



系统建模与滤波算法说明报告（含变量释义）

文件名：system_model_report.md

一、总体概述

本系统基于 IMU（惯性测量单元）与 GPS 数据融合，通过无迹卡尔曼滤波（UKF）实现对象在 NED 坐标系（北-东-下）下的位置、姿态与速度估计。

以下公式均使用 LaTeX 语法表示，并在每处给出公式中出现的变量含义。

二、坐标系定义与符号约定

常用符号（列向量均为列）：

$\mathbf{p} = [p_N, p_E, p_D]^T$	位置（NED）
$\mathbf{v}_b = [v_x, v_y, v_z]^T$	机体/手机坐标系下的速度
$\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T$	单位四元数表示的姿态
$\boldsymbol{\omega}_b = [P, Q, R]^T$	机体角速度（陀螺仪），单位：rad/s
$\mathbf{a}_b = [a_x, a_y, a_z]^T$	机体坐标系下的加速度（加速度计测量），单位：m/s ²
$\mathbf{y}_{gps} = [\text{lat}, \text{lon}, \text{alt}]^T$	GPS 测量（纬度/经度：deg，海拔：m）
$Y_0 = [\text{lat}_0, \text{lon}_0, \text{alt}_0]^T$	参考初始 GPS 点

三、IMU（陀螺仪与加速度计）数学建模

3.1 陀螺仪测量模型

$$\boldsymbol{\omega}_m = \boldsymbol{\omega}_b + \mathbf{b}_g + \mathbf{n}_g$$

变量含义：

- $\boldsymbol{\omega}_m$: 陀螺仪的测量输出向量 $[P_m, Q_m, R_m]^T$ (rad/s)。
- $\boldsymbol{\omega}_b$: 系统真实的机体角速度 $[P, Q, R]^T$ (rad/s)。
- \mathbf{b}_g : 陀螺仪零偏 (bias)，通常随时间缓慢漂移 (rad/s)。
- \mathbf{n}_g : 陀螺仪测量噪声，常假设为零均值高斯白噪声，协方差 $\mathbb{E}[\mathbf{n}_g \mathbf{n}_g^T] = R_g$ 。

注：若把 \mathbf{b}_g 视为未知常数或随机游走过程，可将其加入状态向量并估计。

3.2 加速度计测量模型

$$\mathbf{a}_m = \mathbf{a}_b + \mathbf{b}_a + \mathbf{n}_a$$

变量含义：

- \mathbf{a}_m : 加速度计测量 (机体坐标系)，单位 m/s²。
- \mathbf{a}_b : 真实机体加速度 (含惯性加速度和重力在某种表示下)。
- \mathbf{b}_a : 加速度计零偏 (bias)，单位 m/s²。
- \mathbf{n}_a : 加速度计测量噪声，通常为零均值高斯噪声，协方差 R_a 。

工程实践：

- 通常需把重力以合适方式从测量中分离或在状态方程中显式建模。代码中在预处理阶段对加速度做了常数校正来近似移除重力分量。
-

四、GPS 数学建模与坐标转换

GPS 原始输出：

$$\mathbf{y}_{gps} = \begin{bmatrix} \text{lat} \\ \text{lon} \\ \text{alt} \end{bmatrix}$$

变量含义：

- lat, lon: 纬度、经度 (单位: 度)。
- alt: 海拔高度 (单位: 米)。

4.1 GPS→NED (局部增量近似)

设参考点为 $Y_0 = [\text{lat}_0, \text{lon}_0, \text{alt}_0]^T$, 定义

$$d\text{lat} = (\text{lat} - \text{lat}_0) \cdot \frac{\pi}{180},$$
$$d\text{lon} = (\text{lon} - \text{lon}_0) \cdot \frac{\pi}{180},$$

$R(\phi) \approx$ 地球在纬度 ϕ 处的曲率半径 (m),

$$dN = R(\text{lat}_0) \cdot d\text{lat},$$
$$dE = R(\text{lat}_0) \cdot d\text{lon} \cdot \cos(\text{lat}_0),$$
$$dD = -(\text{alt} - \text{alt}_0).$$

变量含义补充：

- dN, dE, dD : 相对于参考点的北向、东向、下向增量 (单位: m)。
- $R(\phi)$: 地球半径或局部曲率半径函数, 常用 WGS84 近似公式计算。

