Hafta 02

Doğrusal Programlama: Model Kurma ve Örnekler

Doç. Dr. Erhan Çene

25/09/2025

İSTANBUL TİCARET ÜNİVERSİTESİ

Doğrusal Programlama (1)

- Günümüzde, işletme, ekonomi ve muhasebe dallarını en yakından ilgilendiren konulardan bir olan doğrusal programlama (DP), aynı zamanda yöneylem araştırmasında da en önemli konulardan biridir.
- Doğrusal programlama, kaynakların optimal dağılımını elde etmeye, maliyetleri minimize, karı ise maksimize etmeye yarayan bir tekniktir.
- Doğrusal Programlama, optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan bir yöntemdir.

Doğrusal Programlama (2)

- 1947’ de, George Dantzig, doğrusal Programlama problemlerinin çözümünde kullanılan etkin bir yol olan Simpleks Algoritma’ yı buldu ve bu buluşla birlikte doğrusal Programlama, sıklıkla ve hemen hemen her sektörde kullanılmaya başlandı.
- Temel olarak, doğrusal programlama, kıt kaynakların optimum şekilde dağılımını içeren deterministik bir matematiksel tekniktir.
- Doğrusal programlama, iyi tanımlanmış doğrusal eşitliklerin veya eşitsizliklerin kısıtlayıcı koşulları altında doğrusal bir amaç fonksiyonunu en iyi (optimum/ maksimizasyon-minimizasyon) kılan değişken değerlerinin belirlenmesinde kullanılan matematiksel programlama tekniğidir.

DP Modelinin Yapısal Unsurları (1)

1- Karar Değişkenleri

- Karar vericinin denetimi altında olan niteliklere karar değişkenleri denir.
- Bunlar modele ilişkin bilinmeyenler olup değerleri modelin çözümünden sonra belirlenir.
- Bu değişkenler karar vericinin denetimi altında olduklarından bunlara kontrol değişkenleri de denir.
- Örneğin x_j: Belirli bir zaman döneminde j'inci ürünün üretim miktarı veya faaliyet düzeyini gösterebilir.
- Burada $j = 1, 2, 3, \ldots, n$: Ürün çeşidi, faaliyet sayısını belirtir.

DP Modelinin Yapısal Unsurları (2)

2- Amaç Fonksiyonu

- Karar vericinin ulaşmak istediği hedef doğrusal bir denklem ile açıklanır.
- Amaç fonksiyonu olarak adlandırılan bu denklem, karar değişkenleri ile karar vericinin amacı arasındaki fonksiyonel ilişkiyi gösterir.
- Bu denklemin genel formu

$$Z_{enk/enb} = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

şeklinde yazılabilir.

- Denklemde x_j ler karar değişkenlerini gösterir.
- Denklemde c_j ler ise kar ve ya maliyet katsayılarını (parametrelerini) gösterir.
- x_j ler bulunmak istenen değerler iken, c_j ler ise bilinen değerlerdir.

DP Modelinin Yapısal Unsurları (3)

3- Kısıtlayıcı Fonksiyonlar (1)

- Karar değişkenleri ve karar değişkenleriyle parametrelerin birbirleriyle olan ilişkilerinde sağlanması zorunlu olan ilişkilerin matematiksel olarak açıklanmasıyla elde edilen denklemlere kısıtlayıcı fonksiyonlar denir.
- Kısıtlayıcıların değerleri kesin olarak önceden belirlenmiş olup sistemin tanımlanmasında kullanılır.
- Kısıtlayıcı fonksiyonlar sadece kaynakların sınırlarını değil, gereksinim ve yönetim kararlarını ifade etmekte de kullanılır.

