Hafta 03

Grafikle Çözüm Yöntemi ve Çözüme Uygun Bölge

Doç. Dr. Erhan Çene

02/10/2025

Temel Kavramlar

- **Çözüm:** Bir doğrusal programlama probleminin kısıtlayıcı fonksiyonlarının hepsini birden sağlayan karar değişkenlerinin ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) oluşturduğu kümeye çözüm denir.
- **Uygun çözüm:** Negatif olmama koşulunu sağlayan çözüme uygun çözüm denir.
- **En iyi çözüm:** Amaç fonksiyonuna en iyi değeri (en küçük veya en büyük) sağlayan uygun çözüme en iyi çözüm denir.

Grafik Çözüm Yöntemi

Grafik Çözüm Yöntemi

- İki karar değişkenli doğrusal programlama problemlerini grafik yöntemle çözülebilir.
- Üç ve üçten fazla karar değişkeni olduğunda grafik yöntem ile çözüm çok kolay olmamaktadır. Bu durumda çözüm ilerleyen haftalarda göreceğimiz üzere simpleks yöntem ile çözülecektir.

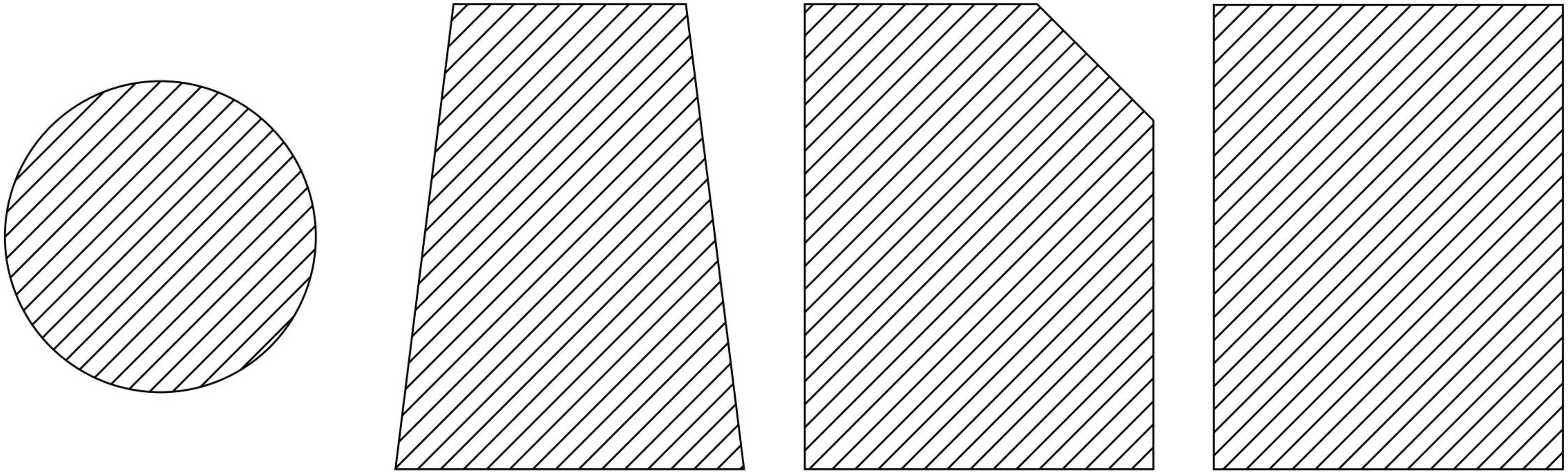
Konveks Alan

Konveks Alan

- Grafiksel yöntemle çözülen DP problemlerinde optimum çözüm var olduğunda, mümkün çözüm bölgesi konveks (dışbükey) bir alan olarak ortaya çıkmaktadır.
  - Geometrik anlamda konveks (dışbükey) bir alan, kenarlarında çukurlaşmalar olmayan ve içinde boşluklar olmayan bir alandır.
  - Diğer bir ifadeyle konveks bir alan içerisinde seçilen herhangi iki noktayı birleştiren doğrunun tamamı bu alan içerisinde kalır.
  - Daire, yamuk, kare konveks bir alandır.

Dışbükey (Konveks) örnekler

- Konveks Alanlara Örnekler



konveks

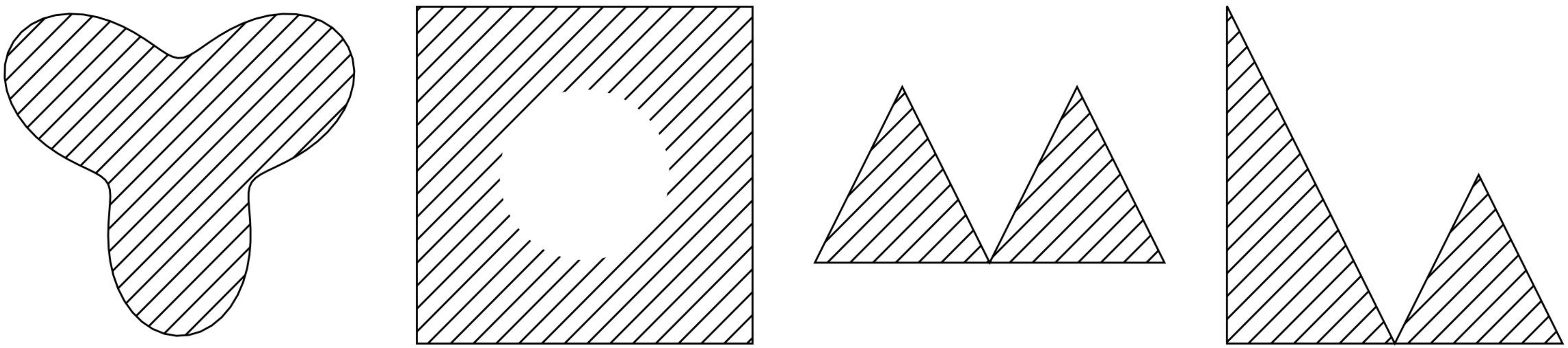
Konkav Alan

Konkav Alan

- Bir DP probleminin belirlediği mümkün çözüm bölgesi, konkav (içbükey) bir alan oluşturuyorsa bu problemin çözümü yoktur.
  - Çünkü konkav bir alan içinde seçilen herhangi iki noktayı birleştiren doğrunun tamamı bu alan içinde kalmamaktadır.

İçbükey (Konkav) örnekler

- Konkav Alanlara Örnekler



konkav

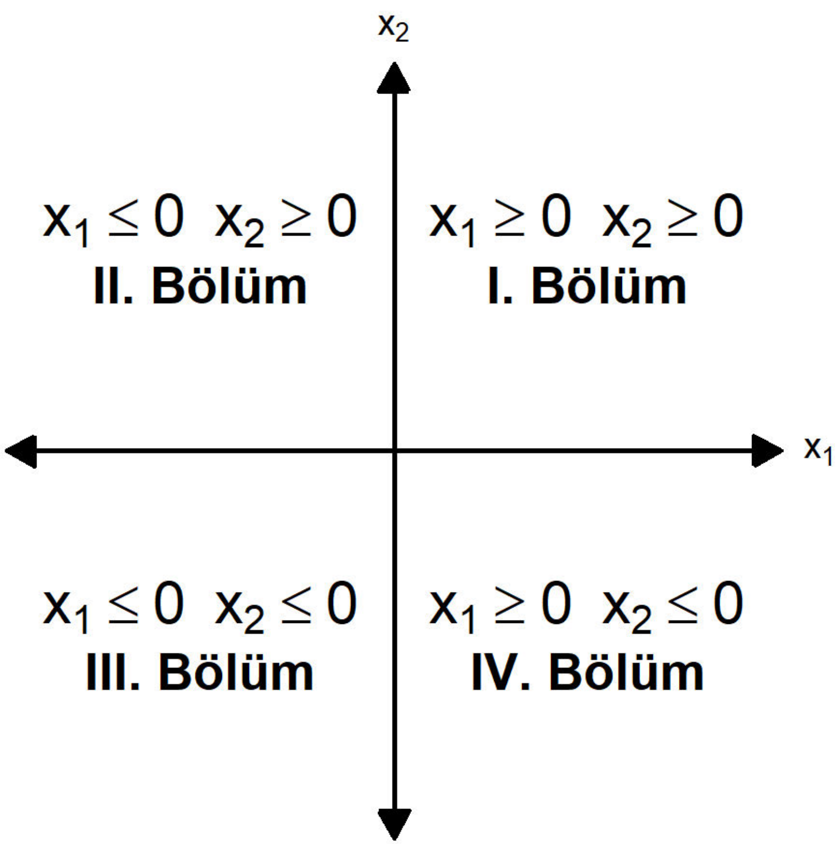
Grafik Çözüm Yönteminin Aşamaları

- Bir doğrusal programlama probleminin grafik çözümünde aşağıdaki adımlar izlenir:

1. Değişkenlerin koordinat sisteminin yatay ve dikey eksenlerine yerleştirilmesi,
2. Kısıtlayıcı fonksiyonların grafiğinin çizilmesi,
3. Uygun çözüm bölgesinin belirlenmesi,
4. En iyi çözümün araştırılması.

1) Değişkenlerin Koordinat Sistemine Yerleştirilmesi

1-Değişkenlerin Koordinat Sistemine Yerleştirilmesi



- Problemimiz iki değişkenli olduğundan $x_1 \geq 0$ yatay eksende ve $x_2 \geq 0$ dikey eksende gösterilir.
- Negatif olmama kısıtından dolayı genellikle $x_1 \geq 0$ ve $x_2 \geq 0$ olduğundan ilk önce, diğer kısıtlara bakılmaksızın uygun çözüm belgesi birinci bölgenin içinde yer alacaktır.

2) Kısıtlayıcı fonksiyonların grafiğinin çizilmesi,

2-Kısıtlayıcı fonksiyonların grafiğinin çizilmesi

- Doğrusal eşitsizliklerin ve kısıtlayıcıların grafiğini çizmek için iki adım vardır:

  1) Doğrusal eşitsizlikler, eşitlikmiş gibi kabul edilerek, bunların sınırlarını gösteren doğrular çizilir.

  2) Doğrunun hangi tarafının eşitsizlikle verilen koşulu sağladığı belirlenir.

- Adımlara devam etmeden önce şu ana kadar gördüklerimizi bir örnek üzerinde görelim.

Örnek 1 (1)

Örnek 1: Teyp-Radyo

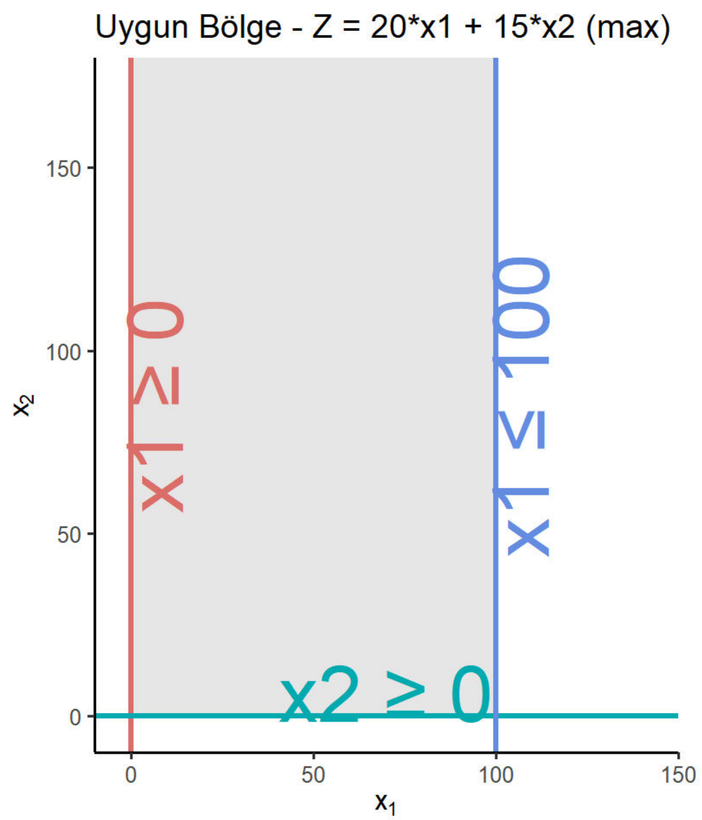
Amaç fonksiyonu

- $max \quad z = 20x_1 + 15x_2$

Kısıtlayıcılar

- $x_1 \leq 100$ (teyp)
- $x_2 \leq 100$ (radyo)
- $50x_1 + 35x_2 \leq 6000$ (nakit durumu)
- $20x_1 + 15x_2 \geq 2000$ (aktif/pasif oranı)
- $x_1 \, , x_2 \geq 0$ olduğundan optimum çözüm sadece birinci bölgede olmalıdır.

1. kısıt $x_1 \leq 100$



Örnek 1 (2)

Örnek 1: Teyp-Radyo

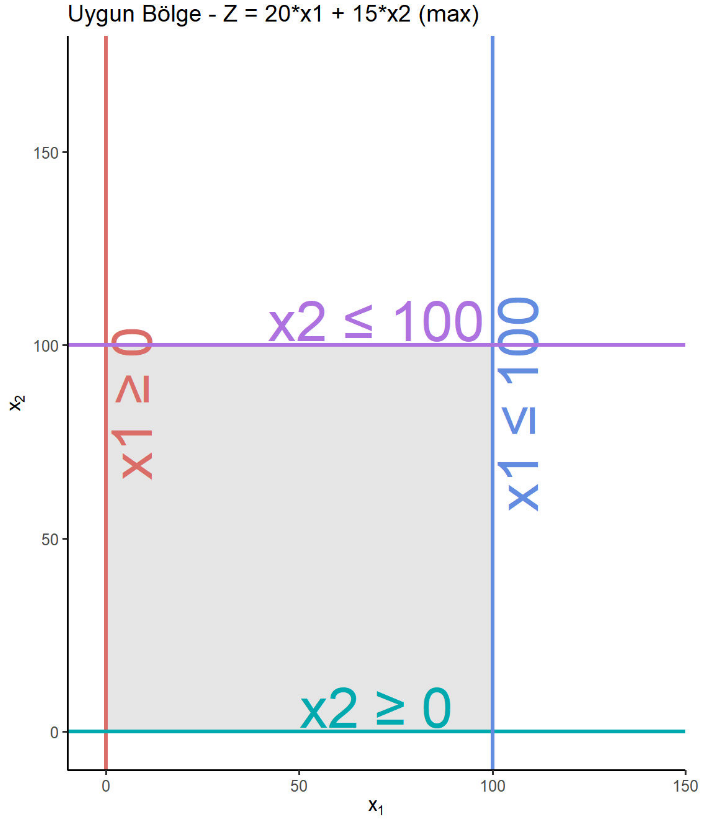
Amaç fonksiyonu

- $max \quad z = 20x_1 + 15x_2$

Kısıtlayıcılar

- $x_1 \leq 100$ (teyp)
- $x_2 \leq 100$ (radyo)
- $50x_1 + 35x_2 \leq 6000$ (nakit durumu)
- $20x_1 + 15x_2 \geq 2000$ (aktif/pasif oranı)
- $x_1 , x_2 \geq 0$ olduğundan optimum çözüm sadece birinci bölgede olmalıdır.

