

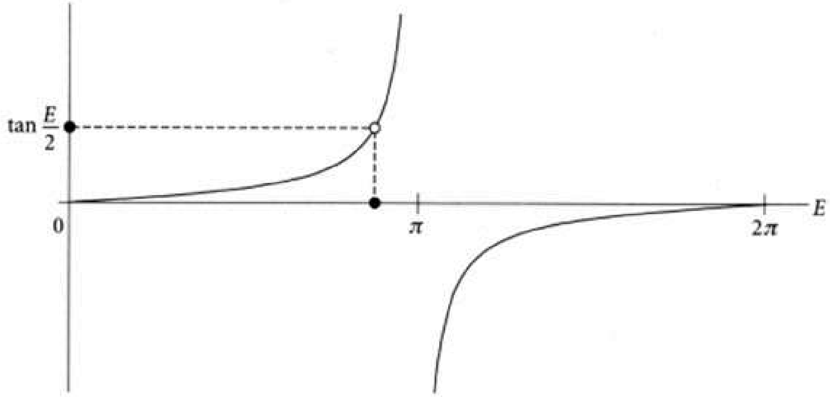
$$\sin E = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{e-\cos E}{e\cos E - 1}$$

4. 椭圆轨道

$$\begin{cases} \cos E = \dfrac{e+\cos\theta}{1+e\cos\theta} \\ \sin E = \dfrac{\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{1+e\cos\theta} \end{cases} \xrightarrow{\theta\text{已知}} \cos E, \sin E$$

问题：**不能确定E的项限**



$$\tan^2\frac{E}{2} = \frac{1-\cos E}{1+\cos E}$$

$$\tan^2\frac{E}{2} = \frac{1-e}{1+e}\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-e}{1+e}\tan^2\frac{\theta}{2}$$

$$\tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2} \quad \textbf{or} \quad E = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

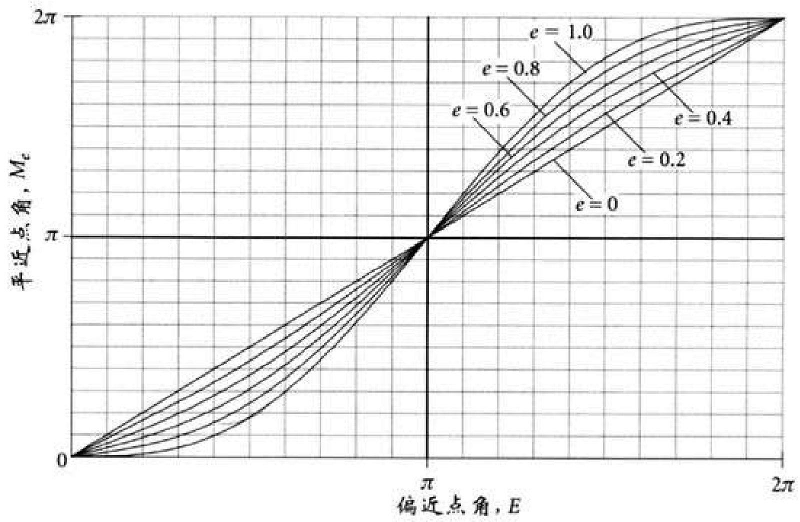
4. 椭圆轨道

$$E = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right) \qquad \sin E = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

$$M_e = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right) - \frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

$$M_e = E - e\sin E$$

开普勒方程



4. 椭圆轨道

$$\frac{\mu^2}{h^3}t = \frac{1}{\left(1-e^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left[2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right)-\frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right]$$

$$t \to \theta$$

$$t \to M_e \qquad M_e \to \theta$$

$$M_e \to E \to \theta$$

$$nt = M_e \qquad M_e = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right)-\frac{e\sqrt{1-e^2}\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

$$nt = M_e \qquad M_e = E - e\sin E \qquad E = 2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right)$$

4. 椭圆轨道

真近点角θ→t

$$\theta \xrightarrow{E=2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right)} E \xrightarrow{M_e=E-e\sin E} M_e \xrightarrow{M_e=\frac{2\pi}{T}t} t$$

t→θ

$$t \xrightarrow{M_e=\frac{2\pi}{T}t} M_e \xrightarrow{M_e=E-e\sin E} E \xrightarrow{\tan\frac{\theta}{2}=\tan\frac{E}{2}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}} \theta$$

