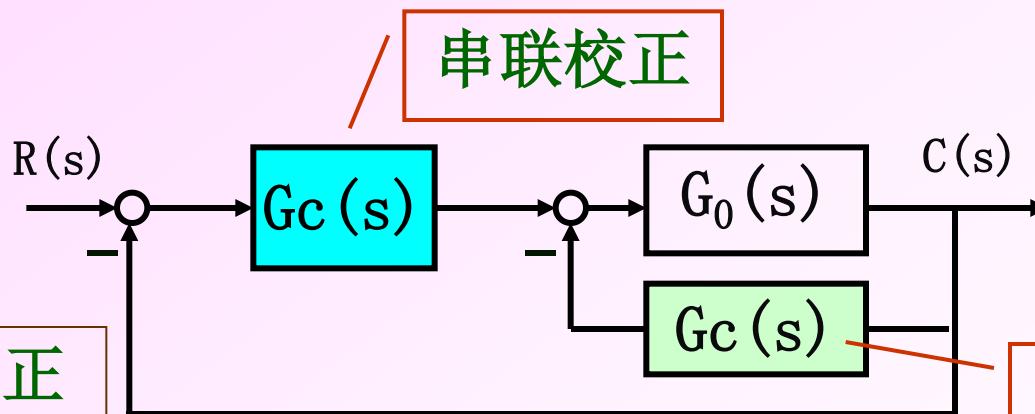


## 5-5 控制系统频率法校正

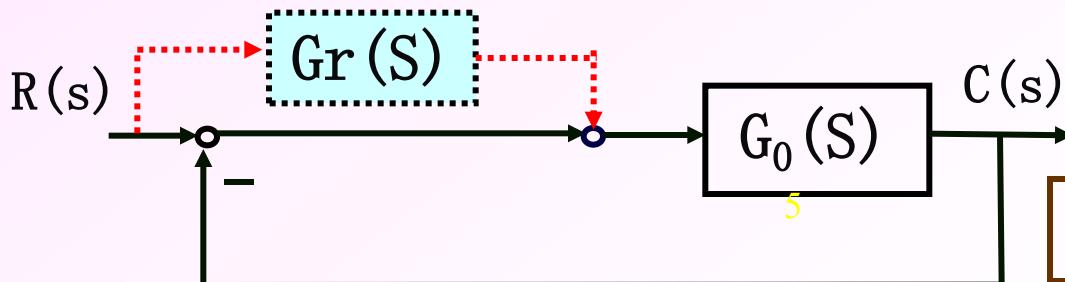
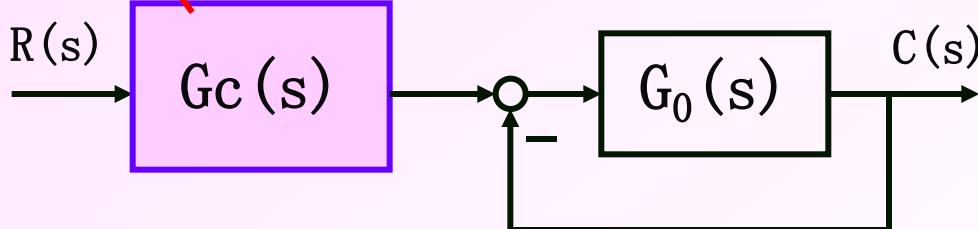
## § 5-5 控制系统频率法校正

校正是指在系统中加入一些装置,使系统性能发生变化,从而满足给定的性能指标.根据性能位置的不同,主要有四种校正方法:串联校正,反馈校正,顺馈校正和复合校正.

[例]

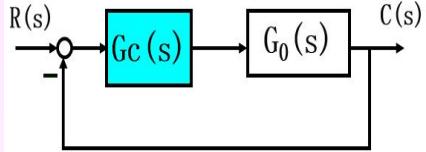


前(顺)馈校正



复合校正

本节主要介绍串联校正装置的设计



控制系统校正装置有无源校正装置和有源校正装置之分，由于无源网络实现比较方便，本节主要介绍无源校正网络的设计，且着重介绍串联校正装置的设计。

## 一、无源超前校正网络

### 1. 超前校正网络数学模型

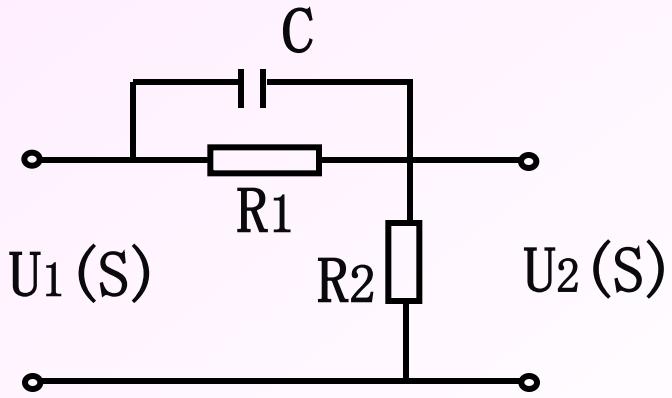
$$G_c(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \quad (a > 1)$$

$$\text{其中: } a = \frac{R_1 + R_2}{R_2} > 1, T = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$$

系统开环增益下降，为消除这一影响，应提高放大器增益a倍，假设此衰减已补偿

此时超前网络传递函数为

$$aG_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$$



# 1. 超前校正网络数学模型

$$aG_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$$

由右图可知, 对数幅频渐近线有正斜率值, 相角为正值, 表明网络在正弦信号作用下,  $C_{ss}$  在相位上超前于输入, 故称为超前网络.

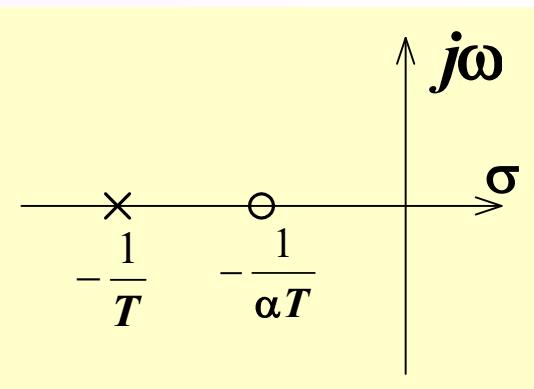
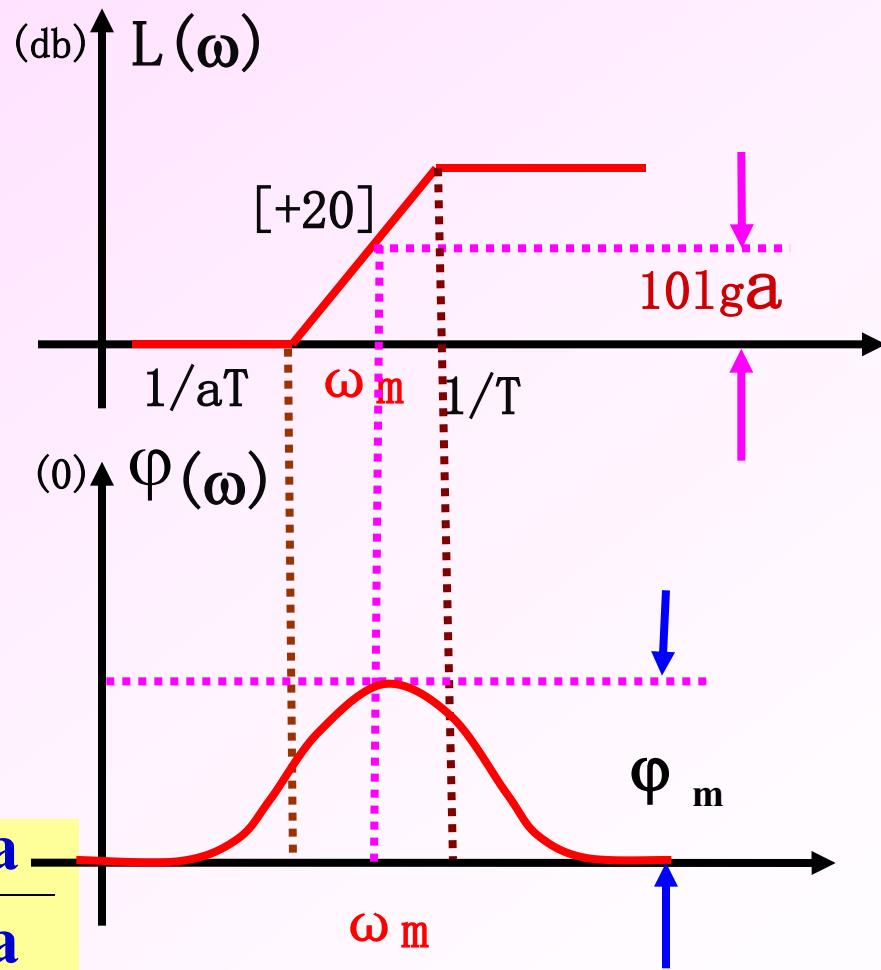
重要结论