1. kısıt $x_1 \leq 100$ ve 2. kısıt $x_2 \leq 100$



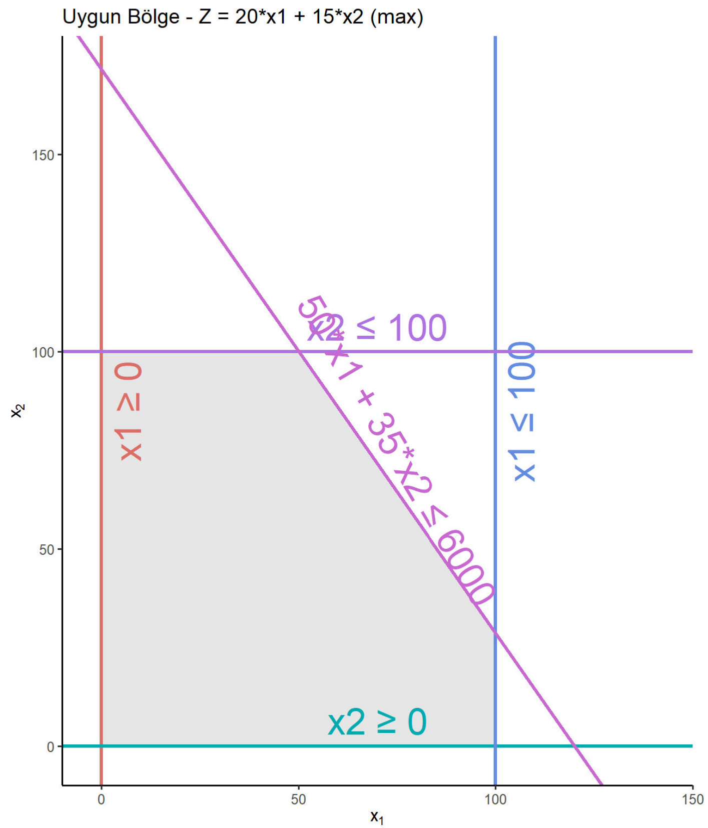
Örnek 1 (3)

Örnek 1: Teyp-Radyo

3. kısıt

- $50x_1 + 35x_2 \leq 6000$ için doğru denklemini çizebilmek için, doğrunun eksenleri kestiği yerleri belirlemeliyiz.
- Denklemde $x_1 = 0 \Rightarrow 35x_2 = 6000 \Rightarrow x_2 = \frac{6000}{35} = 171.4286$ ve
- Denklemde $x_2 = 0 \Rightarrow 50x_1 = 6000 \Rightarrow x_1 = \frac{6000}{50} = 120$
- Doğru $(0, 171.4286)$ ve $(120, 0)$ noktalarından geçmeli.

1. kısıt $x_1 \leq 100$, 2. kısıt $x_2 \leq 100$ ve 3. kısıt $50x_1 + 35x_2 \leq 6000$



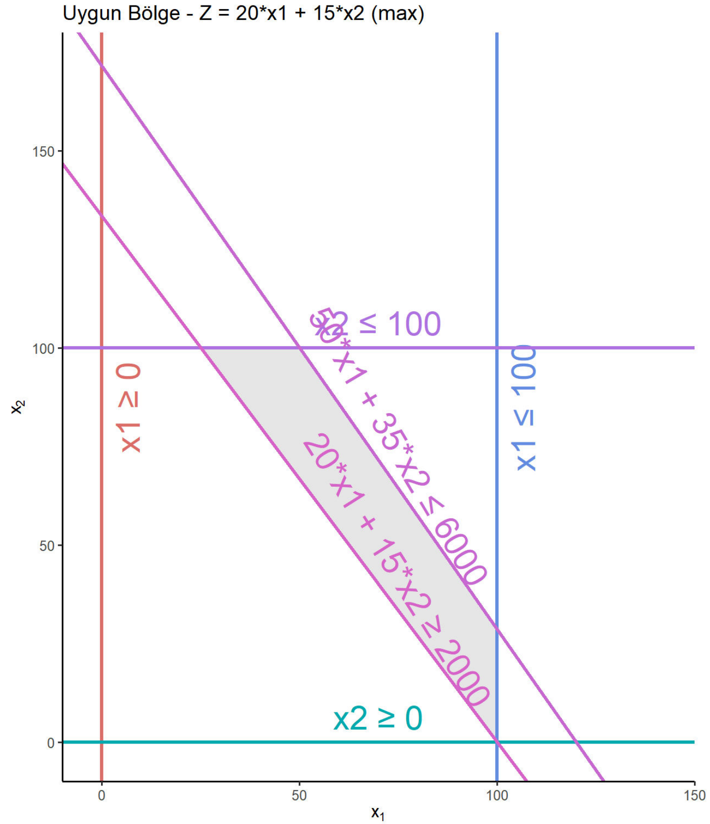
Örnek 1 (4)

Örnek 1: Teyp-Radyo

4. kısıt

- $20x_1 + 15x_2 \geq 2000$ için doğru denklemini çizebilmek için, doğrunun eksenleri kestiği yerleri belirlemeliyiz.
- Denklemde $x_1 = 0 \Rightarrow 15x_2 = 2000 \Rightarrow x_2 = \frac{2000}{15} = 133.3333$ ve
- Denklemde $x_2 = 0 \Rightarrow 20x_1 = 2000 \Rightarrow x_1 = \frac{2000}{20} = 100$
- Doğru $(0, 133.3333)$ ve $(100, 0)$ noktalarından geçmeli.

1. kısıt $x_1 \leq 100$, 2. kısıt $x_2 \leq 100$,
3. kısıt $50x_1 + 35x_2 \leq 6000$ ve
4. kısıt $20x_1 + 15x_2 \geq 2000$



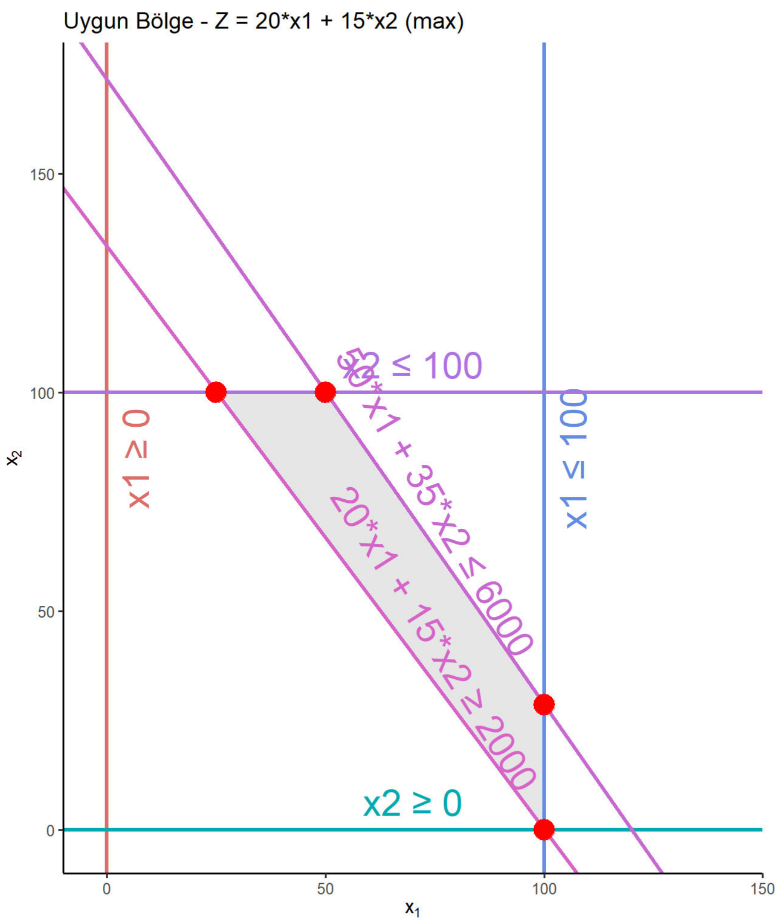
3) Uygun çözüm bölgesinin belirlenmesi

3-Uygun çözüm bölgesinin belirlenmesi

- Uygun bölgenin sınırları, kısıtlayıcılarla ifade edilen ve çizilen doğrusal eşitsizliklerin grafiği ile belirlenir.
- Tüm kısıtlayıcı koşullarının uygun düştüğü bölgenin ortak kesişim yeri uygun bölgedir.
- Uygun bölgenin sınırları doğru çizgileridir. Bu doğrular, köşe noktası olarak bilinen noktalarda kesişir.
- Doğrusal programlamanın en önemli özelliklerinden birisi optimal çözümün her zaman uygun bölgenin bir köşe noktasında yer almasıdır.

Örnek 1 (5)

Örnek 1: Teyp-Radyo



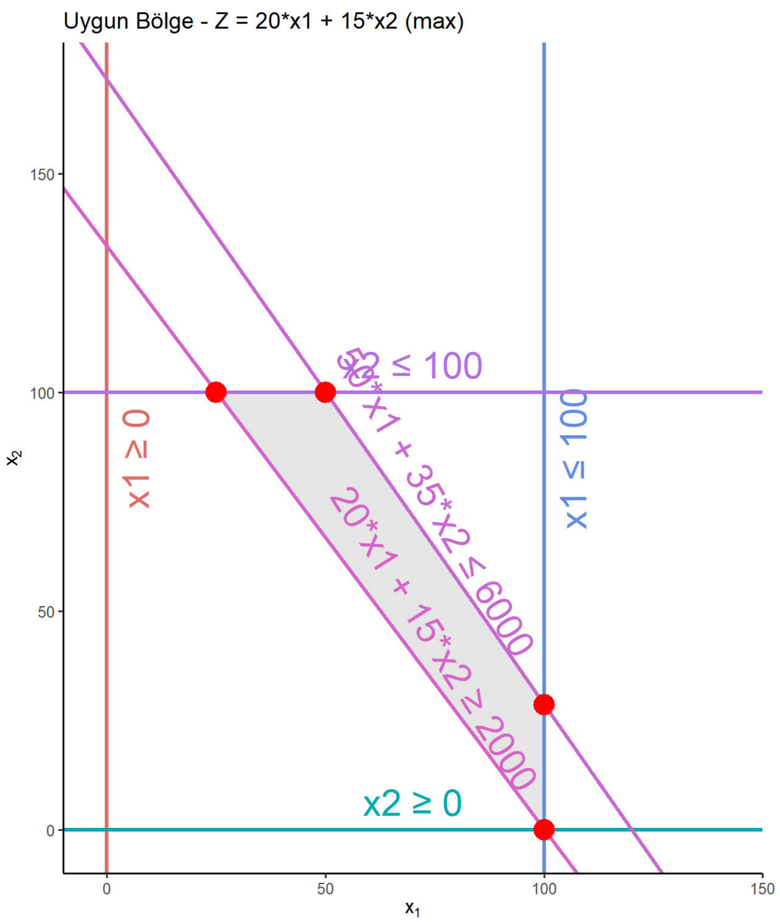
- Kırmızı ile gösterilen aday noktaların koordinatlarını bulmak için her denklem çiftinin kesişim noktalarını bulmak gerekir.

- $20x_1 + 15x_2 = 2000$ ve $x_2 = 100$ denklemlerinin kesişim noktası $20x_1 + 15 \cdot 100 = 2000 \Rightarrow$ $20x_1 = 500$ ve $x_1 = 25$ olur.

- $50x_1 + 35x_2 = 6000$ ve $x_2 = 100$ denklemlerinin kesişim noktası $50x_1 + 35 \cdot 100 = 6000 \Rightarrow$ $50x_1 = 2500$ ve $x_1 = 50$ olur.

Örnek 1 (6)

Örnek 1: Teyp-Radyo



- $20x_1 + 15x_2 = 2000$, $x_1 = 100$ ve $x_2 = 0$ denklemlerinin kesişim noktası $x_1 = 100$ ve $x_2 = 0$ olur.
- $50x_1 + 35x_2 = 6000$ ve $x_1 = 100$ denklemlerinin kesişim noktası $50 \cdot 100 + 35x_2 = 6000 \Rightarrow 35x_2 = 1000$ ve $x_2 = 28.57$ olur.
- Bu durumda tüm aday noktalar $(25, 100)$,$(50, 100)$,$(100, 0)$ ve $(100, 28.57)$ olur.

4) En iyi çözümün araştırılması.

4-En iyi çözümün araştırılması

- En iyi çözüm ise aday noktalardaki değişken değerleri amaç fonksiyonuna yazılarak bulunur.
- Bir en çoklama (maksimizasyon) probleminde amaç fonksiyonunu en büyük yapan, bir en azaltma (minimizasyon) probleminde ise amaç fonksiyonunu en küçük yapan aday nokta, optimum çözüme sahip noktadır.