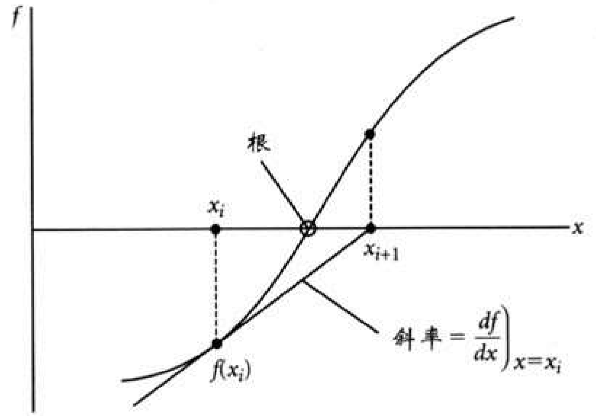
超越方程，不能直接求出E

图解法，数值法，近似迭代法（牛顿迭代法）或其他方法求解E

4. 椭圆轨道

牛顿法

$$f(x)=0$$



估计x_i

$$f'(x_i)=\frac{0-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$$

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

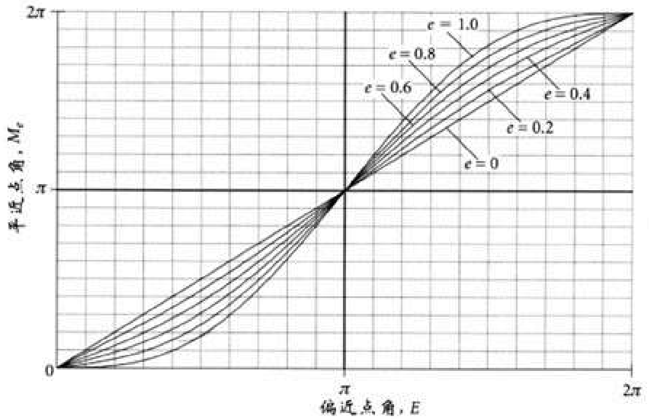
利用牛顿法解开普勒方程需要建立如下函数关系

$$f(E)=E-e\sin E-M_e$$

$$f'(E)=1-e\cos E$$

$$E_{i+1}=E_i-\frac{E_i-e\sin E_i-M_e}{1-e\cos E_i}$$

4. 椭圆轨道



算法 3.1

已知偏心率 e 和平近点角 M_e，从开普勒方程中解出偏近点角 E。附录 D.2 将此算法在 MATLAB 中予以实现。

1. 按如下标准选择根 E 的初始估计值：若 $M_e<\pi$，则 $E=M_e+e/2$；若 $M_e>\pi$，则 $E=M_e-e/2$。注意：E 和 M_e 的单位均为弧度。 $E=M_e+e\sin(M_e)$

2. 在上步确定 E_i 值后，可在之后任意步中算出 $f(E_i)=E_i-e\sin E_i-M_e$ 和 $f'(E_i)=1-e\cos E_i$。

3. 算出比值 $ratio_i=f(E_i)/f'(E_i)$。

4. 若 $|ratio|_i$ 超出所要求的精度范围（如10^{-8}），则重新估计 E 值，

$$E_{i+1}=E_i-ratio_i$$

再返回第二步。

5. 如果 $|ratio|_i$ 小于所要求的精度范围，则此时 E_i 就是所设精度范围内的解。

4. 椭圆轨道

例3.1 一地心椭圆轨道，近地点半径为**9600**千米，远点半径为 **21000**千米。求出由近地点**P**飞行至真近点角**120^0**处所需要的时间

$$\theta \xrightarrow{E=2\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}\right)} E \xrightarrow{M_e=E-e\sin E} M_e \xrightarrow{M_e=\frac{2\pi}{T}t} t \qquad e=\frac{r_a-r_p}{r_a+r_p}=\frac{21000-9600}{21000+9600}=0.37255$$

$$r=\frac{h^2}{\mu}\frac{1}{(1+e\cos\theta)} \longrightarrow 9600=\frac{h^2}{398600}\frac{1}{1+0.37255\cos(0)} \quad\Rightarrow\quad h=72472\text{千米}^2/\text{秒}$$

