



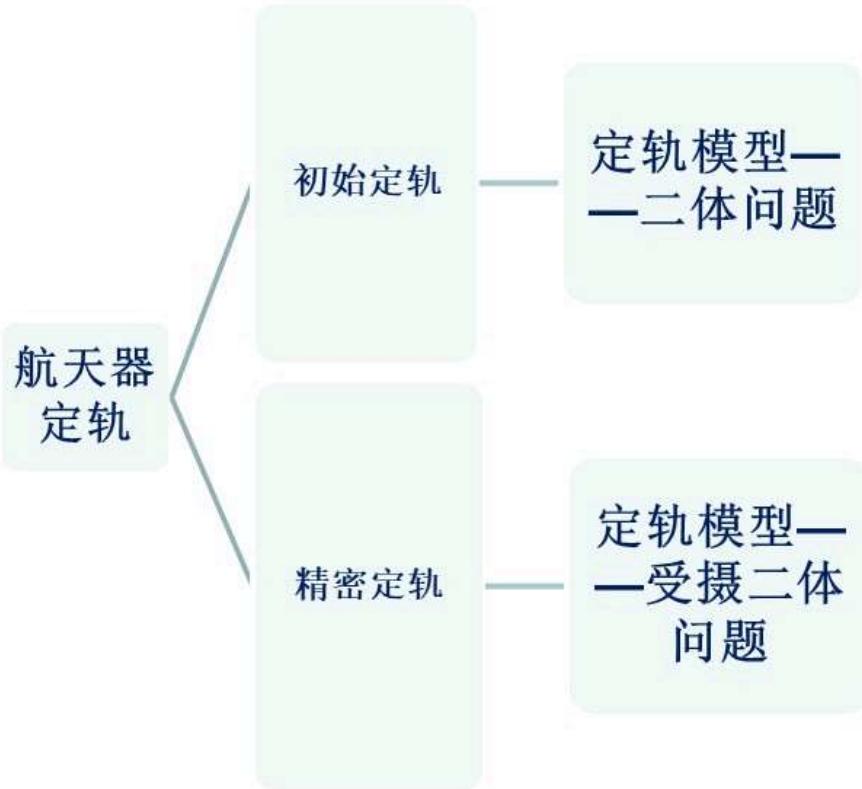
第五章 初始轨道确定

2025年12月10日星期三

Page 1



1 引言





1 引言



本章的主要内容：

根据地面观测来确定卫星初始轨道的几种经典方法。

- 1. 吉伯斯法——运用三个地心位置矢量来测定初始轨道
- 2. 兰伯特问题——根据两位置矢量和他们之间的时间间隔来确定轨道。
- 3. 角度与斜距观测数据的初始轨道确定。
- 4. 单纯角度观测数据的初始轨道确定——高斯法。



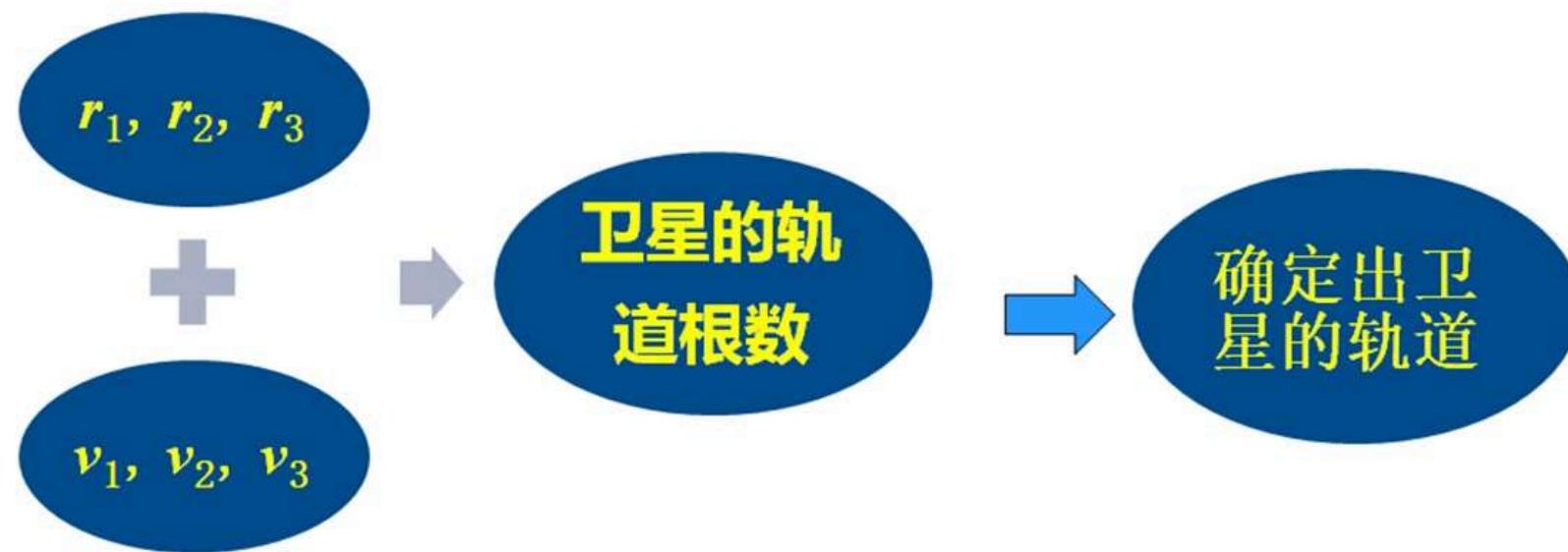
2. 吉伯斯三位置矢量定轨法

已知: t_1, t_2, t_3 时刻的位置矢量 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$

↓
吉伯斯法

确定 t_1, t_2, t_3 时刻的速度矢量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

Josiah Willard Gibbs (1839-1903) : 耶鲁大学数学物理学教授, 突破了四元数并创立了新的学科-三维矢量分析。





2. 吉伯斯三位置矢量定轨法

二体问题：卫星的运行轨迹在同一个平面内。

$$\hat{\mathbf{u}}_{r_1} = \mathbf{r}_1 / r_1 \quad \hat{\mathbf{C}}_{23} = (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) / \|\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3\|$$



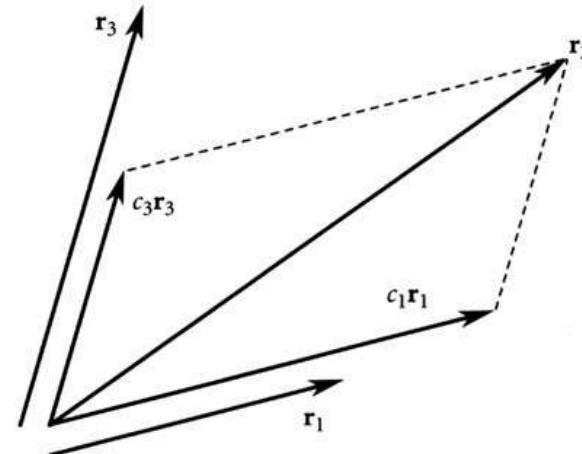
$$\hat{\mathbf{u}}_{r_1} \cdot \hat{\mathbf{C}}_{23} = 0$$

且

$$\mathbf{r}_2 = c_1 \mathbf{r}_1 + c_3 \mathbf{r}_3$$

?