①最大超前角  $\varphi_m = \arcsin \frac{1-a}{1+a}$

位于  $1/aT$  和  $1/T$  中心, 且

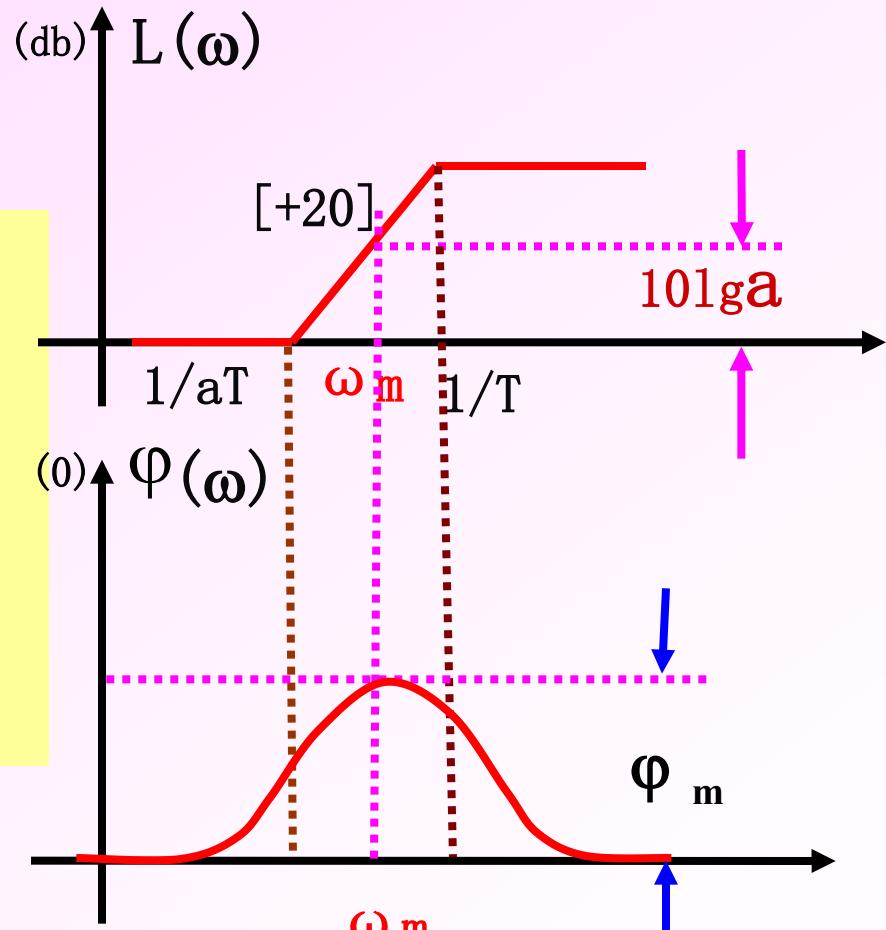
$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{aT}}$$

② $\omega = \omega_m$  时  $L(\omega_m) = 10 \lg a$



# 重要结论

- ① 最大超前角  $\Phi_m = \arcsin \frac{1-a}{1+a}$   
 且位于  $1/aT$  和  $1/T$  中心, 且  $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{aT}}$
- ②  $\omega = \omega_m$  时  $L(\omega_m) = 10 \lg a$

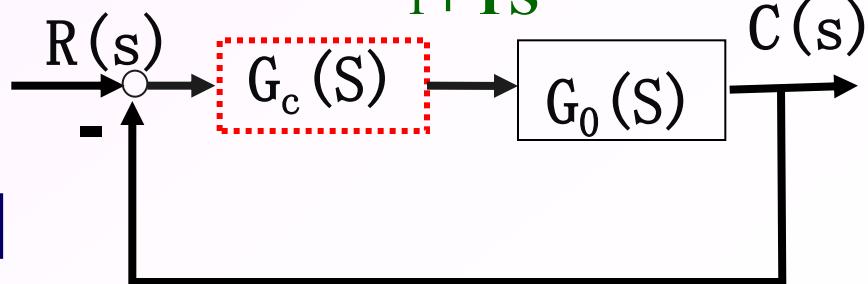


## 2. 超前校正网络的作用

$$G(s) = G_c(s) G_0(s)$$

$$L(\omega) = 20 \lg |G_c(j\omega) G_0(j\omega)|$$

$$= 20 \lg |G_c(j\omega)| + 20 \lg |G_0(j\omega)|$$



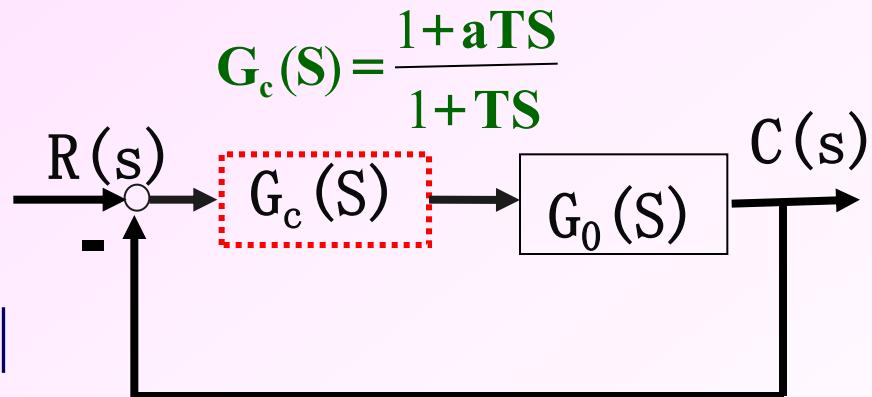
$$G_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts}$$

## 2. 超前校正网络的作用

$$G(s) = G_c(s) G_0(s)$$

$$L(\omega) = 20 \lg |G_c(j\omega) G_0(j\omega)|$$

$$= 20 \lg |G_c(j\omega)| + 20 \lg |G_0(j\omega)|$$



结论：

校正后系统开环对数幅频为原系统 $L(\omega)$ 和校正网络 $L(\omega)$ 叠加。

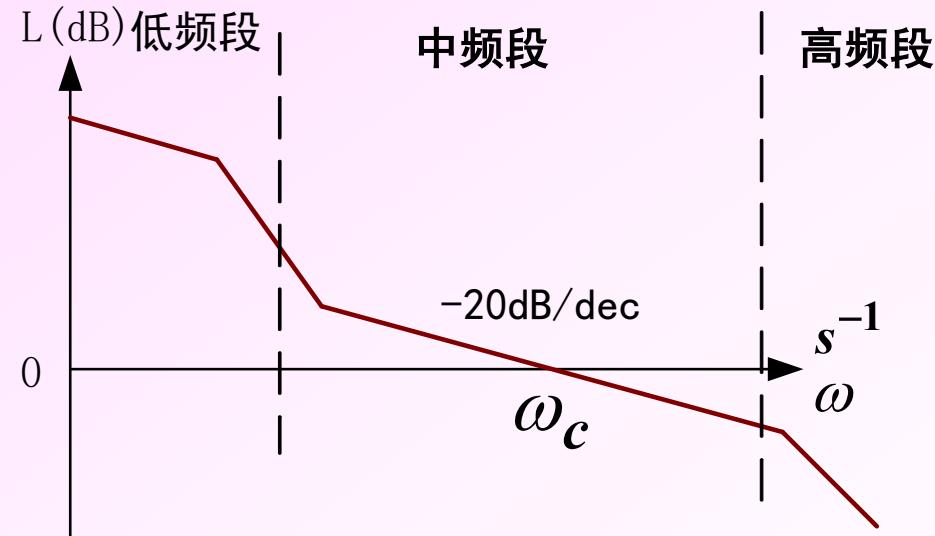
$$\varphi(\omega) = \underline{\underline{G_c(j\omega)}} + \underline{\underline{G_0(j\omega)}}$$

结论：

校正后系统开环对数相频为原系统 $\varphi(\omega)$ 和校正网络 $\varphi(\omega)$ 叠加。

# 控制系统对开环对数频率特性的一般要求

## 三频段的概念



- 1) 低频段的斜率陡，增益高，表示系统的**稳态精度好**；
- 2) 中频段以-20dB/dec的斜率穿越零分贝线，而且这一斜率占有足够的频带宽度，则系统的**平稳性好**且截止频率  $\omega_c$ 越高，则系统的**快速性越好**
- 3) 高频段衰减得越快，即高频特性**负分贝值低**，说明系统**抗高频噪声干扰的能力越强**。

## 2.超前校正网络的作用

$$aG_c(s) = \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$$

开环对数幅频频率特性

三频段的概念

— 未校正系统  $L'(\omega)$   
— 已校正系统  $L''(\omega)$

原系统

低频段——第一个转折频率前的区段

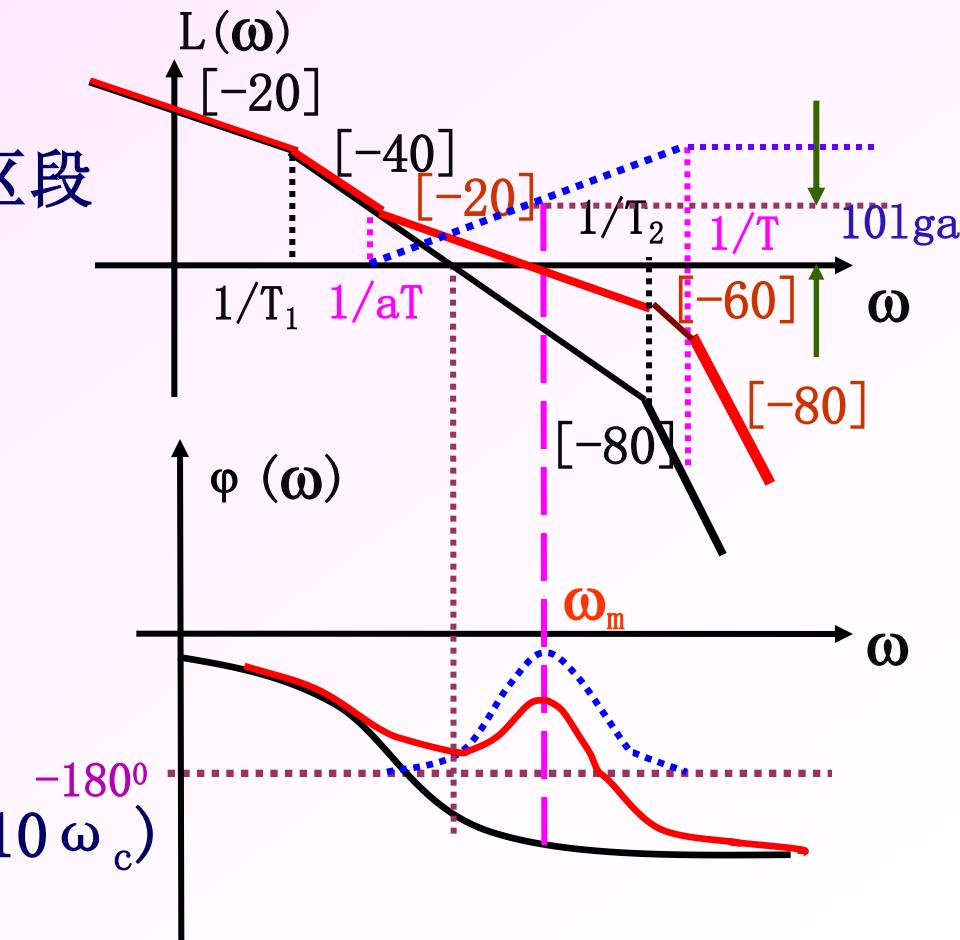
由  $K$  和  $\nu$  决定系统  $e_{ss}$

中频段—— $\omega_c$  附近区段

集中反映系统动态性能，  
一般希望  $[-20]$  且区间较宽

高频段——中频段以后的频段 ( $\omega > 10\omega_c$ )