$$T=\frac{2\pi}{\mu^2}\left(\frac{h}{\sqrt{1-e^2}}\right)^3=\frac{2\pi}{398600^2}\left(\frac{72472}{\sqrt{1-0.37255^2}}\right)^3=18834\text{秒}$$

$$\tan\frac{E}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-0.37255}{1+0.37255}}\tan\frac{120^0}{2}=1.1711 \quad\Rightarrow\quad E=1.7281\text{弧度}$$

$$M_e=E-e\sin E \longrightarrow M_e=1.7281-0.37255\sin 1.7281=1.3601\text{弧度}$$

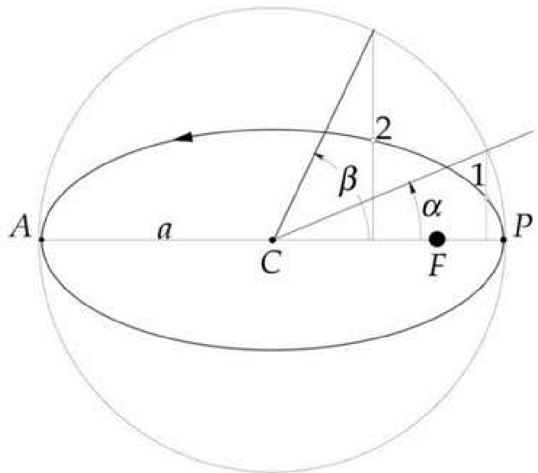
$$t=\frac{M_e}{2\pi}T=\frac{1.3601}{2\pi}18834=4077\text{秒}\quad(1.132\text{小时})$$

4. 椭圆轨道

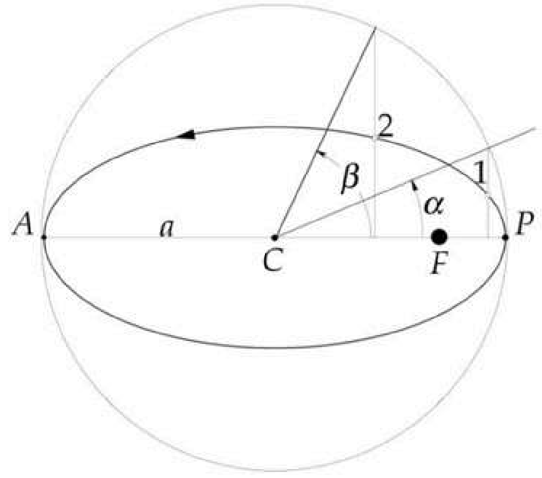
例3.2：
在例3.1中，分别求出自近地点起1 h和3 h后的真近点角
要求求解精度为10^{-6}

主观题 10分

C为椭圆中心。已知偏心率e，轨道周期T和夹角α、β，推导从点1飞到点2的时间t



C为椭圆中心。已知偏心率e，轨道周期T和夹角*α*、*β*，推导从点1飞到点2的时间*t*



$$t_{12}=t_2-t_1=\frac{M_2}{2\pi}T-\frac{M_1}{2\pi}T$$

$$t_{12}=\frac{T}{2\pi}\left(M_2-M_1\right)$$

$$M_1=E_1-e\sin E_1=\alpha-e\sin\alpha$$
$$M_2=E_2-e\sin E_2=\beta-e\sin\beta$$

$$t_{12}=\frac{T}{2\pi}\left[\left(\beta-e\sin\beta\right)-\left(\alpha-e\sin\alpha\right)\right]=\frac{T}{2\pi}\left[\beta-\alpha+e\left(\sin\alpha-\cos\beta\right)\right]$$

$$\sin\alpha-\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

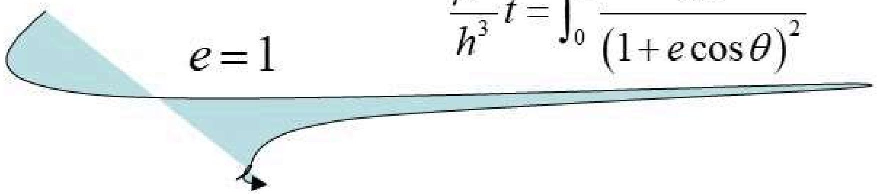
$$\therefore\ \boxed{t_{12}=\frac{T}{2\pi}\left[\beta-\alpha+2e\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right]}$$

