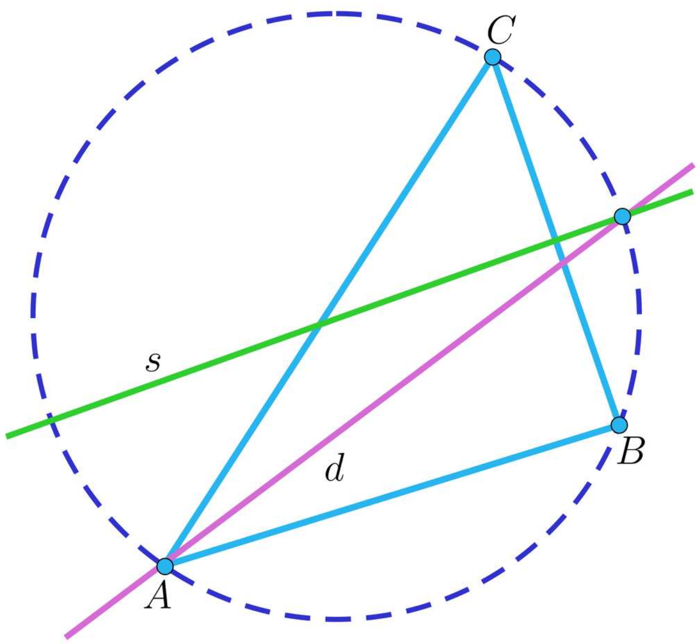
Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

Źródło: Azin Javadzadeh, dostępny w internecie: unsplash.com, domena publiczna.

Jak wiemy, symetralna odcinka jest jedną z jego dwóch osi symetrii. Podobnie dwusieczna jest osią symetrii kąta. Okazuje się, że to nie jedyne związki między tymi obiektami. Rozważmy trójkąt ABC oraz symetralną s boku BC i prostą d zawierającą dwusieczną kąta leżącego naprzeciw tego boku, jak na rysunku.



Dwusieczna i symetralna w trójkącie

Oczywiście proste te przetną się w pewnym punkcie. Mniej oczywistym faktem i niezbyt często przywoływanym w szkole jest to, że ich punkt przecięcia leży na okręgu opisanym na trójkącie ABC. Dowód tej zależności nie jest celem niniejszej lekcji, dlatego go pominiemy, a dociekliwych odeślemy do własności kątów wpisanych opartych na równych łukach i własności symetralnych.

Skoncentrujemy się natomiast na powszechnie znanej, dowodzonej i często wykorzystywanej w szkole własności dwusiecznej, która wyznacza pewne proporcje odcinkowe w trójkącie.

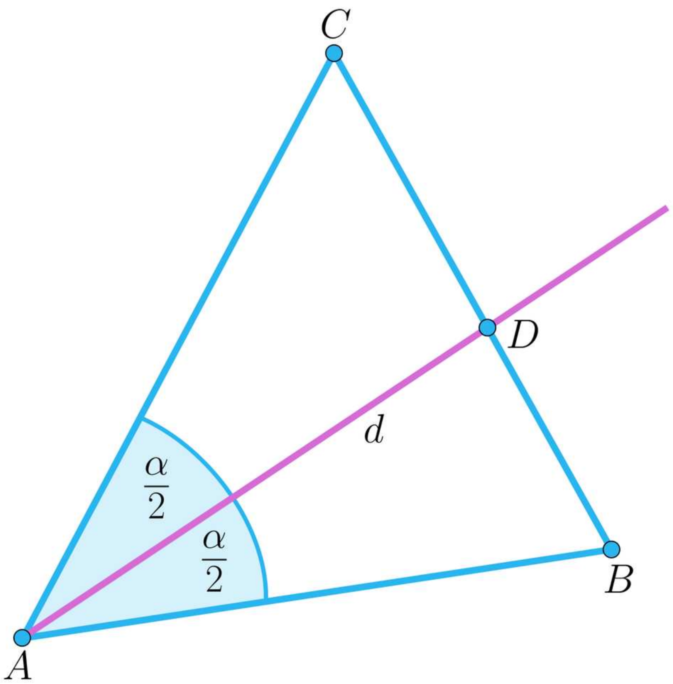
Twoje cele

- Poznasz twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie.
- Udowodnisz twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie, wykorzystując różne narzędzia matematyki.
- Zastosujesz własności dwusiecznych do wyznaczania związków miarowych w trójkątach.
- Zastosujesz poznane zależności w sytuacjach typowych i problemowych.