DP Modelinin Yapısal Unsurları (4)

3- Kısıtlayıcı Fonksiyonlar (2)

$$
\begin{array}{ll}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \leq (= yada \geq)\ b_1\,, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & \leq (= yada \geq)\ b_2\,, \\
\vdots \qquad \vdots \quad \ddots \qquad \vdots & \qquad\qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \leq (= yada \geq) b_m\,.
\end{array}
$$

ya da kısaca

$$
\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq (=; yada \geq) b_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, m)
$$

- Burada a_{ij} ler teknoloji katsayılarını, b_i ler ise elverişli kaynak miktarını gösterir. Hem a_{ij} hem de b_i ler bilinen değerlerdir.
- Kısıtlar her zaman $\leq$ ile ifade edilmek zorunda değildir. $=$ ya da $\geq$ ile ifade edilen kısıtlar da bulunur.

DP Modelinin Yapısal Unsurları (5)

4- Parametreler (1)

- Alabileceği değerlerde karar vericinin hiçbir etkisi olmayan niteliklere parametre veya kontrol dışı değişkenler denir.
- Amaç denkleminde yer alan c_j ler ve kısıt denklemlerinde yer alan a_{ij} ile b_i ler önceden belirlenmiş değerler olduğundan parametre veya kontrol dışı değişkenler dir.
- Belirli koşullarda belirli değerler alan parametreler problem için veri durumundadır.

DP Modelinin Yapısal Unsurları (6)

4- Parametreler (2)

- c_j: j'inci karar değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısı (parametre)-(birim kar, birim fiyat, birim maliyet vs.).
- a_{ij}: j'inci üründen bir birim üretmek için i'inci kaynaktan tüketilen kaynak miktarı veya girdi katsayısı
- b_i: n sayıdaki ürün için elde bulunan i'inci sınırlı kaynak miktarı.
- $i = 1, 2, 3, \ldots, m$: Üretim bölümlerinin veya üretim kaynaklarının sayısı.

DP Modelinin Yapısal Unsurları (7)

5- İşaret Kısıtlaması

- Doğrusal programlama probleminin formülizasyonunu tamamlamak için her bir karar değişkenlerinin x_j sadece negatif olmayan değerler mi aldığı yoksa hem pozitif hem de negatif değerler mi aldığı belirtilmelidir.
- Eğer pozitif değer kısıtlaması kullanılıyorsa, bu durum doğrusal programlama probleminde $x_j \geq 0$ ifadesiyle, eğer hem pozitif hem negatif değerler alabiliyorsa bu durum doğrusal programlama probleminde $x_j^+, x_j^- \geq 0$ ile gösterilir.

Örnek bir DP Modeli

Örnek bir DP Modeli

- Tüm bu bilgiler doğrultusunda, karar değişkenleri, amaç fonksiyonu, kısıtları, parametreleri ve işaret kısıtlamasını içeren örnek bir DP modeli aşağıda verilmiştir.

Amaç fonksiyonu ve karar değişkenleri:

$$Z_{enk/enb} = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

Kısıtlayıcı fonksiyonlar ve parametreler:

$$\begin{array}{rl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & \leq (= yada \geq)\ b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & \leq (= yada \geq)\ b_2, \\ \vdots \qquad \vdots \quad \ddots \qquad \vdots & \qquad \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & \leq (= yada \geq) b_m. \end{array}$$

İşaret kısıtlaması:

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$$

Doğrusal Programlama Modelinin Matris Gösterimi

Doğrusal Programlama Modelinin Matris Gösterimi

Amaç fonksiyonunun matrissel gösterimi:

$$Z_{enb/enk} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{Cx}$$

Kısıtlayıcı fonksiyonların matrissel gösterimi:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} (\leq; =; \geq) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \mathbf{Ax}(\leq; =; \geq)\mathbf{b}$$

Doğrusal Programlamanın Varsayımları (1)

Doğrusal Programlamanın Varsayımları

1.Doğrusallık (veya Oransallık) Varsayımı:

- Modeldeki amaç fonksiyonları ve kısıtlayıcı fonksiyonların hepsi doğrusaldır.
- Doğrusallık varsayımı, amacın ve kısıtların bir doğru denklemi olarak ifade edilebilmesini sağlar.
- Doğrusallığın sağlanabilmesi için kısıtlayıcı ve amaç fonksiyonlarındaki değişkenlerin (x_j) derecesi yani üssü 1 olmalıdır. Üs birden başka bir değerse doğrusallık sağlanmaz.
- Bu varsayım gerçekleşmediği takdirde Doğrusal Olmayan Programlama (DOP) söz konusudur.