作业

1. 一颗卫星在绕地轨道上运行，近地点高度为200km,远地点高度为600km。求出此卫星两次高度为400km时的时间间隔。

5. 抛物线

$$\frac{\mu^2}{h^3}t=\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$



$$\frac{\mu^2}{h^3}t=\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2}$$

查积分表可以求得 $$\int_0^{\theta}\frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2}=\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{6}\tan^3\frac{\theta}{2}$$

⇩

抛物线真近点角与时间的函数关系式 $$\frac{\mu^2}{h^3}t=\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{6}\tan^3\frac{\theta}{2}$$

抛物线轨道的平近点角 $$M_p=\frac{\mu^2}{h^3}t$$

$$M_p=\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{6}\tan^3\frac{\theta}{2}$$

5. 抛物线

真近点角θ→t

$$\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{6}\tan^3\frac{\theta}{2}=\frac{\mu^2}{h^3}t$$

$$\theta \Longrightarrow t$$

t→θ

$$\tan\frac{\theta}{2}=\left[3M_p+\sqrt{(3M_p)^2+1}\right]^{\frac{1}{3}}-\left[3M_p+\sqrt{(3M_p)^2+1}\right]^{-\frac{1}{3}}$$

$$M_p=\frac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2}+\frac{1}{6}\tan^3\frac{\theta}{2}$$

$$t \Longrightarrow M_p \triangleq \frac{\mu^2}{h^3}t \Longrightarrow \theta$$

6. 双曲线

$$e>1 \qquad \frac{\mu^2}{h^3}t=\int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

查积分表 $\int_0^\theta \frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$

$$=\frac{1}{e^2-1}\left[\frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}-\frac{1}{\sqrt{e^2-1}}\ln\left(\frac{\sqrt{e+1}+\sqrt{e-1}\tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1}-\sqrt{e-1}\tan(\theta/2)}\right)\right]$$

双曲线轨道的位置时间函数

$$\frac{\mu^2}{h^3}t=\frac{1}{e^2-1}\frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}-\frac{1}{(e^2-1)^{\frac{3}{2}}}\ln\left(\frac{\sqrt{e+1}+\sqrt{e-1}\tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1}-\sqrt{e-1}\tan(\theta/2)}\right)$$

两边同乘以 $(e^2-1)^{\frac{3}{2}}$ **可得**

$$\frac{\mu^2}{h^3}(e^2-1)^{\frac{3}{2}}t=\frac{e\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta}-\ln\left(\frac{\sqrt{e+1}+\sqrt{e-1}\tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1}-\sqrt{e-1}\tan(\theta/2)}\right)$$

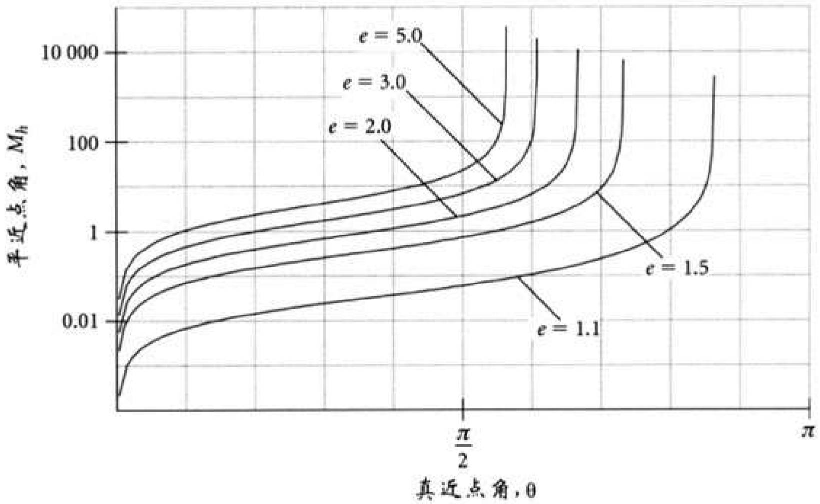
6. 双曲线

$$\frac{\mu^2}{h^3}\left(e^2-1\right)^{\frac{3}{2}}t=\frac{e\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta}-\ln\left(\frac{\sqrt{e+1}+\sqrt{e-1}\tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1}-\sqrt{e-1}\tan(\theta/2)}\right)$$