Örnek 1 (7)

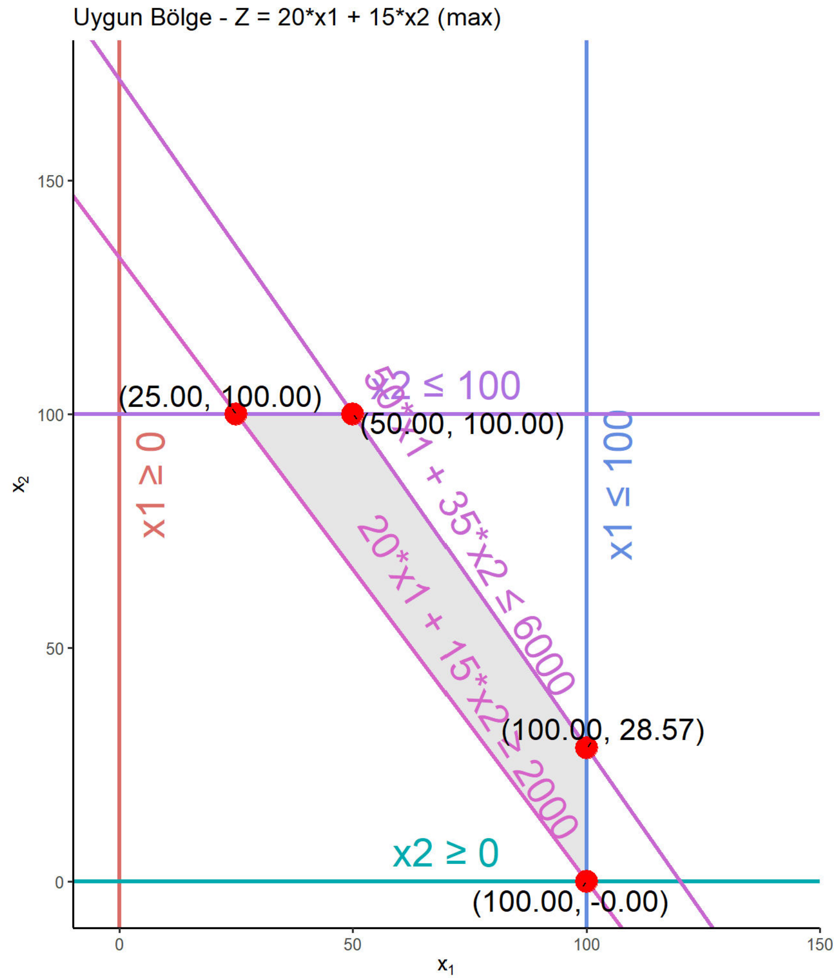
Örnek 1: Teyp-Radyo

- Her bir aday nokta, amaç fonksiyonunda yerine yazılarak amaç fonksiyonunun değerini maksimum yapan nokta bulunmalıdır.

- Amaç fonksiyonu
  $max \quad z = 20x_1 + 15x_2$ ve

- Birinci aday nokta, $(25, 100)$ olduğundan,

$$
\begin{aligned}
z_{(25,100)} &= 20 \cdot 25 + 15 \cdot 100 \\
&= 500 + 1500 = 2000
\end{aligned}
$$



Örnek 1 (8)

Örnek 1: Teyp-Radyo

- İkinci aday nokta $(50, 100)$ olduğundan,

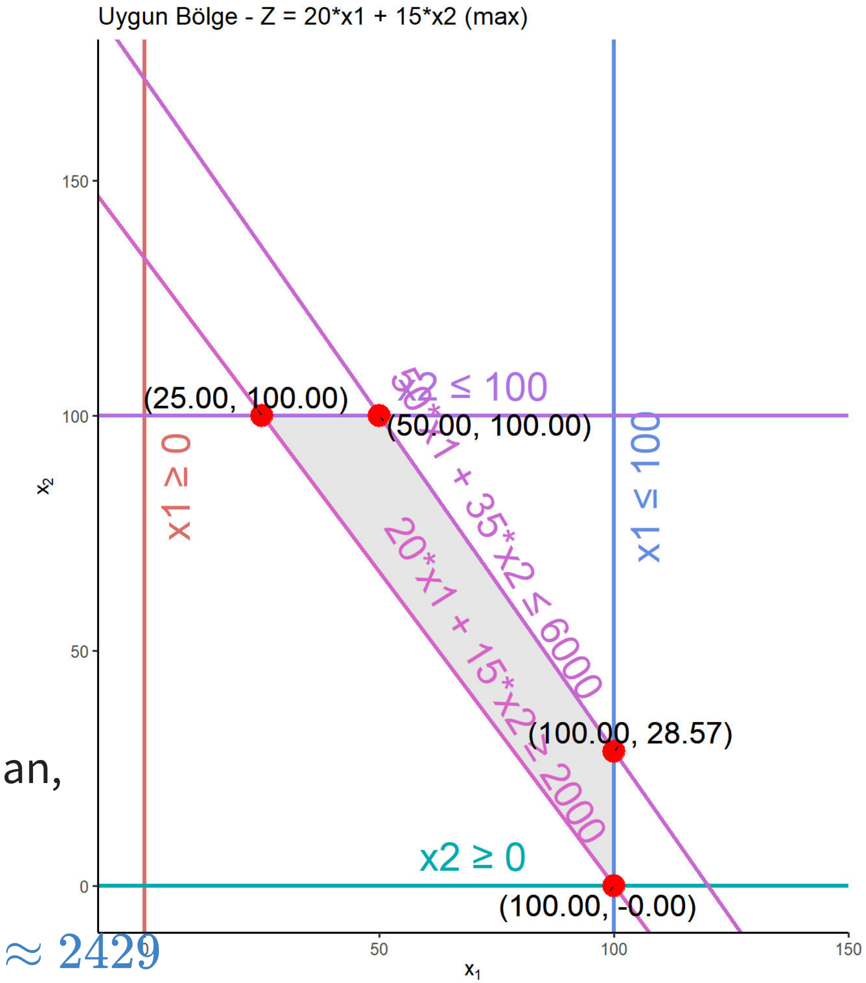
$$z_{(50,100)} = 20 \cdot 50 + 15 \cdot 100$$
$$= 1000 + 1500 = 2500$$

- Üçüncü aday nokta $(100, 0)$ olduğundan,

$$z_{(100,0)} = 20 \cdot 100 + 15 \cdot 0$$
$$= 2000 + 0 = 2000$$

- Dördüncü aday nokta $(100, 28.57)$ olduğundan,

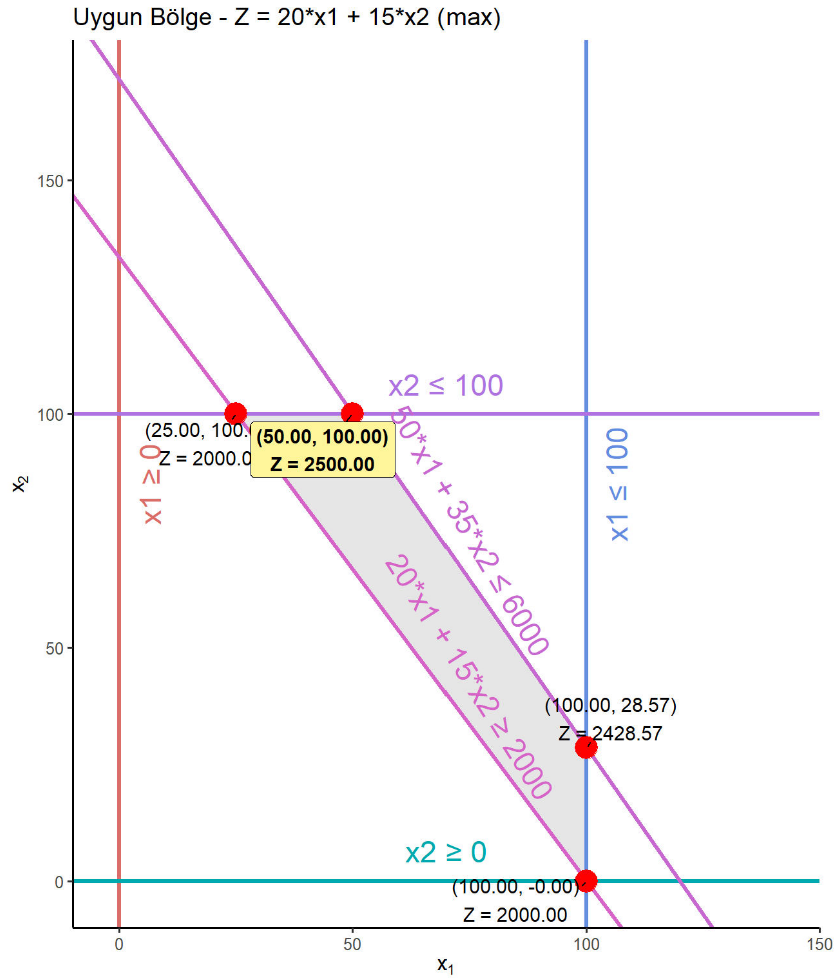
$$z_{(100,0)} = 20 \cdot 100 + 15 \cdot 28.57$$
$$= 2000 + 428.5714 = 2428.5714 \approx 2429$$



Örnek 1 (9)

Örnek 1: Teyp-Radyo

- $(50, 100)$ noktası aday noktalar arasından 2500 ile amaç fonksiyonunu maksimum yapan değer olduğundan optimum noktadır.



Örnek 2 (1)

Örnek 2

- Bir doğrusal programlama problemine ilişkin, amaç fonksiyonu ve kısıtlar aşağıda verilmiştir. Bu problemin optimum noktasını grafiksel yöntem ile bulun.

Amaç fonksiyonu

- $max \quad z = 6x_1 + 8x_2$

Kısıtlayıcılar

- $7x_1 + 3x_2 \leq 21$
- $6x_1 + 7x_2 \leq 42$
- $x_1 \leq 3$
- $x_2 \leq 4$

Negatif olmama koşulu

- $x_1 \, , x_2 \geq 0$

Çözüm:

1. kısıt $7x_1 + 3x_2 \leq 21$ denkleminin eksenleri kestiği yerler

- $x_1 = 0 \Rightarrow 3x_2 = 21 \Rightarrow x_2 = \frac{21}{3} = 7$
- $x_2 = 0 \Rightarrow 7x_1 = 21 \Rightarrow x_1 = \frac{21}{7} = 3$
- Doğru $(0, 7)$ ve $(3, 0)$ noktalarından geçmeli.

2. kısıt $6x_1 + 7x_2 \leq 42$ denkleminin eksenleri kestiği yerler

- $x_1 = 0 \Rightarrow 7x_2 = 42 \Rightarrow x_2 = \frac{42}{7} = 6$
- $x_2 = 0 \Rightarrow 6x_1 = 42 \Rightarrow x_1 = \frac{42}{6} = 7$
- Doğru $(0, 6)$ ve $(7, 0)$ noktalarından geçmeli.

Örnek 2 (2)

Örnek 2

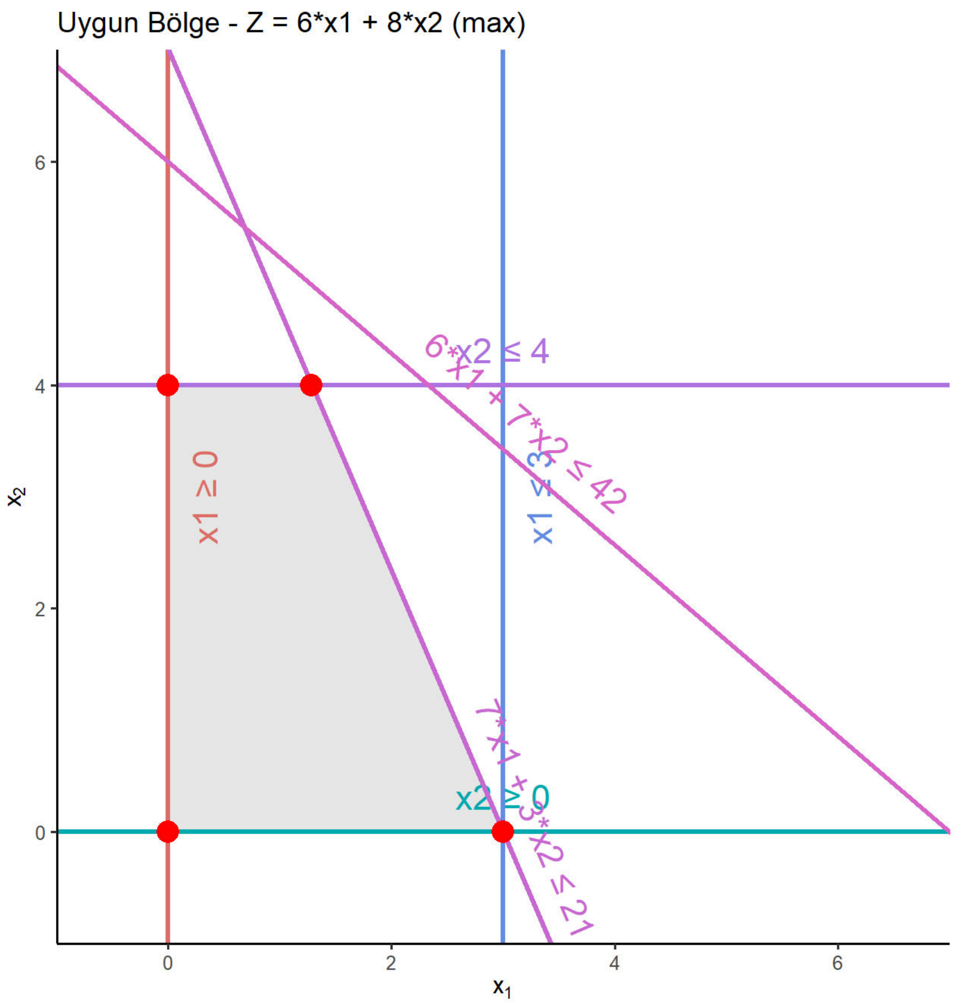
Çözüm (Devam):

3. kısıt $x_1 \leq 3$ denklemi dikey bir doğru belirtir.

4. kısıt $x_2 \leq 4$ denklemi yatay bir doğru belirtir.

