Relatório do Laboratório 3 - Projeto de Servomotor de Velocidade

Eric Guerra Ribeiro

16 de maio de 2022

1 Planta Servomotor

O estudo em questão se trata da análise de controladores de um servomotor. A dinâmica deste dispositivo é dada por Eq.1, 2, 3.

$$\begin{cases} J_{eq}\dot{\omega}_m + B_{eq}\omega_m = \tau_m + \frac{\tau_e}{N\eta} \\ V - K_t\omega_m = L\dot{i} + Ri \end{cases} \tag{1}$$

$$\tau_m = K_t i \tag{2}$$

$$\omega_m = N\omega_l \tag{3}$$

Assim, a partir de Eq.1, 2, 3 e considerando um estado estacionário, ou seja, $\dot{\omega}_m = 0$ e $\dot{i} = 0$, temos que a tensão final para um determinado ω_l e τ_e é dada por Eq.4.

$$V = N\left(K_t + \frac{RB_{eq}}{K_t}\right)\omega_l - \frac{R\tau_e}{K_t N\eta} \tag{4}$$

O servomotor analisado possui como parâmetros $R = 1.2\ \Omega$, $L = 0.56\ mH$ $K_t = 0.0255\ N/Am$, $N = 3$, $\eta = 94\%$, $J_{eq} = 111.8\ g\,cm^2$, $B_{eq} = 0.81224\ dyn\,s/m$.

2 Controlador P + *Feedforward*

Para o projeto de um servomotor, primeiramente foi utilizado um controlador P + *feedforward*, conforme o diagrama da Fig.1.

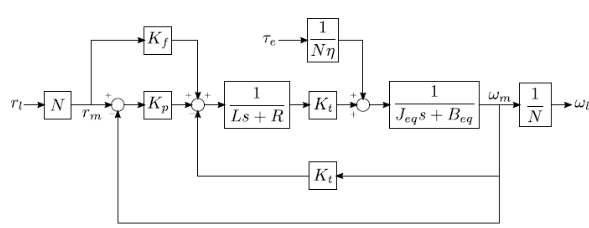


Figura 1: Diagrama de blocos do servomotor com controlador P + *feedforward*.

Podemos encontrar a função de transferência $G_R(s) = \frac{\Omega_l(s)}{R_l(s)}$ a partir do diagrama e do princípio da superposição, como em Eq.5.

$$
\begin{aligned}
N\Omega_l(s) &= \left(\left(NR_l(s) - N\Omega_l(s)\right)K_p + K_f NR_l(s) - K_t N\Omega_l(s)\right)\frac{K_t}{(Ls+R)(J_{eq}s+B_{eq})} \\
N\Omega_l(s) &= N\left(\left(K_p+K_f\right)R_l(s) - \left(K_p+K_t\right)\Omega_l(s)\right)\frac{K_t}{(Ls+R)(J_{eq}s+B_{eq})} \\
\frac{\Omega_l(s)}{R_l(s)} &= \left(\left(K_p+K_f\right) - \left(K_p+K_t\right)\frac{\Omega_l(s)}{R_l(s)}\right)\frac{K_t}{(Ls+R)(J_{eq}s+B_{eq})} \\
\therefore G_R(s) &= \frac{K_t\left(K_p+K_f\right)}{(Ls+R)(J_{eq}s+B_{eq}) + K_t\left(K_p+K_t\right)}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Analogamente para $G_D(s) = \frac{\Omega_l(s)}{T_e(s)}$, temos a Eq.6.

$$
\begin{aligned}
N\Omega_l(s) &= \left(T_e(s)\frac{1}{N\eta} + \frac{K_t}{Ls+R}\left(K_p(-N\Omega_l(s)) - K_t N\Omega_l(s)\right)\right)\frac{1}{J_{eq}s+B_{eq}} \\
N\frac{\Omega_l(s)}{T_e(s)} &= \left(\frac{1}{N\eta} - \frac{NK_t(K_p+K_t)}{Ls+R}\frac{\Omega_l(s)}{T_e(s)}\right)\frac{1}{J_{eq}s+B_{eq}} \\
\therefore G_D(s) &= \frac{Ls+R}{N^2\eta\left((Ls+R)(J_{eq}s+B_{eq}) + K_t(K_p+K_t)\right)}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Para $L \approx 0$, temos as Eq.7, 8 para $G_R(s)$ e $G_D(s)$, respectivamente.