标量因子





2. 吉伯斯三位置矢量定轨法

如何根据 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$, 求解 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

$$\frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{h}}{\mu} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{h} = \mu \left(\frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e} \right)$$

分离 \mathbf{v}

$$\mathbf{h} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = \mu \left(\frac{\mathbf{h} \times \mathbf{r}}{r} + \mathbf{h} \times \mathbf{e} \right)$$

利用bac-cab法则

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = h^2 \quad \mathbf{h} \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{h} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = \mathbf{v}(\mathbf{h} \cdot \mathbf{h}) - \mathbf{h}(\mathbf{h} \cdot \mathbf{v})$$

$$\mathbf{h} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = h^2 \mathbf{v} \quad \rightarrow \quad \mathbf{v} = \frac{\mu}{h^2} \left(\frac{\mathbf{h} \times \mathbf{r}}{r} + \mathbf{h} \times \mathbf{e} \right)$$



2. 吉伯斯三位置矢量定轨法

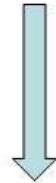
在近焦点坐标系中

$$\mathbf{e} = e\hat{\mathbf{p}}$$

$$\mathbf{h} = h\hat{\mathbf{w}}$$



$$\mathbf{v} = \frac{\mu}{h^2} \left(\frac{h\hat{\mathbf{w}} \times \mathbf{r}}{r} + h\hat{\mathbf{w}} \times e\hat{\mathbf{p}} \right) = \frac{\mu}{h} \left(\frac{\hat{\mathbf{w}} \times \mathbf{r}}{r} + e(\hat{\mathbf{w}} \times \hat{\mathbf{p}}) \right)$$



$$\hat{\mathbf{w}} \times \hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mu}{h} \left(\frac{\hat{\mathbf{w}} \times \mathbf{r}}{r} + e\hat{\mathbf{q}} \right)$$



2. 吉伯斯三位置矢量定轨法

由位置矢量求角动量h

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = \frac{h^2}{\mu} - r$$

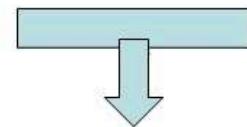
$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{e} = \frac{h^2}{\mu} - r_1, \quad \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{e} = \frac{h^2}{\mu} - r_2, \quad \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{e} = \frac{h^2}{\mu} - r_3$$

$$\mathbf{r}_2 = c_1 \mathbf{r}_1 + c_3 \mathbf{r}_3$$

两边同时点乘

偏心率矢量e

$$\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{e} = c_1 \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{e} + c_3 \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{e}$$



$$\frac{h^2}{\mu} - r_2 = c_1 \left(\frac{h^2}{\mu} - r_1 \right) + c_3 \left(\frac{h^2}{\mu} - r_3 \right)$$

$$\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1 = c_3 (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1)$$

$$\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 = -c_1 (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1)$$

$$\frac{h^2}{\mu} (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) - r_2 (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) = c_1 (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) \left(\frac{h^2}{\mu} - r_1 \right) + c_3 (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) \left(\frac{h^2}{\mu} - r_3 \right)$$



$$\frac{h^2}{\mu} (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) - r_2 (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) = -(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) \left(\frac{h^2}{\mu} - r_1 \right) + (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_1) \left(\frac{h^2}{\mu} - r_3 \right)$$



2. 吉伯斯三位置矢量定轨法

$$\frac{h^2}{\mu} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) = r_1 (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) + r_2 (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) + r_3 (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)$$

$$\begin{array}{c} \mathbf{D} \\ \downarrow \\ \mathbf{N} \\ \downarrow \\ \mathbf{N} = \frac{h^2}{\mu} \mathbf{D} \\ \downarrow \\ N = \|\mathbf{N}\| \quad D = \|\mathbf{D}\| \\ \downarrow \\ N = \frac{h^2}{\mu} D \\ \downarrow \\ \hat{\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{D}}{D} \quad h = \sqrt{\mu \frac{N}{D}} \end{array}$$



2. 吉伯斯三位置矢量定轨法

$$\mathbf{v} = \frac{\mu}{h} \left(\hat{\mathbf{w}} \times \mathbf{r} + e \hat{\mathbf{q}} \right)$$

$$e \hat{\mathbf{q}} = e (\hat{\mathbf{w}} \times \hat{\mathbf{p}}) = \frac{1}{D} (\mathbf{D} \times \mathbf{e}) \quad \mathbf{D} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1$$

$$e \hat{\mathbf{q}} = \frac{1}{D} [(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \times \mathbf{e} + (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) \times \mathbf{e} + (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) \times \mathbf{e}]$$

$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = -\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$

$$(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) \times \mathbf{e} = \mathbf{r}_3 (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{e}) - \mathbf{r}_2 (\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{e}) \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{e} = \frac{h^2}{\mu} - r \quad (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) \times \mathbf{e} = \mathbf{r}_3 \left(\frac{h^2}{\mu} - r_2 \right) - \mathbf{r}_2 \left(\frac{h^2}{\mu} - r_3 \right) = \frac{h^2}{\mu} (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) + r_3 \mathbf{r}_2 - r_2 \mathbf{r}_3$$
$$(\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) \times \mathbf{e} = \mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{e}) - \mathbf{r}_3 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{e}) \quad \xrightarrow{\hspace{10em}} \quad (\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) \times \mathbf{e} = \mathbf{r}_1 \left(\frac{h^2}{\mu} - r_3 \right) - \mathbf{r}_3 \left(\frac{h^2}{\mu} - r_1 \right) = \frac{h^2}{\mu} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) + r_1 \mathbf{r}_3 - r_3 \mathbf{r}_1$$
$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \times \mathbf{e} = \mathbf{r}_2 (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{e}) - \mathbf{r}_1 (\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{e}) \quad (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \times \mathbf{e} = \mathbf{r}_2 \left(\frac{h^2}{\mu} - r_1 \right) - \mathbf{r}_1 \left(\frac{h^2}{\mu} - r_2 \right) = \frac{h^2}{\mu} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + r_2 \mathbf{r}_1 - r_1 \mathbf{r}_2$$



2. 吉伯斯三位置矢量定轨法

$$e\hat{\mathbf{q}} = \frac{1}{D} \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S} = \mathbf{r}_1(r_2 - r_3) + \mathbf{r}_2(r_3 - r_1) + \mathbf{r}_3(r_1 - r_2)$$



$$\begin{aligned} h &= \sqrt{\mu \frac{N}{D}} \\ \hat{\mathbf{w}} &= \frac{\mathbf{D}}{D} \\ e\hat{\mathbf{q}} &= \frac{1}{D} \mathbf{S} \\ \mathbf{v} &= \frac{\mu}{h} \left(\frac{\hat{\mathbf{w}} \times \mathbf{r}}{r} + e\hat{\mathbf{q}} \right) \end{aligned}$$