重要修正: 高度 alt 是米, 不应进行角度转换 (即不要 `deg2rad(alt)`)。

4.2 NED→GPS (逆变换)

$$\text{lat} = \text{lat}_0 + \frac{dN}{R(\text{lat}_0)} \cdot \frac{180}{\pi},$$
$$\text{lon} = \text{lon}_0 + \frac{dE}{R(\text{lat}_0) \cos(\text{lat}_0)} \cdot \frac{180}{\pi},$$
$$\text{alt} = \text{alt}_0 - dD.$$

变量含义同上。

GPS 测量噪声模型：

$$\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(0, R)$$

- \mathbf{v}_k : GPS 测量噪声 (经度/纬度/高度的噪声) , 与 R 的单位一致 (注意角度 vs 米) 。
-

五、状态空间模型

5.1 状态向量

定义状态向量:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} p_N \\ p_E \\ p_D \\ q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

变量含义:

- p_N, p_E, p_D : 在 NED 框下的位置分量 (m) 。
- q_0, q_1, q_2, q_3 : 四元数分量, 单位四元数表示旋转 (体到惯性或惯性到体需约定) 。
- v_x, v_y, v_z : 机体坐标系下的速度分量 (m/s) 。

5.2 连续时间过程方程

位置传播:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{C}_{ib}^T \mathbf{v}_b$$

变量含义:

- \mathbf{C}_{ib} : 从机体坐标系 (body) 到惯性/NED 坐标系 (inertial) 的方向余弦矩阵 (DCM) , 由四元数 \mathbf{q} 计算得到; 若 \mathbf{v}_b 在机体系, 则通过 \mathbf{C}_{ib}^T 转为惯性系下的位置变化。

四元数传播：

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}_b) \mathbf{q}$$

其中

$$\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\omega}_b) = \begin{bmatrix} 0 & -P & -Q & -R \\ P & 0 & R & -Q \\ Q & -R & 0 & P \\ R & Q & -P & 0 \end{bmatrix}$$

变量含义：

- $\boldsymbol{\omega}_b = [P, Q, R]^T$: 机体角速度。
- $\dot{\mathbf{q}}$: 四元数时间导数。

速度传播（机体框）：

$$\dot{\mathbf{v}}_b = \mathbf{a}_m - (\boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{r}_{sensor})$$

变量含义：

- \mathbf{a}_m : 加速度计测量（通常已去重力或在测量中保留重力，需一致）。
- \mathbf{r}_{sensor} : 传感器相对于机体参考点（如车体质心或车轮坐标）的位移向量（m）。
- $\boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{r}_{sensor}$: 角速度引起的线速度项（Coriolis/旋转相关项）。

5.3 离散化（显式欧拉）

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \Delta t + \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(0, Q)$$

变量含义：

- \mathbf{u}_k : 输入（传感器测量，如 $\mathbf{a}_m, \boldsymbol{\omega}_m$ ）。
- Δt : 采样周期（代码中为 0.1 s）。
- Q : 过程噪声协方差矩阵。

四元数归一化 (数值稳定性) :

$$\mathbf{q} \leftarrow \frac{\mathbf{q}}{\|\mathbf{q}\|}$$

六、观测模型 (GPS)

观测方程:

$$\mathbf{y}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k$$

$$h(\mathbf{x}) = Y_0 + \text{NED2GPS}(\mathbf{p})$$

变量含义:

- \mathbf{y}_k : GPS 测量向量 $[\text{lat}, \text{lon}, \text{alt}]^T$ 。
 - $h(\mathbf{x})$: 从状态映射到 GPS 空间的非线性函数 (先取 NED 位置后转换为经纬度增量并加回基准点)。
 - \mathbf{v}_k : 测量噪声, 协方差矩阵为 R 。
-

七、无迹卡尔曼滤波 (UKF) 数学原理 (含变量释义)

设状态维度为 n , 后验估计为 \mathbf{x} , 协方差为 P 。

7.1 Sigma 点生成

Cholesky 分解:

$$\mathbf{S} = \text{chol}(nP)$$

$$\chi_i = \begin{cases} \mathbf{x} + \mathbf{S}_i, & i = 1, \dots, n \\ \mathbf{x} - \mathbf{S}_{i-n}, & i = n+1, \dots, 2n \end{cases}$$