反映系统抗干扰能力



# 原系统—

中频段  $\omega_c$  处  $[-40]$ ,  $\gamma \downarrow$ , 平稳性差

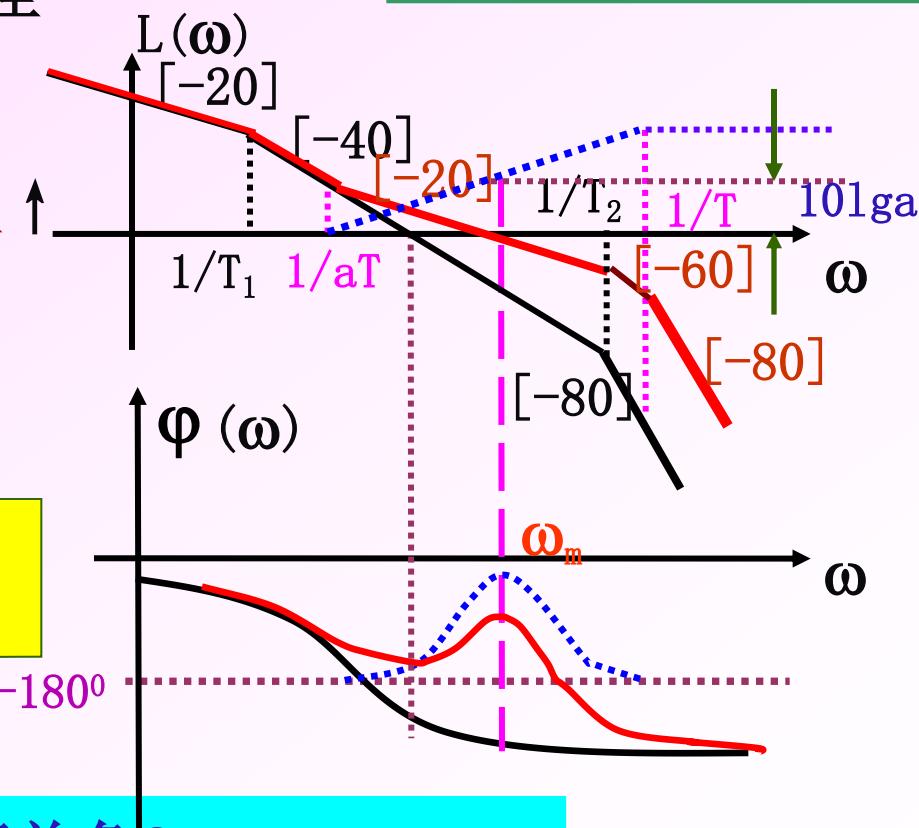
校正后

中频段  $\omega_c$  处  $[-20]$ ,  $\gamma \uparrow \rightarrow$  平稳性  $\uparrow$

$\omega_c \uparrow \rightarrow$  快速性  $\uparrow$ 。

结论

超前校正全面改善系统动态性能

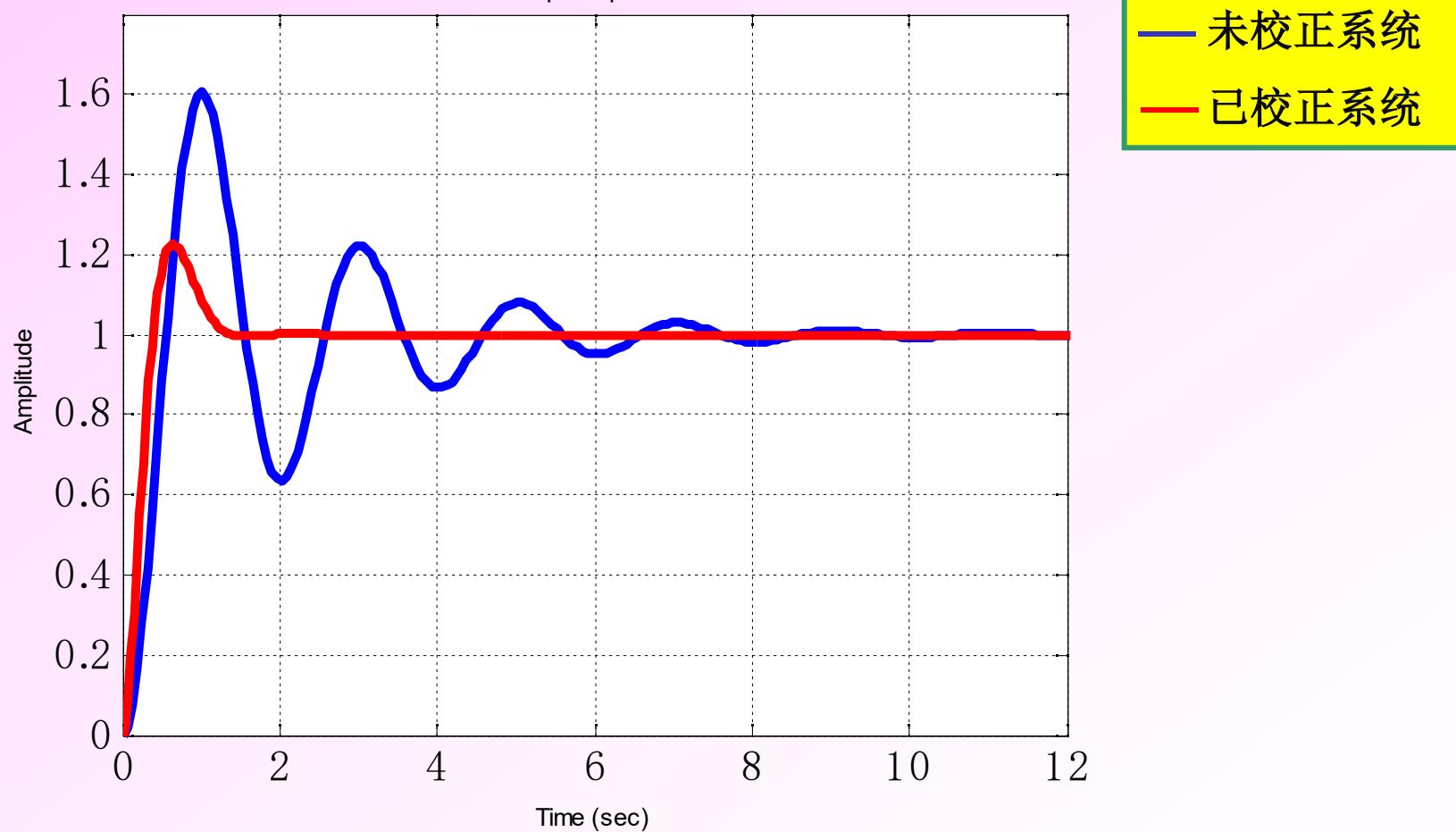


请问: 如何最大程度地利用最大超前角?

答: 使新的截止频率  $\omega_c''$  在超前校正网络的最大超前角频率  $\omega_m$  上, 即可最大限度地利用  $\omega_m$ ,

$$\Omega_c'' = \Omega_m$$

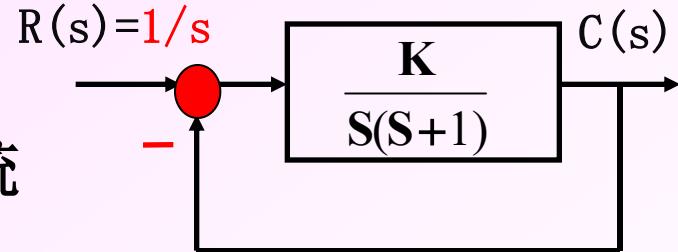
Step Response



## 二、串联超前校正的设计

[例]控制系统如图所示,  $G_0(s) = \frac{K}{s(s+1)}$

若要求系统在单位斜坡输入信号作用时,位置输出稳态误差  $e_{ss} \leq 0.1 \text{ rad}$ , 开环系统的截止频率  $\omega_c' \geq 4.4 \text{ rad/s}$ , 相角裕度  $\gamma' \geq 45^\circ$ , 幅值裕度  $h' \text{ dB} \geq 10 \text{ dB}$ , 试设计串联无源超前网络。