$x_1 \geq 0$ ve $x_2 \geq 0$ ise çözümün birinci bölgede aranacağını gösterir.

Tüm bu kısıtlara uygun grafik ve optimuma aday noktalar sağ tarafta verilmiş grafikteki gibi olur.



Örnek 2 (3)

Örnek 2

Çözüm (Devam):

- Kırmızı ile gösterilen aday noktaların koordinatlarını bulmak için ilgili denklem çiftinin kesişim noktalarını bulmak gerekir.
- Aday noktaların koordinatları bulunduktan sonra $z = 6x_1 + 8x_2$ amaç fonksiyonunda yerine yazılarak en büyük değer aranır.
- $x_1 = 0$ ve $x_2 = 4$ denklemlerinin kesişim noktası
  - $(0, 4)$ noktası olur.
  - $(0, 4)$ noktasının amaç fonksiyondaki değeri $z = 6 \cdot 0 + 8 \cdot 4 = 32$ dir.
- $x_2 = 4$ ve $7x_1 + 3x_2 = 21$ denklemlerinin kesişim noktası
  - $7x_1 + 3 \cdot 4 = 21 \Rightarrow 7x_1 = 9$ ve $x_1 = \frac{9}{7} = 1.285714$ olur.
  - $(1.285714, 4)$ noktasının amaç fonksiyondaki değeri $z = 6 \cdot 1.285714 + 8 \cdot 4 = 39.714$ tür.
- $x_1 = 0$ ve $x_2 = 0$ noktalarının kesişimi
  - $(0, 0)$ noktası olur.
  - $(0, 0)$ noktasının amaç fonksiyondaki değeri $z = 6 \cdot 0 + 8 \cdot 0 = 0$ dır.

Örnek 2 (4)

Örnek 2

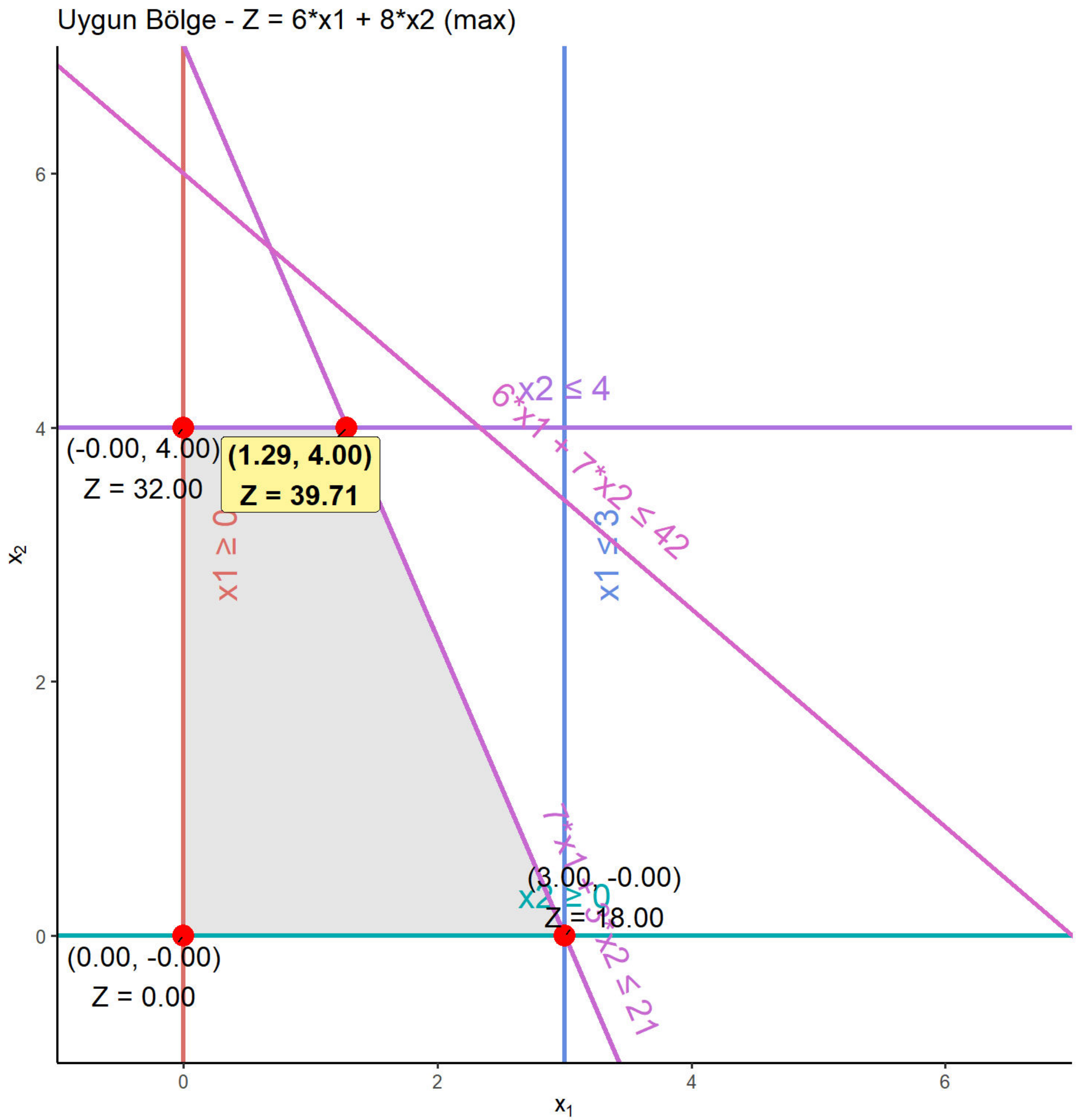
Çözüm (Devam):

- $x_2 = 0$ ve $7x_1 + 3x_2 = 21$ denklemlerinin kesişim noktası
  - $7x_1 + 3 \cdot 0 = 21 \Rightarrow 7x_1 = 21$ ve $x_1 = 3$ olur. Bu iki doğrunun kesişimi başka bir kısıt olan $x_1 = 3$ doğrusundan da geçmektedir.
  - $(3, 0)$ noktasının amaç fonksiyondaki değeri $z = 6 \cdot 3 + 8 \cdot 0 = 18$ dir.

Kısıtlardan $6x_1 + 7x_2 = 42$ eşitsizliğinin sonuca hiç bir etkisi yoktur.

- $(1.285714, 4)$ noktası aday noktalar arasından 39.714 ile amaç fonksiyonunu maksimum yapan değer olduğundan optimum noktadır.

Örnek 2 (5)



Uygun Bölge - Z = 6*x1 + 8*x2 (max)
6*x1 + 7*x2 ≤ 42
x2 ≤ 4
7*x1 + 3*x2 ≤ 21
x1 ≥ 0
x1 ≤ 3
x2 ≥ 0
(-0.00, 4.00)
Z = 32.00
(1.29, 4.00)
Z = 39.71
(3.00, -0.00)
Z = 18.00
(0.00, -0.00)
Z = 0.00
x1
x2

Örnek 3 (1)

Örnek 3

- Bir doğrusal programlama problemine ilişkin, amaç fonksiyonu ve kısıtlar aşağıda verilmiştir. Bu problemin optimum noktasını grafiksel yöntem ile bulun.

Amaç fonksiyonu

- $max \quad z = x_1 + 3x_2$

Kısıtlayıcılar

- $x_1 + x_2 \leq 8$
- $x_1 + 2x_2 \geq 8$
- $x_2 \geq 3$

Negatif olmama koşulu

- $x_1 \, , x_2 \geq 0$

Çözüm:

1. kısıt $x_1 + x_2 \leq 8$ denkleminin eksenleri kestiği yerler

- $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 8$
- $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 8$
- Doğru $(0, 8)$ ve $(8, 0)$ noktalarından geçmeli.

2. kısıt $x_1 + 2x_2 \geq 8$ denkleminin eksenleri kestiği yerler

- $x_1 = 0 \Rightarrow 2x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = \frac{8}{2} = 4$
- $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 8$
- Doğru $(0, 4)$ ve $(8, 0)$ noktalarından geçmeli.

Örnek 3 (2)

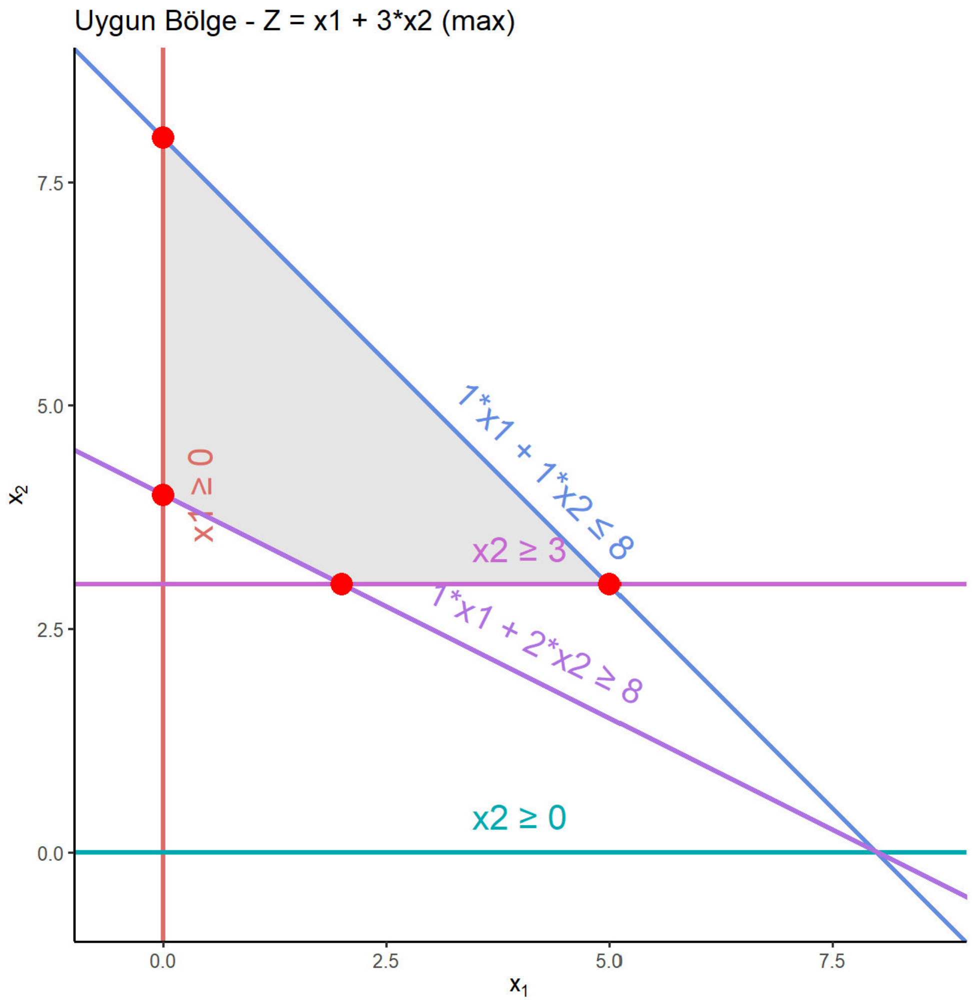
Örnek 3

Çözüm (Devam):

3. kısıt $x_2 \geq 3$ denklemi yatay bir doğru belirtir.

$x_1 \geq 0$ ve $x_2 \geq 0$ ise çözümün birinci bölgede aranacağını gösterir.

Tüm bu kısıtlara uygun grafik ve optimuma aday noktalar sağ tarafta verilmiş grafikteki gibi olur.



Örnek 3 (3)

Örnek 3

Çözüm (Devam):

- Kırmızı ile gösterilen aday noktaların koordinatlarını bulmak için ilgili denklem çiftinin kesişim noktalarını bulmak gerekir.
- Aday noktaların koordinatları bulunduktan sonra $z = x_1 + 3x_2$ amaç fonksiyonunda yerine yazılarak en büyük değer aranır.

- $x_1 = 0$ ve $x_1 + x_2 = 8$ denklemlerinin kesişim noktası
  - $(0, 8)$ noktası olur.
  - $(0, 8)$ noktasının amaç fonksiyondaki değeri $z = 0 + 3 \cdot 8 = 24$ tür.
- $x_1 = 0$ ve $x_1 + 2x_2 = 8$ denklemlerinin kesişim noktası
  - $2x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = \frac{8}{2} = 4$ olur.
  - $(0, 4)$ noktasının amaç fonksiyondaki değeri $z = 0 + 3 \cdot 4 = 12$ dir.

