§6-5 离散系统的稳定性与稳态误差

一、s 平面与z 平面的映射关系

这就是s 平面与z 平面的映射关系

在z变换定义中, $z=e^{sT}$

令$s=\sigma+j\omega$　　$z=e^{(\sigma+j\omega)T}=e^{\sigma T}e^{j\omega T}$

其中$|z|=e^{\sigma T}$，$\varphi=\omega T$

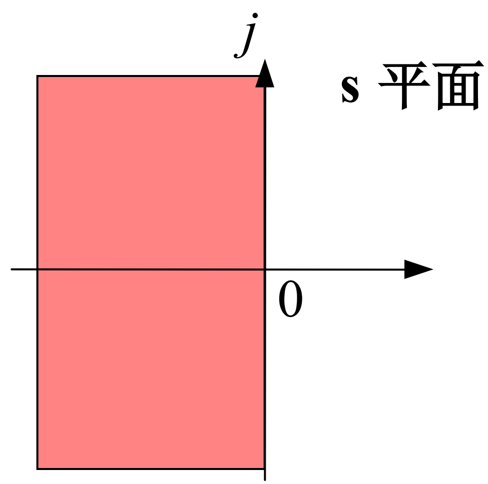
σ	s 平面	z 平面	映射关系
$\sigma=0$	$s=j\omega$	$\|z\|=1$	s平面虚轴→z平面单位圆
$\sigma<0$	$s=\sigma+j\omega$	$\|z\|<1$	s平面左半部分→z平面单位圆内
$\sigma>0$	$s=\sigma+j\omega$	$\|z\|>1$	s平面右半部分→z平面单位圆外

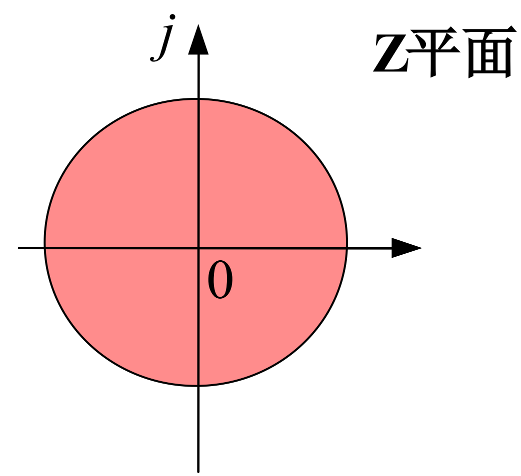
σ	s 平面	z 平面	映射关系
σ=0	s=jω	|z|=1	s平面虚轴→z平面单位圆
σ<0	s=σ+jω	|z|<1	s平面左半部分→z平面单位圆内
σ>0	s=σ+jω	|z|>1	s平面右半部分→z平面单位圆外

结论:

s域与z域关系为:

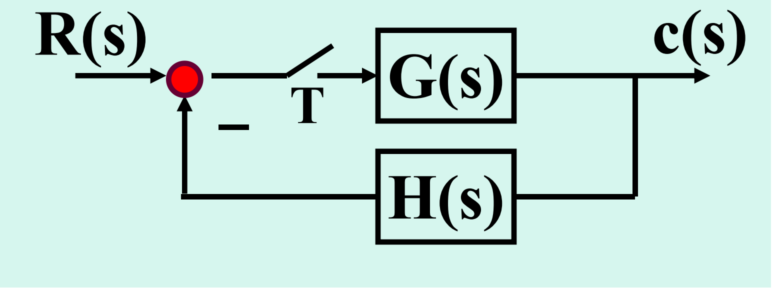
s域		z域
左半平面	⟷	单位圆内
右半平面	⟷	单位圆外
虚轴	⟷	单位圆





二、离散系统稳定的充要条件

典型离散控制系统如图,

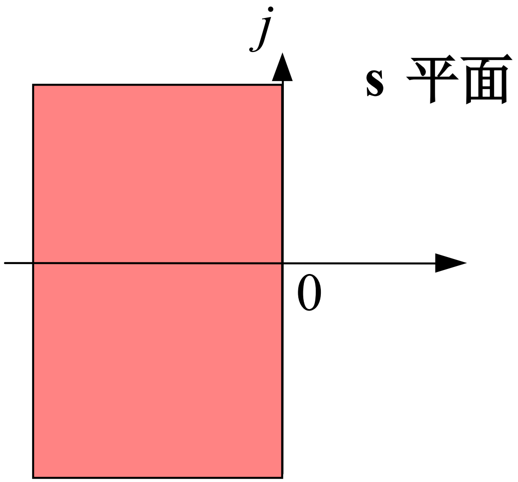


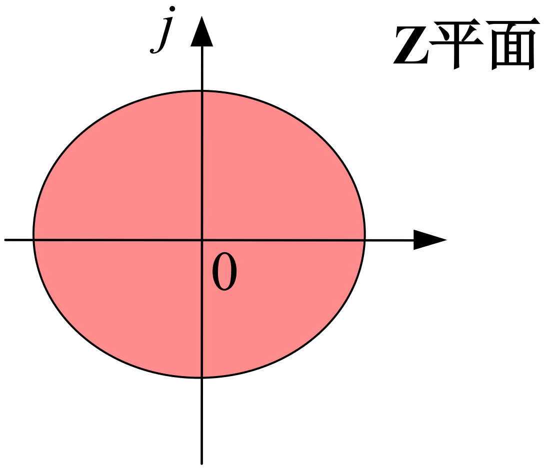
其闭环脉冲传递函数:

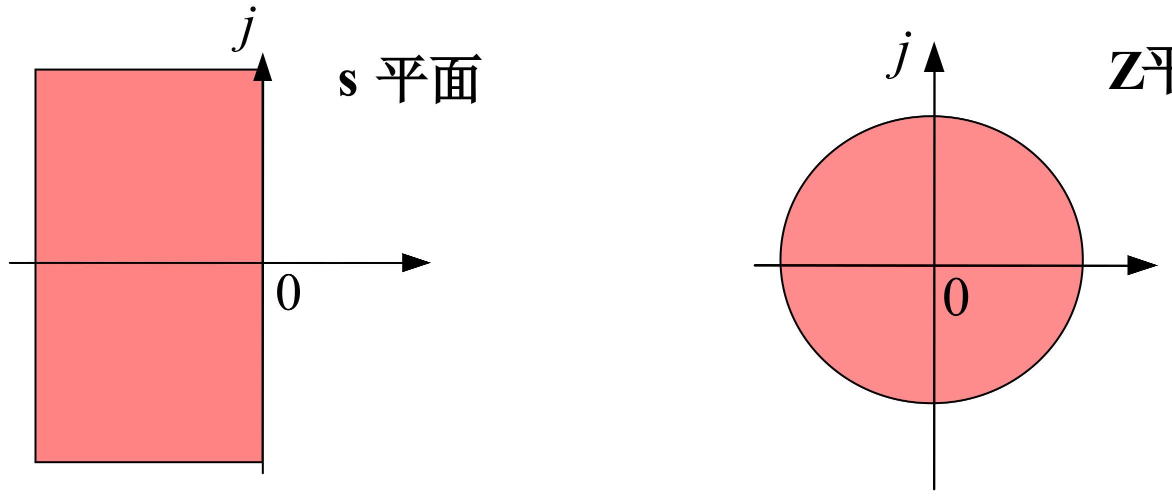
$$\Phi_{cr}(z)=\frac{G(z)}{1+GH(z)}$$

特征方程为:

$$D(z)=1+GH(z)=0$$







线性离散系统稳定的充要条件为:

线性离散系统的特征根全部位于Z平面的单位圆内或所有特征根的模全部小于1 即$|z_i|<1(i=1,2\ldots)$

只要有一个根位于z平面单位圆外,系统就**不稳定**;

当有根在z平面单位圆上，其他根在单位圆内，系统处于**临界稳定**.