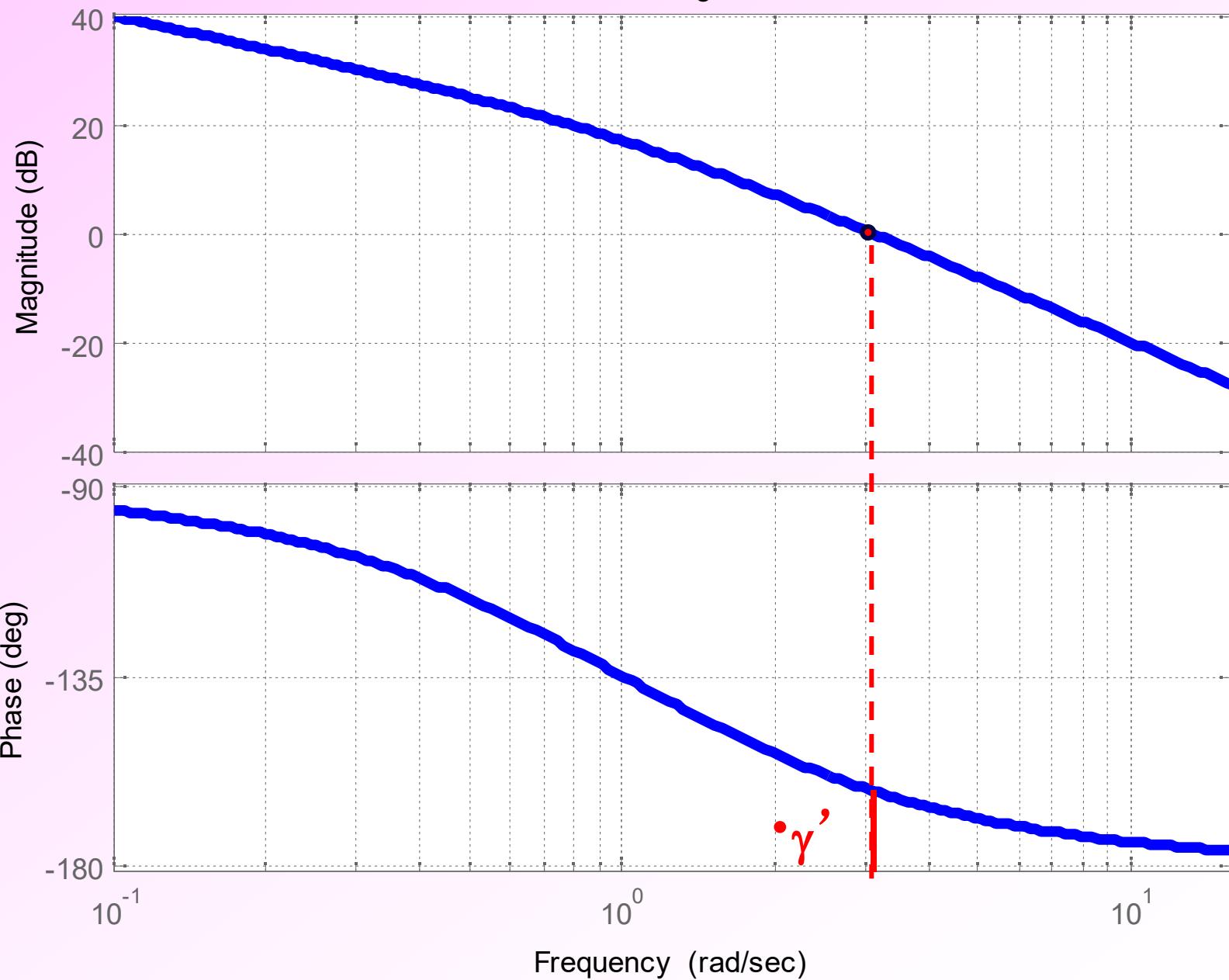
解: ①根据  $e_{ss}$  要求确定开环增益 K

$$e_{ss} = 1/K \leq 0.1 \rightarrow K = 10 \quad \text{故 } G_0(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

②利用已确定的开环增益 K, 计算未校正系统  $\gamma'$ ,  $h'$ ,  $\omega_c'$

# 原系统

Bode Diagram



期望:

$$\omega''_c \geq 4.4$$

$$\gamma'' \geq 45^0$$

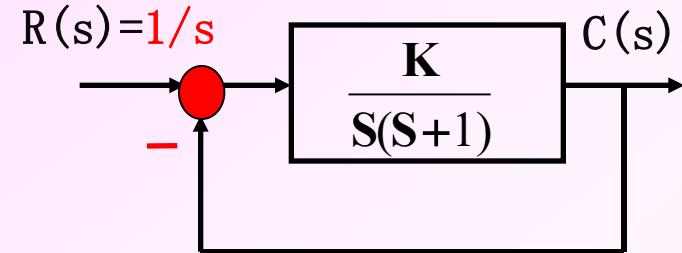
读出:

$$\omega_c' = 3.1$$

$$\gamma' = 17.9^0$$

[例]控制系统如图所示,  $G_0(S) = \frac{K}{S(S+1)}$

若要求系统在单位斜坡输入信号作用时,位置输出稳态误差  $e_{ss} \leq 0.1 \text{ rad}$ , 开环系统的截止频率  $\omega_c' \geq 4.4 \text{ rad/s}$ , 相角裕度  $\gamma' \geq 45^\circ$ , 幅值裕度  $h' \text{ dB} \geq 10 \text{ dB}$ , 试设计串联无源超前网络。



解: ①根据  $e_{ss}$  要求确定开环增益 K

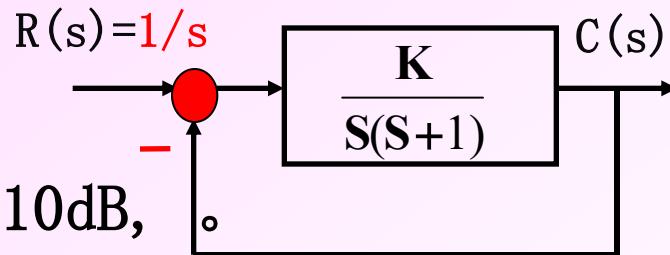
$$e_{ss} = 1/K \leq 0.1 \rightarrow K = 10 \quad \text{故 } G_0(S) = \frac{10}{S(S+1)}$$

②利用已确定的开环增益 K, 计算未校正系统  $\gamma$ ,  $h$ ,  $\omega_c$ .

读出  $\omega_c' = 3.1 \text{ rad/s}$ ,  $\gamma' = 180^\circ - \arctan \omega_c' - 90^\circ = 17.9^\circ$

分析: 由于截止频率和相角裕度均低于指标要求, 故采用串联超前校正。

试设计串联无源超前网络，  
使截止频率  $\omega_c'' \geq 4.4 \text{ rad/s}$ ，  
相角裕度  $\gamma' \geq 45^\circ$ , 幅值裕度  $h' \text{ dB} \geq 10 \text{ dB}$ 。



③关键：让  $\phi_m$  最大超前角发生在新截止频率  $\omega_c''$  处，即  $\omega_m = \omega_c''$   
取  $\omega_c'' = 4.4$

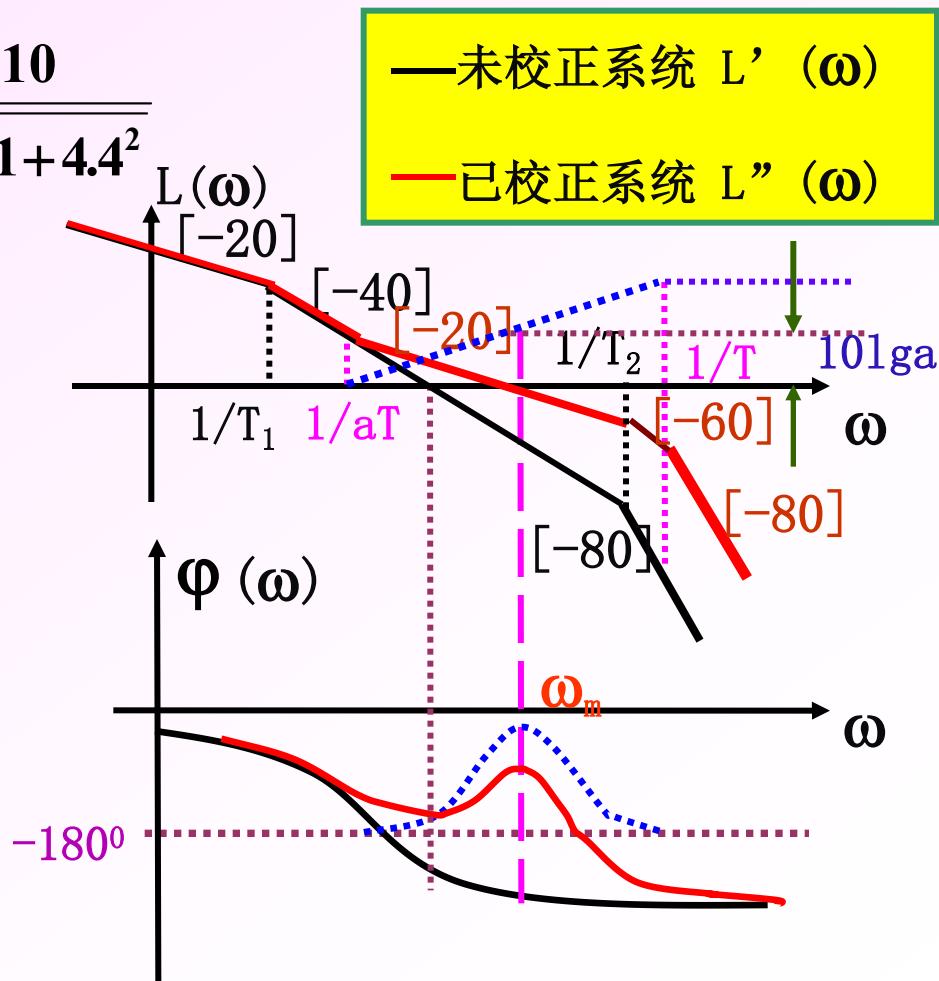
$$\text{则 } 10\text{lg}a = -L(\omega_c'') = -20\lg \frac{10}{4.4\sqrt{1+4.4^2}}$$

$$a=4$$

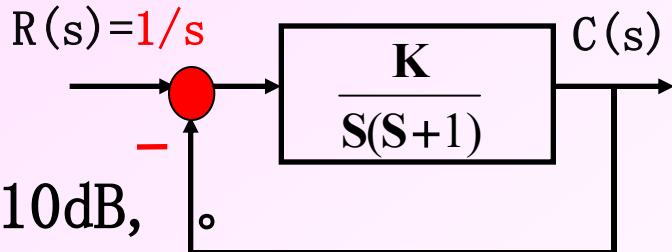
$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{a}} = 4.4 \quad \therefore T=0.114$$

$$\therefore aG_c(s) = \frac{1 + 0.456s}{1 + 0.114s}$$

$$4G_c(s) = \frac{1 + 0.456s}{1 + 0.114s}$$



试设计串联无源超前网络，  
使截止频率  $\omega_c'' \geq 4.4 \text{ rad/s}$ ，  
相角裕度  $\gamma'' \geq 45^\circ$ , 幅值裕度  $h'' \text{ dB} \geq 10 \text{ dB}$ ,