$$
G_R(s) = \frac{K_t\left(K_p+K_f\right)}{R(J_{eq}s+B_{eq}) + K_t\left(K_p+K_t\right)} = \frac{K_t(K_p+K_f)}{RB_{eq}+K_t(K_p+K_t)} \cdot \frac{1}{\frac{RJ_{eq}}{RB_{eq}+K_t(K_p+K_t)}s+1}
\tag{7}
$$

$$
G_D(s) = \frac{R}{N^2\eta\left(R(J_{eq}s+B_{eq}) + K_t(K_p+K_t)\right)}
\tag{8}
$$

A partir da Eq.7, se observa que $G_R(s)$ é de primeira ordem, então sua constante de tempo é dada por Eq.9.

$$
\tau = \frac{RJ_{eq}}{RB_{eq}+K_t(K_p+K_t)}
\tag{9}
$$

Com base na Eq.9, se pode calcular K_p, dado por Eq.10.

$$
K_p = \frac{1}{K_t}\left(\frac{RJ_{eq}}{\tau} - RB_{eq}\right) - K_t
\tag{10}
$$

O K_f é determinado de forma que o sistema não tenha, para entrada de degrau unitário, erro em regime, o qual é expresso por Eq.11. Assim, K_f é dado por Eq.12, usando a função de transferência de Eq.7.

$$
e_{\infty,R} = \lim_{s\to0} sE_R(s) = \lim_{s\to0} sR_l(s)\left(1-G_R(s)\right) = \lim_{s\to0} s\frac{1}{s}\left(1-G_R(s)\right) = \lim_{s\to0} 1-G_R(s)
\tag{11}
$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\to0} 1-G_R(s) &= \lim_{s\to0} 1 - \frac{K_t(K_p+K_f)}{RB_{eq}+K_t(K_p+K_t)} \cdot \frac{1}{\frac{RJ_{eq}}{RB_{eq}+K_t(K_p+K_t)}s+1} \\
&= \lim_{s\to0} 1 - \frac{K_t(K_p+K_f)}{RB_{eq}+K_t(K_p+K_t)} \\
&= 1 - \frac{K_t(K_p+K_f)}{RB_{eq}+K_t(K_p+K_t)} \\
&= 0 \\
\therefore K_f &= K_t + \frac{RB_{eq}}{K_t}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Porém, mesmo quando $L > 0$ o erro em regime continua sendo nulo com o K_f de Eq.12, como mostra Eq.13.

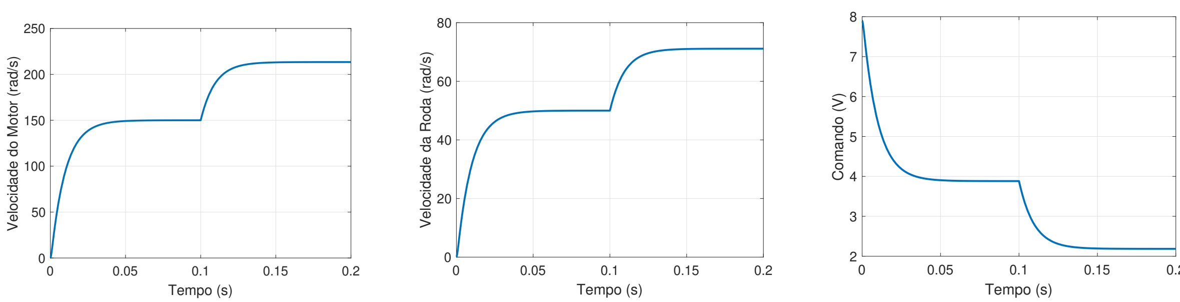
$$\begin{aligned}
e_{\infty,\,R} &= \lim_{s\to 0} 1 - G_R(s) \\
&= \lim_{s\to 0} 1 - \frac{K_t\,(K_p + K_f)}{(Ls+R)(J_{eq}s + B_{eq}) + K_t\,(K_p + K_t)} \\
&= 1 - \frac{K_t\,(K_p + K_f)}{RB_{eq} + K_t\,(K_p + K_t)} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{13}$$