Doğrusal Programlamanın Varsayımları (2)

Doğrusal Programlamanın Varsayımları

2.Toplanabilirlik Varsayımı

- Doğrusal programlamada her fonksiyon (amaç fonksiyonu ya da kısıtlayıcının sol tarafındaki fonksiyon) ilişkin olduğu faaliyetlerin bireysel katkısının toplamıdır.
- Örneğin bir ürünün üretimi için 3 saat, bir başka ürünün üretimi için 5 saat gerekiyorsa, iki ürünün birden üretimi için 8 saat gerektiği varsayılır.

3. Bölünebilirlik Varsayımı

- Bu varsayım, her karar değişkenlerinin ondalıklı bir sayı alabileceği anlamına gelir.
- Bu varsayım ortadan kalktığında tamsayılı programlama söz konusu olur.

Doğrusal Programlamanın Varsayımları (3)

Doğrusal Programlamanın Varsayımları

4.Kesinlik Varsayımı:

- Bu varsayım, tüm parametrelerin (amaç fonksiyonu katsayısı (c_j), sağ taraf kısıtlayıcı değeri (b_i) ve teknolojik katsayı (a_{ij})) kesin olarak bilindiğini ve ilgili dönemde değişmeyeceğini öngörür.
- Eğer bu değerler tam olarak bilinmiyorsa, sonuç güvenilir olmayacaktır. Böyle bir durumda duyarlılık analizine başvurulabilir.

5. Negatif Olmama Varsayımı

- Karar değişkenleri (x_j) negatif değerler alamaz.

DP'nin Uygulama Alanları

Doğrusal Programlamanın Uygulama Alanları

- Ulaştırma ve dağıtım kanallar
- Beslenme ve karıştırma problemleri
- Üretim planlaması
- Yatırım planlaması
- Görev dağıtımı
- Arazi kullanımı planlaması
- Kuruluş yeri seçimi
- Oyun teorisi
- . . .

DP Modeli Kurulurken İzlenecek Adımlar

Doğrusal Programlama Modeli Kurulurken İzlenecek Adımlar

1. Karar değişkenlerinin tanımlanması ve bunların sembolize edilmesi.
2. Amacın belirlenerek amaç fonksiyonun karar değişkenlerinin doğrusal bir fonksiyonu olarak yazılması.
3. Tüm kısıtlamaların karar değişkenlerinin doğrusal bir fonksiyonları olarak eşitlik veya eşitsizlik olarak yazılması.
4. Negatif olmama koşullarının yazılması.

Örnek DP Modeli - 1 (1)

Örnek DP Modeli - 1: Kimya Firması

- İnci kimya firması X ve Y gibi iki tip kimyasal madde üretmektedir.
- 1 litre X ürününün maliyeti 160 TL, 1 litre Y ürününün maliyeti ise 240 TL dir.
- Müşteri talebine göre, firma, gelecek hafta için en az 6 litre X ve en az 2 litre Y ürünü üretmelidir.
- X ve Y kimyasal ürünlerinde kullanılan hammaddelerden birisinin sunumu azdır ve sadece 30 gr. sağlanabilmektedir.
- X ürününün bir litresinde bu hammaddeden 3 gr ve Y nin litresinde de 5 gr gerekli olmaktadır.
- İnci firması, toplam maliyetini minimize etmek için X ve Y ürünlerinden kaçar litre üretmesi gerektiği konusunda çok büyük bir kararsızlık içerisine girmiştir.
- Bu soruyu yanıtlayacak modeli kurunuz.

Örnek DP Modeli - 1 (2)

Çözüm

Karar değişkenleri:

- x_1 = Üretilecek X ürününün miktarı (litre)
- x_2 = Üretilecek Y ürününün miktarı (litre)

Minimize edilmek istenen toplam maliyet:

- $160x_1 + 240x_2$ dir.

İstenen gerekli minimum miktar:

- $x_1 \geq 6$ ve $x_2 \geq 2$ dir.