$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{\mu}{ND}} \left[\frac{\mathbf{D} \times \mathbf{r}}{r} + \mathbf{S} \right]$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{N} &= \mathbf{r}_1(\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) + \mathbf{r}_2(\mathbf{r}_3 \times \mathbf{r}_1) + \mathbf{r}_3(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) \\ \mathbf{S} &= \mathbf{r}_1(r_2 - r_3) + \mathbf{r}_2(r_3 - r_1) + \mathbf{r}_3(r_1 - r_2) \end{aligned}$$



2. 吉伯斯三位置矢量定轨法

算法5.1:吉伯斯初始定轨法

- 已知 r_1, r_2, r_3 , 计算步骤如下
 - (1) 计算出 r_1, r_2, r_3 。
 - (2) 计算出 $C_{12}=r_1 \times r_2, C_{23}=r_2 \times r_3, C_{31}=r_3 \times r_1$
 - (3) 验证 $\hat{u}_{r_1} \cdot \hat{C}_{23} = 0$?
 - (4) 根据 $\mathbf{N} = r_1(r_2 \times r_3) + r_2(r_3 \times r_1) + r_3(r_1 \times r_2)$
 $\mathbf{D} = r_1 \times r_2 + r_2 \times r_3 + r_3 \times r_1$
 $\mathbf{S} = r_1(r_2 - r_3) + r_2(r_3 - r_1) + r_3(r_1 - r_2)$

分别计算出 N,D,S .

- (5) 由公式 $v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{ND}} \left[\frac{\mathbf{D} \times \mathbf{r}_2}{r_2} + \mathbf{S} \right]$ 计算出 v_2 。
- (6) 由 r_2, v_2 计算出轨道根数



3. 兰伯特问题

兰伯特问题的提出

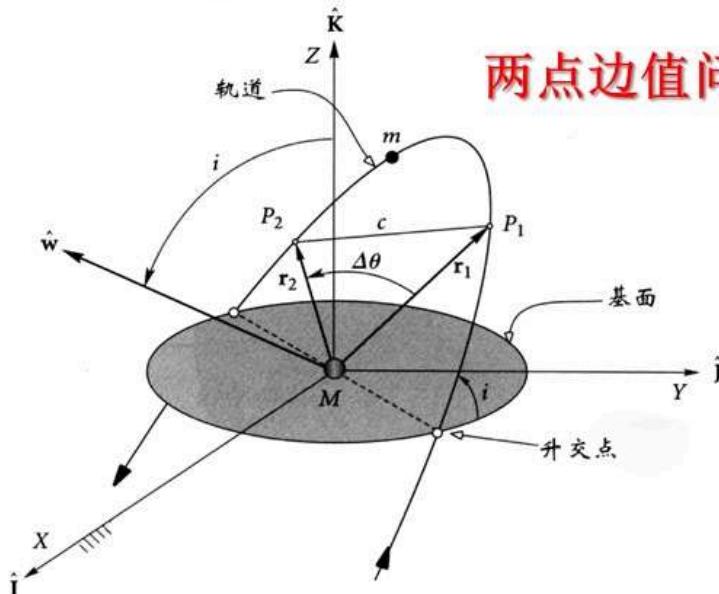
兰伯特原理：由点 P_1 至点 P_2 的飞行时间 Δt 与偏心率无关，仅取决于位置矢量模的和 r_1+r_2 ，长半轴 a 及连接 P_1 和 P_2 两点间的弦长 c 。

兰伯特问题：若由 P_1 至 P_2 点的飞行时间 Δt 已知，如何确定 P_1 和 P_2 两点的飞行轨迹



确定了轨道

两点边值问题！



Johann Heinrich Lambert(1728-1779): 经常被称为伟大的阿尔萨斯学者，他用几何方法推断出冠以他名字的定理（拉格朗日和高斯补充证明）。尽管12岁就不得不离开以协助他父亲的裁缝生意，他在一个优秀老师的指导下继续学习，并在哲学、数学、天文学和物理学等领域取得非凡的成功。在天文学上，他对测光术做出了基础贡献，并且提出了在计算行星与彗星轨道上达到顶峰的“兰伯特定理”。



3. 兰伯特问题

```
lambert.m ✘ +  
1 % ~~~~~  
2 function [V1, V2] = lambert(R1, R2, t, string)  
3 % ~~~~~  
4 %  
5 This function solves Lambert's problem.  
6  
7 mu      - gravitational parameter (km^3/s^2)  
8 R1, R2   - initial and final position vectors (km)  
9 r1, r2   - magnitudes of R1 and R2  
0 t        - the time of flight from R1 to R2 (a constant) (s)  
1 V1, V2   - initial and final velocity vectors (km/s)  
2 c12      - cross product of R1 into R2|  
3 theta    - angle between R1 and R2  
4 string   - 'pro' if the orbit is prograde  
5           'retro' if the orbit is retrograde
```



4. 时间系统

公历和儒略日





4. 时间系统

太阳日——真太阳连续两次过同一子午圈的时间间隔。

太阳时——以太阳日为基本单位的计时系统。



世界时——以太阳日为基本单位，以太阳经过格林威治子午线下中天的时刻为起始时刻的计时系统，简记UT。

太阳时时间系统与地理经度关联

地方时——描述不同地理经度的观测地所对应的不同时间。

世界时=本初子午线（零度经线）上的地方时（规定）



4. 时间系统

恒星时——以地球相对于**固定**恒星（春分点）的自转周期为基准的时间计量系统。
以地球真正自转为基础。

恒星日——相距遥远的恒星返回地球上的固定点上方，即相同的子午线上所需要的时间为一个恒星日(**23时56分4秒**)。

地球绕太阳公转使得恒星日比太阳日稍短一些。一个恒星日为23小时56分。换句话说，一个恒星日中地球旋转360度，而一个太阳日中旋转360.986度。

当地恒星时——某地区的当地恒星时 θ 为自**春分点**至当地子午线之间的时间。将春分点**向东**至当地子午线之间的恒星时乘以15便得到两者之间的**度数**。

格林威治恒星时 θ_G

当地恒星时 $\theta =$ 格林威治恒星时 $\theta_G +$ 当地东经（或减去当地西经） Δ
 $=$ 春分点至本初子午线的时间 $+$ 本初子午线至当地子午线的时间



恒星时单位：度



4. 时间系统

已知地球公转一周为365.2564 平太阳日，则地球平太阳日平均角速度是：

$$360^\circ \div 365.256 \text{ 日} = 0.98561^\circ \quad (\text{即 } 59'8''.196)$$

当地球自转一周，完成一个恒星日后，还须绕过

$$\Delta t = 59'8''.196$$

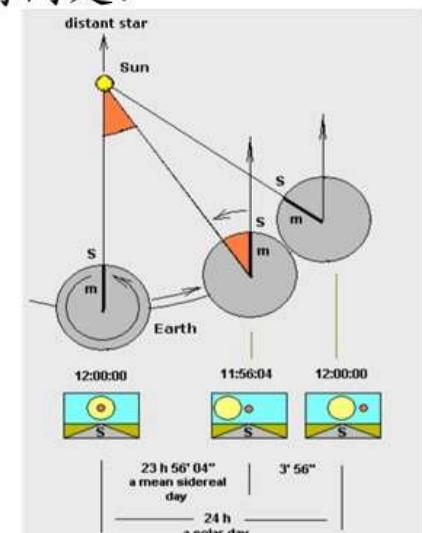
才能完成一个平太阳日。可见，平太阳日比恒星日多出59'8''.196。已知恒星日地球自转一周为23时56分4秒（即1436.06667分），则地球自转 1° 的时间是：

$$1436.06667 \text{ 分} \div 360^\circ = 3.989074 \text{ 分}$$

$$(\text{或 } 24 \text{ 小时} \div 360^\circ \cdot 59'8''.196 = 3.989074 \text{ 分})$$

$$3.989074 \text{ 分} \times 59'8''.196 = 3 \text{ 分 } 55.9622 \text{ 秒} = 3 \text{ 分 } 56 \text{ 秒}$$