$$M_h=\frac{\mu^2}{h^3}\left(e^2-1\right)^{\frac{3}{2}}t$$

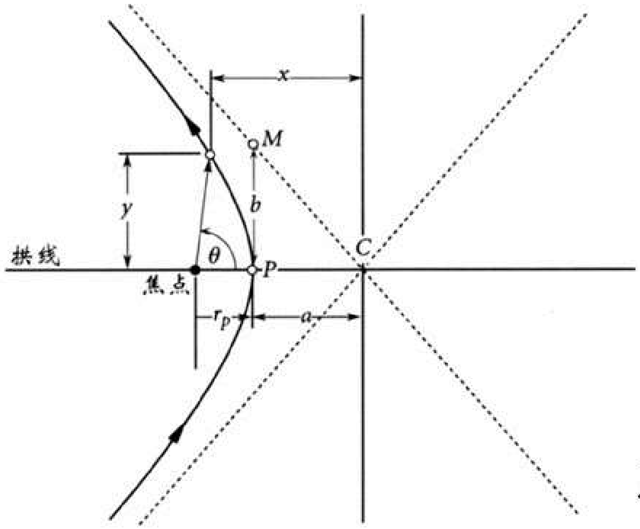
$$M_h=\frac{e\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta}-\ln\left(\frac{\sqrt{e+1}+\sqrt{e-1}\tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1}-\sqrt{e-1}\tan(\theta/2)}\right)$$

$$t=\frac{h^3}{\mu^2}\frac{1}{\left(e^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}M_h$$



6. 双曲线

像在椭圆轨道中引入偏近点角E可以简化椭圆轨道真近点角和平近点角之间的关系一样，这里我们也可引入一辅助角F作为双曲线轨道的偏近点角。



$$\sinh F = \frac{y}{b}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\sinh x = (e^x - e^{-x})/2, \quad \cosh x = (e^x + e^{-x})/2$$

$$\cosh F = \frac{x}{a}$$

$$y = r\sin\theta \qquad r = a(e^2-1)/(1+e\cos\theta) \qquad b = a\sqrt{e^2-1}$$

$$\sinh F = \frac{y}{b} \implies \sinh F = \frac{\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

6. 双曲线

可以解得用真近点角表示的*F*为

$$F=\sinh^{-1}\left(\frac{\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta}\right)$$

$$\Downarrow \quad \sinh^{-1}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$F=\ln\left(\frac{\sin\theta\sqrt{e^2-1}+\cos\theta+e}{1+e\cos\theta}\right)$$

$$\Downarrow \quad \sin\theta=\frac{2\tan(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)},\quad \cos\theta=\frac{1-\tan^2(\theta/2)}{1+\tan^2(\theta/2)}$$

$$F=\ln\left(\frac{1+e+(e-1)\tan^2(\theta/2)+2\tan(\theta/2)\sqrt{e^2-1}}{1+e+(1-e)\tan^2(\theta/2)}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$F=\ln\left(\frac{\sqrt{e+1}+\sqrt{e-1}\tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1}-\sqrt{e-1}\tan(\theta/2)}\right)$$

6. 双曲线

$$F = \ln\left(\frac{\sqrt{e+1}+\sqrt{e-1}\tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1}-\sqrt{e-1}\tan(\theta/2)}\right)$$

任务：进一步简化由真近点角求偏近点角的公式

$$\sinh F = \frac{\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

$$\Big\Downarrow \ \cosh^2 F - \sinh^2 F = 1$$

$$\tanh F = \frac{\sinh F}{\cosh F} \qquad \cosh F = \frac{\cos\theta + e}{1+e\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\cosh F - e}{1-e\cosh F}$$

查数学手册

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\tanh\frac{F}{2} = \frac{\sinh F}{1+\cosh F} \Rightarrow \tanh\frac{F}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} \Rightarrow \tanh\frac{F}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\tan\frac{\theta}{2}$$

