第四章 根轨迹法知识结构

开环传递函数

模值方程

相角方程

180°

0°

根轨迹法则

根轨迹图

（常规根轨迹、

广义根轨迹）

分析

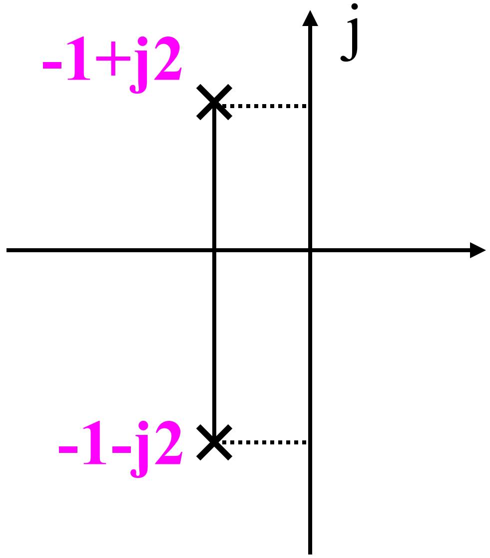
系统性能

稳定性

动态性能

稳态性能

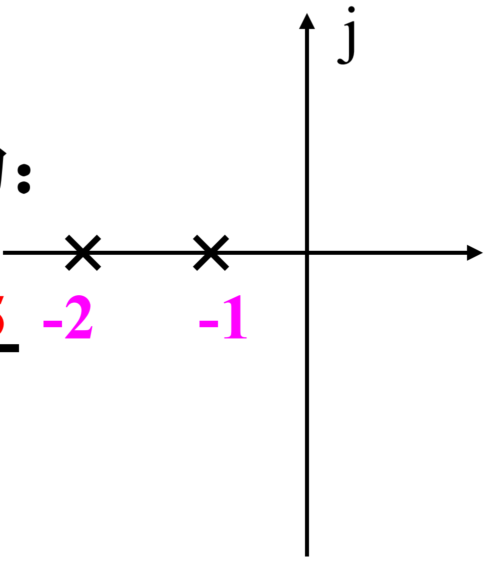
[例1]系统闭环零、极点分布为：



$\sigma\%=?$ $t_S=?$

$\sigma\%=20.8\%$ $t_S=3.0s$

[例2]单位反馈系统，开环零、极点分布为：



系统开环增益为7，则阻尼比为 0.375

[例3] 已知单位反馈系统闭环传递函数为：

$$\phi(s)=\frac{k(0.5s-1)^2}{(0.5s+1)(2s-1)+k(0.5s-1)^2}$$

1. 试绘其概略根轨迹

2. 确定系统稳定的k值范围

3. 求系统在单位阶跃输入下$|e_{ss}|_{\min}$

解： 1. $D(s)=(0.5s+1)(2s-1)+k(0.5s-1)^2=0$

即 $$\frac{k(0.5s-1)^2}{(0.5s+1)(2s-1)}=-1$$

$$G(s)=\frac{K^*(s-2)^2}{(s+2)(s-0.5)} \qquad (K^*=\frac{1}{4}k)$$

[例3] 已知单位反馈系统闭环传递函数为：

$$\phi(s) = \frac{k(0.5s-1)^2}{(0.5s+1)(2s-1)+k(0.5s-1)^2}$$

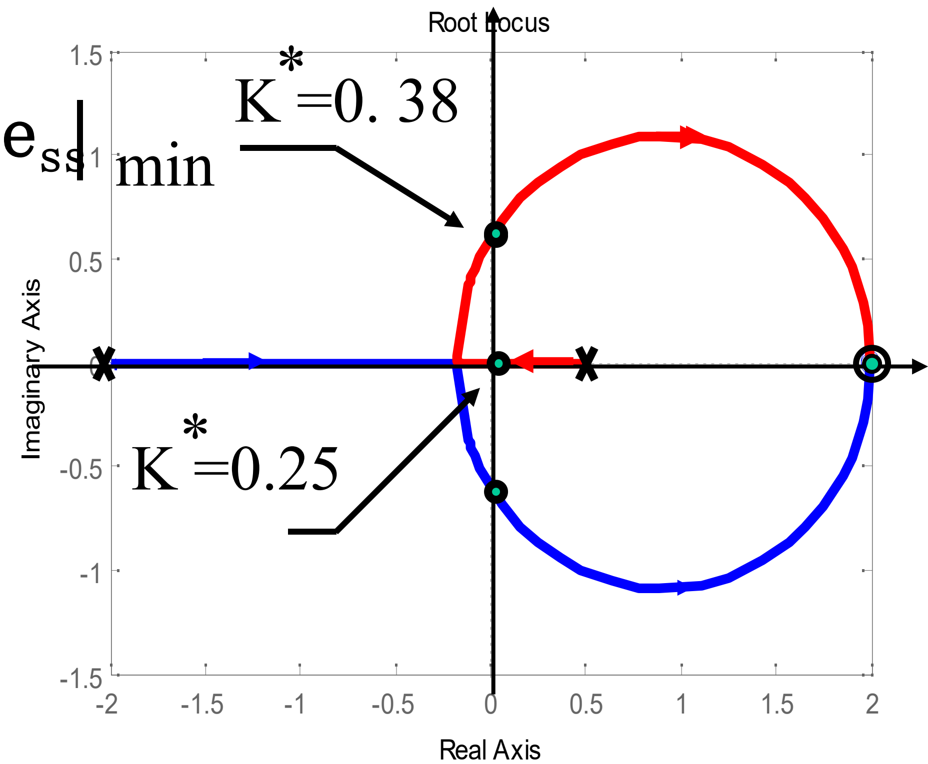
1. 试绘其概略根轨迹。 $k: 0 \to +\infty$

2. 确定系统稳定的K 值范围

3. 求系统在单位阶跃输入下 $e_{ss}|_{min}$

解：

1. $G(s) = \dfrac{K^*(s-2)^2}{(s+2)(s-0.5)} \quad (K^* = \dfrac{1}{4}k)$



2. $0.25 < K^* < 0.38$

$$1 < k < 1.52$$

[例3] 已知单位反馈系统闭环传递函数为：

$$\phi(s)=\frac{k(0.5s-1)^2}{(0.5s+1)(2s-1)+k(0.5s-1)^2}$$

1. 试绘其概略根轨迹。

