Zadanie numeryczne 01

Autor: Eryk Stępień

18.10.2023

Spis treści:

1. Problem

Napisz program wyliczający przybliżenie pochodnej ze wzorów:

(a) $D_h f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

(b) $D_h f(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$

Przeanalizuj, jak zachowuje się błąd $|D_h f(x) - f'(x)|$ dla funkcji $f(x) = \sin(x^2)$ oraz punktu x = 0.2, przy zmianie parametry *h* dla różnych typów zmiennoprzecinkowych *(float, double)*. Wykreśl $|D_h f(x) - f'(x)|$ w funkcji *h* w skali logarytmicznej. Poeksperymentuj również używając innych funkcji i punktów.

2. Program

2.1 Użyte narzędzia

Program został napisany w języku Python 3.10. Przy zastosowaniu środowiska PyCharm 2023.2.2. Korzysta on z następujących bibliotek:

- Numpy
- Matplotlib

2.2 Kompilacja i uruchomienie

W celu kompilacji należy wywołać poniższą komendę w terminalu:

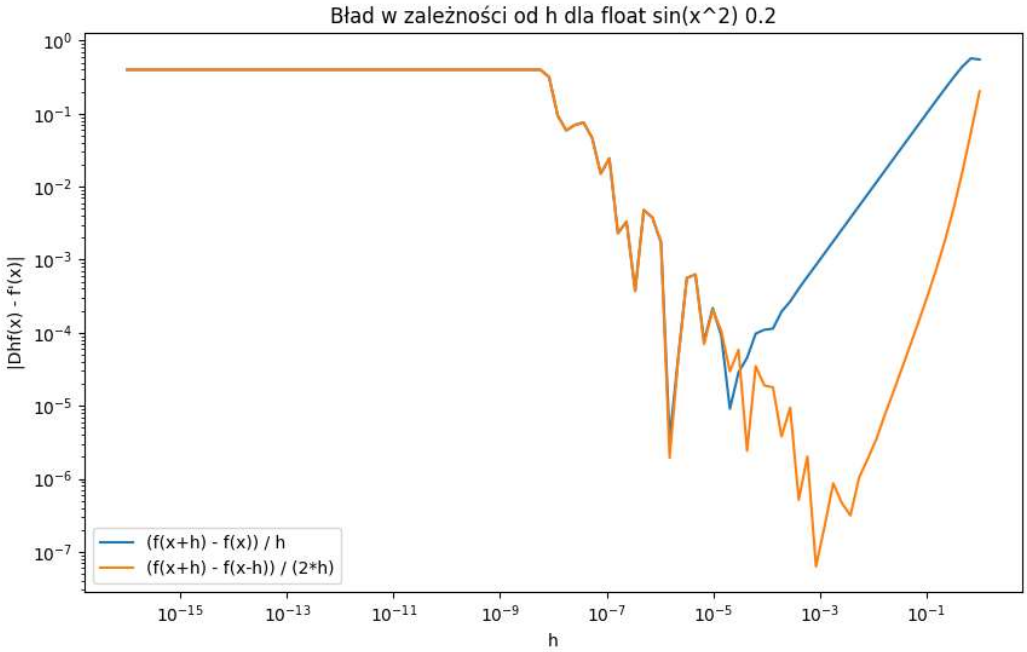
python NUM1.py

2.3 Przewidywane rezultaty uruchomienia programu

Wynikiem działania programu powinny być 14 wykresów obrazujących zmianę błędu w zależności od wartości *h*.

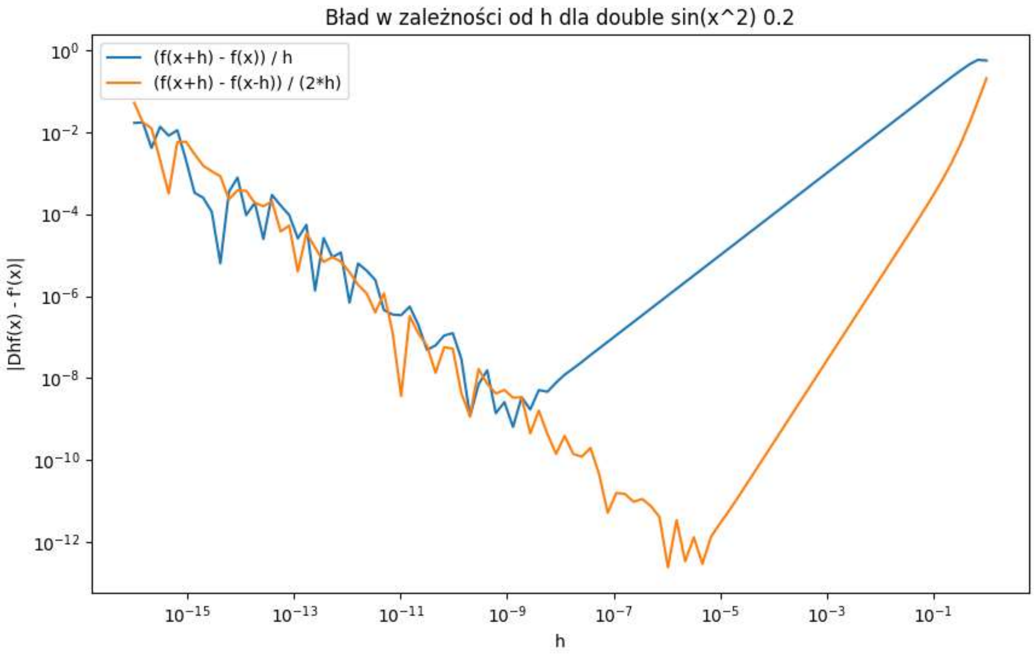
3. Analiza problemu dla funkcji $f(x) = \sin(x^2)$ i x = 0.2