所以一平太阳日：23时56分4秒+3分56秒=24时。





4. 时间系统

儒略日的提出者：法国学者史伽利日（Joseph Justus Scaliger, 1540~1609）

儒略日：儒略日是指公元前4713年1月1日正午？（UT）之后的天数。将此时间系统原点放置于古代，不仅方便了历史事件的记载，也使得我们不需要去处理日期的正和负。儒略日是均匀的，连续的计数法且不涉及润年或不同月份里不同天数的问题。两次事件间的时间只需从一个儒略日中减去另一个即可得到。

世界时到儒略日的计算：

将世界时0时刻的儒略日记作 J_0 , 其他任意世界时的儒略日为 $JD = J_0 + \frac{UT}{24}$
最简单的年(y), 月(m)和日(d)与 J_0 之间的算法

$$J_0 = 367y - \text{INT} \left\{ \frac{7 \left[y + \text{INT} \left(\frac{m+9}{12} \right) \right]}{4} \right\} + \text{INT} \left(\frac{275m}{9} \right) + d + 1721013.5 \quad \begin{array}{l} 1901 \leq y \leq 2099 \\ 1 \leq m \leq 12 \\ 1 \leq d \leq 31 \end{array}$$

$\text{INT}(x)$ 意味着只保留x的整数部分（即向零取整）。如 $\text{INT}(-3.9) = -3$, $\text{INT}(3.9) = 3$ 。



4. 时间系统

现今的儒略历元为2000年1月1日正午，记作 J_{2000} 。其儒略日正好为2451545.0天。一个儒略年为365.25天，因此一个儒略世纪为36525天。则儒略 J_0 和 J_{2000} 之间的儒略世纪 T_0 为

$$T_0 = \frac{J_0 - 2451545}{36525}$$

格林威治世界时0时的恒星时 θ_{G0}

$$\theta_{G0} = 100.4606184 + 36000.77004T_0 + 0.000387933T_0^2 - 2.583(10^{-8})T_0^3 \text{ (度)} \quad 0 \leq \theta_{G0} \leq 360^0$$

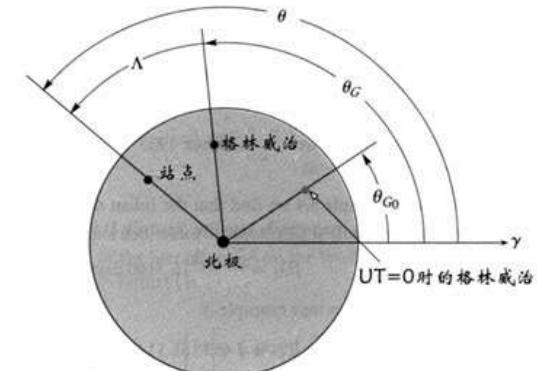
则其他任意世界时(UT)时刻的格林威治恒星时 θ_G

$$\theta_G = \theta_{G0} + 360.98564724 \frac{UT}{24}$$

当地恒星时 θ $\theta = \theta_G + \Lambda$

$$0 \leq \theta \leq 360^0$$

24小时(太阳时)内
地球所转过的角度





4. 时间系统

算法 5.3

已知某地的日期、当地时间、东经度，计算出当地恒星时。

1. 使用年、月、日计算出 J_0 :

$$J_0 = 367y - \text{INT} \left\{ \frac{7 \left[y + \text{INT} \left(\frac{m+9}{12} \right) \right]}{4} \right\} + \text{INT} \left(\frac{275m}{9} \right) + d + 1721013.5$$

2. 计算出 T_0 : $T_0 = \frac{J_0 - 2451545}{36525}$

3. 计算出 θ_{G_0} : $\theta_{G_0} = 100.4606184 + 36000.77004T_0 + 0.000387933T_0^2 - 2.583(10^{-8})T_0^3$ (度)

若 θ_{G_0} 在 $0 \leq \theta_{G_0} \leq 360^\circ$ 之外，将 θ_{G_0} 加减 360° 的整数倍，使得 θ_{G_0} 在 $0 \leq \theta_{G_0} \leq 360^\circ$ 之内。

4. 由式 $\theta_G = \theta_{G_0} + 360.98564724 \frac{UT}{24}$ 计算出 θ_G

5. 由式 $\theta = \theta_G + \Lambda$ 算出当地恒星时，并将结果调整在0到 360° 范围之内。

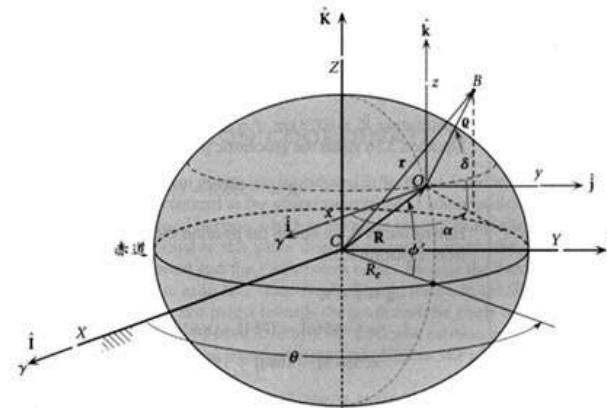


5. 测站坐标系

测站坐标系是指以地表上观测者位置为中心的坐标系统



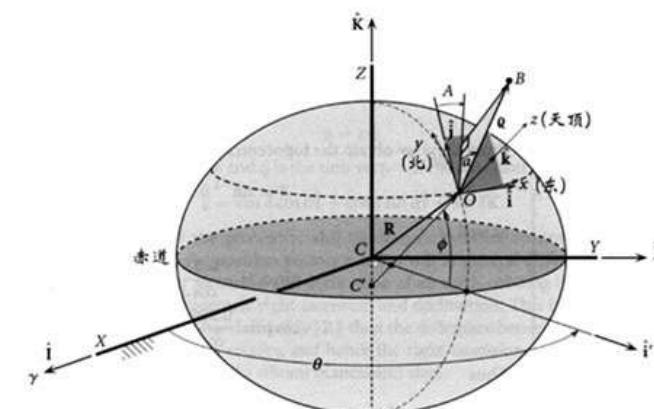
测站赤道坐标系——以地面上 O 点为坐标原点，以过 O 点处且与**地心赤道坐标系**XYZ轴相平行的一套非旋转xyz轴作为坐标轴。 $\hat{i} = \hat{i}, \hat{j} = \hat{j}, \hat{k} = \hat{k}$