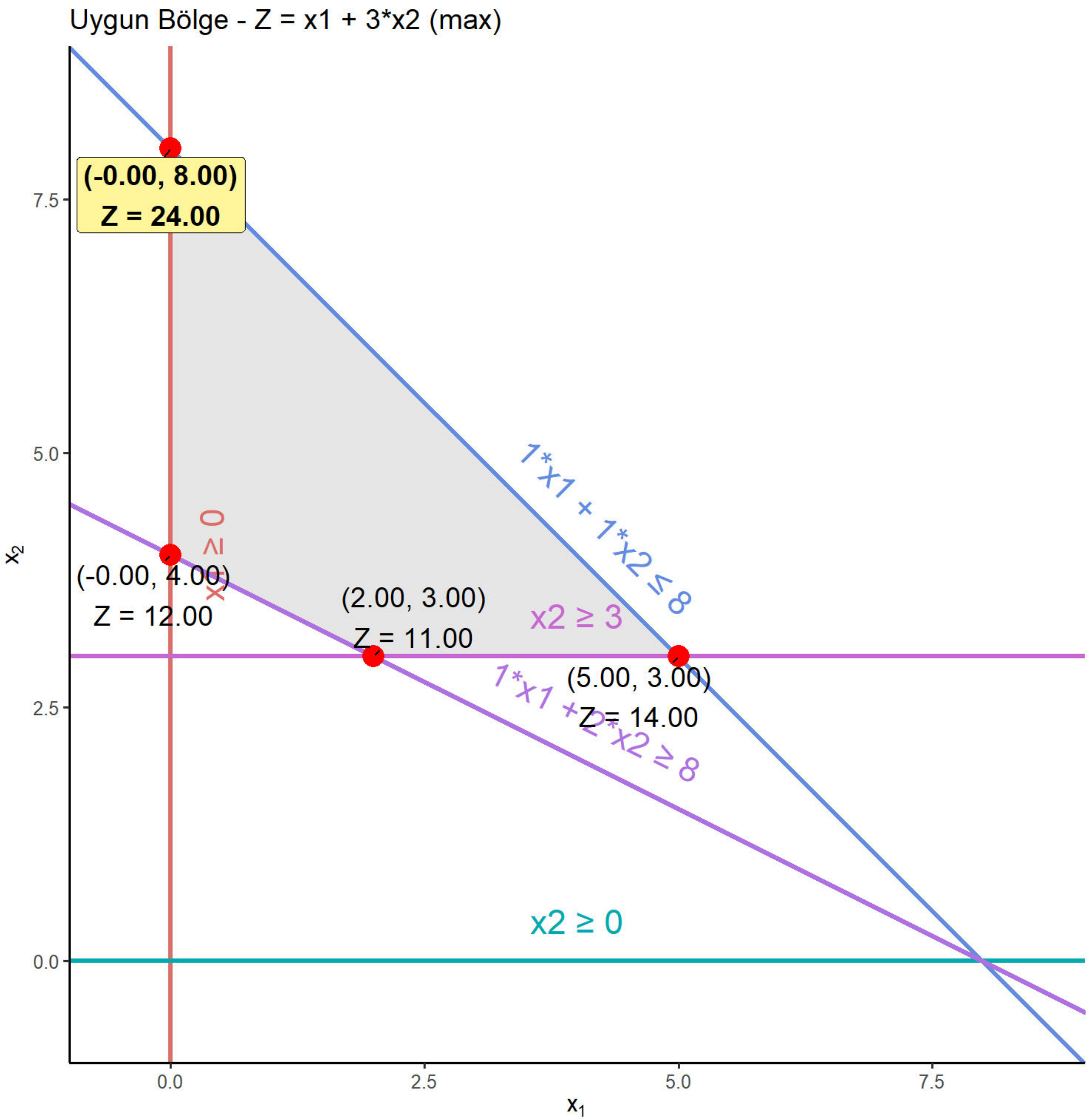
Örnek 3 (4)

Örnek 3

Çözüm (Devam):

- $x_2 = 3$ ve $x_1 + 2x_2 = 8$ denklemlerinin kesişim noktası
  - $x_1 + 2 \cdot 3 = 8 \Rightarrow x_1 = 2$ olur.
  - $(2, 3)$ noktasının amaç fonksiyondaki değeri $z = 2 + 3 \cdot 3 = 11$ dir.
- $x_2 = 3$ ve $x_1 + x_2 = 8$ denklemlerinin kesişim noktası
  - $x_1 + 3 = 8 \Rightarrow x_1 = 5$ olur.
  - $(5, 3)$ noktasının amaç fonksiyondaki değeri $z = 5 + 3 \cdot 3 = 14$ tür.
- $(0, 8)$ noktası aday noktalar arasından 24 ile amaç fonksiyonunu maksimum yapan değer olduğundan optimum noktadır.

Örnek 3 (5)



Uygun Bölge - Z = x1 + 3*x2 (max)
(-0.00, 8.00)
Z = 24.00
(-0.00, 4.00)
Z = 12.00
(2.00, 3.00)
Z = 11.00
(5.00, 3.00)
Z = 14.00
1*x1 + 1*x2 ≤ 8
x2 ≥ 3
1*x1 + 2*x2 ≥ 8
x1 ≥ 0
x2 ≥ 0
0.0
2.5
5.0
7.5
x1
x2

Örnek 4 (1)

Örnek 4

- Bir doğrusal programlama problemine ilişkin, amaç fonksiyonu ve kısıtlar aşağıda verilmiştir. Bu problemin optimum noktasını grafiksel yöntem ile bulun.

Amaç fonksiyonu

- $min \quad z = 3x_1 + 5x_2$

Kısıtlayıcılar

- $3x_1 + x_2 \geq 9$
- $x_1 + 2x_2 \geq 8$
- $x_1 + 5x_2 \geq 10$

Negatif olmama koşulu

- $x_1 \, , x_2 \geq 0$

Çözüm:

1. kısıt $3x_1 + x_2 \geq 9$ denkleminin eksenleri kestiği yerler

- $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 9$
- $x_2 = 0 \Rightarrow 3x_1 = 9$ ve $x_1 = 3$ olur.
- Doğru $(0, 9)$ ve $(3, 0)$ noktalarından geçmeli.

2. kısıt $x_1 + 2x_2 \geq 8$ denkleminin eksenleri kestiği yerler

- $x_1 = 0 \Rightarrow 2x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = \frac{8}{2} = 4$
- $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 8$
- Doğru $(0, 4)$ ve $(8, 0)$ noktalarından geçmeli.

Örnek 4 (2)

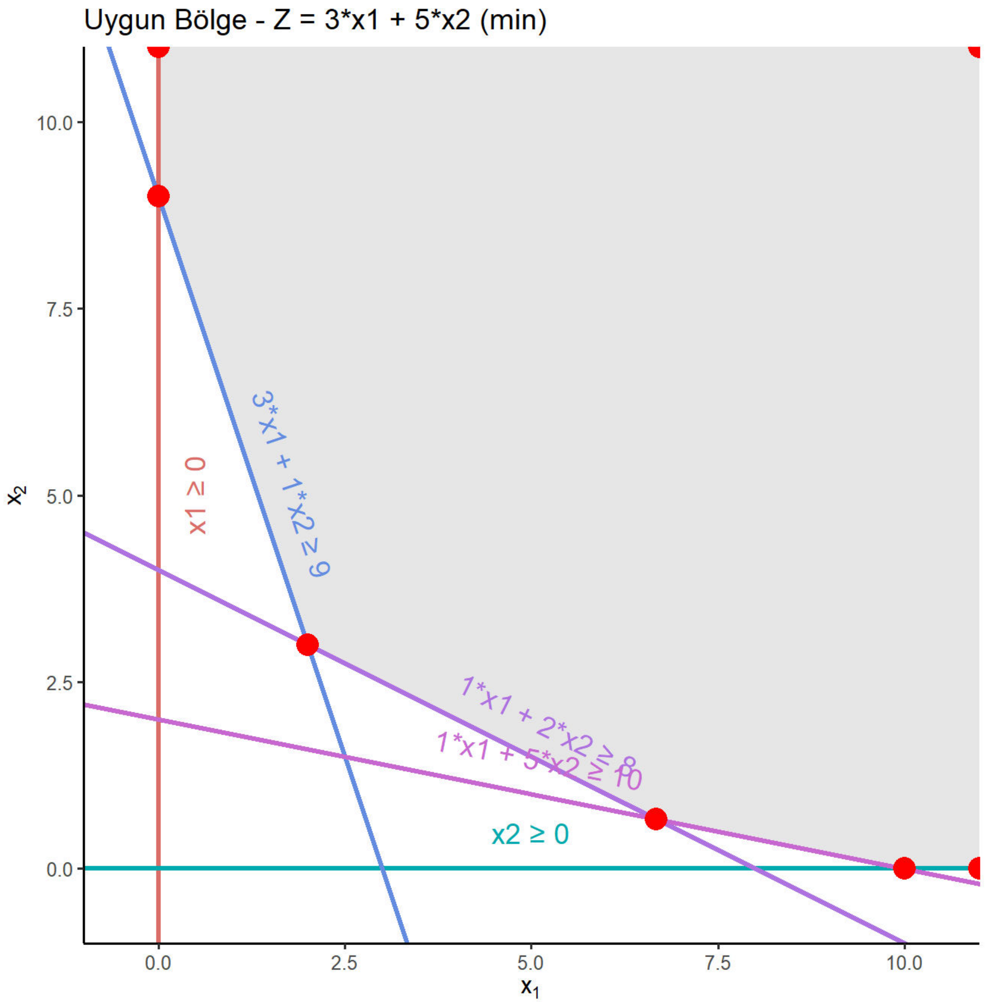
Örnek 4

Çözüm (Devam):

3. kısıt $x_1 + 5x_2 \geq 10$ denkleminin eksenleri kestiği yerler

- $x_1 = 0 \Rightarrow 5x_2 = 10 \Rightarrow x_2 = \frac{10}{5} = 2$
- $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 10$
- Doğru $(0, 2)$ ve $(10, 0)$ noktalarından geçmeli.

Tüm bu kısıtlara uygun grafik ve optimuma aday noktalar sağ tarafta verilmiş grafikteki gibi olur.



Örnek 4 (3)

Örnek 4

Çözüm (Devam):

- Kırmızı ile gösterilen aday noktaların koordinatlarını bulmak için ilgili denklem çiftinin kesişim noktalarını bulmak gerekir.
- Aday noktaların koordinatları bulunduktan sonra $z = 3x_1 + 5x_2$ amaç fonksiyonunda yerine yazılarak en küçük değer aranır.

- $x_1 = 0$ ve $3x_1 + x_2 = 9$ denklemlerinin kesişim noktası
  - $(0, 9)$ noktası olur.
  - $(0, 9)$ noktasının amaç fonksiyondaki değeri $z = 3 \cdot 0 + 5 \cdot 9 = 45$ tir.
- $3x_1 + x_2 = 9$ ve $x_1 + 2x_2 = 8$ denklemlerinin kesişim noktası birinci denklem -2 ile çarpılıp ikinci denkleme eklenerek
  - $-5x_1 = -10 \Rightarrow x_1 = 2$ ve $3 \cdot 2 + x_2 = 9 \Rightarrow x_2 = 3$ olur.
  - $(2, 3)$ noktasının amaç fonksiyondaki değeri $z = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 21$ dir.

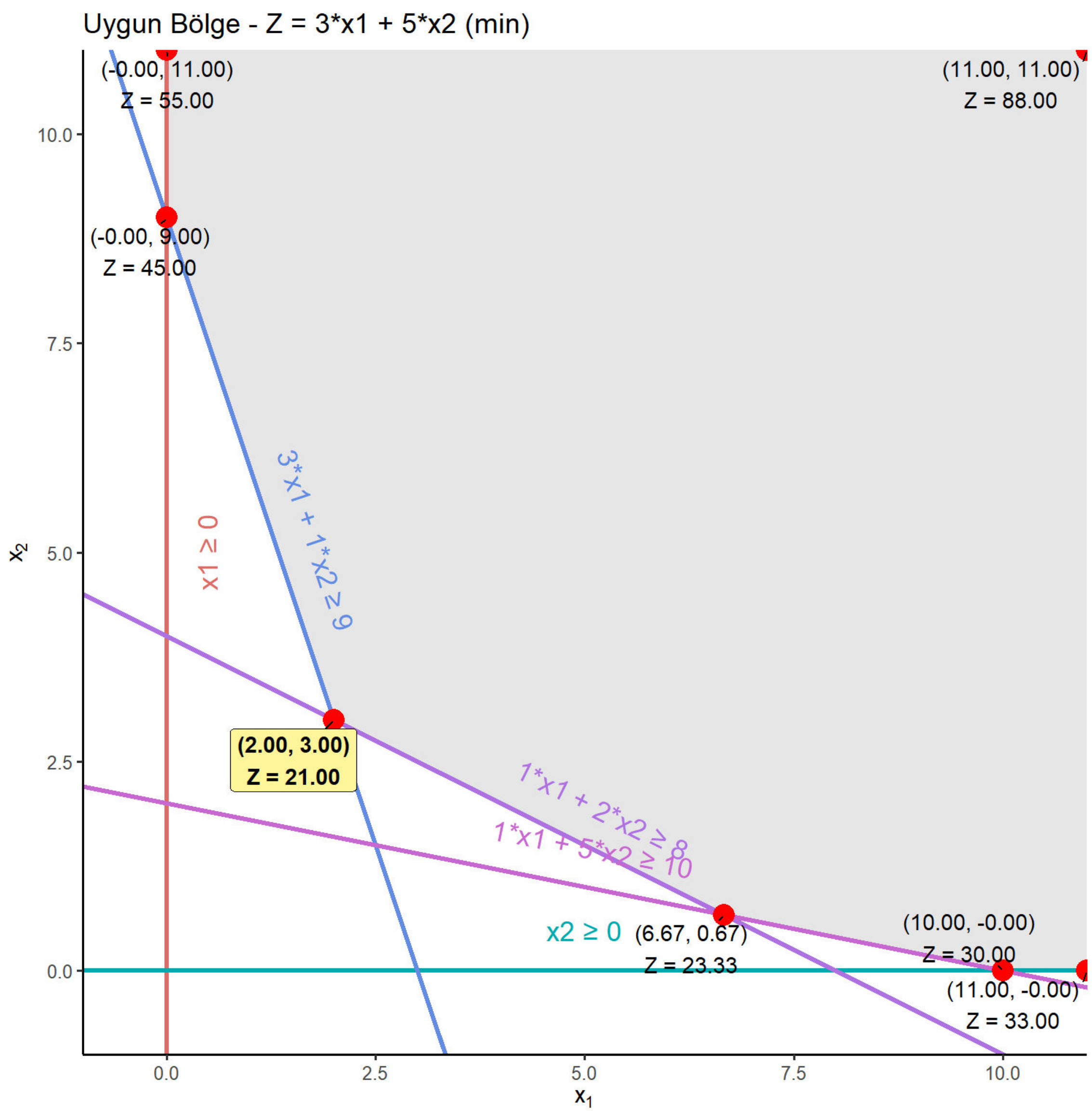
Örnek 4 (4)

Örnek 4

Çözüm (Devam):

- $x_1 + 2x_2 = 8$ ve $x_1 + 5x_2 = 10$ denklemlerinin kesişim noktası birinci denklem -1 ile çarpılıp ikinci denkleme eklenerek
  - $3x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3} = 0.667$ ve $x_1 + 2 \cdot 0.667 = 8 \Rightarrow x_1 = 6.667$ olur.
  - $(6.667, 0.667)$ noktasının amaç fonksiyondaki değeri $z = 3 \cdot 6.667 + 5 \cdot 0.667 = 23.336$ dır.
- $x_2 = 0$ ve $x_1 + 5x_2 = 10$ denklemlerinin kesişim noktası
  - $x_1 = 10$ olur.
  - $(10, 0)$ noktasının amaç fonksiyondaki değeri $z = 3 \cdot 10 + 5 \cdot 0 = 30$ dır.
- $(2, 3)$ noktası aday noktalar arasından 21 ile amaç fonksiyonunu minimum yapan değer olduğundan optimum noktadır.