Porém, ainda há o erro gerado pelo distúrbio, dado por Eq.14 para distúrbio degrau. Considerando a expressão de $G_D(s)$ da Eq.6, temos que o erro em regime por causa do distúrbio é dado por Eq.15.

$$e_{\infty,\,D} = \lim_{s\to 0} sE_D(s) = \lim_{s\to 0} -sT_e(s)G_D(s) = \lim_{s\to 0} -s\frac{1}{s}\tau_e G_D(s) = \lim_{s\to 0} -\tau_e G_D(s) \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
e_{\infty,\,D} &= \lim_{s\to 0} -\tau_e G_D(s) \\
&= \lim_{s\to 0} -\tau_e \frac{Ls+R}{N^2\eta\,((Ls+R)(J_{eq}s + B_{eq}) + K_t(K_p + K_t))} \\
&= -\tau_e \frac{R}{N^2\eta\,(RB_{eq} + K_t(K_p + K_t))} \\
&= -\frac{\tau\tau_e}{J_{eq}N^2\eta}
\end{aligned} \tag{15}$$

Analisando o sistema de servomotor descrito em 1, para o controlador projetado com $\tau = 0.01\ s$, com referência degrau com 50 rad/s de amplitude (começando em $t = 0\ s$) e com distúrbio degrau com amplitude de 0.2 Nm (começando em $t = 0.1\ s$) temos os gráficos da Fig.2.



(a) Gráfico da velocidade angular do motor.

(b) Gráfico da velocidade angular da roda.

(c) Gráfico do comando dado pela fonte de tensão.

Figura 2: Gráficos das velocidades angulares do motor e da roda e do comando resultante da simulação do controlador.

Perceba que dos gráficos das Fig.2a, 2b, a razão $\frac{\omega_m}{\omega_l} = 3 = N$, como esperado. Além disso, como $L \approx 0$, das Eq.7, 8 as funções de transferência $G_R(s)$ e $G_D(s)$ são de 1º grau. Então o comportamento esperado é o oposto de uma exponencial decrescente que é o comportamento de ω_m e ω_l em Fig.2a, 2b tanto antes quanto depois do início da perturbação. Como a perturbação se inicia depois da estabilização das velocidades angulares, é fácil ver a exponencial gerada pela referência (a primeira) e a gerada pela perturbação (a segunda), porque elas não estão sobrepostas.

Para analisar os erros em regime, basta usar o princípio da superposição. Pela Eq.11, não há erro em regime por causa do controlador não conseguindo estabilizar na referência. Assim, por Eq.15, o erro em regime é dado apenas pelo erro gerado pela perturbação, que para o servomotor e controlador em questão é de $-21.1\ rad/s$ para ω_l. Esse comportamento é o indicado pelo gráfico da Fig.2b, com um valor em regime antes da perturbação de $50\ rad/s$ (igual a referência) e, depois da perturbação de $71.1\ rad/s$.

Pela Eq.4 podemos também comparar o esperado pela teoria com os resultados do gráfico da Fig.2c. No primeiro estado estacionário ($\omega_l = 50\ rad/s$ e $\tau_e = 0\ N/m$) a tensão esperada é de $3.88\ V$ que é igual ao resultado do gráfico. No segundo estado estacionário ($\omega_l = 71.1\ rad/s$ e $\tau_e = 0.2\ N/m$) a tensão esperada é de $2.18\ V$ que novamente é igual ao resultado do gráfico.