测站地平坐标系——以位置矢量为**R**的观测点 O 为坐标原点, xy 平面为当地地平, 即椭球在 O 点处的切平面。 z 轴垂直于此切平面且指向**天顶**, x 轴指向东, y 轴指向北, 又称**ENZ**(东-北-天顶)坐标系。

引入测站坐标系的目的：确定航天器的位置矢量
为航天器定轨服务

观测资料→地心惯性坐标系+测站赤道坐标系+测站地平坐标系→航天器位置矢量





5. 测站坐标系

观测点的位置矢量 \mathbf{R}

已知条件：椭圆长半轴 R_e 短半轴 R_p , 纬度角 ϕ

目标：用已知条件表示出位置矢量 \mathbf{R} 在惯性系各个坐标轴方向上的坐标。

地心纬度——位置矢量 \mathbf{R} 与赤道平面之间的夹角

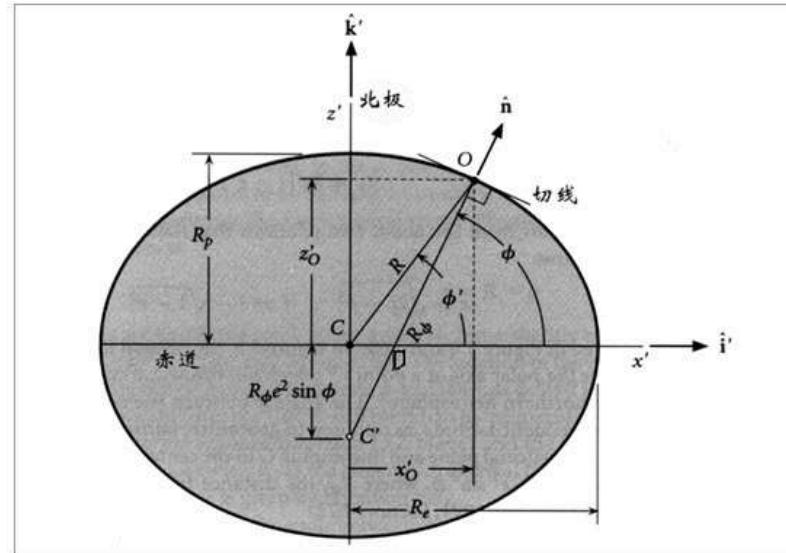
地表纬度——纬度

$$\overline{CC'} = R_\phi e^2 \sin \phi$$

$$R_\phi = \frac{R_e}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \phi}} = \frac{R_e}{\sqrt{1-(2f-f^2)\sin^2 \phi}}$$

$$x'_O = R_\phi \cos \phi$$

$$z'_O = (1-e^2) R_\phi \sin \phi = (1-f)^2 R_\phi \sin \phi$$



$$f = \frac{R_e - R_p}{R_e} \quad R_p = R_e \sqrt{1-e^2}$$

$$e = \sqrt{2f - f^2} \quad f = 1 - \sqrt{1-e^2}$$



5. 测站坐标系

若观测点位于距地面高度 H 处，则需要将上述坐标分别加上 $H\cos \Phi$ 和 $H\sin \Phi$ ，此时

$$x'_o = R_c \cos \phi \quad z'_o = R_s \sin \phi$$

$$R_c = R_\phi + H \quad R_s = (1 - f)^2 R_\phi + H$$

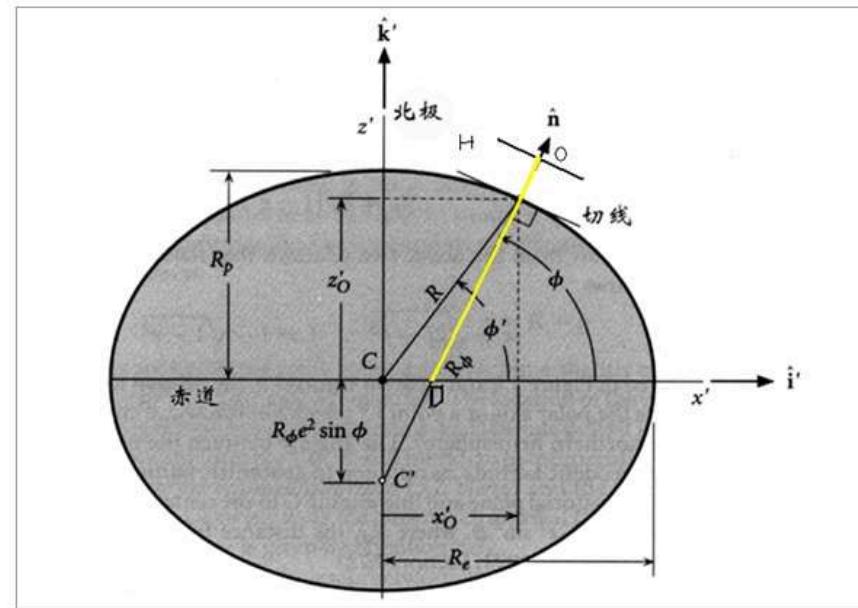
O 点的地心赤道坐标为

$$X = x'_o \cos \theta \quad Y = x'_o \sin \theta \quad Z = z'_o$$

当地恒星时

位置矢量 R 的坐标为

$$\mathbf{R} = R_c \cos \phi \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + R_c \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{j}} + R_s \sin \phi \hat{\mathbf{k}}$$





5. 测站坐标系

观测点的位置矢量**R**的计算步骤

由已知条件椭圆长半轴 R_e , 短半轴 R_p , 纬度角 ϕ

$$R_\phi = \frac{R_e}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} \quad \downarrow \quad R_e = \frac{R_e}{\sqrt{1 - (2f - f^2) \sin^2 \phi}}$$
$$x'_o = R_\phi \cos \phi$$

$$z'_o = (1 - e^2) R_\phi \sin \phi = (1 - f)^2 R_\phi \sin \phi$$

计算 O 点的地心赤道坐标为 $X = x'_o \cos \theta$ $Y = x'_o \sin \theta$ $Z = z'_o$

$$\mathbf{R} = \left[\frac{R_e}{\sqrt{1 - (2f - f^2) \sin^2 \phi}} + H \right] \cos \phi (\cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}) + \left[\frac{R_e (1 - f)^2}{\sqrt{1 - (2f - f^2) \sin^2 \phi}} + H \right] \sin \phi \hat{\mathbf{k}}$$



5. 测站坐标系

用已知 R_e , Φ , θ 表示 \mathbf{R}

$$\mathbf{R} = \left[\frac{R_e}{\sqrt{1 - (2f - f^2) \sin^2 \phi}} + H \right] \cos \phi (\cos \theta \hat{\mathbf{I}} + \sin \theta \hat{\mathbf{J}}) + \left[\frac{R_e (1-f)^2}{\sqrt{1 - (2f - f^2) \sin^2 \phi}} + H \right] \sin \phi \hat{\mathbf{K}}$$

用 R_e , Φ' , θ 表示 \mathbf{R}

$$\mathbf{R} = R \cos \phi' \cos \theta \hat{\mathbf{I}} + R \cos \phi' \sin \theta \hat{\mathbf{J}} + R \sin \phi' \hat{\mathbf{K}}$$