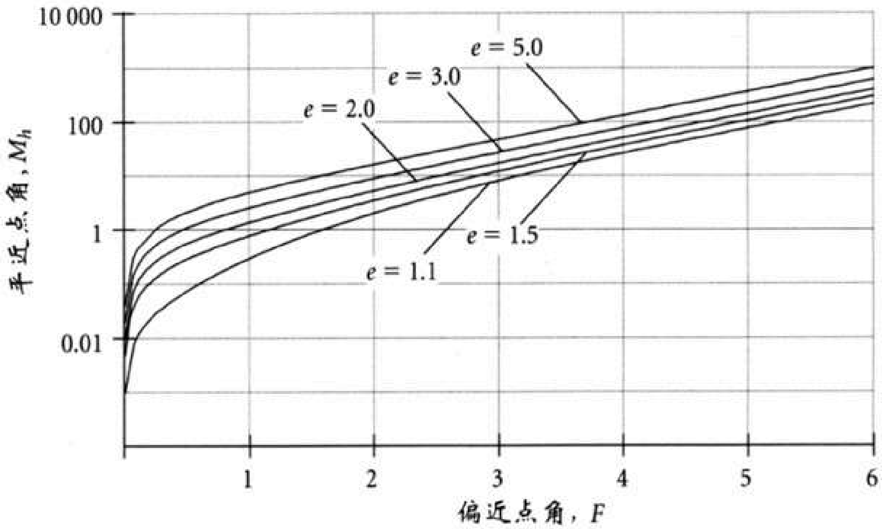
6. 双曲线

$$\sinh F = \frac{\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta} \qquad F = \ln\left(\frac{\sqrt{e+1}+\sqrt{e-1}\tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1}-\sqrt{e-1}\tan(\theta/2)}\right)$$

$$M_h = \frac{e\sqrt{e^2-1}\sin\theta}{1+e\cos\theta} - \ln\left(\frac{\sqrt{e+1}+\sqrt{e-1}\tan(\theta/2)}{\sqrt{e+1}-\sqrt{e-1}\tan(\theta/2)}\right)$$

$$\Downarrow$$

$M_h = e\sinh F - F$ **双曲线的开普勒方程**



6. 双曲线

真近点角θ→t

$$\theta \xrightarrow{\tanh\frac{F}{2}=\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\tan\frac{\theta}{2}} F \xrightarrow{M_h = e\sinh F - F} M_h \xrightarrow{t=\frac{h^3}{\mu^2}\frac{1}{(e^2-1)^{\frac{3}{2}}}M_h} t$$

t→θ

$$t \xrightarrow{M_h \triangleq \frac{\mu^2}{h^3}(e^2-1)^{\frac{3}{2}}t} M_h \xrightarrow{M_h = e\sinh F - F} F \xrightarrow{\tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\tanh\frac{F}{2}} \theta$$

超越方程，不能直接求出F

牛顿迭代法

7. 全局变量

椭圆方程→双曲线方程

$$
\begin{aligned}
a &\leftarrow -a \\
b &\leftarrow ib \\
M_e &\leftarrow iM_h \\
E &\leftarrow iF
\end{aligned}
$$

$$\sin(iF) = i\sinh F, \cos(iF) = \cosh F$$

研究全局变量的目的：将开普勒方程的不同形式合并为单一通用的开普勒方程

一般	特殊
$r \leftrightarrow \theta$	$\theta \leftrightarrow t$
一般	一般
$r \leftrightarrow \chi$	$\chi \leftrightarrow t$

7. 全局变量

适用于所有形式的轨道方程

轨道半径r: $$r=\frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos\theta}$$

长半轴a: $$a=\frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1-e^2}$$

假设：双曲线的长半轴为负值

能量函数: $$\frac{v^2}{2}-\frac{\mu}{r}=-\frac{\mu}{2a}\Longrightarrow a=\frac{1}{\frac{2}{r}-\frac{v^2}{\mu}}\Longrightarrow\begin{cases}a>0\Rightarrow \text{椭圆轨道}\\ a<0\Rightarrow \text{双曲线轨道}\end{cases}$$