3.1 Zachowanie błędu dla typu float



Dla *h* <= 10^{-9} błąd dla obu przybliżeń jest funkcją stałą, której wartości mieszczą się między 0.1 a 1. Po osiągnięciu wartości *h* > 10^{-9} błąd zaczyna się zmniejszać dla obu funkcji. W przypadku $D_h f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ osiąga on najmniejszą wartość wynosząc w oszacowaniu 10^{-6} dla *h* wynoszącego ok. 10^{-6} następnie wykres zaczyna rosnąć, aż do osiągnięcia błędu ok. 10^{-3} by następnie, wraz ze wzrostem wartości *h* maleć. Dla *h* > 10^{-5} błąd zaczyna rosnąć w sposób zbliżony do liniowego. W przypadku $D_h f(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ zmiana naszego błędu w zależności od *h* przebiega niemal identycznie jak dla pierwszego przybliżenia, z tym wyjątkiem, że po przekroczeniu *h* > 10^{-6} błąd nadal maleje, aż do osiągnięci swojego minimum (10^{-7}) dla h wynoszącego około 10^{-3}. Po przekroczeniu tej granicy i dalszym zwiększaniu *h* błąd będzie wzrastał w sposób zbliżony do liniowego.

3.2 Zachowanie błędu dla typu double

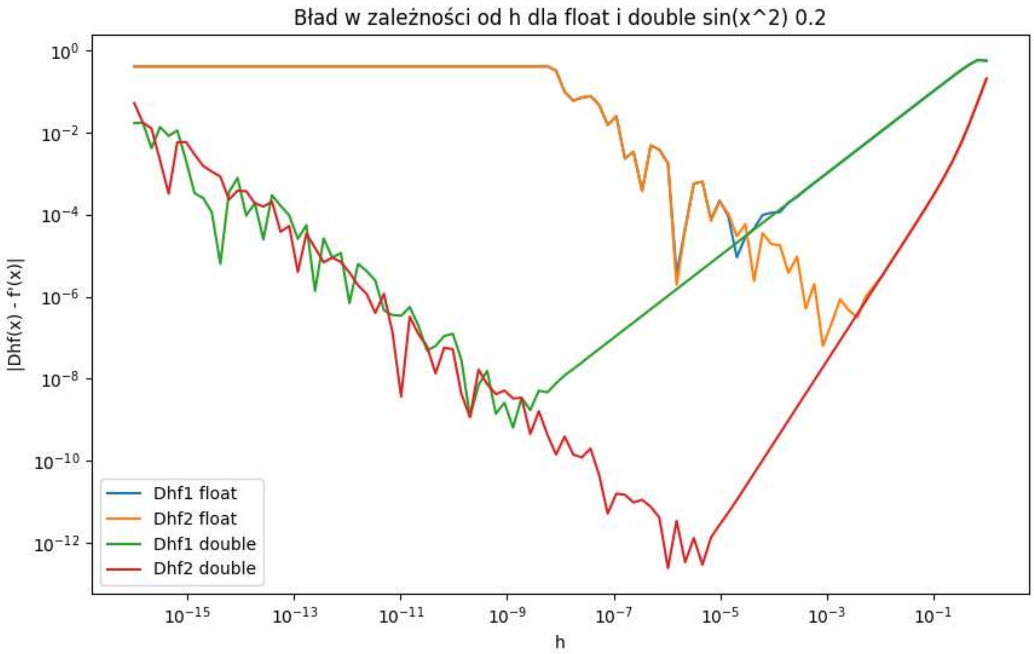


W przypadku typu *double* błąd maleje wraz ze wzrostem *h* dla obydwu funkcji przybliżających.

Dla $D_h f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ maleje on, aż do osiągnięcia swojej najmniejszej wartości wynoszącej około 10^{-9} dla *h* równego ok. 10^{-9}. Po przekroczeniu tej granicy, wraz z dalszym wzrostem h, błąd zaczyna rosnąć w sposób zbliżony do liniowego.