令上面两个公式相等, $H=0$, 得到地表纬度和地心纬度之间的关系如下

$$\tan \phi' = (1-f)^2 \tan \phi$$



5. 测站坐标系

相对位置矢量 ρ

在测站赤道坐标系中

$$\star \quad \rho = \rho \cos \delta \cos \alpha \hat{i} + \rho \cos \delta \sin \alpha \hat{j} + \rho \sin \delta \hat{k}$$

无论何时 $\hat{i} = \hat{I}$ $\hat{j} = \hat{J}$ $\hat{k} = \hat{K}$

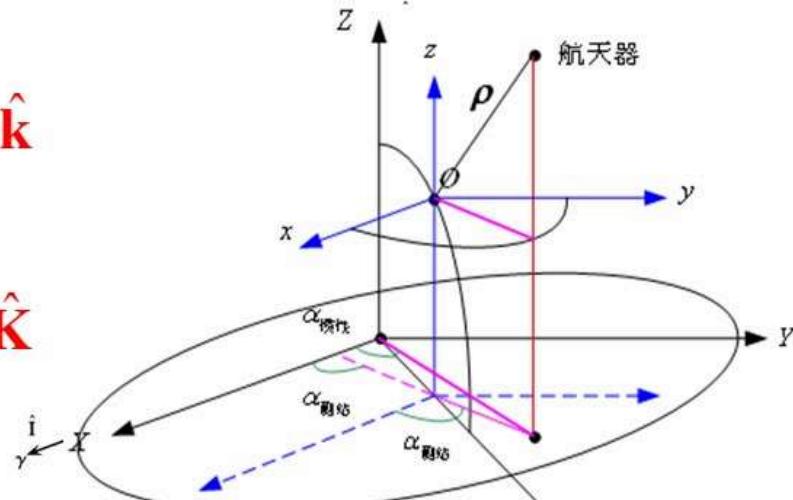
$$\rho = \rho \cos \delta \cos \alpha \hat{I} + \rho \cos \delta \sin \alpha \hat{J} + \rho \sin \delta \hat{K}$$

$$\hat{\rho} = \rho \hat{\rho}$$

$$\hat{\rho} = \cos \delta \cos \alpha \hat{I} + \cos \delta \sin \alpha \hat{J} + \sin \delta \hat{K}$$

注意：由于地心坐标系和测站赤道坐标系的原点不同，因此位置矢量 r 和 ρ 的方向余弦也将不同。特别的，绕地球运行的物体 B 在测站坐标系中的赤经和赤纬也将与地心坐标系中的赤经和赤纬不同。这就是关于视差的一个例子。但如果 $\|r\| \gg \|R\|$ ，则地心与测站间位置矢量的差异以及地心与地测站间的赤经与赤纬的差异均可忽略不计。这一结论对遥远的行星与恒星均适用。

测站赤道坐标系中的赤经赤纬





5. 测站坐标系

例5.7 格林威治恒星时 $\theta_G=126.7^\circ$ 时，国际空间站在地心赤道系的位置矢量为

$$\mathbf{r} = -5368\hat{\mathbf{I}} - 1784\hat{\mathbf{J}} + 3691\hat{\mathbf{K}} \text{ (千米)}$$

求出其在海平面($H=0$), 纬度 $\Phi=20^\circ$, 东经 $\Lambda=60^\circ$ 处测站坐标系中的赤经和赤纬。

解：由式（5.52）可知此观测点的当地恒星时为

$$\theta = \theta_G + \Lambda = 126.7 + 60 = 186.7^\circ$$

$$\mathbf{R} = \left[\frac{R_e}{\sqrt{1-(2f-f^2)\sin^2\phi}} + H \right] \cos\phi (\cos\theta\hat{\mathbf{I}} + \sin\theta\hat{\mathbf{J}}) + \left[\frac{R_e(1-f)^2}{\sqrt{1-(2f-f^2)\sin^2\phi}} + H \right] \sin\phi\hat{\mathbf{K}}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{r} - \mathbf{R} = 586.8\hat{\mathbf{I}} - 1084\hat{\mathbf{J}} + 1523\hat{\mathbf{K}} \text{ (千米)}$$

$$\hat{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{\rho} = 0.2994\hat{\mathbf{I}} - 0.5533\hat{\mathbf{J}} + 0.7773\hat{\mathbf{K}}$$

$$\cos\delta \cos\alpha = 0.2997$$

$$\cos\delta \sin\alpha = -0.5524$$

$$\sin\delta = 0.7778 \quad \rightarrow \quad \alpha_0 = 198.4^\circ \quad \delta_0 = 33.12^\circ$$



5. 测站坐标系

相对位置矢量 ρ

方位角 A ——相对位置矢量 ρ 在测站地平坐标系的 xy 平面（地平面）内的投影与 y 轴之间的夹角。（由正北开始，顺时针为正） $0 \leq A \leq 360^\circ$

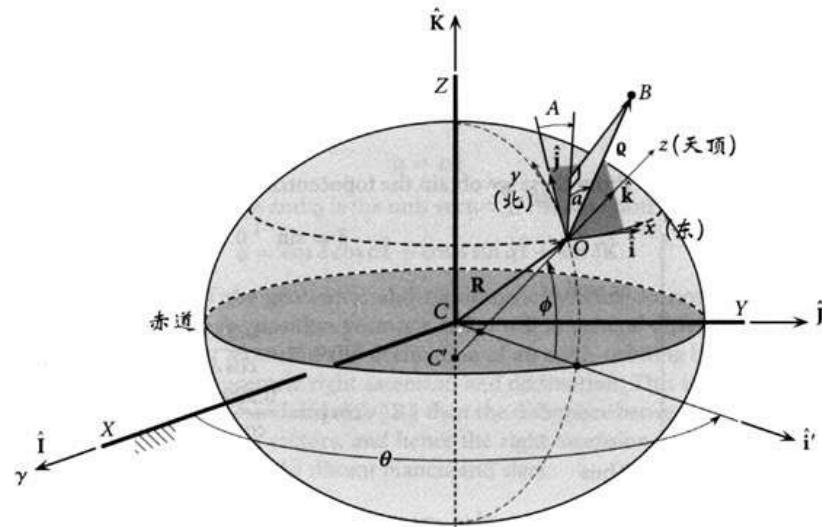
高度角 a ——相对位置矢量与测站地平坐标系的 xy 平面之间的夹角。 $-90^\circ \leq a \leq 90^\circ$

利用 ρ , A , a 表示的航天器相对观测点的位置矢量为

$$\mathbf{\rho} = \rho \cos a \sin A \hat{\mathbf{i}} + \rho \cos a \cos A \hat{\mathbf{j}} + \rho \sin a \hat{\mathbf{k}}$$

视线方向的单位矢量 $\hat{\mathbf{p}}$ 为

$$\hat{\mathbf{p}} = \cos a \sin A \hat{\mathbf{i}} + \cos a \cos A \hat{\mathbf{j}} + \sin a \hat{\mathbf{k}}$$