Hammadde kısıtlayıcısı:

- $3x_1 + 5x_2 \leq 30$ dur.

Çözüm

Böylece minimizasyon modeli şöyle olacaktır:

- $min \quad z = 160x_1 + 240x_2$
- $x_1 \geq 6$
- $x_2 \geq 2$
- $3x_1 + 5x_2 \leq 30$
- $x_1 \, , x_2 \geq 0$

Örnek DP Modeli - 2 (1)

Örnek DP Modeli - 2: Süt Şirketi

- Mügesüt şirketi kapasite sorunu yüzünden günde 120.000 kg. dan daha çok süt işleyemememektedir.
- Yönetim, yağ veya işlenmiş süt için kullanılan sütün dengelenmesi için peynir fabrikasında en az 10.000 kg. lık günlük süt kullanmak istemektedir.
- Bir kg. sütün yağ üretimi için kullanıldığında, kara katkısı, 4 TL., şişe sütü olarak kullanıldığında katkısı 8 TL. ve peynir üretimi için kullanıldığında ise katkısı 6 TL. dir.
- Yağ bölümü günde 60.000 kg., süt şişeleme donanımı günde 40.000 kg., peynir donanımı ise günde 30.000 kg. süt işleyebilir.
- Şirket karını maksimize etmek istediğine göre problemi doğrusal programlama modeli olarak ifade ediniz.

Örnek DP Modeli - 2 (2)

Çözüm

Karar değişkenleri:

- x_1 = Yağ yapımında kullanılan süt miktarı (kg)
- x_2 = Şişelemede kullanılan süt miktarı (kg)
- x_3 = Peynir yapımında kullanılan süt miktarı (kg)

İşletmenin karını maksimize edecek amaç fonksiyonu:

- $maks \quad z = 4x_1 + 8x_2 + 6x_3$

Çözüm

Kısıtlar ise

- $x_3 \geq 10000$
- $x_1 \leq 60000$
- $x_2 \leq 40000$
- $x_3 \leq 30000$
- $x_1 + x_2 + x_3 \leq 120000$

Negatif Olmama koşulu:

- $x_1 \, , x_2 , x_3 \geq 0$

Örnek DP Modeli - 3 (1)

Örnek DP Modeli - 3: Ulaştırma Problemi

- Üç ayrı fabrikada beyaz eşya üreten bir işletme satışlarını değişik bölgelerdeki üç depo aracılığıyla yapmaktadır.
- İşletme yönetiminin temel sorunu beyaz eşyanın fabrikalardan satış depolarına ulaştırılmasında karşılaştığı yüksek ulaştırma giderleridir.
- Fabrikalardan depolara birim ulaştırma maliyetleri aşağıda verilmiştir.
- Üretim miktarları sırasıyla 150, 200 ve 400 adettir.
- Depoların aylık istemleri A için 220, B için 150, C için 380 adettir.
- Depoların gereksinimini tam olarak sağlamak isteyen işletme, tüm üretimini toplam ulaştırma maliyetini en küçük yapacak şekilde dağıtmak istemektedir.
- Problemin doğrusal programlama modelini kurunuz.

		Depo	
Fabrika	A	B	C
1	30	25	15
2	16	45	29
3	25	10	16

Örnek DP Modeli - 3 (2)

Çözüm

Karar değişkenleri:

İlk olarak karar değişkenlerini, i'inci fabrikadan j'inci depoya taşınan beyaz eşya miktarı (adet olarak) olmak üzere x_{ij} $(i = 1, 2, 3)$ ve $(j = A, B, C)$ şeklinde tanımlayalım. Buna göre, karar değişkenleri aşağıdaki gibi olur.