Dla $D_h f(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ błąd maleje, aż do osiągnięcia najmniejszej wartości wynoszącej ok. 10^{-1} dla h wynoszącego ok. 10^{-6}. Po przekroczeniu tej granicy, wraz z dalszym wzrostem h, błąd zaczyna rosnąć w sposób zbliżony do liniowego.

3.3 Podsumowanie i wnioski



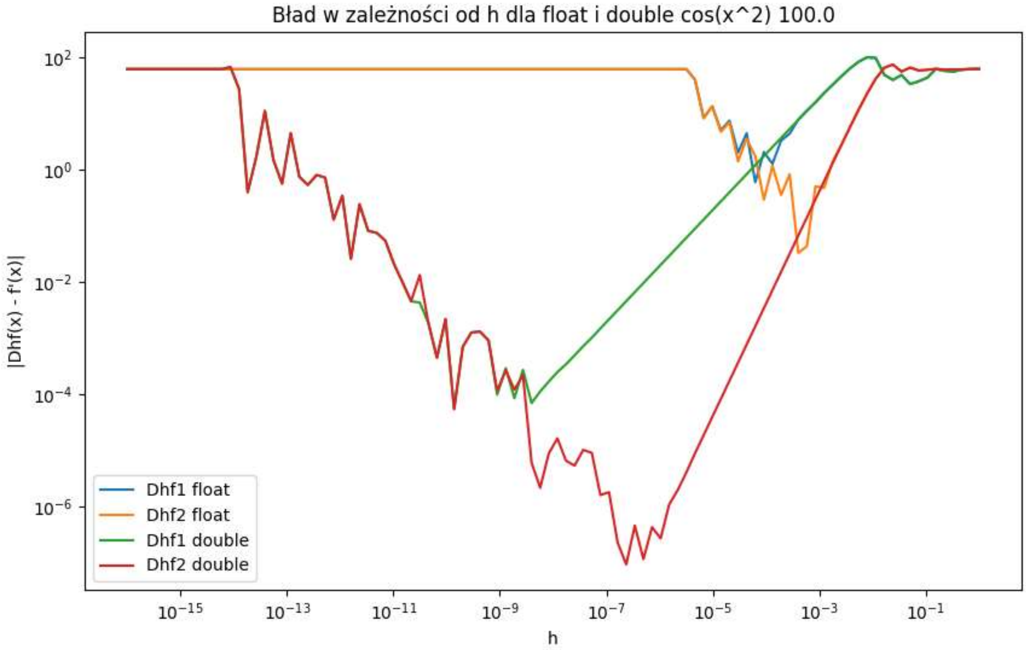
Przy użyciu $D_h f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ otrzymujemy:

- Dla float: Błąd minimalny wynoszący około 10^{-6} dla *h* optymalnego wynoszącego około 10^{-6}
- Dla double: Błąd minimalny wynoszący około 10^{-9} dla *h* optymalnego wynoszącego około. 10^{-9}

Przy użyciu $D_h f(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ otrzymujemy:

- Dla float: Błąd minimalny wynoszący około 10^{-7} dla *h* optymalnego wynoszącego około 10^{-3}.
- Dla double: Błąd minimalny wynoszący około 10^{-12} dla *h* optymalnego wynoszącego około 10^{-6}.

4 Analiza problemu dla funkcji $f(x) = \cos(x^2)$ i x = 100



Przy użyciu $D_h f(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ otrzymujemy:

- Dla float: Stały wykres błędu dla *h* <= 10^{-7}. Wraz z dalszym wzrostem h wykres maleje, aż do osiągnięcia błędu minimalnego wynoszącego około 1 dla *h* optymalnego wynoszącego około 10^{-5}. Przy dalszym wzroście *h* błąd zaczyna się zwiększać.
- Dla double: Stały wykres błędu dla *h* <= 10^{-14}. Wraz z dalszym wzrostem h wykres maleje, aż do osiągnięcia błędu minimalnego wynoszącego około 10^{-4}. dla *h* optymalnego wynoszącego około 10^{-9}. Przy dalszym wzroście *h* błąd zaczyna się zwiększać.

Przy użyciu $D_h f(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ otrzymujemy:

- Dla float: Stały wykres błędu dla *h* <= 10^{-7}. Wraz z dalszym wzrostem h wykres maleje, aż do osiągnięcia błędu minimalnego wynoszącego około 10^{-1} dla *h* optymalnego wynoszącego około 10^{-4}. Przy dalszym wzroście *h* błąd zaczyna się zwiększać.
- Dla double: Stały wykres błędu dla *h* <= 10^{-14}. Wraz z dalszym wzrostem h wykres maleje, aż do osiągnięcia błędu minimalnego wynoszącego około 10^{-7}. dla *h* optymalnego wynoszącego około 10^{-7}. Przy dalszym wzroście *h* błąd zaczyna się zwiększać.