三、线性离散系统的稳定判据

判稳的两种方法：

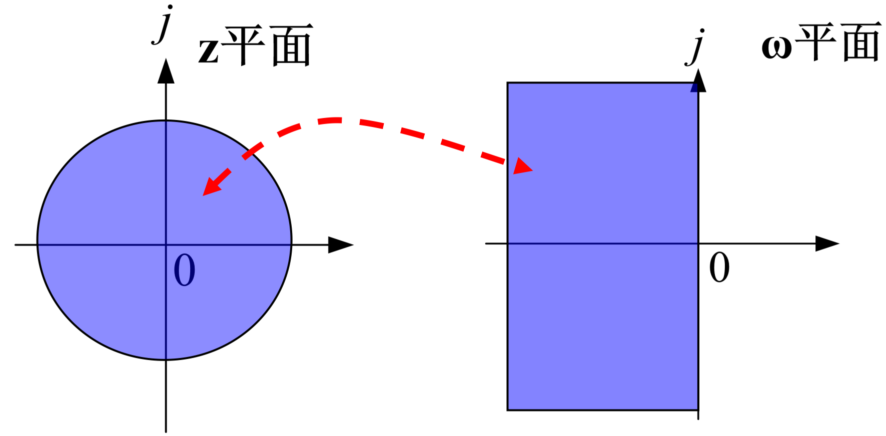
- 直接求根法(适用范围:低阶离散系统)
- 劳斯判据(适用范围:高阶离散系统)

$$z=\frac{w+1}{w-1}$$ [也可令 $z=\frac{w-1}{w+1}$]

Z平面单位圆周	⟷	w平面虚轴
Z平面单位圆内区域	⟷	w平面左半部分
Z平面单位圆外区域	⟷	w平面右半部分

证明： 设 $z=x+jy$，$w=u+jv$

令 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$ 则 $w=\dfrac{z+1}{z-1}$



$$w=u+jv=\frac{x+jy+1}{x+jy-1}=\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}-j\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}$$

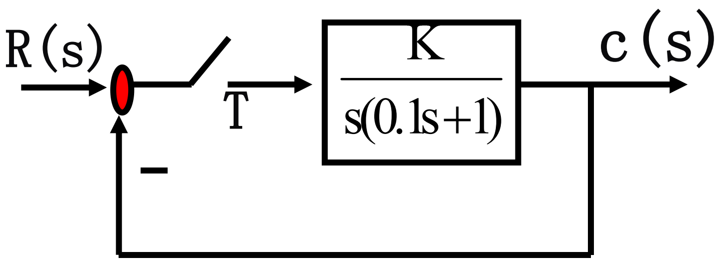
根据上式可得到如下结论:

z平面	w平面	对应关系
$x^2+y^2-1=0$	Rew=0	z平面上单位圆对应w平面虚轴
单位圆	虚轴	
$x^2+y^2<1$	Rew=u<0	z平面上单位圆内对应w平面虚轴之左
单位圆内	虚轴之左	
$x^2+y^2>1$	Rew=u>0	z平面上单位圆外对应w平面虚轴之右
单位圆外	虚轴之右	

利用劳斯判据判断离散系统稳定性的步骤如下:

- 求离散系统的特征方程D(Z)=0
- 作w变换 整理得D(w)=0
- 构造劳斯表判离散系统的稳定性

[例] 闭环系统如图,试求系统稳定时K的极值，其中采样周期T=0.1 s



解: ①闭环脉冲传递函数为

$$\Phi(z)=\frac{G(z)}{1+G(z)}$$

特征方程为:1+G(z)=0

$$G(s)=\frac{K}{s(0.1s+1)}=K\left(\frac{1}{s}-\frac{0.1}{0.1s+1}\right)$$

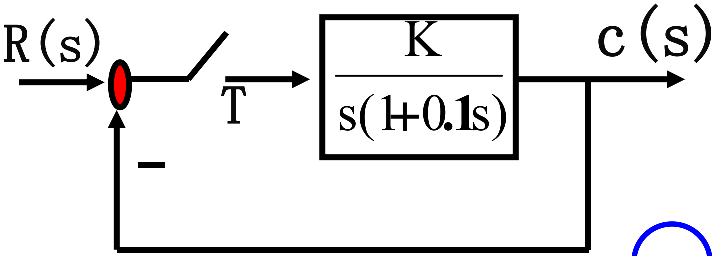
$$G(z)=K\left(\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-e^{-10T}}\right) \qquad D(z)=1+G(z)$$