Örnek 4 (5)



İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ

Örnek 5 (1)

Örnek 5

- Bir doğrusal programlama problemine ilişkin, amaç fonksiyonu ve kısıtlar aşağıda verilmiştir. Bu problemin optimum noktasını grafiksel yöntem ile bulun.

Amaç fonksiyonu

- $min \quad z = 2x_1 + 3x_2$

Kısıtlayıcılar

- $3x_1 + 2x_2 \geq 6$
- $x_1 - 2x_2 \leq 4$
- $x_1 \leq 5$
- $x_2 \leq 3$

Negatif olmama koşulu

- $x_1\ , x_2 \geq 0$

Çözüm:

1. kısıt $3x_1 + 2x_2 \geq 6$ denkleminin eksenleri kestiği yerler

- $x_1 = 0 \Rightarrow 2x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = 3$
- $x_2 = 0 \Rightarrow 3x_1 = 6$ ve $x_1 = 2$ olur.
- Doğru $(0, 3)$ ve $(2, 0)$ noktalarından geçmeli.

2. kısıt $x_1 - 2x_2 \leq 4$ denkleminin eksenleri kestiği yerler

- $x_1 = 0 \Rightarrow -2x_2 = 4 \Rightarrow x_2 = \frac{4}{-2} = -2$
- $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 4$
- Doğru $(0, -2)$ ve $(4, 0)$ noktalarından geçmeli.

Örnek 5 (2)

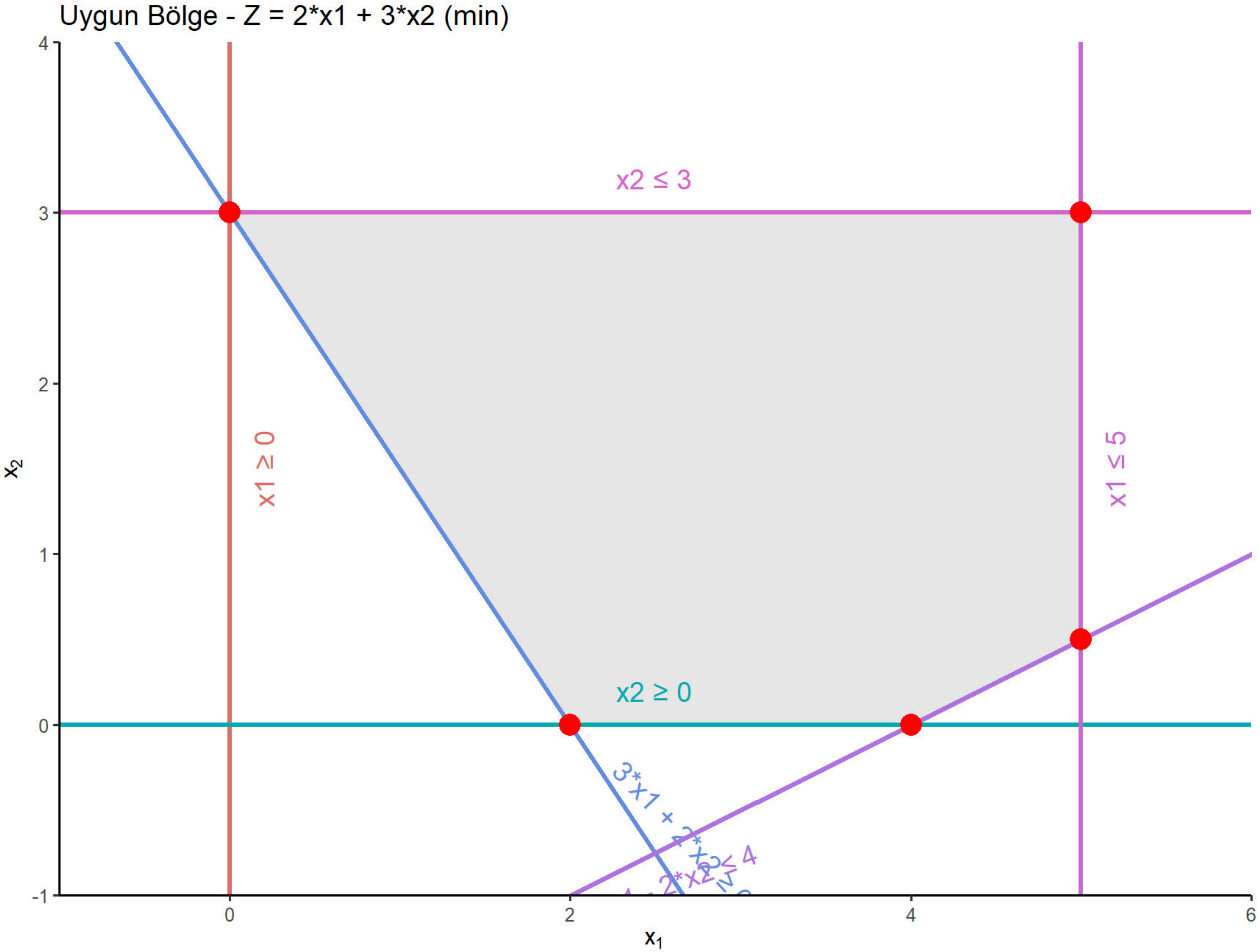
Örnek 5

Çözüm (Devam):

3. kısıt $x_1 \leq 5$ denklemi dikey bir doğru belirtir.

4. kısıt $x_2 \leq 3$ denklemi dikey bir doğru belirtir.

Tüm bu kısıtlara uygun grafik ve optimuma aday noktalar sağ tarafta verilmiş grafikteki gibi olur.



Örnek 5 (3)

Örnek 5

Çözüm (Devam):

- Kırmızı ile gösterilen aday noktaların koordinatlarını bulmak için ilgili denklem çiftinin kesişim noktalarını bulmak gerekir.
- Aday noktaların koordinatları bulunduktan sonra $z = 2x_1 + 3x_2$ amaç fonksiyonunda yerine yazılarak en küçük değer aranır.

- $x_1 = 0$ ve $x_2 = 3$ denklemlerinin kesişim noktası
  - $(0, 3)$ noktası olur.
  - $(0, 3)$ noktasının amaç fonksiyondaki değeri $z = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 9$ dur.
- $x_1 = 5$ ve $x_2 = 3$ denklemlerinin kesişim noktası
  - $(5, 3)$ noktası olur.
  - $(5, 3)$ noktasının amaç fonksiyondaki değeri $z = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 19$ dur.

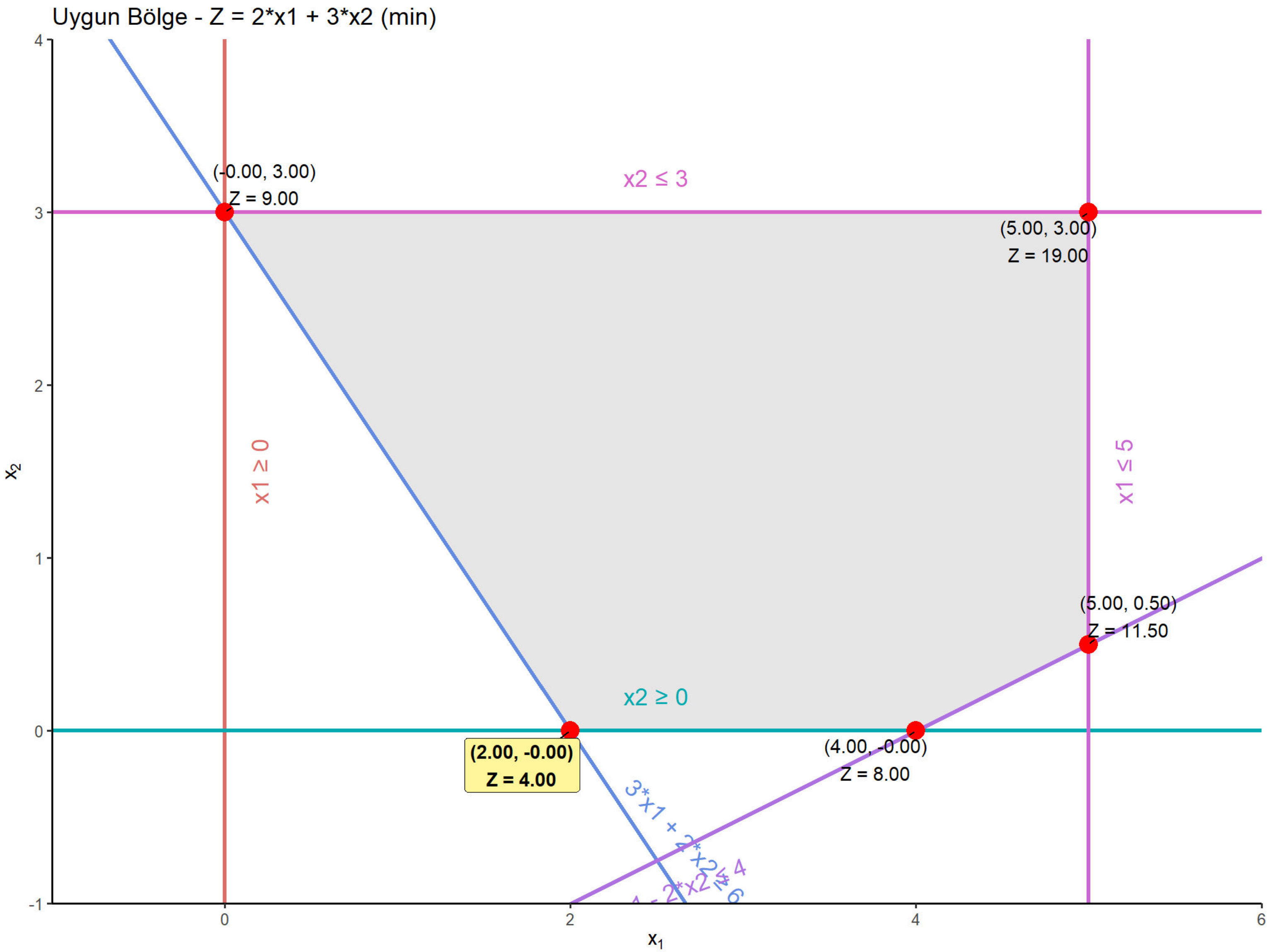
Örnek 5 (4)

Örnek 5

Çözüm (Devam):

- $3x_1 + 2x_2 = 6$ ve $x_2 = 0$ denklemlerinin kesişim noktası
  - $3x_1 = 6 \Rightarrow x_1 = 2$
  - $(2, 0)$ noktasının amaç fonksiyondaki değeri $z = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 = 4$ dir.
- $x_1 - 2x_2 = 4$ ve $x_2 = 0$ denklemlerinin kesişim noktası
  - $x_1 = 4$
  - $(4, 0)$ noktasının amaç fonksiyondaki değeri $z = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 8$ dir.
- $x_1 - 2x_2 = 4$ ve $x_1 = 5$ denklemlerinin kesişim noktası
  - $5 - 2x_2 = 4 \Rightarrow -2x_2 = -1 \Rightarrow x_2 = 0.5$
  - $(5, 0.5)$ noktasının amaç fonksiyondaki değeri $z = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 0.5 = 11.5$ dir.
- $(2, 0)$ noktası aday noktalar arasından 4 ile amaç fonksiyonunu minimum yapan değer olduğundan optimum noktadır.

Örnek 5 (5)



İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ

Grafiksel Çözümde Karşılaşabilecek Özel Haller

Grafik Çözüm Yöntemi

1) Bir DP probleminin birden fazla optimum çözüme sahip olması.

2) Bir DP probleminin tek bir çözüme sahip olması.

3) Uygun çözümün sınırsız olması

4) Mümkün çözüm olmaması

Örnek 6: Birden fazla optimum çözüme sahip olması (1)

Örnek 6: Birden fazla optimum çözüme sahip olması (1)

- Bir doğrusal programlama problemine ilişkin, amaç fonksiyonu ve kısıtlar aşağıda verilmiştir. Bu problemin optimum noktasını grafiksel yöntem ile bulun.

Amaç fonksiyonu

- $max \quad z = x_1 + x_2$

Kısıtlayıcılar

- $x_1 + x_2 \leq 5$
- $x_1 + 2x_2 \leq 8$
- $5x_1 + x_2 \leq 20$

Negatif olmama koşulu

- $x_1 \, , x_2 \geq 0$

Çözüm:

1. kısıt $x_1 + x_2 \leq 5$ denkleminin eksenleri kestiği yerler

- $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 5$
- $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 5$
- Doğru $(0, 5)$ ve $(5, 0)$ noktalarından geçmeli.

2. kısıt $x_1 + 2x_2 \leq 8$ denkleminin eksenleri kestiği yerler

- $x_1 = 0 \Rightarrow 2x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = \frac{8}{2} = 4$
- $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 8$
- Doğru $(0, 4)$ ve $(8, 0)$ noktalarından geçmeli.