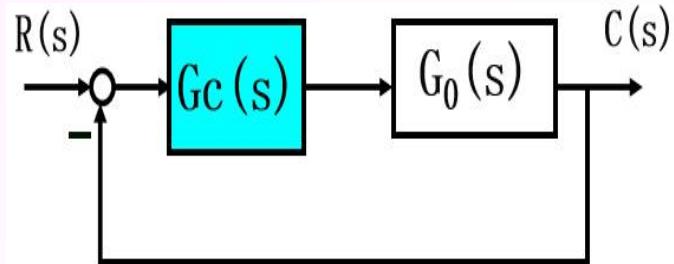


③关键：让  $\varphi_m$  最大超前角发生在新截止频率  $\omega_c''$  处，即  $\omega_m = \omega_c''$

$$\therefore aG_c(s) = \frac{1 + 0.456s}{1 + 0.114s}$$

$$4G_c(s) = \frac{1+0.456 s}{1+0.114 s}$$

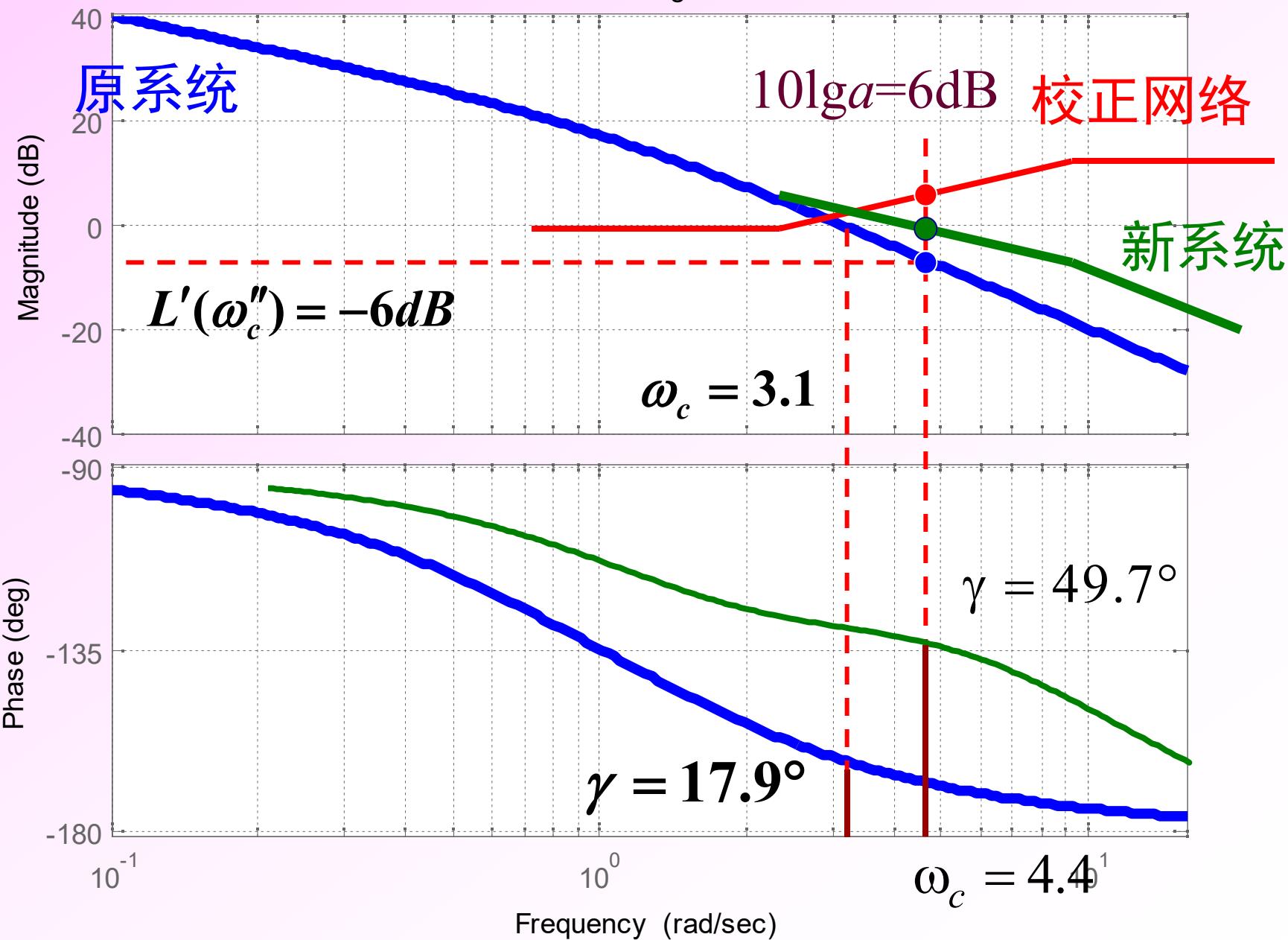
④验算



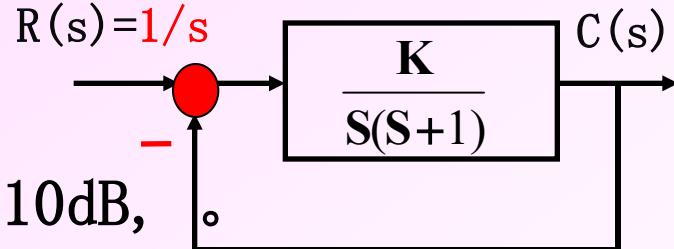
$$\omega'' \geq 4.4 \text{ rad/s}$$

$$\gamma'' \geq 45^\circ$$

Bode Diagram



试设计串联无源超前网络，  
使截止频率  $\omega_c'' \geq 4.4 \text{ rad/s}$ ，  
相角裕度  $\gamma'' \geq 45^\circ$ , 幅值裕度  $h'' \text{ dB} \geq 10 \text{ dB}$ ,



#### ④验算

作Bode图, 见图5.6.5, 得已校正系统  $\omega_c'' = 4.4 \text{ rad/s}$

$\gamma(\omega_c'') = 49.7^\circ > 45^\circ$ ,  $h = +\infty$ , 满足要求

注意:当验算  $\gamma''$  不满足要求时, 需重选  $\omega_c''$  值, 一般使  $\omega_m (= \omega_c'')$  值增大, 然后重复上面的计算步骤.

MatLab仿真求  $h$ ,  $\gamma$ :

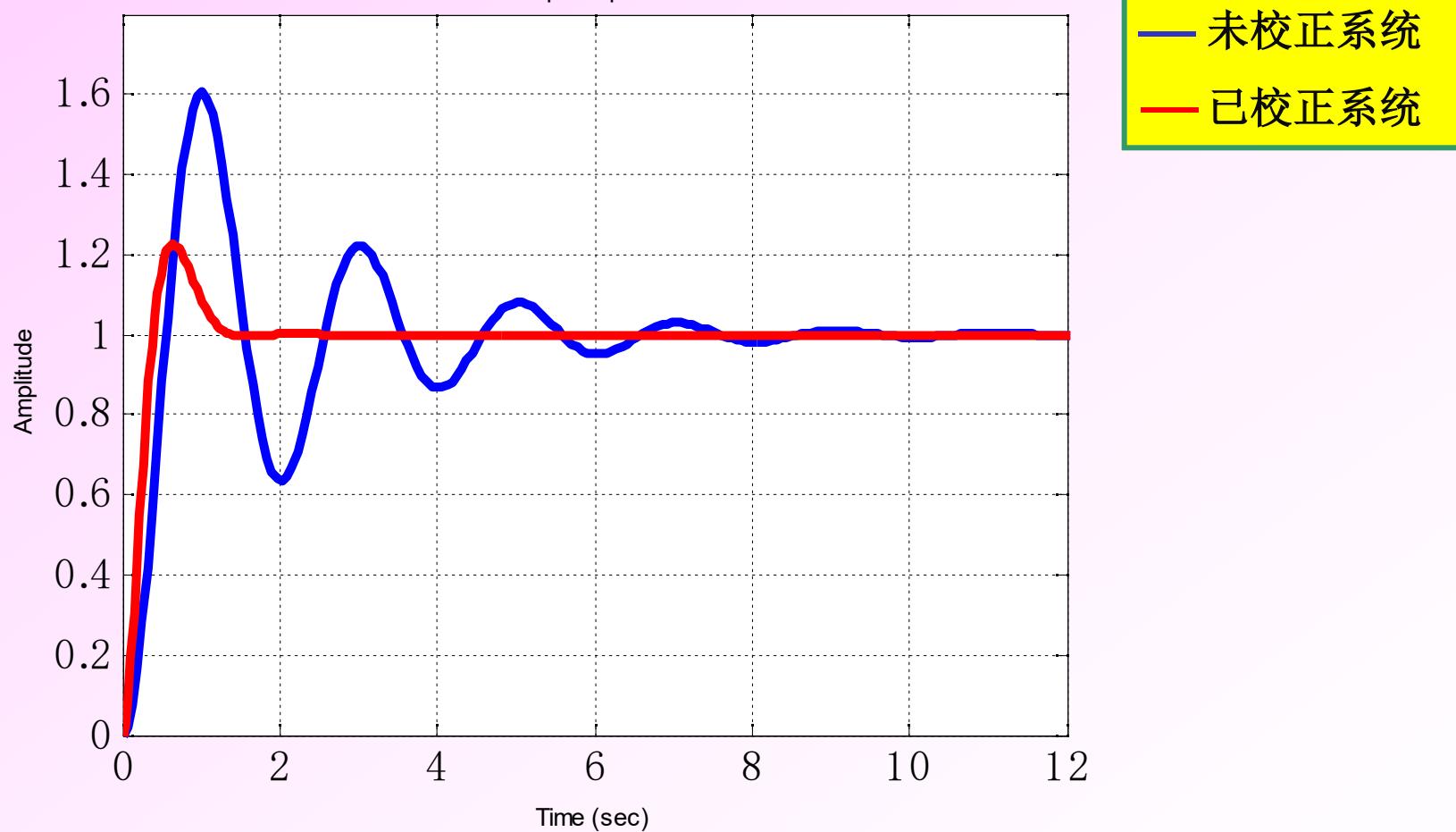
**[Gm, Pm, Wcg, Wcp]=margin(G);**  
 $h$        $\gamma$        $\omega_x$        $\omega_c$