全局近点角χ (chi) $\leftarrow$ 全局变量

$$r\leftarrow\chi\leftarrow t$$

7. 全局变量

设t_0表示全局变量为零的时刻，χ表示$t_0+\Delta t$时刻的全局近点角值（全局变量），单位是千米的平方根

全局开普勒方程：

$t=t_0$时刻的半径

$t=t_0$时刻的径向速度

$$\alpha=\frac{1}{a}\begin{cases}>0 & \text{椭圆}\\ =0 & \text{抛物线}\\ <0 & \text{双曲线}\end{cases}$$

$$\sqrt{\mu}\Delta t=\frac{r_0 v_{r0}}{\sqrt{\mu}}\chi^2 C\left(\alpha\chi^2\right)+\left(1-\alpha r_0\right)\chi^3 S\left(\alpha\chi^2\right)+r_0\chi$$

$\alpha\chi^2$是无量纲的

$C(z), S(z)$ **斯达姆夫函数的无穷级数定义**

$$S(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^k}{(2k+3)!}=\frac{1}{6}-\frac{z}{120}+\frac{z^2}{5040}-\frac{z^3}{362880}+\frac{z^4}{39916800}-\frac{z^5}{6227020800}+\cdots$$

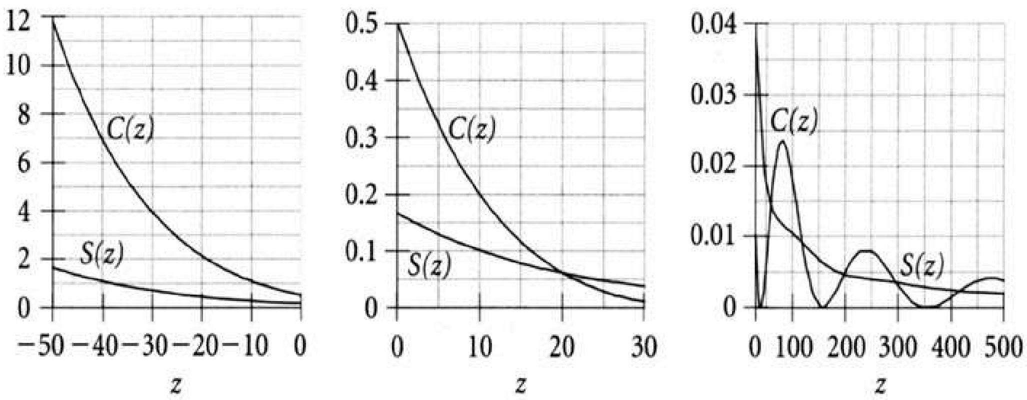
$$C(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^k}{(2k+2)!}=\frac{1}{2}-\frac{z}{24}+\frac{z^2}{720}-\frac{z^3}{40320}+\frac{z^4}{3628800}-\frac{z^5}{479001600}+\cdots$$

7. 全局变量

S(z),C(z)**与圆周三角函数和双曲三角函数的关系为**

$$S(z)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{z}-\sin\sqrt{z}}{\left(\sqrt{z}\right)^3} & (z>0)\\ \dfrac{\sinh\sqrt{-z}-\sqrt{-z}}{\left(\sqrt{-z}\right)^3} & (z<0)\\ \dfrac{1}{6} & (z=0)\end{cases}\qquad \left(z=\alpha\chi^2\right)$$

$$C(z)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{z}}{z} & (z>0)\\ \dfrac{\cosh\sqrt{-z}-1}{-z} & (z<0)\\ \dfrac{1}{2} & (z=0)\end{cases}\qquad \left(z=\alpha\chi^2\right)$$



7. 全局变量

小结：

1.推导了各种轨道类型的真近点角与时间的关系式

（1）平近点角、偏近点角

（2）不同轨道类型的平近点角、偏近点角、真近点角、时间之间的转换关系。

（3）开普勒方程

（4）牛顿迭代法

2.全局变量

$$t \to \chi$$

$$\chi \to f, g, \dot{f}, \dot{g}$$

$$\mathbf{r} = f\mathbf{r}_0 + g\mathbf{v}_0$$

$$\mathbf{v} = \dot{f}\mathbf{r}_0 + \dot{g}\mathbf{v}_0$$