3 Controlador PI com Pré-Filtro

Para o projeto de um servomotor, também foi estudado um controlador PI com Pré-Filtro, conforme o diagrama da Fig.3 e as Eq.16, 17.

$$F(s) = \frac{K_i}{K_p s + K_i} \tag{16}$$

$$C(s) = \frac{K_p s + K_i}{s} \tag{17}$$

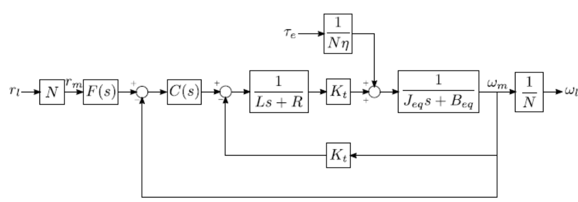


Figura 3: Diagrama de blocos do servomotor com controlador PI com Pré-Filtro.

Podemos encontrar a função de transferência $G_R(s) = \frac{\Omega_l(s)}{R_l(s)}$ a partir do diagrama e do princípio da superposição, como em Eq.18.

$$\begin{aligned}
N\Omega_l(s) &= \left(\left(NR_l(s)\frac{K_i}{K_p s + K_i} - N\Omega_l(s)\right)\frac{K_p s + K_i}{s} - K_t N\Omega_l(s)\right)\frac{1}{Ls+R}K_t\frac{1}{J_{eq}s + B_{eq}} \\
\frac{\Omega_l(s)}{R_l(s)} &= \left(\frac{K_i}{s} - \left(\frac{K_p s + K_i}{s} + K_t\right)\frac{\Omega_l(s)}{R_l(s)}\right)\frac{K_t}{(Ls+R)(J_{eq}s+B_{eq})} \\
\therefore G_R(s) &= \frac{K_t K_i}{s(Ls+R)(J_{eq}s+B_{eq}) + K_t(K_p+K_t)s + K_i K_t}
\end{aligned} \tag{18}$$

Analogamente para $G_D(s) = \frac{\Omega_l(s)}{T_e(s)}$, temos a Eq.19.

$$\begin{aligned}
N\Omega_l(s) &= \left(\left(-N\Omega_l(s)\frac{K_p s + K_i}{s} - NK_t\Omega_l(s)\right)\frac{K_t}{Ls+R} + \frac{T_e}{N\eta}\right)\frac{1}{J_{eq}s+B_{eq}} \\
(J_{eq}s + B_{eq})\frac{\Omega_l(s)}{T_e(s)} &= \frac{1}{N^2\eta} - \frac{K_t}{Ls+R}\left(\frac{K_p s + K_i}{s} + K_t\right)\frac{\Omega_l(s)}{T_e(s)} \\
\therefore G_D(s) &= \frac{s(Ls+R)}{N^2\eta(s(J_{eq}s+B_{eq})(Ls+R) + K_t(K_p+K_t)s + K_t K_i)}
\end{aligned} \tag{19}$$

Para $L \approx 0$, temos as Eq.20, 21 para $G_R(s)$ e $G_D(s)$, respectivamente.

$$G_R(s) = \frac{\frac{K_tK_i}{RJ_{eq}}}{s^2 + \frac{RB_{eq}+K_t(K_p+K_t)}{RJ_{eq}} + \frac{K_tK_i}{RJ_{eq}}} \tag{20}$$

$$G_D(s) = \frac{s(Ls+R)}{N^2\eta(s(J_{eq}s+B_{eq})(Ls+R)+K_t(K_p+K_t)s+K_tK_i)} \tag{21}$$

A partir da Eq.20, se observa que $G_R(s)$ é de segunda ordem, então ω_n e ξ são dados pelo sistema de equações da Eq.22.

$$\begin{cases} \omega_n^2 = \frac{K_tK_i}{RJ_{eq}} \\ 2\xi\omega_n = \frac{RB_{eq}+K_t(K_p+K_t)}{RJ_{eq}} \end{cases} \tag{22}$$

Pelos requisitos do projeto, $t_r|_{0\%}^{100\%} = 0.02\ s$, $Mp = 0.046$. Portanto, podemos encontrar ξ e ω_n a partir das Eq.23 e 24, respectivamente.