即$z^2+(0.632K-1.368)z+0.368=0$

利用劳斯判据判断离散系统稳定性的步骤如下:

- 求离散系统的特征方程D(Z)=0
- 作w变换 整理得D(w)=0
- 构造劳斯表判离散系统的稳定性

$$z^2+(0.632K-1.368)z+0.368=0$$



欲使系统稳定,劳斯表第一列元素必须为正,即

$$\left.\begin{array}{l} K>0 \\ 2.736-0.632K>0 \end{array}\right\} \quad 0<K<4.32$$

根限增益$K_c=4.32$

劳斯表

w^2	0.632K	2.736-0.632K
w^1	1.264	0
w^0	2.736-0.632K	

【例】 设离散系统的特征方程为

$$D(z)=45z^3-117z^2-119z-39=0$$

试判断系统的稳定性。

解： 令z=(ω+1)/(ω-1)，代人D(z)中，得

$$\omega^3+2\omega^2+2\omega+40=0$$

列劳斯表为

$$\begin{array}{lll} \omega^3 & 1 & 2 \\ \omega^2 & 2 & 40 \\ \omega & -18 & \\ \omega^0 & 40 & \end{array}$$

系统不稳定，且有两个特征根位于Z平面单位圆外。

四、离散系统的稳定误差

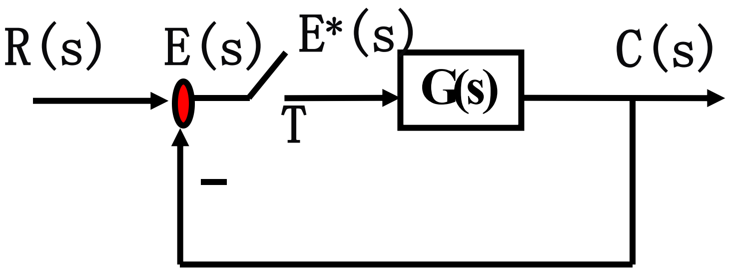
1 终值定理法

单位反馈离散系统:

定义: $E(z)=R(z)-C(z)$

$$=R(z)-\frac{G(z)}{1+G(z)}R(z)$$

$$=\frac{1}{1+G(z)}R(z)$$

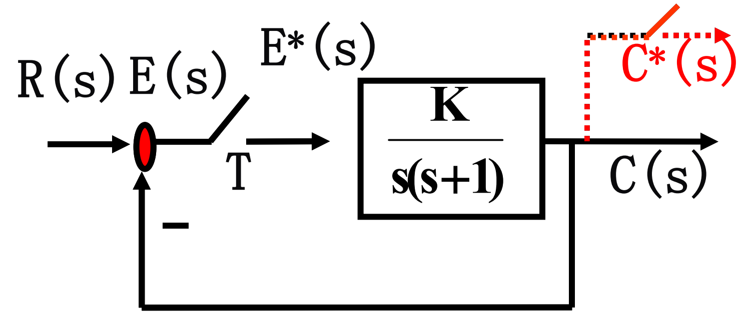


条件: 若$\Phi_{er}(z)$极点全部位于z平面得单位圆内,即离散系统稳定,则可用终值定理求稳态误差.

$$e(+\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)E(z)=\lim_{z\to 1}(z-1)\Phi_{er}(z)R(z)$$

$$C(+\infty)=\lim_{z\to 1}(z-1)C(z)$$

[例]设离散系统如图,其中$G(s)=\dfrac{K}{s(s+1)}$,
T为采样周期.试求:
①系统稳定时,T与K应满足的条件
②求输入为阶跃信号下的e(+∞)