- x_{1A} = 1 nolu fabrikadan A deposuna gönderilen beyaz eşya sayısı
- x_{1B} = 1 nolu fabrikadan B deposuna gönderilen beyaz eşya sayısı
- x_{1C} = 1 nolu fabrikadan C deposuna gönderilen beyaz eşya sayısı
- x_{2A} = 2 nolu fabrikadan A deposuna gönderilen beyaz eşya sayısı
- x_{2B} = 2 nolu fabrikadan B deposuna gönderilen beyaz eşya sayısı
- x_{2C} = 2 nolu fabrikadan C deposuna gönderilen beyaz eşya sayısı
- x_{3A} = 3 nolu fabrikadan A deposuna gönderilen beyaz eşya sayısı
- x_{3B} = 3 nolu fabrikadan B deposuna gönderilen beyaz eşya sayısı
- x_{3C} = 3 nolu fabrikadan C deposuna gönderilen beyaz eşya sayısı

Çözüm

Amaç: İşletmenin aylık taşıma maliyetleri toplamını en küçükleyen fonksiyon

$$
\begin{aligned}
min \quad z = {} & 30x_{1A} + 25x_{1B} + 15x_{1C} \\
& +16x_{2A} + 45x_{2B} + 29x_{2C} \\
& +25x_{3A} + 10x_{3B} + 16x_{3C}
\end{aligned}
$$

Örnek DP Modeli - 3 (3)

Çözüm

Kısıtlar ise fabrikaların üretim miktarları ile depoların gereksinim miktarlarıdır.

Herhangi bir fabrikadan üretiminden fazla taşıma yapılamayacağından ve üretimin tamamı dağıtılmak istendiğinden

- Üretim miktarı ile ilgili kısıtlayıcı fonksiyonlar.

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} = 150,$$
$$x_{21} + x_{2B} + x_{2C} = 200,$$
$$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} = 400,$$

Çözüm

- Depoların beyaz eşya gereksiniminin eksiksiz karşılanması koşulu da aşağıdaki eşitlik sistemiyle açıklanabilir.

$$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} = 220,$$
$$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} = 150,$$
$$x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} = 380,$$

Negatif Taşıma Olamayacağına Göre:

- $x_{ij} \geq 0 \; (i = 1, 2, 3)$ ve (j=A,B,C)

Örnek DP Modeli - 4 (1)

Örnek DP Modeli - 4: Beslenme Problemi

- Bir çiftçi çiftliğindeki tavukların günlük karbonhidrat, protein ve vitamin gereksinimini en küçük maliyetle karşılamak amacıyla en uygun besin maddelerini ve bunların miktarlarını belirlemek istemektedir.
- Alternatif besin maddelerinin birim maliyetleri, içerdikleri karbonhidrat, protein ve vitamin miktarları ile bunlara olan günlük gereksinim aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.
- Bu verilere göre, tavukların günlük besin gereksinimini tam olarak karşılayan en küçük maliyetli besin karışımının belirlenmesinde kullanılacak doğrusal programlama modelini kurunuz.

Besin Elemanı	Besin Türü (kg)			En Az Günlük Gereksinim
	Suni Yem	Buğday	Arpa	
Karbonhidrat (gr)	9	2	4	20
Protein (gr)	3	8	6	18
Vitamin (mgr)	1	2	6	15
Birim Fiyat (TL)	7	6	5	-

Örnek DP Modeli - 4 (2)

Çözüm

Karar değişkenleri:

- x_1 = Suni yem tüketim miktarı (kg/gün)
- x_2 = Buğday tüketim miktarı (kg/gün)
- x_3 = Arpa tüketim miktarı (kg/gün)

Amaç en az maliyetle gerekli besini sağlamaktır

- $min \quad z = 7x_1 + 6x_2 + 5x_3$

Çözüm

Kısıtlar ise

- $9x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 20$ (Karbonhidrat kısıtı)
- $3x_1 + 8x_2 + 6x_3 \geq 18$ (Protein kısıtı)
- $1x_1 + 2x_2 + 6x_3 \geq 15$ (Vitamin kısıtı)

Kısıtlardaki $\geq$ işareti alınması gereken besin elemanlarının belirtilen miktarların altına düşmeyeceğini, fakat bu miktarlardan fazla olabileceğini belitmektedir.