5. 测站坐标系

地心赤道坐标系与测站地平坐标系之间的变换

要求出地心赤道坐标与测站地平坐标间的变换矩阵，需先确定出测站基矢量 $\hat{\mathbf{i}} \hat{\mathbf{j}} \hat{\mathbf{k}}$ 在地心赤道坐标系中的投影。

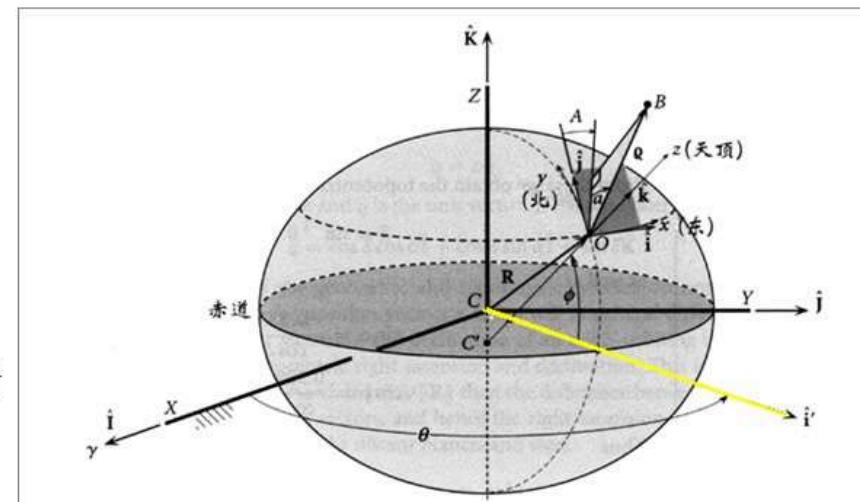
$$\hat{\mathbf{k}} = \cos \phi \hat{\mathbf{i}}' + \sin \phi \hat{\mathbf{K}}$$

$$\hat{\mathbf{i}}' = \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{j}}$$

$$\hat{\mathbf{k}} = \cos \phi \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{j}} + \sin \phi \hat{\mathbf{K}}$$

$$\hat{\mathbf{i}} = \frac{\hat{\mathbf{K}} \times \hat{\mathbf{k}}}{\|\hat{\mathbf{K}} \times \hat{\mathbf{k}}\|} = \frac{-\cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \phi \cos \theta \hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{\cos^2 \phi (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}} = -\sin \theta \hat{\mathbf{i}} + \cos \theta \hat{\mathbf{j}}$$

$$\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = -\sin \phi \cos \theta \hat{\mathbf{i}} - \sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{j}} + \cos \phi \hat{\mathbf{k}}$$





5. 测站坐标系

我们将地心赤道坐标到测站地平坐标的变换矩阵记为 Q_{Xx}

$$\mathbf{Q}_{Xx} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \phi \cos \theta & -\sin \phi \sin \theta & \cos \phi \\ \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta & \sin \phi \end{bmatrix}$$

由测站地平坐标至地心赤道坐标的变换矩阵为上述矩阵的转置矩阵记为 Q_{xX}

$$\mathbf{Q}_{xX} = \begin{bmatrix} -\sin \theta & -\sin \phi \cos \theta & \cos \phi \cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \phi \sin \theta & \cos \phi \sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \end{bmatrix}$$

注意：上述矩阵也代表了测站地平坐标与测站赤道坐标之间的变换关系，因为后者的单位基矢量与地心赤道坐标系的单位基矢量相同。



5. 测站坐标系

例5.8 旧金山附近一观测者的东经和纬度分别为 $\Lambda=238^{\circ}$, $\Phi=38^{\circ}$, 当地恒星时为 $\theta=215.1^{\circ}$ (14点20分)。此时, 通过望远镜观测到木星的方位角和高度角分别为 $A=214.3^{\circ}, a=43^{\circ}$ 。计算出木星此时在测站赤道坐标系中的赤经和赤纬。

解:

$$\hat{\rho} = \cos a \sin A \hat{i} + \cos a \cos A \hat{j} + \sin a \hat{k}$$

$$= -0.4121 \hat{i} - 0.6042 \hat{j} + 0.6820 \hat{k}$$

$$[\mathbf{Q}]_{xX} = \begin{bmatrix} -\sin 215.1^{\circ} & -\sin 38^{\circ} \cos 215.1^{\circ} & \cos 38^{\circ} \cos 215.1^{\circ} \\ \cos 215.1^{\circ} & -\sin 38^{\circ} \sin 215.1^{\circ} & \cos 38^{\circ} \sin 215.1^{\circ} \\ 0 & \cos 38^{\circ} & \sin 38^{\circ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5750 & 0.5037 & -0.6447 \\ -0.8182 & 0.3540 & -0.4531 \\ 0 & 0.7880 & 0.6157 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\rho}_x = \mathbf{Q}_{xX} \hat{\rho}_x = \begin{bmatrix} 0.5750 & 0.5037 & -0.6447 \\ -0.8182 & 0.3540 & -0.4531 \\ 0 & 0.7880 & 0.6157 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.4121 \\ -0.6042 \\ 0.6820 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9810 \\ -0.1857 \\ 0.05621 \end{bmatrix}$$

在测站赤道坐标中表示的 $\hat{\rho}$

在测站地平坐标中表示的 $\hat{\rho}$

与木星在地心赤道坐标系中的赤经赤纬相同

$$\hat{\rho}_x = \cos \delta \cos \alpha \hat{i} + \cos \delta \sin \alpha \hat{j} + \sin \delta \hat{k} \implies \delta = -3.222^{\circ}, \alpha = 190.7^{\circ}$$



5. 测站坐标系

例5.9 在一给定时刻，国际空间站在地心赤道坐标系中的位置矢量为

$$\mathbf{r} = -2032.4\hat{\mathbf{i}} + 4591.2\hat{\mathbf{j}} - 4544.8\hat{\mathbf{k}} \text{ (千米)}$$

位于海平面 ($H=0$) 的一观测者的方位为纬度 $\phi = -40^\circ$, 当地恒星时 $\theta = 110^\circ$, 求出国际空间站相对于此观测者的方位角和高度角。

解：

$$\mathbf{R} = -1673\hat{\mathbf{i}} + 4598\hat{\mathbf{j}} - 4078\hat{\mathbf{k}} \text{ (千米)}$$

$$\rho = \mathbf{r} - \mathbf{R}$$

$$= -359.0\hat{\mathbf{i}} - 6.342\hat{\mathbf{j}} - 466.9\hat{\mathbf{k}} \text{ (千米)}$$