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{ln\ M_p}\right)^2}} \tag{23}$$

$$\omega_n = \frac{\pi - arccos\xi}{t_r|_{0\%}^{100\%}\sqrt{1-\xi^2}} \tag{24}$$

Com base nas Eq.22, 23, 24, podemos calcular K_i e K_p por Eq.25, 26, respectivamente.

$$K_i = \frac{RJ_{eq}\omega_n^2}{K_t} \tag{25}$$

$$K_p = \frac{R}{K_t}(2J_{eq}\xi\omega_n - B_{eq}) - K_t \tag{26}$$

Analisando o erro em regime do sistema, valendo-se das Eq.11 e 14. Assim, usando as Eq.18 e 19, temos que os erros em regime são nulos por Eq.27, 28.

$$e_{\infty,R} = \lim_{s\to 0} 1 - G_R(s) = \lim_{s\to 0} 1 - \frac{K_tK_i}{s(Ls+R)(J_{eq}s+B_{eq})+K_t(K_p+K_t)s+K_iK_t} = \lim_{s\to 0} 1 - \frac{K_tK_i}{K_iK_t} = 0 \tag{27}$$

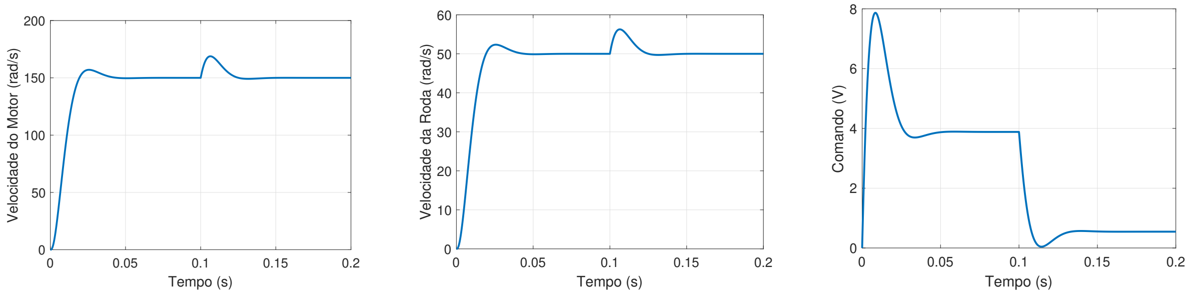
$$e_{\infty,D} = \lim_{s\to 0} -\tau_e G_D(s) = \lim_{s\to 0} -\frac{s(Ls+R)\tau_e}{N^2\eta(s(J_{eq}s+B_{eq})(Ls+R)+K_t(K_p+K_t)s+K_tK_i)} = 0 \tag{28}$$

Analisando o sistema de servomotor descrito em 1, para o controlador projetado com $t_r|_{0\%}^{100\%} = 0.02\ s$, $Mp = 0.046$, com referência degrau com 50 rad/s de amplitude (começando em $t = 0\ s$) e com distúrbio degrau com amplitude de 0.2 Nm (começando em $t = 0.1\ s$) temos os gráficos da Fig.4.

Perceba que, do gráfico da Fig.4b, o tempo de subida é 0.0193 s, com pico de 52.34 rad/s, ou seja, sobressinal de 0.0468, sendo valores dentro da imprecisão de medida dos requeridos pelo controlador. Além disso, o erro em regime é nulo tanto antes quanto depois do início do distúrbio, como previsto por Eq.**??**, 28.

Analisando o gráfico da Fig.4c, note que toda a tensão comandada no regime permanente vem do controlador integrativo, pois o erro é nulo. Então, a diferença entre a referência e o valor é nula, fazendo que o comando do controlador P seja nulo.

O valor da tensão comandada em regime permanente antes do distúrbio foi de 3.88 V, que é o mesmo do controlador de 2. Sendo novamente o esperado, pelo mesmo motivo de $\tau_e = 0\ N/m$ e



(a) Gráfico da velocidade angular do motor.