变量含义：

- \mathbf{S}_i : Cholesky 根矩阵 \mathbf{S} 的第 i 行（或列，取决于实现）。
- χ_i : 第 i 个 sigma 点（状态空间向量）。

权重（等权实现）：

$$W_i = \frac{1}{2n}$$

7.2 时间更新（预测）

$$\chi_i^- = f(\chi_i, \mathbf{u}_k)$$

$$\hat{\mathbf{x}}^- = \sum_{i=1}^{2n} W_i \chi_i^-$$

$$P^- = \sum_{i=1}^{2n} W_i (\chi_i^- - \hat{\mathbf{x}}^-) (\chi_i^- - \hat{\mathbf{x}}^-)^T + Q$$

变量含义：

- χ_i^- : 经过过程模型 f 传播后的 sigma 点。
- $\hat{\mathbf{x}}^-$ 、 P^- : 先验均值与先验协方差。
- Q : 过程噪声协方差。

7.3 测量更新

将先验 sigma 点映射到观测空间：

$$\gamma_i = h(\chi_i^-)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^{2n} W_i \gamma_i$$

$$P_y = \sum_{i=1}^{2n} W_i (\gamma_i - \hat{\mathbf{y}})(\gamma_i - \hat{\mathbf{y}})^T + R$$

$$P_{xy} = \sum_{i=1}^{2n} W_i (\chi_i^- - \hat{\mathbf{x}}^-)(\gamma_i - \hat{\mathbf{y}})^T$$

$$K = P_{xy} P_y^{-1}$$

$$\mathbf{x}^+ = \hat{\mathbf{x}}^- + K(\mathbf{y}_{meas} - \hat{\mathbf{y}})$$

$$P^+ = P^- - K P_y K^T$$

变量含义：

- γ_i : 第 i 个 sigma 点在观测空间的映射。
- $\hat{\mathbf{y}}$: 预测观测均值。
- P_y : 预测观测协方差矩阵 (包含测量噪声 R) 。
- P_{xy} : 状态-观测交叉协方差。
- K : 卡尔曼增益。
- \mathbf{y}_{meas} : 实际测量值 (GPS) 。

注：代码中为数值稳定使用 $\text{pinv}(P_y)$ 或伪逆替代逆矩阵。

八、噪声与协方差（变量释义）

示例（代码内给定）：

$$P_0 = \text{diag}(100, 100, 100, 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-5}, 10^{-5}, 0.1, 0.1, 0.1)$$

$$R = \text{diag}(1.1964 \times 10^{-12}, 1.1964 \times 10^{-12}, 0.0947)$$

含义：

- P_0 : 初始状态估计的协方差矩阵（对角给出各分量方差）。
- R : 测量噪声协方差矩阵。前两项对应经度/纬度的方差（需注意单位：度或弧度），第三项对应高度（米）的方差。

九、重要变量总表（方便查阅）

- $\mathbf{p} = [p_N, p_E, p_D]^T$: 位置 (m)
- $\mathbf{v}_b = [v_x, v_y, v_z]^T$: 机体速度 (m/s)
- $\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T$: 四元数 (单位四元数)
- $\boldsymbol{\omega}_b = [P, Q, R]^T$: 角速度 (rad/s)
- $\mathbf{a}_m, \boldsymbol{\omega}_m$: IMU 测量 (加速度、角速度)
- $\mathbf{b}_a, \mathbf{b}_g$: 加速度计 / 陀螺仪偏置
- Q : 过程噪声协方差
- R : 观测噪声协方差
- n : 状态维度 (本例为 10)
- χ_i, γ_i : UKF 中的 sigma 点 (状态空间与观测空间)

十、改进建议

1. 四元数每步归一化。

2. 将 IMU 偏置加入状态向量。
 3. 使用带权参数的 UKF。
 4. 校验 GPS 单位一致性。
 5. 修复 `gps2ned` 高度角度错误。
 6. 对 P 做正定修正以避免数值不稳定。
-

十一、总结

本文档对每个主要公式中的变量都加上了详细释义，便于在实现和验证算法时逐项核对单位与意义。如需我把此 Markdown 导出为可下载文件（`system_model_report.md`），我可以立即将其写入并给出下载链接。