2. 确定系统稳定的k值范围

3. 求系统在单位阶跃输入下$|e_{ss}|_{min}$

解：3. $G(s)=\dfrac{0.25k(s-2)^2}{(s+2)(s-0.5)}$

$$K_p=\lim_{s\to 0}G(s)=-k$$

$$\mathbf{1<k<1.52}$$

$$|e_{ss}|=\left|\frac{1}{1+K_p}\right|=\left|\frac{1}{1-k}\right|$$

$$|e_{ss}|_{min}=1.923$$

[例4] 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{k^*(1-s)}{s(s+2)}$$

试绘制其根轨迹，并求出使系统产生重实根和纯虚根的 k^* 值。

解:

$$G(s)=\frac{k^*(1-s)}{s(s+2)}=-\frac{k^*(s-1)}{s(s+2)}$$

由开环传递函数的表达式知需绘制 0° 根轨迹。

开环零点 $m=1$, $z=1$

开环极点 $n=2$, $p_1=0$, $p_2=-2$

① 实轴上的根轨迹： $[-2,0]$ $[1,+\infty)$

[例4] 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{k^*(1-s)}{s(s+2)}$$

试绘制其根轨迹，并求出使系统产生重实根和纯虚根的 k^* 值。

解:

① **实轴上的根轨迹：** $[-2,0]$, $[1,+\infty)$

② **分离点：** $\frac{1}{d}+\frac{1}{d+2}=\frac{1}{d-1}$

$$G(s)=\frac{k^*(1-s)}{s(s+2)}=-\frac{k^*(s-1)}{s(s+2)}$$

解得： $d_1=-0.732 \quad d_2=2.732$

$$s=d_1=-0.732 \qquad s=d_2=2.732$$

代入幅值条件得：

$$k_{d_1}{}^*=0.54 \qquad k_{d_2}{}^*=7.46$$

[例4] 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{k^*(1-s)}{s(s+2)}$$

试绘制其根轨迹，并求出使系统产生重实根和纯虚根的 k^* 值。

解:

① **实轴上的根轨迹：** $[-2,0]$, $[1, +\infty)$

$$G(s)=\frac{k^*(1-s)}{s(s+2)}=-\frac{k^*(s-1)}{s(s+2)}$$

② **分离点：** $\frac{1}{d}+\frac{1}{d+2}=\frac{1}{d-1}$

解得： $d_1=-0.732 \quad d_2=2.732$

$$s=d_1=-0.732 \qquad s=d_2=2.732$$

代入幅值条件得：

$$k_{d_1}^*=0.54 \qquad k_{d_2}^*=7.46$$

[例4] 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{k^*(1-s)}{s(s+2)}$$

试绘制其根轨迹，并求出使系统产生重实根和纯虚根的 k^* 值。

解:

③ 与虚轴交点：闭环特征方程为

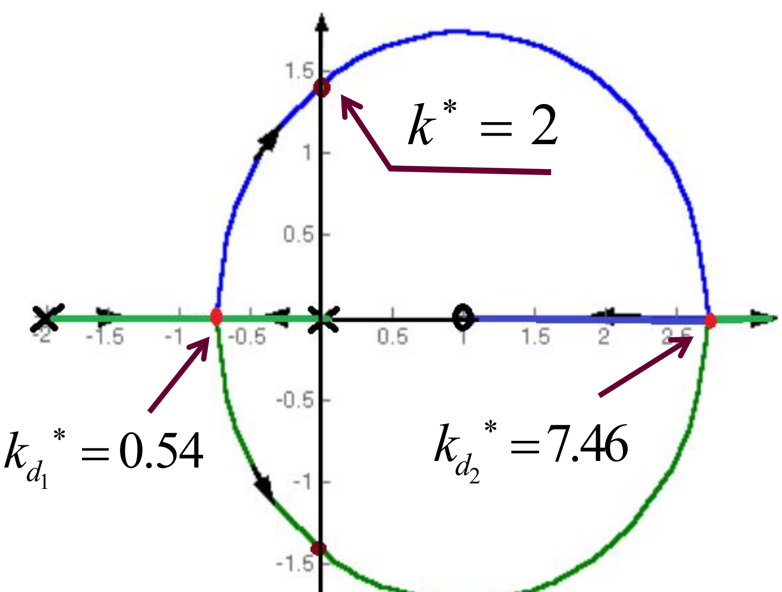
$$D(s)=s(s+2)+K^*(1-s)=0$$

$s=j\omega$ 代入上方程

$$\begin{cases}\mathrm{Re}(D(j\omega))=-\omega^2+K^*=0\\ \mathrm{Im}(D(j\omega))=(2-K^*)\omega=0\end{cases}$$

产生纯虚根 $\omega=0,\ \ k^*=0$

$\omega=\sqrt{2},\ \ k^*=2$



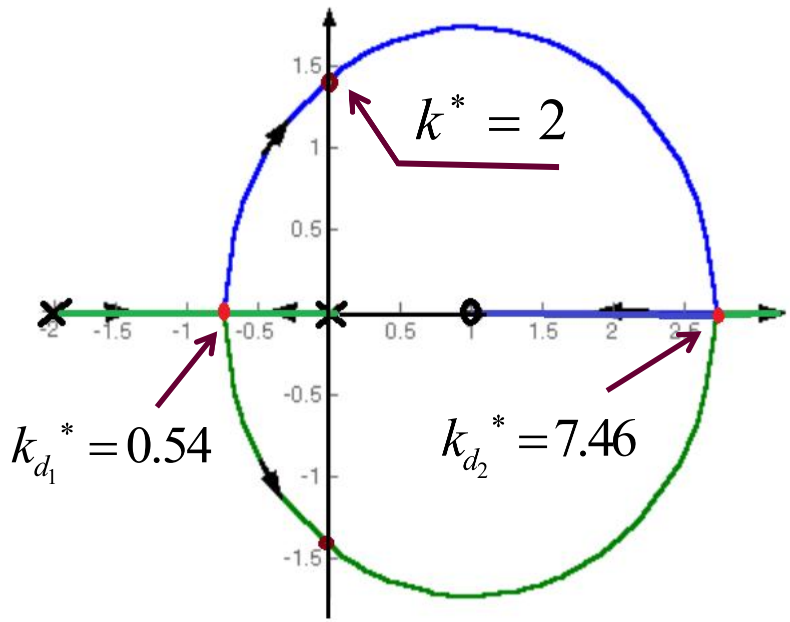
[例4] 设单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{k^*(1-s)}{s(s+2)}$$