补充  $\omega_c''$  求取方法:  $\varphi_m = \gamma'' - \gamma' + \Delta$        $\Delta = (5^\circ \sim 12^\circ)$

$$a = \frac{1 + \sin \varphi_m}{1 - \sin \varphi_m}$$

$$10 \lg a = 20 \lg |G(j\omega_c'')| \Rightarrow \omega_c''$$

Step Response

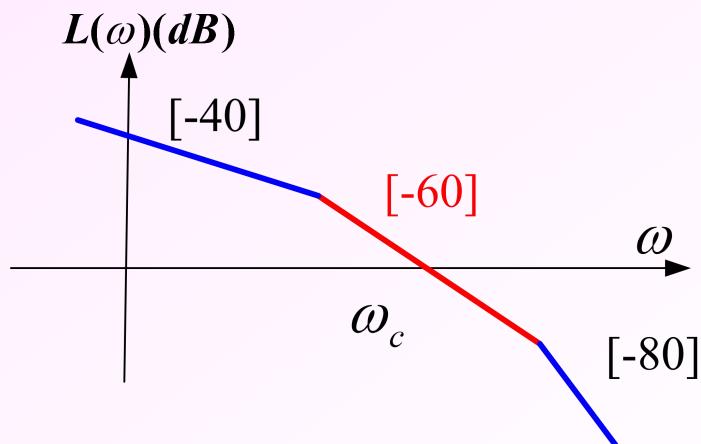


# 超前网络失效的情况

## 1. 闭环带宽要求

若待校正系统不稳定，需要超前网络提供很大的相角超前量。a必须很大，造成系统带宽过大，通过系统的高频噪声电平很高。

## 2. 在截止频率附近相角迅速减小的待校正系统，一般不宜采用串联超前校正



### 三、无源滞后校正网络

#### 1. 网络数学模型

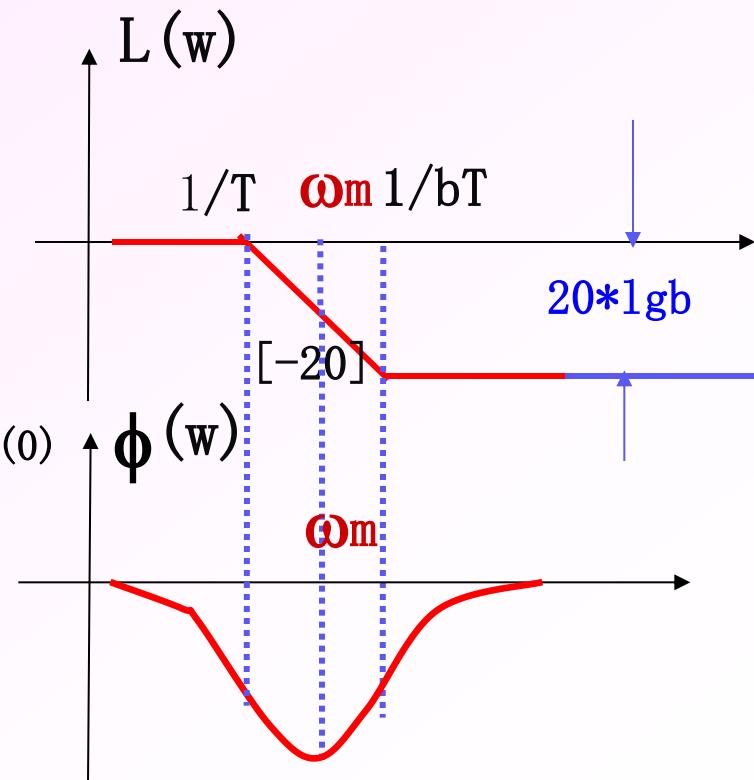
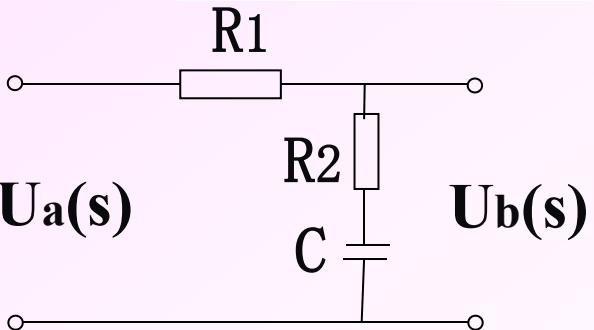
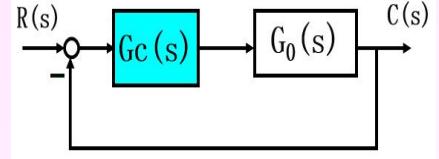
$$G_c(s) = \frac{U_b(s)}{U_a(s)} = \frac{I(s)[R_2 + \frac{1}{sc}]}{I(s)[R_1 + R_2 + \frac{1}{sc}]} \\ = \frac{1+bTS}{1+TS} \quad (b < 1)$$

其中  $b = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$      $T = (R_1 + R_2)C$

由Bode图知, 对数幅频渐近线具有负斜率段, 相角为负相移, 表明系统在正弦输入下, 稳态输出相角迟后于输入, 故称为迟(滞)后网络。

最大迟后角  $\phi_m$  发生在  $1/T$  和  $1/bT$  之间

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{bT}} \quad \phi_m = \arcsin \frac{1-b}{1+b}$$



## 迟后网络的作用

**原系统:**  $\omega_c$ 处[-60],  $\gamma$ 小, 平稳性差, 且系统处于临界稳定

**校正后系统:**  $\omega_c \downarrow$ , 动态过程快速性↓, 中频段[-20],  $\gamma \uparrow$ , 平稳性↑

## 结论

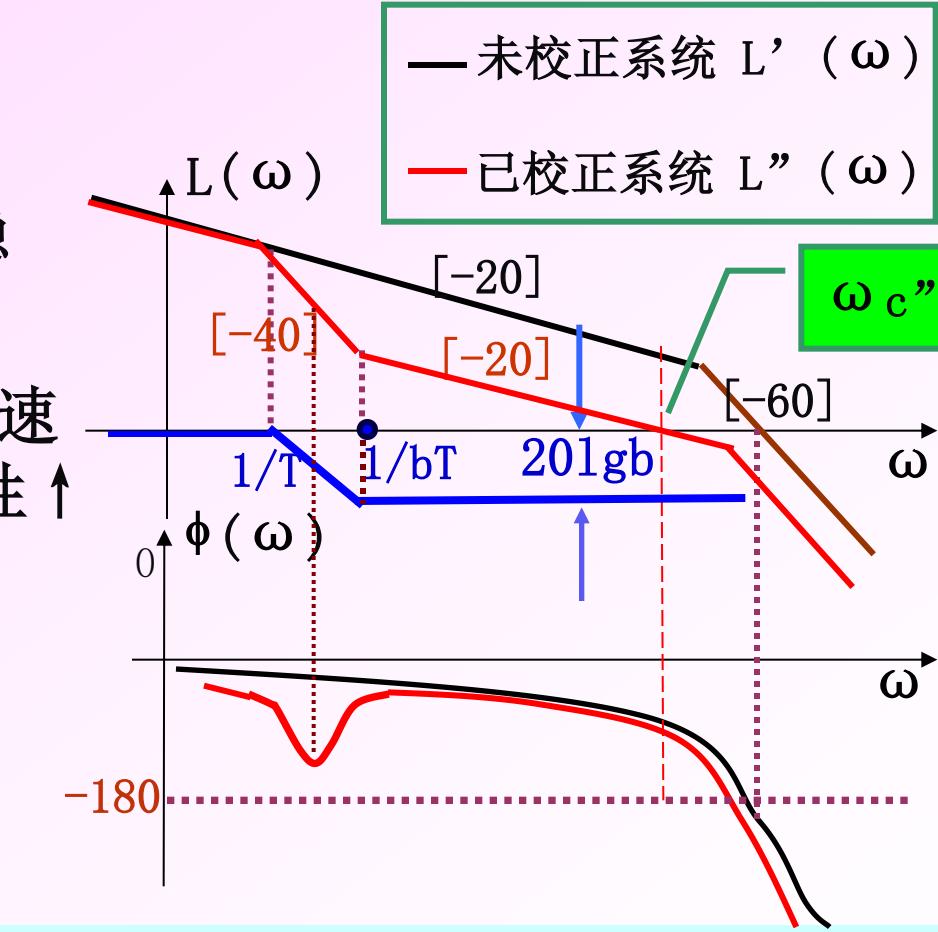
对系统性能影响:

牺牲快速性换取平稳性, 改善系统动态性能, 并提高抑制高频噪声的能力。

且

$$\frac{1}{bT} = \frac{1}{10} \omega_c''$$

$$20 \lg b = -L'(\omega_c'')$$



$$\gamma'' = \gamma(\omega_c'') + \varphi_c(\omega_c'') \quad \text{求 } \omega_c''$$

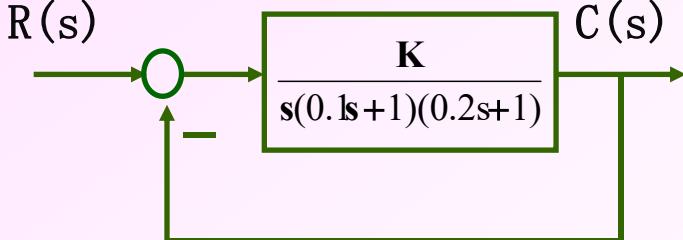
$\gamma'' \rightarrow$  希望值,  $\gamma \rightarrow$  原系统

$\varphi(\omega_c'')$ 为滞后网络产生的相角滞后, 一般取  $-6^\circ \sim -14^\circ$

[例] 设控制系统结构如图,  $G_0(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$

若要求校正后系统静态速度误差系数

$K=30(1/s)$ , 相角裕度  $\gamma' > 40^\circ$ , 幅值裕度  $h$  不小于  $10\text{dB}$ ,  $\omega_c' > 2.3\text{rad/s}$ , 试设计串联校正装置。



解: ①根据  $e_{ss}$  要求确定开环增益  $K$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = K = 30$$

$$\therefore G_0(s) = \frac{30}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$$

②计算未校正系统  $\gamma'$ ,  $h'$ ,  $\omega_c'$  等

补充截止频率近似求法

$$L'(\omega) = \begin{cases} 20 \lg \frac{30}{\omega} & \omega < 5 \\ 20 \lg \frac{30}{0.2\omega \times \omega} & 5 < \omega < 10 \\ 20 \lg \frac{30}{\omega \times 0.1\omega \times 0.2\omega} & \omega > 10 \end{cases}$$

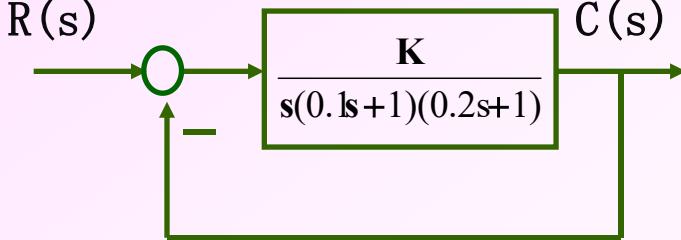
得  $\omega_c' = 12\text{rad/s}$ ,

$$\gamma' = 90^\circ - \arctan 0.1\omega_c' - \arctan 0.2\omega_c' = -27.6^\circ$$



[例] 设控制系统结构如图,  $G_0(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(0.2s+1)}$

若要求校正后系统静态速度误差系数  
 $K=30(1/s)$ , 相角裕度  $\gamma > 40^\circ$ , 幅值裕度  
 $h$  不小于  $10\text{dB}$ .  $\omega_c > 2.3\text{rad/s}$ , 试设计串  
 联校正装置。



选取滞后校正的原因:

1.  $\omega_c$  要求不高;
2. 相角裕度要求很高, 可证明选超前校正时  $a=100$  仍不满足要求。

故选取迟后校正网络.

③由  $\gamma'' = \gamma'(\omega_c'') + \varphi_c(\omega_c'')$  求  $\omega_c''$

相角滞后量取  $[-6^\circ - 14^\circ]$ ,

希望值

原系统在新  $\omega_c''$  相角裕度

$$\begin{aligned} \gamma'(\omega_c'') &= 40^\circ - (-6^\circ) = 90^\circ - \arctan(0.1\omega_c'') - \arctan(0.2\omega_c'') \\ &= 46^\circ \end{aligned}$$