(b) Gráfico da velocidade angular da roda.

(c) Gráfico do comando dado pela fonte de tensão.

Figura 4: Gráficos das velocidades angulares do motor e da roda e do comando resultante da simulação do controlador.

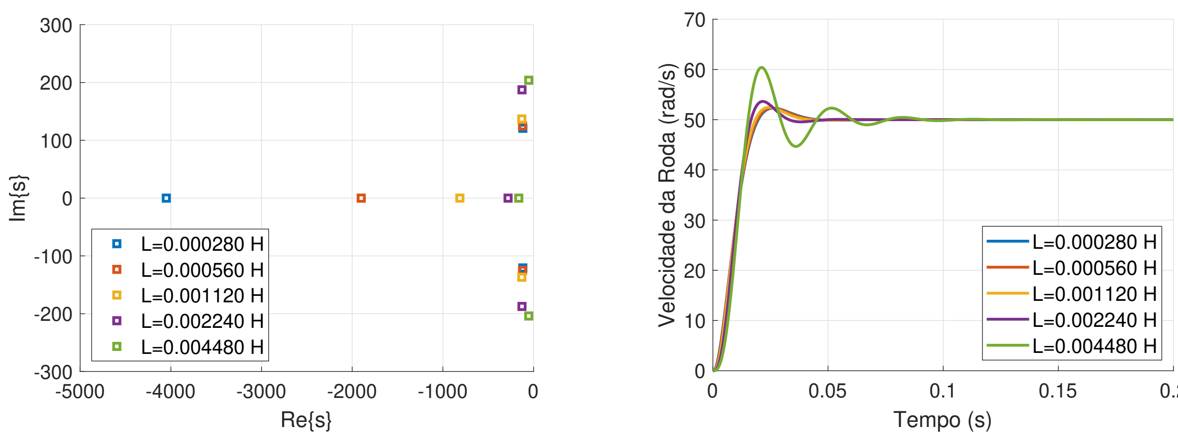
$\omega_l = 50\ rad/s$. Já após o distúrbio, ω_l se mantém, mas $\tau_e = 0.2\ Nm$. Assim, a tensão comandada experimental é de $0.54\ V$, que é igual a teórica $(0.5448\ V)$, expressa por Eq.4.

Analisando a Eq.4, vemos que a tensão comandada é responsável por anular os efeitos do torque de distúrbio τ_e, da resistência do ar B_{eq} e queda de tensão no servomotor K_t.

4 Aproximação por Polos Dominantes

Para se estudar a aproximação por polos dominantes se simulou o controlador PI de 3 com $t_r|_{0\%}^{100\%} = 0.02\ s$, $Mp = 0.046$, referência degrau de $50\ rad/s$ e sem perturbação para diferentes valores de L. Foram estudados $L \in \left\{\frac{L_{nom}}{2}, L_{nom}, 2L_{nom}, 4L_{nom}, 8L_{nom}\right\}$, sendo o valor nominal de indutância $L_{nom} = 0.56\ mH$.

A Figura 5a mostra o gráfico dos polos das diferentes funções de transferência. Perceba que à medida que L diminui, o polo real vai para infinito, enquanto os polos complexos (que são os dominantes) se aproximam aos polos de Eq. 20.



(a) Polos da função de transferência para diferentes indutâncias.