Örnek 6: Birden fazla optimum çözüme sahip olması (2)

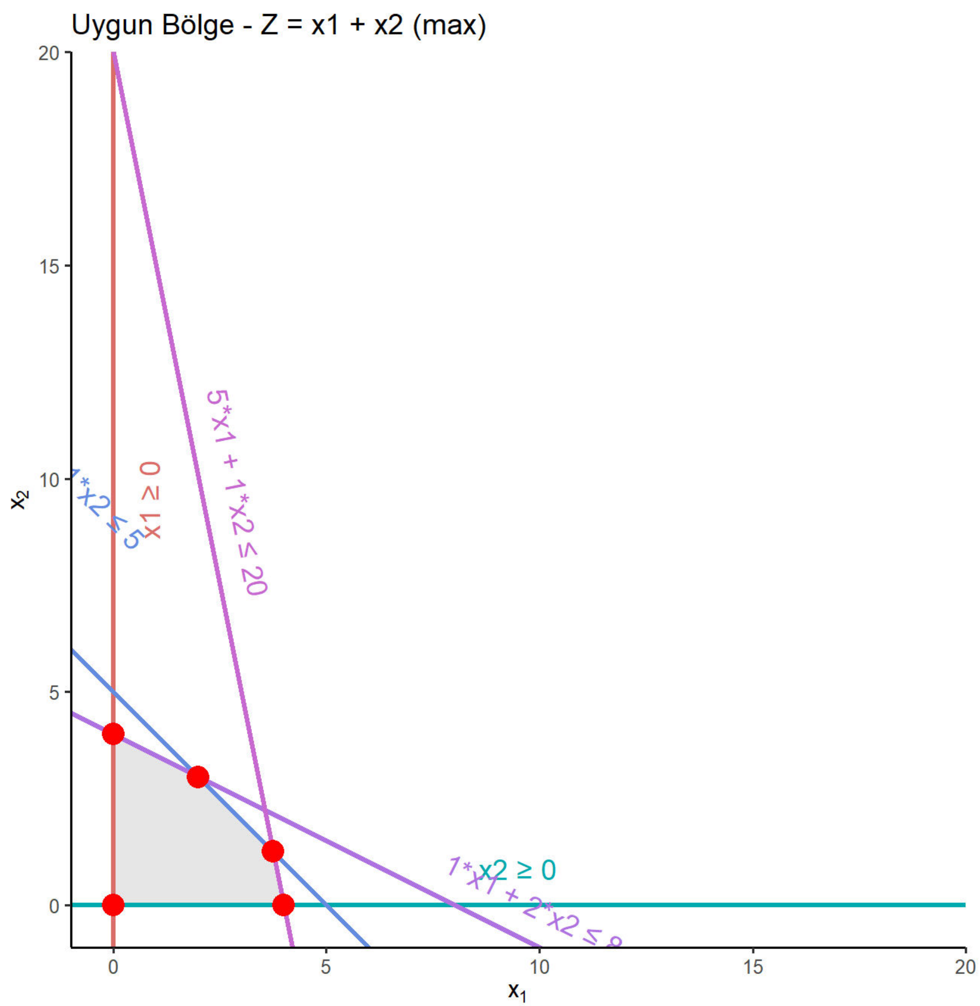
Örnek 6: Birden fazla optimum çözüme sahip olması (2)

Çözüm (Devam):

3. kısıt $5x_1 + x_2 \leq 20$ denkleminin eksenleri kestiği yerler

- $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 20$
- $x_2 = 0 \Rightarrow 5x_1 = 20 \Rightarrow x_1 = \frac{20}{5} = 4$
- Doğru $(0, 20)$ ve $(4, 0)$ noktalarından geçmeli.

Tüm bu kısıtlara uygun grafik ve optimuma aday noktalar sağ tarafta verilmiş grafikteki gibi olur.



Örnek 6: Birden fazla optimum çözüme sahip olması (3)

Örnek 6: Birden fazla optimum çözüme sahip olması (3)

Çözüm (Devam):

- Kırmızı ile gösterilen aday noktaların koordinatlarını bulmak için ilgili denklem çiftinin kesişim noktalarını bulmak gerekir.
- Aday noktaların koordinatları bulunduktan sonra $z = x_1 + x_2$ amaç fonksiyonunda yerine yazılarak en büyük değer aranır.
- $x_1 = 0$ ve $x_2 = 0$ denklemlerinin kesişim noktası
  - $(0, 0)$ noktası olur. Bu noktanın amaç fonksiyondaki değeri $z = 0 + 0 = 0$ dır.
- $x_1 = 0$ ve $x_1 + 2x_2 = 8$ denklemlerinin kesişim noktası
  - $0 + 2x_2 = 8 \Rightarrow x_2 = 4$ olduğundan
  - $(0, 4)$ noktası olur. Bu noktanın amaç fonksiyondaki değeri $z = 0 + 4 = 4$ tür.
- $x_1 + x_2 = 5$ ve $x_1 + 2x_2 = 8$ denklemlerinin kesişim noktası birinci denklem -1 ile çarpılım ikinci denklem ile toplanarak bulunur.
  - $x_2 = 3 \Rightarrow x_1 + 3 = 5 \Rightarrow x_1 = 2$
  - $(2, 3)$ noktasının amaç fonksiyondaki değeri $z = 2 + 3 = 5$ tir.

Örnek 6: Birden fazla optimum çözüme sahip olması (4)

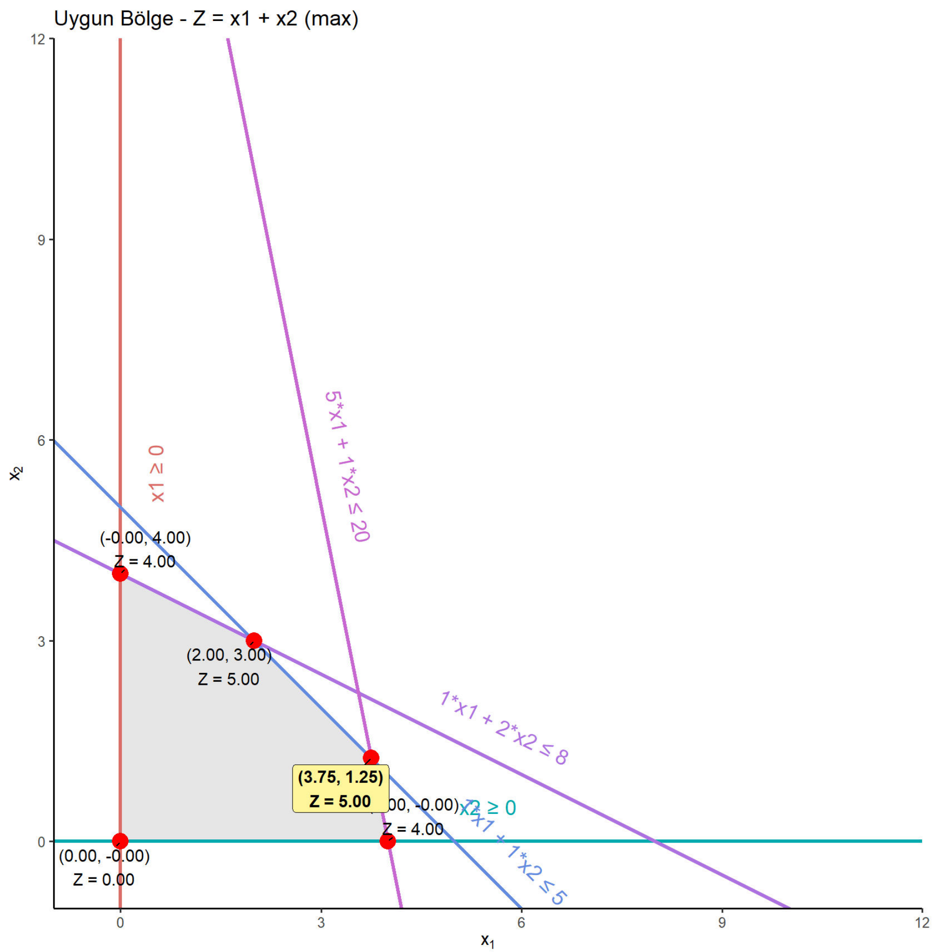
Örnek 6: Birden fazla optimum çözüme sahip olması (3)

Çözüm (Devam):

- $x_1 + x_2 = 5$ ve $5x_1 + x_2 = 20$ denklemlerinin kesişim noktası birinci denklem -1 ile çarpılım ikinci denklem ile toplanarak bulunur.
  - $4x_2 = 15 \Rightarrow x_2 = 3.75 \Rightarrow$ $3.75 + x_2 = 5 \Rightarrow x_2 = 1.25$
  - $(3.75, 1.25)$ noktasının amaç fonksiyondaki değeri $z = 3.75 + 1.25 = 5$ tir.
- $x_2 = 0$ ve $5x_1 + x_2 = 20$ denklemlerinin kesişim noktası
  - $5x_1 = 20 \Rightarrow x_1 = 4$
  - $(4, 0)$ noktasının amaç fonksiyondaki değeri $z = 4 + 0 = 4$ tür.

Örnek 6: Birden fazla optimum çözüme sahip olması (5)

- Aday noktalardan $(2, 3)$ ve $(3.75, 1.25)$ noktalarından her ikisi de 5 değeri ile amaç fonksiyonunu maksimum yapan değer olduğundan her ikisi de optimum noktadır.
- Dahası $x_1 + x_2 = 5$ denklemi üzerinde bulunan ve $(2, 3)$ ile $(3.75, 1.25)$ noktaları arasındaki tüm noktalar için amaç fonksiyonu 5 olduğundan bu aralıktaki tüm noktalar optimum çözüme sahiptir.
- Bu optimum çözümlerin hepsi geçerlidir ve herhangi birinin diğerine göre bir üstünlüğü yoktur.
- Bu şekilde sonsuz farklı noktanın optimum nokta olabildiği bir doğrusal programlama problemi tam olarak formülize edilememiş demektir. Problemin fazladan kısıtlara ihtiyacı vardır.



İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ

Örnek 7: Bir DP probleminin tek bir çözüme sahip olması (1)

Örnek 7: Bir DP probleminin tek bir çözüme sahip olması (1)

- Bir doğrusal programlama problemine ilişkin, amaç fonksiyonu ve kısıtlar aşağıda verilmiştir. Bu problemin optimum noktasını grafiksel yöntem ile bulun.

Amaç fonksiyonu

- $min \quad z = 3x_1 + 4x_2$

Kısıtlayıcılar

- $5x_1 + 3x_2 \geq 29$
- $2x_1 + x_2 \geq 10$
- $3x_1 - 4x_2 \geq 24$

Negatif olmama koşulu

- $x_1\,, x_2 \geq 0$

Çözüm:

1. kısıt $5x_1 + 3x_2 \geq 29$ denkleminin eksenleri kestiği yerler

- $x_1 = 0 \Rightarrow 3x_2 = 29 \Rightarrow x_2 = 9.67$
- $x_2 = 0 \Rightarrow 5x_1 = 29 \Rightarrow x_1 = 5.8$
- Doğru $(0, 9.67)$ ve $(5.8, 0)$ noktalarından geçmeli.

2. kısıt $2x_1 + x_2 \geq 10$ denkleminin eksenleri kestiği yerler

- $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 10$
- $x_2 = 0 \Rightarrow 2x_1 = 10 \Rightarrow x_1 = 5$
- Doğru $(0, 10)$ ve $(5, 0)$ noktalarından geçmeli.

Örnek 7: Bir DP probleminin tek bir çözüme sahip olması (2)

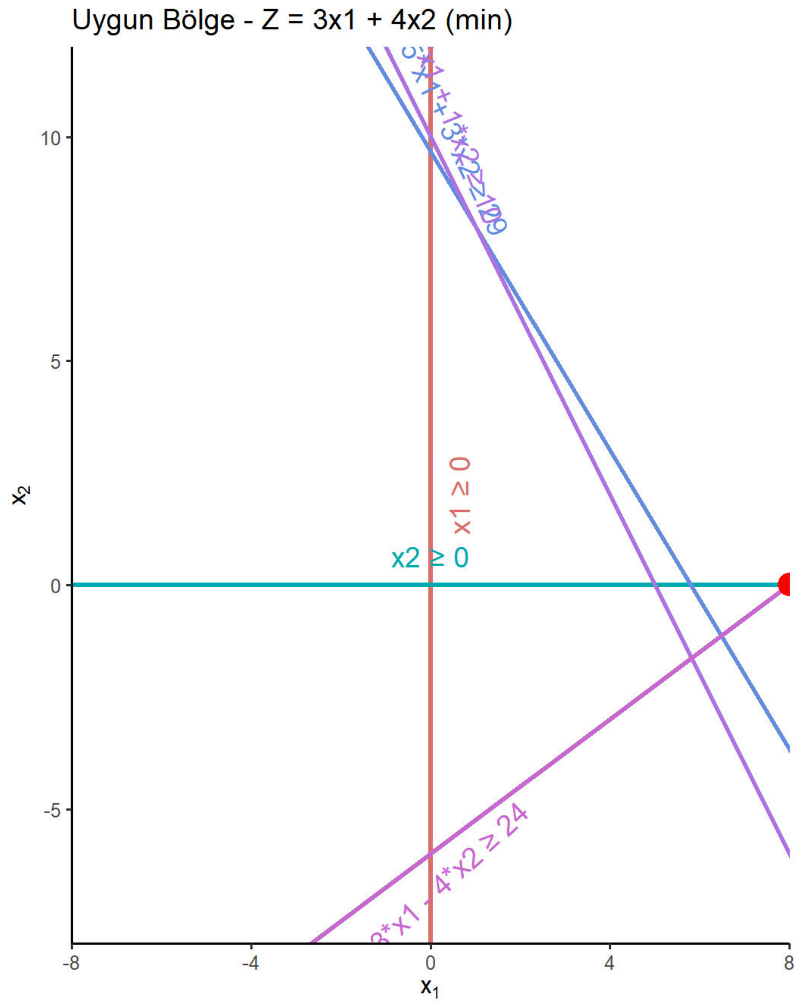
Örnek 7: Bir DP probleminin tek bir çözüme sahip olması (2)

Çözüm (Devam):

3. kısıt $3x_1 - 4x_2 \geq 24$ denkleminin eksenleri kestiği yerler

- $x_1 = 0 \Rightarrow -4x_2 = 24 \Rightarrow x_2 = -6$
- $x_2 = 0 \Rightarrow 3x_1 = 24 \Rightarrow x_1 = 8$
- Doğru $(0, -6)$ ve $(8, 0)$ noktalarından geçmeli.

Tüm bu kısıtlara uygun grafik ve optimuma aday noktalar sağ tarafta verilmiş grafikteki gibi olur.