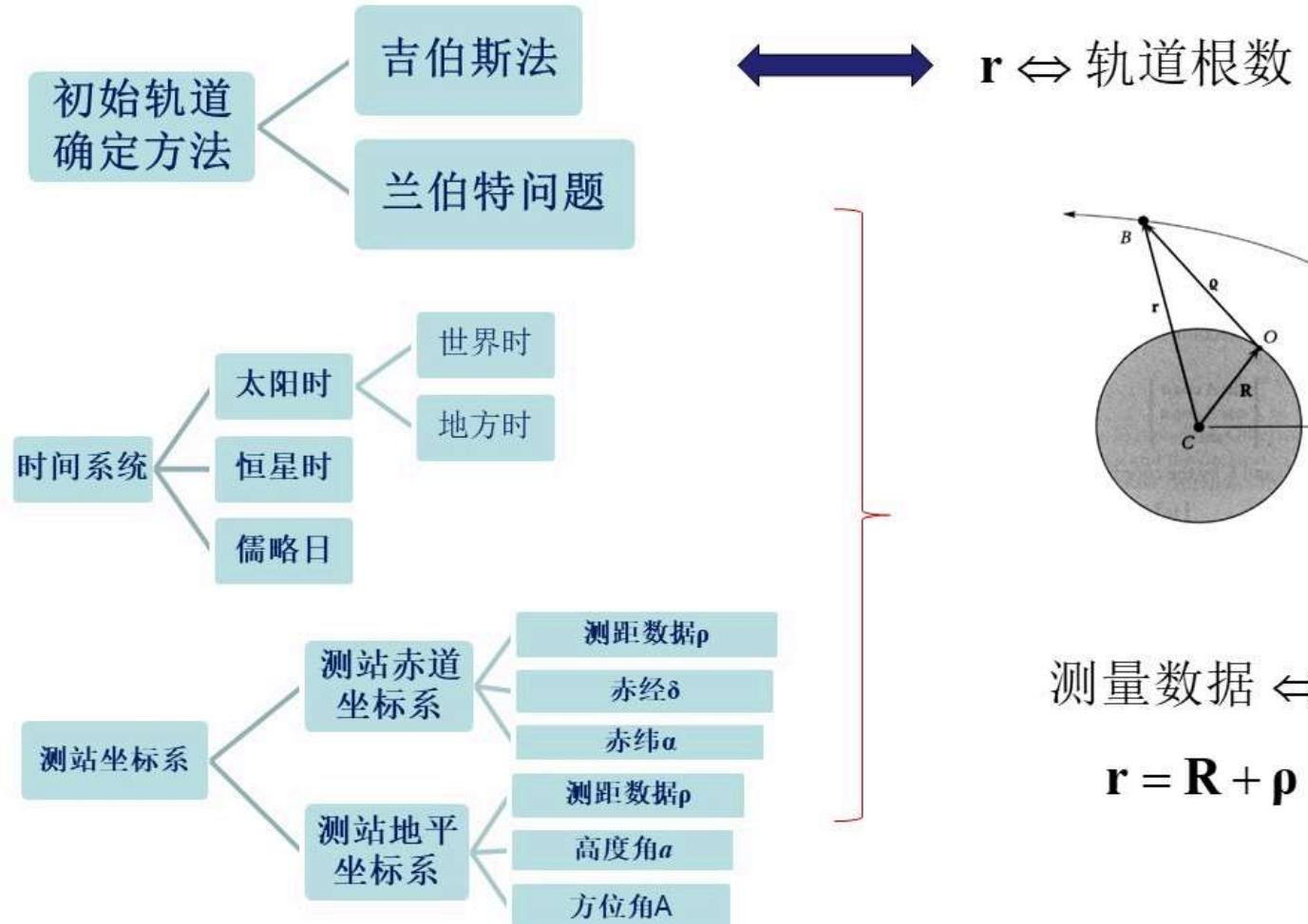
$$\rho_x = \begin{bmatrix} -359.0 \\ -6.342 \\ -466.9 \end{bmatrix} \text{ (千米)}$$

表示在测站赤道坐标中

$$[\mathbf{Q}]_{xx} = \begin{bmatrix} -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin\phi\cos\theta & -\sin\phi\sin\theta & \cos\phi \\ \cos\phi\cos\theta & \cos\phi\sin\theta & \sin\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin 110^\circ & \cos 110^\circ & 0 \\ -\sin(-40^\circ)\cos 110^\circ & -\sin(-40^\circ)\sin 110^\circ & \cos(-40^\circ) \\ \cos(-40^\circ)\cos 110^\circ & \cos(-40^\circ)\sin 110^\circ & \sin(-40^\circ) \end{bmatrix}$$

$$\rho_x = \mathbf{Q}_{xx}\rho_X = \begin{bmatrix} -0.9397 & -0.3420 & 0 \\ -0.2198 & 0.6040 & 0.7660 \\ -0.2620 & 0.7198 & -0.6428 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -359.0 \\ -6.342 \\ -466.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 339.5 \\ -282.6 \\ 389.6 \end{bmatrix} \text{ (千米)}$$

在测站地平坐标中表示的 $\hat{\rho}_x = \frac{\rho_x}{\rho} = 0.5765\hat{\mathbf{i}} - 0.4787\hat{\mathbf{j}} + 0.6615\hat{\mathbf{k}}$ $\rightarrow a = 41.41^\circ, A = 129.8^\circ$



初始轨道确定

6. 角度与斜距观测数据的初始轨道确定

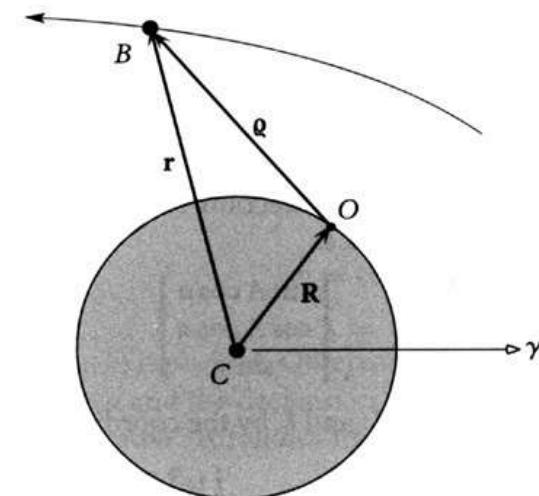


初始定轨原理：利用角度与斜距观测数据求出某一时刻的位置矢量 \mathbf{r} 和速度矢量 \mathbf{v}
→ 轨道根数

算法 5.4

相对于地面跟踪站，已知物体的斜距 ρ ，方位角 A ，高度角 a 及他们的变化率 $\dot{\rho}$, \dot{A} , \dot{a} 求解其在地心赤道坐标系中的状态矢量 \mathbf{r} 和 \mathbf{v} 。

推导和算法过程自看





7. 高斯方法

高斯法

高斯法是由德国伟大的数学家高斯提出的单纯角度观测数据的定轨方法

高斯法的提出背景：斜距和斜距的变化率无法观测，只能依靠方位角和高度角两个角度观测数据确定轨道。

高斯法初始定轨的原理：根据三个相邻时间间隔内观测到的六个独立方位角和高度角，推导出其中一个时刻的位置矢量和速度矢量，进而得到航天器的轨道根数，确定出轨道。



小结

1. 吉伯斯法——运用三个地心位置矢量来测定初始轨道
2. 兰伯特问题——根据两位置矢量和他们之间的时间间隔来确定轨道。
3. 时间系统——恒星时，太阳时，儒略日。
4. 测站坐标系——测站赤道坐标系和测站地平坐标系。
5. 角度与斜距观测数据的初始轨道确定。
6. 单纯角度观测数据的初始轨道确定——高斯法。