Negatif Olmama koşulu:

- $x_1\ , x_2, x_3 \geq 0$

Örnek DP Modeli - 5 (1)

Örnek DP Modeli - 5: Gübre

- Bereket AŞ düşük ve yüksek fosfatlı olmak üzere iki çeşit gübre üretmektedir.
- Gübreler üç farklı hammaddenin (A, B, C) karışımından oluşmaktadır.
- 1 ton yüksek fosfatlı gübre üretiminde 2 ton A, 1'er ton B ve C; 1 ton düşük fosfatlı gübre üretiminde ise A ve B'den 1'er ton kullanılmaktadır.
- İşletmenin aylık hammadde kapasitesi 150 ton A, 120 ton B, 50 ton C'dir.
- Düşük fosfatlı gübre isteminin en çok 20 ton/ay olduğu bilinmektedir.
- Yüksek fosfatlı gübrenin satış fiyatı 150 TL/ton, düşük fosfatlı gübrenin satış fiyatı ise 100 TL/ton dur.
- İşletme, toplam satış gelirini en büyüklemek için her ay her bir üründen kaç birim üretmelidir?
- Problemi doğrusal programlama olarak modelleyiniz.

Örnek DP Modeli - 5 (2)

Çözüm

Karar değişkenleri:

- x_1 = Yüksek fosfatlı gübre üretim miktarı (ton/ay)
- x_2 = Düşük fosfatlı gübre üretim miktarı (ton/ay)

Amaç fonksiyonu

- $maks \quad z = 150x_1 + 100x_2$

Çözüm

Kısıtlar ise

- $2x_1 + x_2 \leq 150$ (A hammaddesi kısıtı)
- $1x_1 + 1x_2 \leq 120$ (B hammaddesi kısıtı)
- $1x_1 + 0x_2 \leq 50$ (C hammaddesi kısıtı)
- $1x_1 \leq 20$ (Düşük fosfatlı gübre istem miktarı kısıtı)

Negatif Olmama koşulu:

- $x_1 \, , x_2 \geq 0$

Örnek DP Modeli - 6 (1)

Örnek DP Modeli - 6: Pencere Üretimi

- Biri alüminyum diğeri ahşap çerçeveli olmak üzere iki tip pencere üretimi planlanmaktadır.
- Üretim atölyelerinin günlük çalışma kapasiteleri ve her üründen bir adet üretmek için gerekli zaman (saat olarak) aşağıdaki tablodaki gibidir.

Atölye/Pencere	Alüminyum	Ahşap	Çalışma Kapasitesi (Gün/Saat)
Alüminyum	1	0	**4**
Ahşap	0	2	**12**
Cam Üretim	3	2	**18**
Birim Kar (TL)	**300**	**500**	**-**

- Alüminyum çerçeveli pencerenin kâra katkısı 300 TL, ahşap çerçevelininki ise 500 TL'dir.
- İşletme, günlük karını en büyüklemek için her üründen kaç birim üreteceğini belirlemek istemektedir.
- Buna göre, problemi doğrusal programlama modeli olarak formüle ediniz.

Örnek DP Modeli - 6 (2)

Çözüm

Karar değişkenleri:

- x_1 = Alüminyum pencere üretim miktarı (adet/gün)
- x_2 = Ahşap pencere üretim miktarı (adet/gün)

Amaç fonksiyonu

- $maks \quad z = 300x_1 + 500x_2$

Çözüm

Kısıtlar ise

- $1x_1 + 0x_2 \leq 4$ (Alüminyum atölyesi çalışma zamanı kısıtı)
- $0x_1 + 2x_2 \leq 12$ (Ahşap atölyesi çalışma zamanı kısıtı)
- $3x_1 + 2x_2 \leq 18$ (Cam atölyesi çalışma zamanı kısıtı)

Negatif Olmama koşulu:

- $x_1 \, , x_2 \geq 0$

Örnek DP Modeli - 7 (1)

Örnek DP Modeli - 7: Domates

- Hazır gıda AŞ kg'ı 0.85 TL'den 120000 kg domates alarak domates suyu ve domates salçası üretmektedir.
- Konserve edilen ürünler 12 kutuluk koliler halinde paketlenmektedir.
- Bir kutu domates suyu için 0.75 kg, bir kutu salça için 1 kg domates kullanılmaktadır.
- Şirketin pazar payı 2500 koli domates suyu, 7500 koli domates salçası olarak belirlenmiştir.
- Bir koli domates suyunun satış fiyatı 36 TL, bir koli salçanın satış fiyatı 18 TL dir.
- Toplam satış gelirinin en büyük olmasını isteyen işletmenin üretim planını belirleyiniz.