(b) Simulação do sistema para diferentes indutâncias

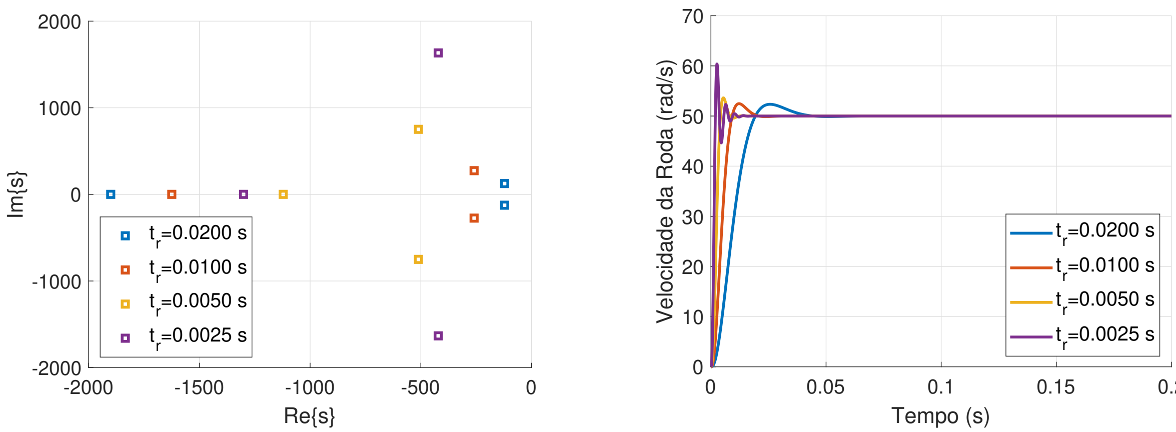
Figura 5: Polos da função de transferência e suas respectivas simulações para diferentes indutâncias.

A Figura 5b mostra a simulação do sistema para diferentes indutâncias. Perceba que na proporção que L diminui, o tempo de subida se aproxima de $0.02\ s$ e o sobressinal de 0.046. Além disso, perceba da

Fig.5a que quando L tende à zero, o ângulo β diminui, indicando que ξ (e o amortecimento) também é reduzido; o módulo dos polos ω_n diminui, o que faz o tempo de subida aumentar. Esse comportamento é visto na simulação da Fig.5b.

Além do efeito do indutor, há também o efeito do próprio controlador. Para estudá-lo, fez se vários controladores com $Mp = 0.046\ s$, $t_r|_{0\%}^{100\%} \in \left\{t_{nom}, \frac{t_{nom}}{2}, \frac{t_{nom}}{4}, \frac{t_{nom}}{8}\right\} = 0.02\ s$ $(t_{nom} = 50\ rad/s)$, sem perturbação.

Pela Figura 6a, o aumento de $t_r|_{0\%}^{100\%} = 0.02\ s$ causa a diminuição do módulo dos polos imaginários (ω_n), do ângulo β e o polo real ir para infinito. Isso resulta em uma resposta mais lenta do sistema, menor amortecimento (menor ξ) e um sistema mais próximo do de 2ª ordem. Esse é o comportamento visto nas simulações da Fig.6b.



(a) Polos da função de transferência para diferentes tempos de subida.

(b) Simulação do sistema para diferentes tempos de subida.

Figura 6: Polos da função de transferência e suas respectivas simulações para diferentes tempos de subida.

5 Implementação Digital

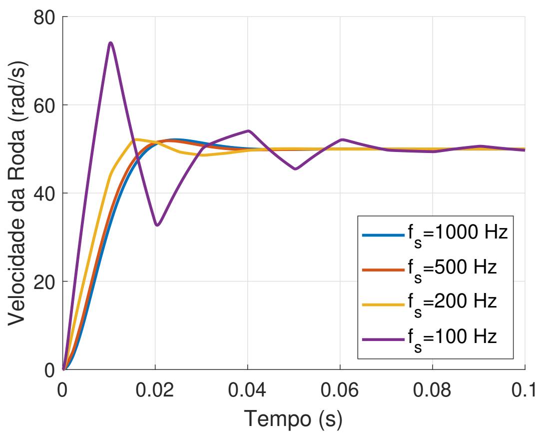
Implementando o controlador de 3 ($t_r|_{0\%}^{100\%} = 0.02\ s$, $Mp = 0.046$, referência degrau de 50 rad/s e sem perturbação) em um sistema digital acarreta em aproximações e discretizar o sistema. Para analisar esse efeito, se utilizou taxas de amostragem $f_s = \frac{1}{T} \in \{1k, 500, 200, 100\}\ Hz$

A Figura 7 mostra os gráficos resultantes da simulação. A partir deles, se percebe que a discretização introduz maiores erros no regime transitório, aumenta o tempo para se atingir o regime permanente, piorando o desempenho do sistema de controle no geral. Todavia, quando se aumenta a taxa de amostragem, esses defeitos são mitigados e o comportamento do controlador se aproxima do contínuo, que é o esperado, pois o contínuo seria equivalente a uma taxa de amostragem infinita.

