

Zadanie numeryczne 02

Autor: Eryk Stępień

22.11.2023

Spis treści:

1. Problem
2. Program
 1. Użyte narzędzia
 2. Kompilacja i uruchomienie
 3. Opis działania programu
3. Analiza wyników
 1. Wykres czasu działania algorytmu

1. Problem

Zadana jest macierz A mająca liczby 12 na diagonalu, 8 na pierwszej pozycji nad diagonalą, a pozostałe elementy są równe 1 oraz wektor $b = (5, \dots, 5)^T$. Wymiary macierzy ustalamy na $N = 80$.

- Rozwiąż numerycznie równanie $Ay = b$, stosując odpowiednią metodę. Uwaga: algorytm należy go zaimplementować samodzielnie
- Sprawdź swój wynik przy użyciu procedur bibliotecznych lub pakietów algebry komputerowej
- Potraktuj N jako zmienną i zmierz czas potrzebny do uzyskania rozwiązania w funkcji N . Wynik przedstaw na wykresie. Czy wykres jest zgodny z oczekiwaniami?

2. Program

2.1 Użyte narzędzia

Program został napisany w języku Python 3.10. Przy zastosowaniu środowiska PyCharm 2023.2.2. Korzysta on z następujących bibliotek:

- Numpy
- Scipy.linalg
- Timeit
- Matplotlib.pyplot

2.2 Kompilacja i uruchomienie

W celu kompilacji należy wywołać poniższą komendę w terminalu:

```
python NUM4.py
```

2.3 Opis działania programu

Program korzysta w celu obliczenia wektora x ze wzoru Shermana-Morrisona

$$(1) \quad (A + uv^T)\vec{x} = \vec{b}$$

$$(2) \quad \vec{x} = (A + uv^T)^{-1}\vec{b} = \underbrace{A^{-1}\vec{b}}_{\vec{y}} - \frac{\overbrace{A^{-1}\vec{u}}^{\vec{z}} \overbrace{v^T A^{-1}\vec{b}}^{\vec{y}}}{1 + \underbrace{v^T A^{-1}\vec{u}}_{\vec{z}}}}$$
$$\begin{cases} A'\vec{y} = \vec{b} \\ A'\vec{z} = \vec{u} \end{cases}$$

Przy czym:

$$A = A' + \vec{u}\vec{v}^T$$

A' jest macierzą rzadką posiadającą na diagonalu elementy wynoszące 11, na pierwszej pozycji nad diagonalą elementy wynoszące 7, a reszta elementów jest równa 0. Wektory u i v mają postać $(1, \dots, 1)$

Program zapisuje macierz A' w postaci $2 \times N$. Następnie oblicza $A'y = b$ (w $O(N)$), $A'z = u$ (również $O(N)$) oraz podstawia obliczone w ten sposób wektory y i z do wzoru Shermana-Morrisa otrzymując w ten sposób szukany wektor x . Wyświetlany jest x dla $N = 80$ oraz ten sam x dla $N = 80$, ale obliczony za pomocą bibliotek.

Mierzony jest również czas trwania algorytmu dla N od 0 do 1000 i sporządzany jest wykres czasu działania algorytmu.

3. Analiza wyników

Wektor x obliczony za pomocą algorytmu dla $N = 80$:

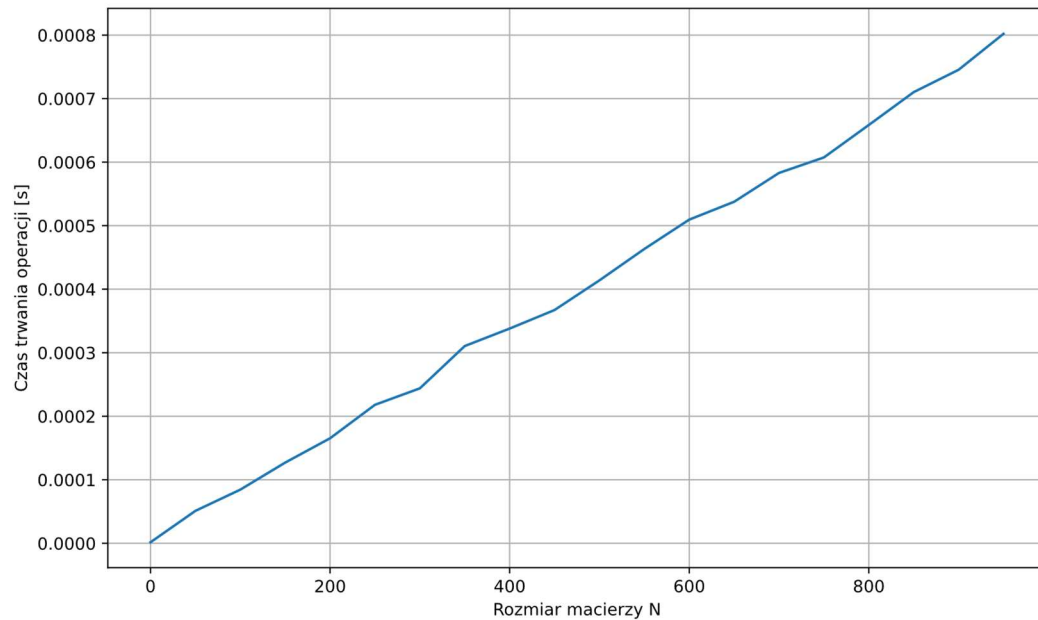
```
0.05081874647092044
0.050818746470920495
0.05081874647092047
0.05081874647092052
0.05081874647092041
      ⋮
0.04248490245229605
0.06391478707161591
0.03023925409839895
0.08315794877059712
```

Wektor x obliczony za pomocą bibliotek dla $N = 80$:

```
0.05081875
0.05081875
0.05081875
0.05081875
0.05081875
      ⋮
0.0424849
0.06391479
0.06391479
0.08315795
```

Wyniki są sobie równe z tą różnicą, że wynik uzyskany za pomocą algorytmu jest większej precyzji.

3.1 Wykres czasu działania programu



Wykres jest potwierdzeniem tego, że wszystkie funkcje użyte przy obliczaniu rozwiązania mają złożoność $O(N)$. Jak widać, z powyższego wykresu czas działania algorytmu rośnie liniowo wraz ze wzrostem wymiarów macierzy.