Örnek DP Modeli - 7 (2)

Çözüm

Karar değişkenleri:

- x_1 = Domates suyu kolisi miktarı (adet)
- x_2 = Domates salçası kolisi miktarı (adet)

Amaç fonksiyonu

- $maks \quad z = 36x_1 + 18x_2$

Çözüm

Kısıtlar ise

- $9x_1 + 12x_2 \leq 120000$ (Domates miktarı kısıtı)
- $x_1 \leq 2500$ (Domates suyu pazar payı kısıtı)
- $x_2 \leq 7500$ (Salça pazar payı kısıtı)

Negatif Olmama koşulu:

- $x_1, x_2 \geq 0$

Örnek DP Modeli - 8 (1)

Örnek DP Modeli - 8: Yatırım Planı

- Cihan Bey 60 milyon TL tutarındaki emekli ikramiyesi ile yıllık gelirini en büyük yapacak yatırımlara girmeyi planlamaktadır.
- Cihan Bey için uygun yatırım seçenekleri ile bu yatırımların yıllık getiri oranları aşağıdaki tabloda verilmiştir.
- Cihan Bey'in amacı, yıllık getirisi en büyük olan yatırım planını belirlemektir.
- Cihan Bey karşılaşabileceği risklere karşın aşağıdaki prensip kararlarını almıştır.
  a. Banka mevduatı, devlet tahvili ile altına yatırımların toplamına eşit olmalıdır.
  b. Altına yatırım, nakit olarak saklanan paranın %30'undan fazla olmalıdır.
  c. Hisse senedi yatırımı 15 milyon TL'yi geçmemelidir.
  d. Devlet tahvili yatırımı en fazla 10 milyon TL olmalıdır.

Yatırım Seçeneği (Milyon TL)	Getiri Oranı (%)
Banka Mevduatı	52
Hisse Senedi	40
Devlet Tahvili	32
Altın	16
Nakit	-5

Örnek DP Modeli - 8 (2)

Çözüm

Karar değişkenleri:

- x_1 = Banka mevduatı yatırım miktarı
- x_2 = Hisse senedi yatırım miktarı
- x_3 = Devlet tahvili yatırım miktarı
- x_4 = Altına yatırım miktarı
- x_5 = Nakit olarak ayrılan para miktarı

Amaç fonksiyonu

$$\begin{aligned} maks \quad z &= 0.52x_1 + 0.40x_2 + 0.32x_3 \\ &\quad + 0.16x_4 - 0.05x_5 \end{aligned}$$

Çözüm

Kısıtlar ise

a. Banka mevduatı (x_1), devlet tahvili (x_3) ile altına (x_4) yatırımların toplamına eşit olmalıdır. Buna göre,

- $x_1 = x_3 + x_4$

Doğrusal programlamadaki kısıtlayıcı fonksiyonların sağ taraflarında bir sabit olması gerekmektedir. Buna göre denklem tekrar düzenlenirse

- $x_1 - x_3 - x_4 = 0$ olur.

Örnek DP Modeli - 8 (3)

Çözüm

Kısıtlar (Devam):

b. Nakit olarak ayrılan paranın x_5 olduğu düşünülürse, altına yapılan yatırıma ilişkin kısıtlayıcı aşağıdaki gibi formüllenir.

$x_4 \leq 0.30x_5$ ya da $x_4 - 0.30x_5 \leq 0$

c. $x_2 \leq 15$ (Hisse senedi yatırımı)

d. $x_3 \leq 10$ (Devlet tahvili yatırımı)

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 60$ (Paranın tamamının değerlendirilmesi kısıtı)

Çözüm

Negatif Olmama koşulu:

- $x_2 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$