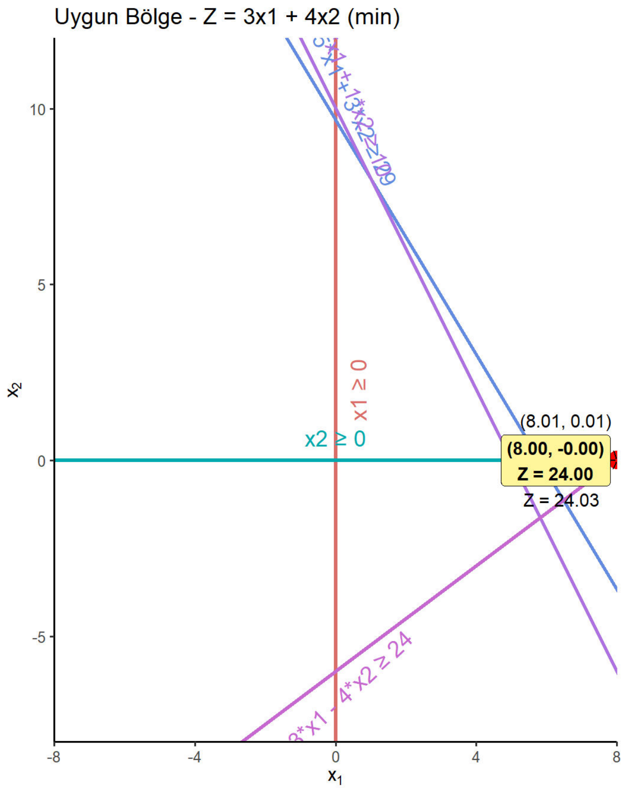


Örnek 7: Bir DP probleminin tek bir çözüme sahip olması (3)

Örnek 7: Bir DP probleminin tek bir çözüme sahip olması (3)

Çözüm (Devam):

- Kırmızı ile gösterilen aday noktanin koordinatlarını bulmak için ilgili denklem çiftinin kesişim noktalarını bulmak gerekir.
- Aday noktaların koordinatları bulunduktan sonra $z = 3x_1 + 4x_2$ amaç fonksiyonunda yerine yazılarak en küçük değer aranır.
- $3x_1 + 4x_2 = 24$ ve $x_2 = 0$ denklemlerinin kesişim noktası
  - $3x_1 = 24 \Rightarrow x_1 = 8$
  - $(8, 0)$ noktası olur. Bu noktanın amaç fonksiyondaki değeri $z = 2 \cdot 8 + 4 \cdot 0 = 24$ tür.



- Tüm kısıtları sağlayan tek değer $(8, 0)$ noktasıdır. Belirlenen koşulu sağlayan tek nokta olduğundan bu nokta aynı zamanda optimum noktadır.

İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ

Örnek 8: Uygun çözümün sınırsız olması (1)

Örnek 8: Uygun çözümün sınırsız olması (1)

- Bir doğrusal programlama problemine ilişkin, amaç fonksiyonu ve kısıtlar aşağıda verilmiştir. Bu problemin optimum noktasını grafiksel yöntem ile bulun.

Amaç fonksiyonu

- $max \quad z = 3x_1 + 2x_2$

Kısıtlayıcılar

- $2x_1 + x_2 \geq 10$
- $-x_1 + x_2 \geq -2$

Negatif olmama koşulu

- $x_1 \, , x_2 \geq 0$

Çözüm:

1. kısıt $2x_1 + x_2 \geq 10$ denkleminin eksenleri kestiği yerler

- $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 10$
- $x_2 = 0 \Rightarrow 2x_1 = 10 \Rightarrow x_1 = 5$
- Doğru $(0, 10)$ ve $(5, 0)$ noktalarından geçmeli.

2. kısıt $-x_1 + x_2 \geq -2$ denkleminin eksenleri kestiği yerler

- $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = -2$
- $x_2 = 0 \Rightarrow -x_1 = -2 \Rightarrow x_1 = 2$
- Doğru $(0, -2)$ ve $(2, 0)$ noktalarından geçmeli.

Örnek 8: Uygun çözümün sınırsız olması (2)

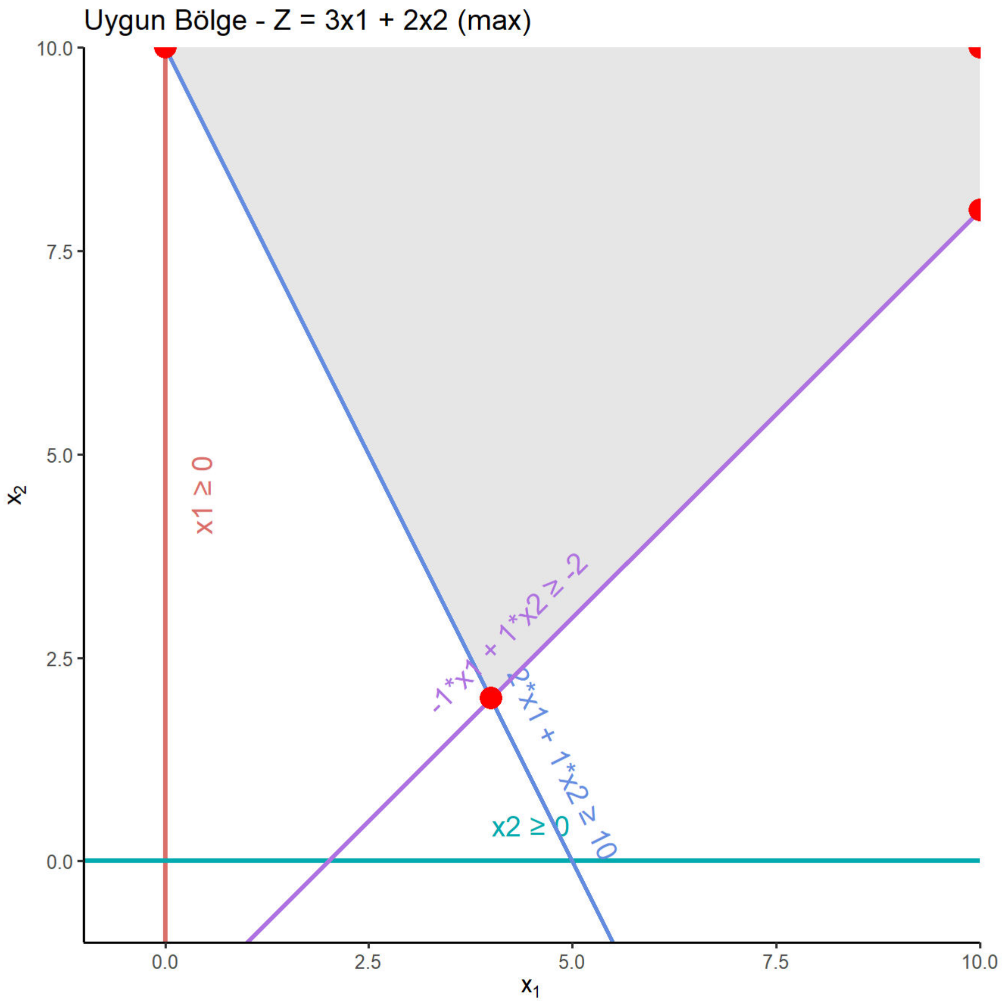
Örnek 8: Uygun çözümün sınırsız olması (2)

Çözüm (Devam):

3. kısıt $5x_1 + x_2 \leq 20$ denkleminin eksenleri kestiği yerler

- $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 20$
- $x_2 = 0 \Rightarrow 5x_1 = 20 \Rightarrow x_1 = \frac{20}{5} = 4$
- Doğru $(0, 20)$ ve $(4, 0)$ noktalarından geçmeli.

Tüm bu kısıtlara uygun grafik ve optimuma aday noktalar sağ tarafta verilmiş grafikteki gibi olur.



Örnek 8: Uygun çözümün sınırsız olması (3)

Örnek 8: Uygun çözümün sınırsız olması (3)

Çözüm (Devam):

- Mümkün çözüm bölgesi taralı alandır. Mümkün çözüm bölgesinde x_1 ve x_2 noktalarının değerleri büyüdükçe, amaç fonksiyonunun değeri de büyür.
- Amaç fonksiyonunun değeri sonsuza kadar arttırılabilir.
- Bu doğrusal programlama problemi için çözüm sınırsızdır.

Örnek 9: Mümkün Çözüm Olmaması (1)

Örnek 9: Mümkün Çözüm Olmaması (1)

- Bir doğrusal programlama problemine ilişkin, amaç fonksiyonu ve kısıtlar aşağıda verilmiştir. Bu problemin optimum noktasını grafiksel yöntem ile bulun.

Amaç fonksiyonu

- $max \quad z = 2x_1 + 5x_2$

Kısıtlayıcılar

- $x_1 + 2x_2 \leq 6$
- $x_1 + 2x_2 \geq 10$

Negatif olmama koşulu

- $x_1 \, , x_2 \geq 0$

Çözüm:

1. kısıt $x_1 + 2x_2 \leq 6$ denkleminin eksenleri kestiği yerler

- $x_1 = 0 \Rightarrow 2x_2 = 6 \Rightarrow x_2 = 3$
- $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 6$
- Doğru $(0, 3)$ ve $(6, 0)$ noktalarından geçmeli.

2. kısıt $x_1 + 2x_2 \geq 10$ denkleminin eksenleri kestiği yerler

- $x_1 = 0 \Rightarrow 2x_2 = 10 \Rightarrow x_2 = 5$
- $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 10$
- Doğru $(0, 5)$ ve $(10, 0)$ noktalarından geçmeli.

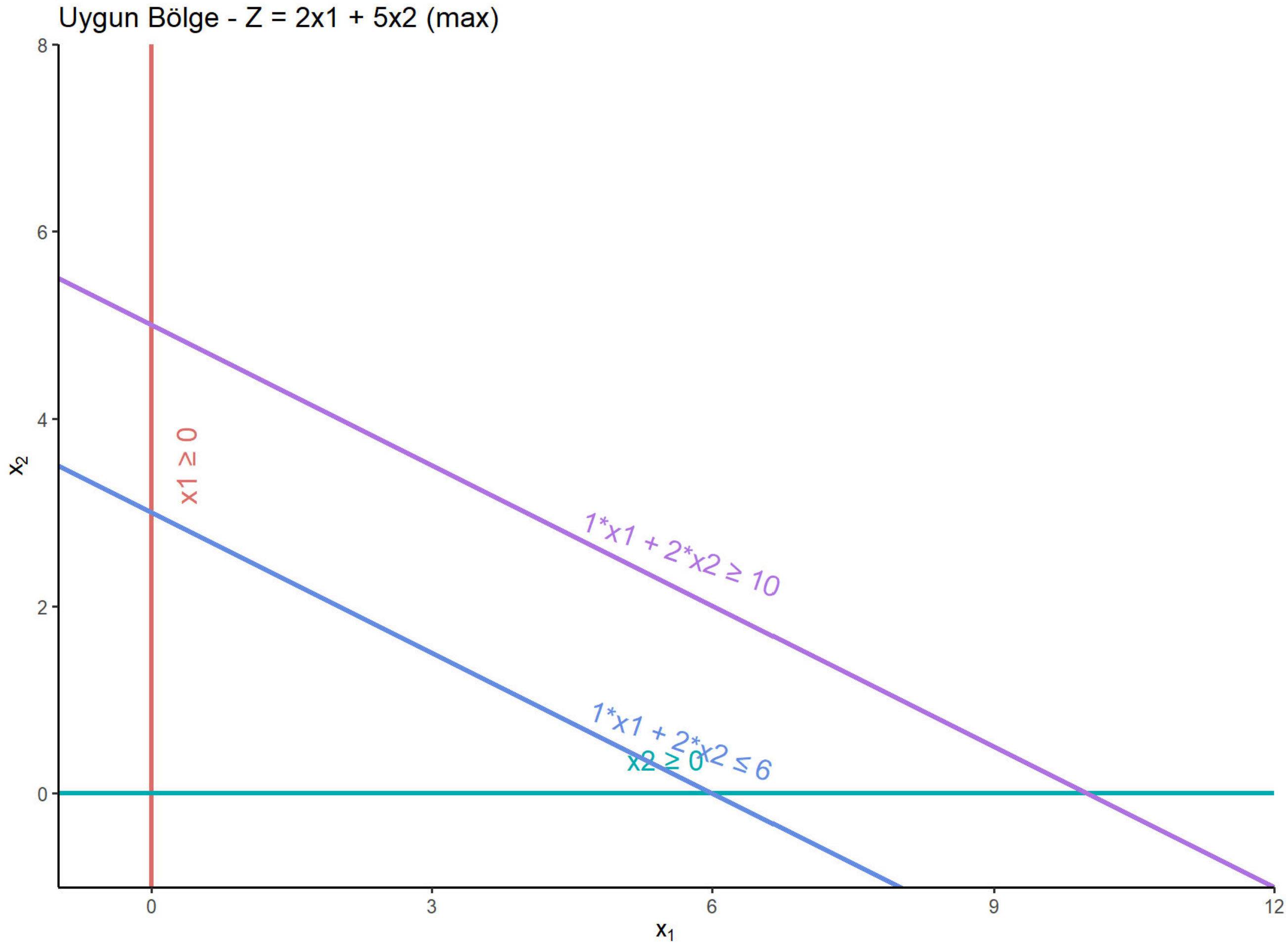
Örnek 9: Mümkün Çözüm Olmaması (2)

Örnek 9: Mümkün Çözüm Olmaması (2)

Çözüm (Devam):

Tüm bu kısıtlara uygun grafik ve optimuma aday noktalar sağ tarafta verilmiş grafikteki gibi olur.

Grafikten görüldüğü gibi uygun çözümün bulunduğu bir alan yoktur.



Örnek 9: Mümkün Çözüm Olmaması (3)

Uygun çözümün olmamasının iki sebebi olabilir

- Kısıtlayıcıların ortak kesim noktası yoktur.
- Mümkün çözüm bölgesi 2., 3. ya da 4. bölgededir. x_1 , $x_2 \geq 0$ koşulu sağlanmamıştır.