Zadanie numeryczne 03

Autor: Eryk Stępień

22.11.2023

Spis treści:

# 1. Problem

Wyznacz $y = A^{-1}x$ dla

$$A = \begin{pmatrix} 1.2 & \frac{0.1}{1} & \frac{0.15}{1^2} & & & & & \\ 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{2} & \frac{0.15}{2^2} & & & & \\ & 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{3} & \frac{0.15}{3^2} & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{N-2} & \frac{0.15}{(N-2)^2} \\ & & & & & 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{N-1} \\ & & & & & & 0.2 & 1.2 \end{pmatrix}$$

Oraz $x = (1, 2, \ldots, N)^T$. Ustalmy *N* = 124. Oblicz również wyznacznik macierzy **A**. Zdanie rozwiąż właściwą metodą (uzasadnij wybór) i wykorzystaj strukturę macierzy. Algorytm proszę zaprogramować samodzielnie; wyjątkowo nie należy stosować procedur bibliotecznych z zakresu algebry liniowej ani pakietów algebry komputerowej (chyba, że do sprawdzenia swojego rozwiązania, co zawsze jest mile widziane). Ponadto, potraktuj *N* jako zmienną i zmierz czas działania swojego programu w funkcji N. Wynik przedstaw na wykresie. Jakiej zależności się spodziewamy?

# 2. Program

## 2.1 Użyte narzędzia

Program został napisany w języku Python 3.10. Przy zastosowaniu środowiska PyCharm 2023.2.2. Korzysta on z następujących bibliotek:

- Numpy
- Scipy.linalg
- Timeit
- Matplotlib.pyplot

## 2.2 Kompilacja i uruchomienie

W celu kompilacji należy wywołać poniższą komendę w terminalu:

*python NUM3.py*

# 3. Rozwiązanie

## 3.1 Użyta metoda

Do rozwiązania równania program wykorzystuje faktoryzację LU. Z racji, że macierz **A** jest macierzą rzadką o elementach niezerowych na diagonali, na jednym paśmie pod diagonalą i na dwóch pasmach nad diagonalą możemy użyć zredukowanych wzorów na elementy u i l macierzy LU:

$$u_{ii} = a_{ii} - l_{ii-1} * u_{i-1i}$$

$$u_{ii+1} = a_{ii+1} - l_{ii-1} * u_{i-1i+1}$$

$$u_{ii+1} = a_{ii+2}$$

$$l_{i+1i} = \frac{a_{i+1i}}{u_{ii}}$$

Na podstawie L i U wyliczany jest **y** oraz wyznacznik macierzy **A**.

## 3.2 Opis działania programu

Program korzysta z faktu, że macierz **A** jest wstęgowa, więc w celu oszczędzania pamięci zapisujemy w postaci tablicy [4 x N]. Przykład zapisu dla N = 4:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0.2 | 0.2 | 0.2 | 0 |
| 1.2 | 1.2 | 1.2 | 1.2 |
| $\frac{0.1}{1}$ | $\frac{0.1}{2}$ | $\frac{0.1}{3}$ | 0 |
| $\frac{0.15}{1^2}$ | $\frac{0.15}{2^2}$ | 0 | 0 |

L i U zapisywane są jako jedna tablica [4 x N]. Przykład zapisu dla N = 4:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $u_{13}$ | $u_{24}$ | $0$ | 0 |
| $u_{12}$ | $u_{23}$ | $u_{34}$ | 0 |
| $u_{11}$ | $u_{22}$ | $u_{33}$ | $u_{44}$ |
| $l_{21}$ | $l_{32}$ | $l_{43}$ | 0 |

Nie ma potrzeby przechowywać elementów $l_{ii}$. Algorytm nie wykorzystuje tych elementów, a i wartość i tak zawsze wynosi 1.

Program najpierw rozwiązuje i wyświetla wynik równania wraz z wyznacznikiem macierzy **A** dla N = 124. Następnie wyświetla rozwiązania poszczególnych etapów przy pomocy bibliotek.

# 3. Analiza wyników

## 3.1 Rozwiązanie równania oraz obliczenie wyznacznika **A**

Za pomocą algorytmu dla N = 124 otrzymujemy:

$$
\begin{array}{l}
0.44870082772873293 \\
1.4132732869357947 \\
2.1348778535462736 \\
\vdots \\
87.19279247126808 \\
87.90778524137869 \\
88.68203579310355 \\
Wyznacznik\ A = \ 6141973498.857843
\end{array}
$$

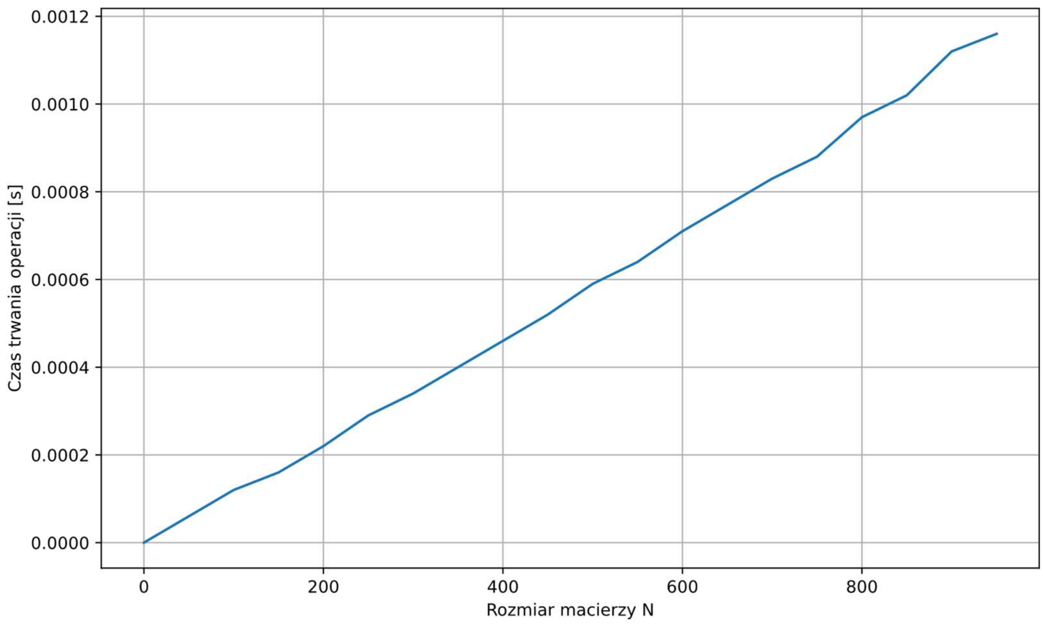
Za pomocą bibliotek dla tego samego N otrzymujemy:

$$
\begin{array}{l}
0.44870083 \\
1.41327329 \\
2.13487785 \\
\vdots \\
87.19279247 \\
87.90778524 \\
88.68203579 \\
Wyznacznik\ A = \ 6141973498.857843
\end{array}
$$

Są to identyczne wartości **y**, jednak rozwiązanie za pomocą algorytmu zapewnia większą precyzję.

Program oblicza czas rozwiązywania równania dla N od 0 do 1000 przy każdorazowym zmianie N o 50 oraz tworzy wykres zależności czasu od podanej wartości N

## 3.2 Wykres czasu działania algorytmu




Użyte w programie funkcje mają złożoność obliczeniową O(n). Powyższy wykres potwierdza, że czas działania programu rośnie w sposób liniowy wraz ze wzrostem wymiarów macierzy **A**.