解: ① $G(z)=Z[G(s)]=Z[\dfrac{K}{s(s+1)}]=\dfrac{Kz(1-e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}$

闭环特征方程为:

$$\mathbf{D(z)=1+G(z)=(z-1)(z-e^{-T})+Kz(1-e^{-T})=0}$$

即: $\mathbf{z^2+[K(1-e^{-T})-(1+e^{-T})]z+e^{-T}=0}$

令 $z=\dfrac{w+1}{w-1}$,代入上式得

$$\mathbf{Kw^2+2w+[\frac{2(1+e^{-T})}{1-e^{-T}}-K]=0}$$

劳斯表

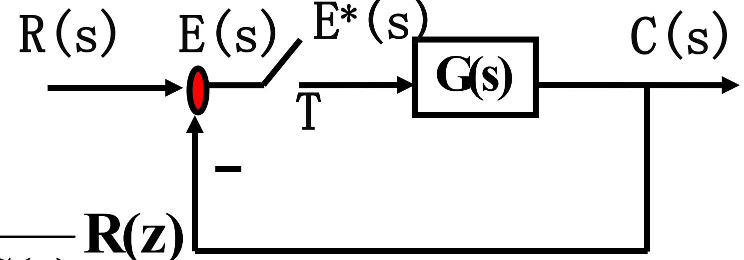
w^2	K	$\dfrac{2(1+e^{-T})}{1-e^{-T}}-K$
w^1	2	0
w^0	$\dfrac{2(1+e^{-T})}{1-e^{-T}}-K$	0

欲使系统稳定则K>0,

$$\frac{2(1+e^{-T})}{1-e^{-T}}-K>0$$

即$0<K<\dfrac{2(1+e^{-T})}{1-e^{-T}}$

②单位反馈系统



$$E(z)=R(z)-C(z)=R(z)-\frac{G(z)}{1+G(z)}R(z)=\frac{1}{1+G(z)}R(z)$$

$$e(+\infty)=\lim(z-1)E(z)=0$$

2　误差系数法　（适用于单位反馈系统，r(t)为典型输入的情况）

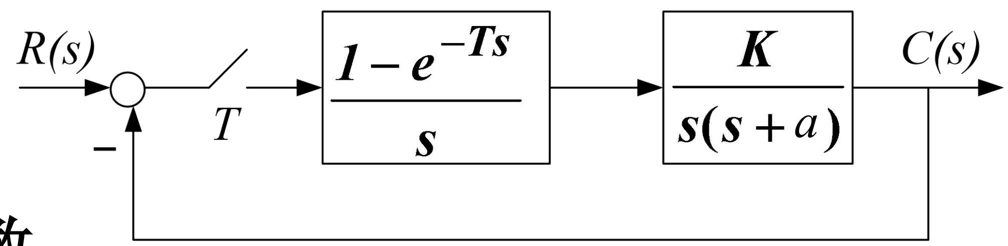
型别v:开环脉冲传递函数G(z)中含有z=1极点数

单位反馈系统, 利用误差系数法求e(+∞), 见表:

r(t)	误差系数	e(+∞)
1(t)	$k_p=\lim\limits_{z\to 1}G(z)$	$\frac{1}{1+k_p}$
t	$k_v=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)G(z)$	$\frac{T}{k_v}$
$\frac{1}{2}t^2$	$k_a=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)^2G(z)$	$\frac{T^2}{k_a}$

【例】 设有零阶保持器的离散系统如图

已知系统的输入r(t)=t，
试求系统稳态误差。



解： 系统开环脉冲传递函数

$$G(z)=(1-z^{-1})Z\left[\frac{K}{s^2(s+a)}\right]=K\frac{(e^{-aT}+aT-1)z+(1-e^{-aT}-aTe^{-aT})}{a^2(z-1)(z-e^{-aT})}$$

可见，系统为I型系统，速度误差系数为

$$K_v=\lim_{z\to 1}[(z-1)G(z)]=\frac{kT}{a}$$

稳态误差为 $e(\infty)=\frac{T}{K_v}=\frac{a}{K}$