试绘制其根轨迹，并求出使系统产生重实根和纯虚根的 k^* 值。

解: 产生重实根 $k^*=0.54$

纯虚根 $k^*=2$



[例5] 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{k(2s+1)}{(s+1)^2(\frac{4}{7}s-1)}$$

试绘制系统根轨迹，并确定使系统稳定的k值范围。

解：

$$G(s)=\frac{3.5k(s+0.5)}{(s+1)^2(s-7/4)}=\frac{k^*(s+0.5)}{(s+1)^2(s-7/4)}$$

$m=1$, z=-0.5

$n=3$, $p_{1,2}$=-1,

p_3=7/4=1.75

① 实轴上的根轨迹： $[-0.5,7/4]$

② 渐近线：

$$\begin{cases}\sigma_a=\dfrac{-1-1+7/4-(-0.5)}{2}=\dfrac{1}{8}\\ \varphi_a=\dfrac{(2k+1)\pi}{2}=\pm\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

③ 与虚轴交点：闭环特征方程为

$$D(s)=\frac{4}{7}s^3+\frac{1}{7}s^2+(2k-\frac{10}{7})s+k-1=0$$

$s=j\omega$ 代入方程

[例5] 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{k(2s+1)}{(s+1)^2(\frac{4}{7}s-1)}$$

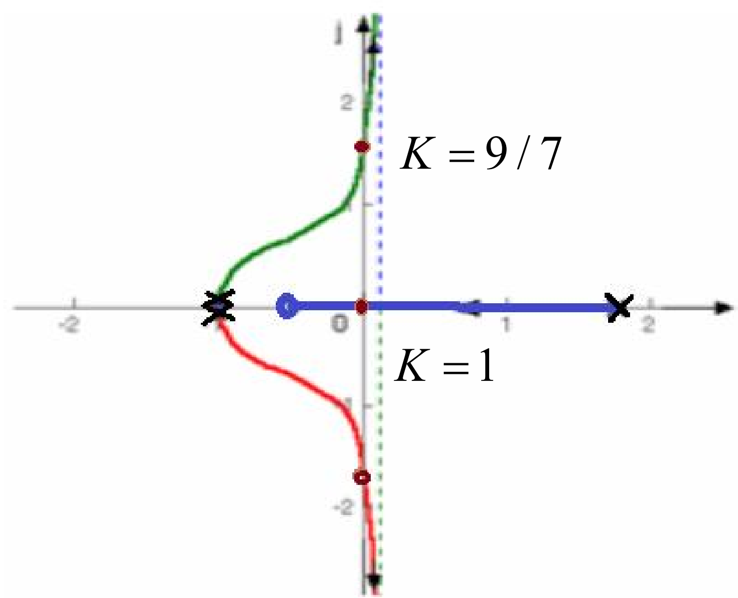
试绘制系统根轨迹，并确定使系统稳定的k值范围。

③ 与虚轴交点：闭环特征方程为

$$D(s)=\frac{4}{7}s^3+\frac{1}{7}s^2+(2k-\frac{10}{7})s+k-1=0$$

$s = j\omega$ 代入方程

$$\begin{cases}\omega=0\\ K=1\end{cases}\qquad \begin{cases}\omega=\pm\sqrt{2}\\ K=\dfrac{9}{7}\end{cases}$$



由图可知使系统稳定的 K 值范围为

$$1<K<9/7$$

[练习]三、已知单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G(s)=\frac{(s+K)(s+4)}{s(s^2+s-3)}$$

1. 绘制系统闭环根轨迹（K: $0\to\infty$）；
2. 确定闭环有重极点时的闭环传递函数(零极点表达式)；
3. 输入为单位斜坡信号时，欲使$|e_{ss}|\le 1$，求 K 的取值范围。