得出  $\omega_c'' = 2.7\text{rad/s}$

也可取  $\omega_c''$

③由  $\gamma'' = \gamma'(\omega_c'') + \phi_c(\omega_c'')$  求  $\omega_c''$

$$\gamma'(\omega_c'') = 40^\circ - (-6^\circ) = 90^\circ$$

$$-\arctan(0.1\omega_c'')$$

$$-\arctan(0.2\omega_c'') = 46^\circ$$

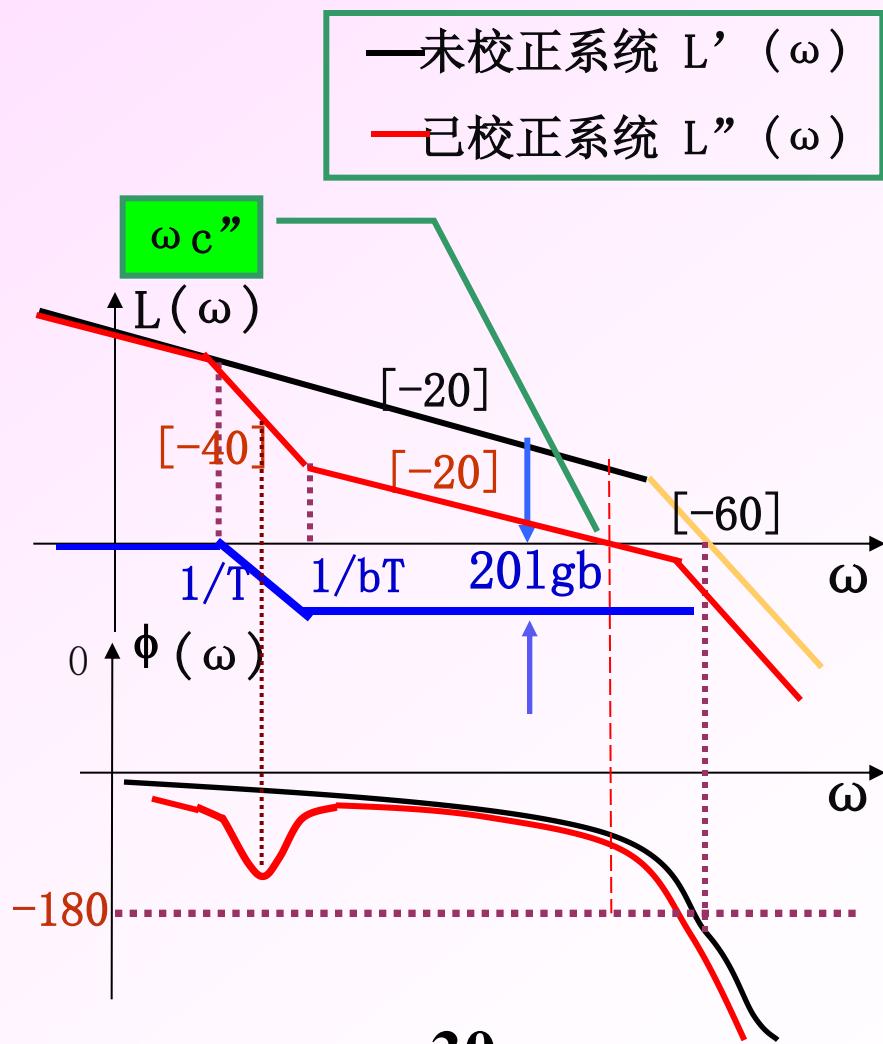
得出  $\omega_c'' = 2.7 \text{ rad/s}$

④求b, T

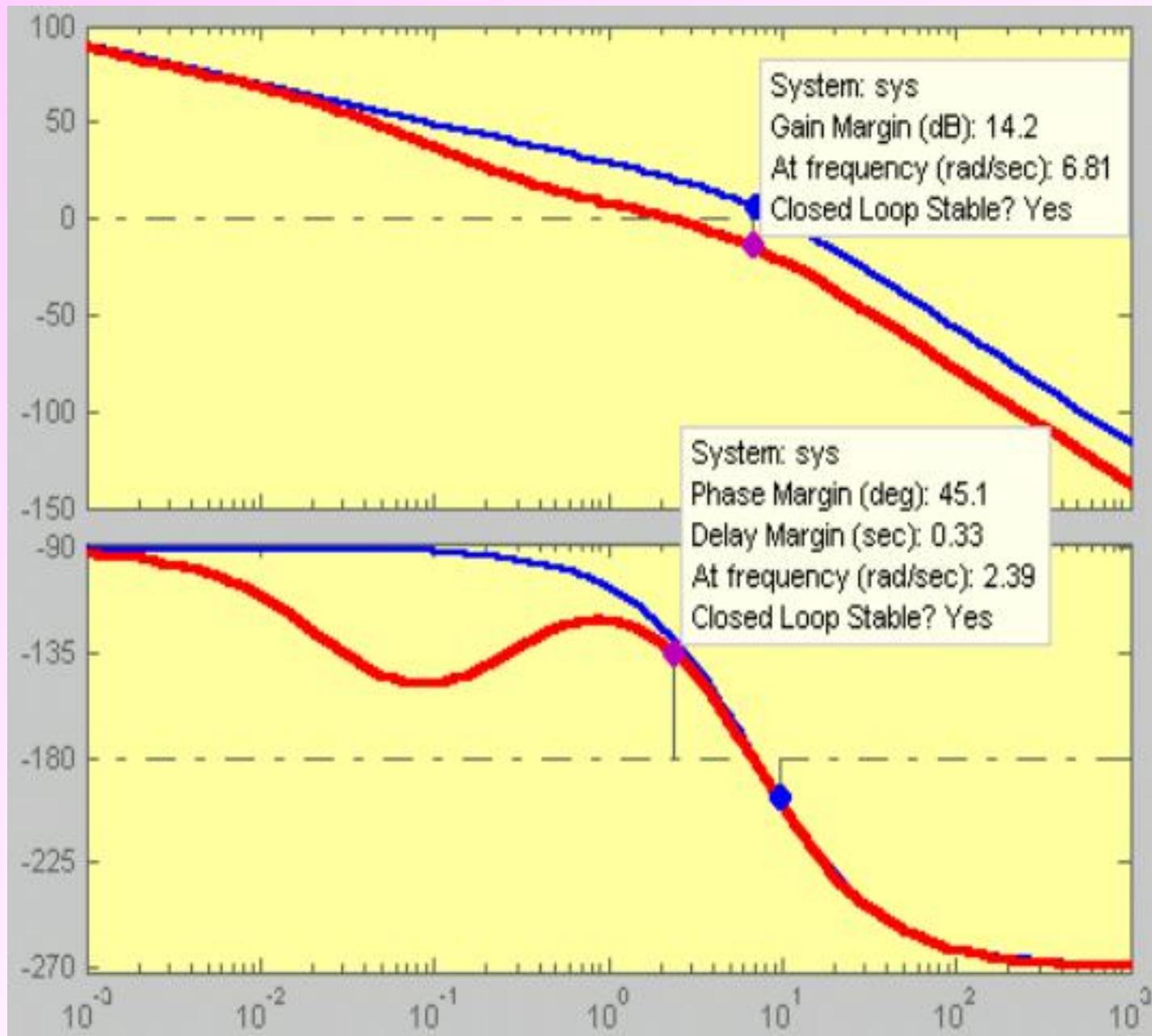
$$20\lg b = -L'(\omega_c'') \text{ 即 } 20\lg b = -20\lg \frac{30}{\omega_c'' \sqrt{1+(0.1\omega_c'')^2} \sqrt{1+(0.2\omega_c'')^2}}$$

$$b \approx 0.09$$

$$1/bT \approx 0.1\omega_c'' \quad T \approx 41$$



$$G_c(s) = \frac{1+bTs}{1+Ts} = \frac{1+3.7s}{1+41s}$$



$$\omega'_c = 12$$

$$\gamma' = -27.6^\circ$$

$$G_c(s) = \frac{3.7s+1}{41s+1}$$

$$\omega''_c = 2.807$$

$$\gamma'' = 40^\circ$$

$$h'' = 13\text{dB}$$

$$G(s) = \frac{30(1+3.7s)}{s(1+0.1s)(1+0.2s)(1+41s)}$$

求得  $\gamma''=41^{\circ}$   $h''=13(\text{dB})$   $\omega_c''=2.8$  满足要求

实现求  $R_1 R_2 C$

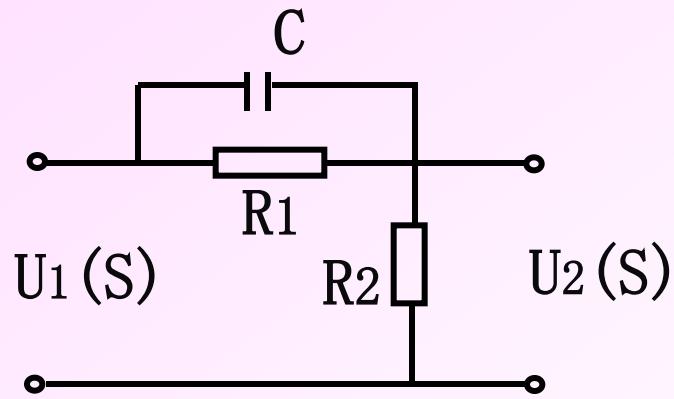
$$\begin{aligned} b &= R_2 / (R_1 + R_2) \\ T &= (R_1 + R_2) C \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{c} \\ \end{array} \right\} \begin{matrix} R_1 & R_2 & C \end{matrix}$$

⑤若不满足要求，则  $1/bT$  可取（0.1~0.25之间）或改变  $\varphi_c(\omega_c'')$  的估计值，重新计算。

# 两种校正网络的比较

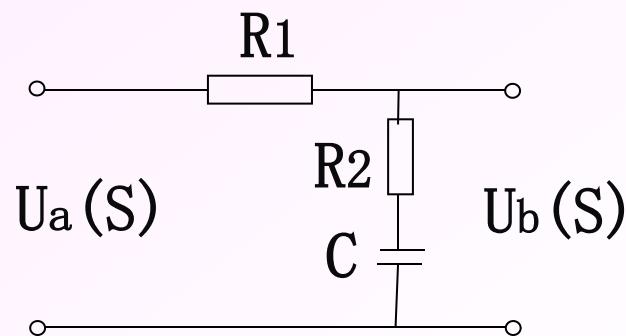
## 超前校正网络

$$aG_c(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts} \quad (a>1)$$



## 滞后校正网络

$$G_c(s) = \frac{1+bTs}{1+Ts} \quad (b>1)$$



超前校正：可使 $\omega_c'' \uparrow$ ,  $\gamma'' \uparrow$ , 抗干扰性↑；

滞后校正：可使 $\omega_c'' \downarrow$ ,  $\gamma'' \uparrow$ , 抗干扰性↑；

### 3. 迟后-超前校正-----可全面改善系统性能

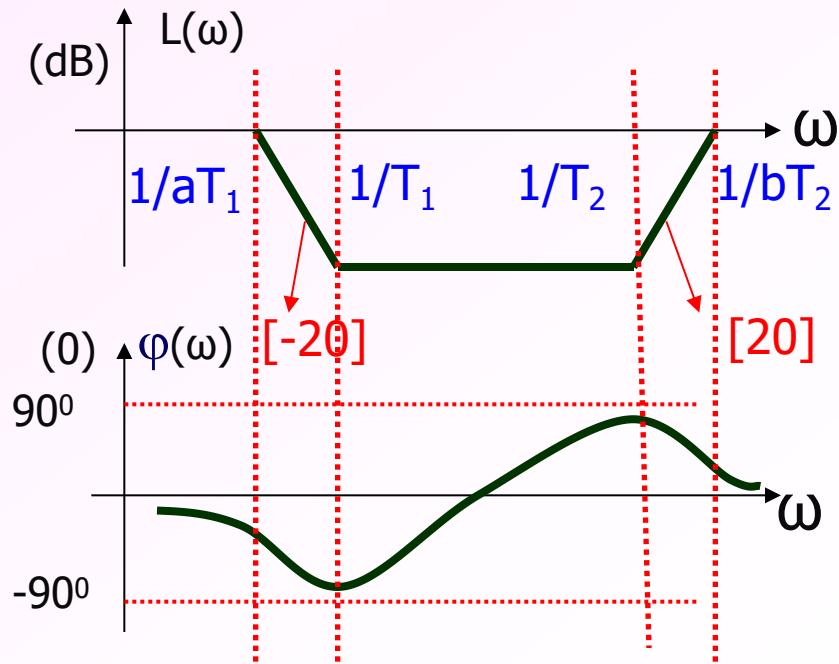
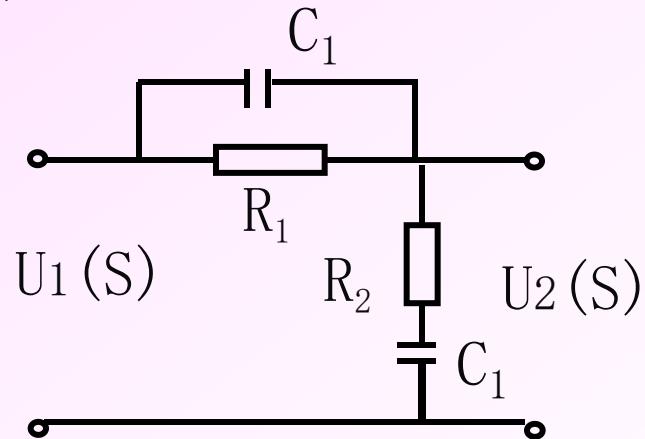
$$G_c(s) = \frac{T_1 s + 1}{a T_1 s + 1} \frac{T_2 s + 1}{b T_2 s + 1} \quad (ab = 1)$$

滞后环节

超前环节

其中,  $T_1 = R_1 C_1, T_2 = R_2 C_2$

作用: 将滞后效应设置在低频段, 超前校正设置在中频段, 以保证它们各自发挥其优势, 即用迟后校正使其稳态性能↑, 超前校正使其动态性能↑, 从而全面提高系统的动态和稳态性能。



## 设计步骤：

- 1) 根据稳态性能要求确定开环增益K;
- 2) 绘待校正系统的对数幅频特性, 求出待校正系统的截止频率 $\omega_c'$  和相角裕度 $\gamma'$  和 $h'$  (dB);
- 3) 从待校正系统对数幅频特性上, 选择斜率从 $-20\text{dB/dec}$ 变为 $-40\text{dB/dec}$ 的交接频率作为校正网络超前部分的交接频率 $\omega_1=1/T_1$ ;
- 4) 根据响应速度要求, 选择系统截止频率 $\omega_c''$  和校正网络衰减因子b,  $\omega_c''$  满足:  
$$-20\lg a + L'(\omega_c'') + 20\lg T_1 \omega_c'' = 0 \quad \text{这里 } T_1 = 1/\omega_1;$$
- 5) 由相角频率要求, 估算校正网络的滞后部分交接频率 $\omega_2$ ;
- 6) 验证已校正的各项性能指标 $\gamma''$  和 $h''$ .