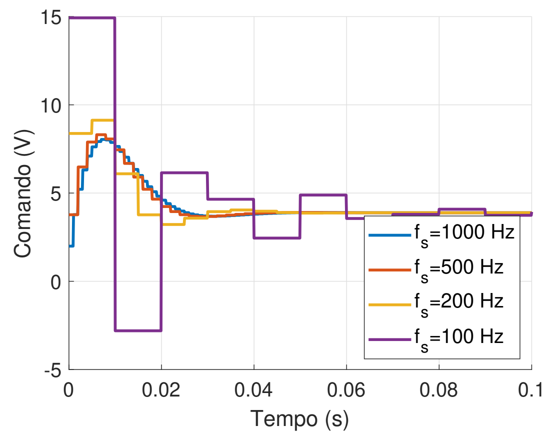
6 Projeto de Anti-windup

Um problema do controlador de 5 é que não considera os limites de tensão da fonte. Para consertar isso, se faz o anti-windup. Implementando o controlador de 3: $t_r|_{0\%}^{100\%} = 0.02\ s$, $Mp = 0.046$, referência degrau de 50 rad/s, sem perturbação e tensão máximo de 12 V em um sistema digital se aproxima do comportamento real que o projeto teria.

A Figura 8 mostra os gráficos resultantes da simulação. A partir deles, se percebe que a limitação de tensão foi atingida. Além disso, se aumentou a eficiência do controlador, porque ao limitar a tensão houve menos *overshoot*.

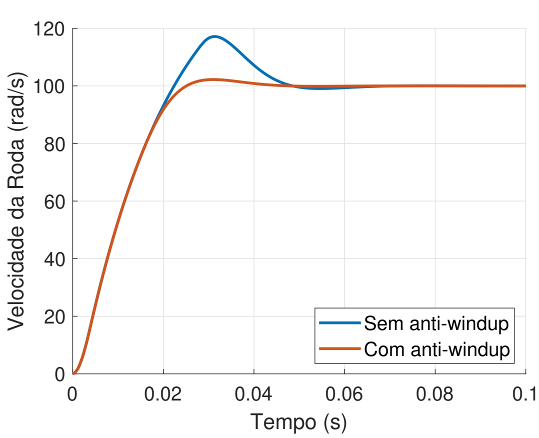


(a) Gráfico da velocidade angular da roda.

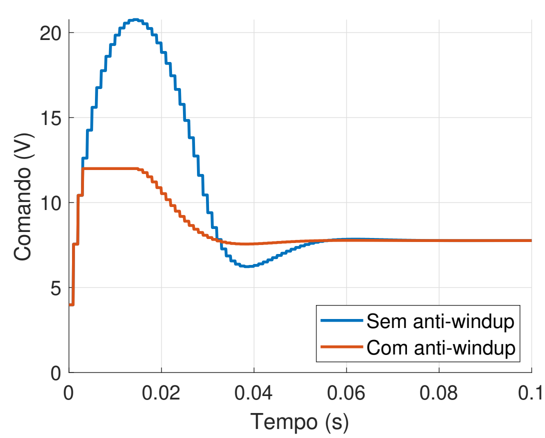


(b) Gráfico do comando dado pela fonte de tensão.

Figura 7: Gráficos das velocidades angulares da roda e do comando resultante da simulação do controlador.



(a) Gráfico da velocidade angular da roda.



(b) Gráfico do comando dado pela fonte de tensão.

Figura 8: Gráficos das velocidades angulares da roda e do comando resultante da simulação do controlador.