课后作业1

A 卫星在绕地球轨道上运行，其近地点半径为7000km,远地点半径为 70000km。试求

- （a） 轨道偏心率，
- （b） 轨道长半轴（千米），
- （c） 轨道周期（小时），
- （d） 轨道比机械能，
- （e） 高度1000km时的真近点角（度），
- （f） 求出（e）中所求点处的 v_r ,$v_\perp$ （千米/秒），
- （g） 近地点和远地点处的速度（千米/秒）。

(a) $e=\frac{r_a-r_p}{r_a+r_p}\approx 0.82$

(b) $a=\frac{r_a+r_p}{2}=38500\text{km}$

(c) $T=2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}\approx 20.88\text{h}$

(d) $\varepsilon=-\frac{\mu}{2a}=-5.15\text{km}^2/\text{s}^2$

(e) $r=h+R=1000+6378=7378km$

$r=a\frac{1-e^2}{1+e\cos\theta}\Rightarrow\theta\approx\pm 27.61^\circ$

(f) $h=\sqrt{a\mu\left(1-e^2\right)}$

$v_r=\frac{\mu}{h}e\sin\theta\approx\pm 2.122\text{km/s}$

$v_\perp=\frac{\mu}{h}\left(1+e\cos\theta\right)\approx 9.61\text{km/s}$

(g) $\frac{v^2}{2}-\frac{\mu}{r}=-\frac{\mu}{2a}$

带入r_p,r_a可得

$v_p\approx 10.353\text{km/s}$

$v_a\approx 1.03\text{km/s}$

作业

1. 一颗卫星在绕地轨道上运行，近地点高度为 200km,远地点高度为600km。求出此卫星两次高度为400km时的时间间隔。

$r_p = h_p + R = 6578\text{km}$，$r_a = h_a + R = 6978\text{km}$

$a = \dfrac{r_a + r_p}{2} = 6778\text{km}$，$e = \dfrac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = 0.0295$，$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{a^3}{\mu}} = 5553\text{s}$

$r = a\dfrac{1-e^2}{1+e\cos\theta} = 6378 + 400 \Rightarrow \theta_1 = 1.6, \theta_2 = 4.68$

$E_1 = 2\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-e}{1+e}}\tan\dfrac{\theta_1}{2}\right)$

$M_1 = E_1 - e\sin(E_1) = 1.54$

同理，$M_2 = 4.74$

$t_1 = \dfrac{M_1 T}{2\pi} = 1361\text{s}$

$t_2 = \dfrac{M_2 T}{2\pi} = 4189\text{s}$

$\Delta t_1 = t_2 - t_1 = 2828\text{s}$（经过远地点）

$\Delta t_2 = T - \Delta t_1 = 2725\text{s}$（经过近地点）

作业

- 一航天器轨道参数如下：e=0.05，近地点高度300千米，
  $i=35^0,\Omega=130^0,\omega=115^0$，假设航天器位于近地点。

求出相对于下列坐标系的r和v 。

- （a）近焦点坐标系
- （b）地心赤道坐标系

$$(a)\ r_p=h_p+R=6678\text{km},\ r_p=a(1-e)\Rightarrow a=7029\text{km}$$

$$h=\sqrt{a\mu(1-e^2)}=52867km^2/s^2$$

$$\vec{r}_X=\frac{h^2}{\mu}\frac{1}{1+e\cos\theta}\left(\cos\theta\vec{i}+\sin\theta\vec{j}\right)=\begin{bmatrix}6678 & 0 & 0\end{bmatrix}^T\text{ km}$$

$$\vec{v}_X=\frac{\mu}{h}\left(-\sin\theta\vec{i}+\left(e+\cos\theta\right)\vec{j}\right)=\begin{bmatrix}0 & 7.9166 & 0\end{bmatrix}^T\text{ km/s}$$

$$(b)\ \boldsymbol{R}_Z(\Omega)=\begin{bmatrix}\cos(\Omega) & \sin(\Omega) & 0\\ -\sin(\Omega) & \cos(\Omega) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.64278 & 0.7660 & 0\\ -0.7660 & -0.6427 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_X(i)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(i) & \sin(i)\\ 0 & -\sin(i) & \cos(i)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0.8191 & 0.5735\\ 0 & -0.5735 & 0.8191\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_Z(\omega)=\begin{bmatrix}\cos(\omega) & \sin(\omega) & 0\\ -\sin(\omega) & \cos(\omega) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.4226 & 0.9063 & 0\\ -0.9063 & -0.4226 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_{xX}=\boldsymbol{R}_Z(\omega)\boldsymbol{R}_X(i)\boldsymbol{R}_Z(\Omega)=\begin{bmatrix}-0.2970 & -0.8009 & 0.5198\\ 0.8477 & -0.4717 & -0.2424\\ 0.4393 & 0.3686 & 0.8191\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q}_{Xx}=\boldsymbol{Q}_{xX}{}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{r}_x=\boldsymbol{Q}_{Xx}\boldsymbol{r}_X=\begin{bmatrix}-1983.76 & -5348.74 & 3471.55\end{bmatrix}^T\text{ km}$$

$$\boldsymbol{v}_x=\boldsymbol{Q}_{Xx}\boldsymbol{v}_X=\begin{bmatrix}6.7113 & -3.7341 & -1.9191\end{bmatrix}^T\text{ km/s}$$