Przeczytaj

O proporcjach odcinkowych w trójkącie

Rozważmy trójkąt ABC, w którym dwusieczna d kąta wewnętrznego BAC przecięła bok BC w punkcie D, jak na rysunku.



Okazuje się, że długości odcinków BD i CD są związane z długościami boków AB i AC danego trójkąta.

Oznaczmy: $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CAD| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle ADB| = \delta$. Wtedy $|\sphericalangle ADC| = 180° - \delta$.

Z twierdzenia sinusów dla trójkąta ABD mamy:

$\frac{|BD|}{\sin\alpha} = \frac{|AB|}{\sin\delta}$, stąd $\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{\sin\alpha}{\sin\delta}$.

Podobnie, z twierdzenia sinusów dla trójkąta ACD mamy:

$\frac{|CD|}{\sin\alpha} = \frac{|AC|}{\sin(180^\circ - \delta)}$, stąd $\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{\sin\alpha}{\sin(180^\circ - \delta)}$.

Ale $\sin(180^\circ - \delta) = \sin\delta$. Zatem $\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{\sin\alpha}{\sin\delta}$.

Porównując otrzymane wyniki możemy zapisać równość:

$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{\sin\alpha}{\sin\delta} = \frac{|CD|}{|AC|}$, z której wynika, że $\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AC|}$.

Przeprowadzone rozumowanie jest nie najprostszym dowodem twierdzenia znanego pod krótką nazwą „twierdzenia o dwusiecznej”, którego sformułowanie zapisano poniżej.

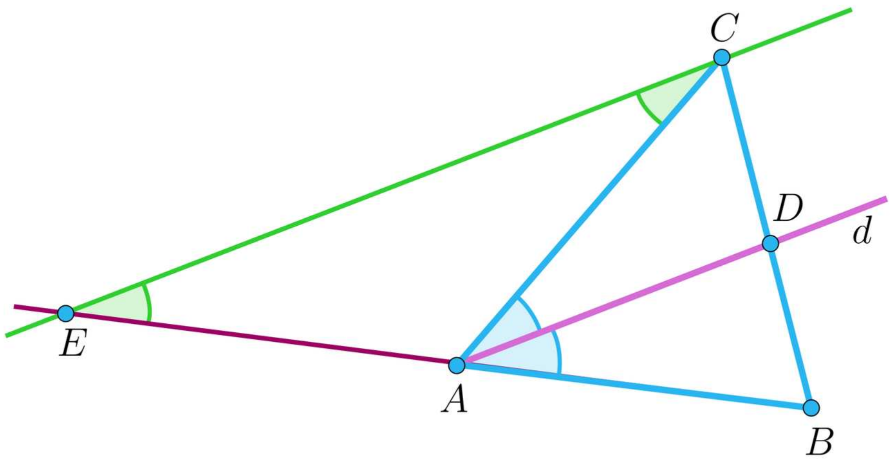
Twierdzenie: Twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie

W trójkącie dwusieczna kąta wewnętrznego dzieli bok przeciwległy na odcinki proporcjonalne do boków przyległych.

Dowód

Przeprowadzimy teraz dowód korzystając z narzędzi bardziej elementarnych, niż twierdzenie sinusów.

W tym celu, poprowadzimy przez punkt C prostą równoległą do dwusiecznej d i oznaczymy przez E punkt wspólny tej prostej i przedłużenia boku AB, jak na rysunku.



Mamy oczywiście $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle AEC|$ oraz $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle ACE|$.

Ale $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle DAC| = \alpha$. Stąd $|\sphericalangle AEC| = |\sphericalangle ACE| = \alpha$ i trójkąt CAE jest trójkątem równoramiennym, w którym $|AC| = |AE|$.

Z twierdzenia Talesa wynika w szczególności, że $\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AE|}$, ale $|AC| = |AE|$, zatem $\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AC|}$.

Co kończy dowód.

Zapiszemy jeszcze inny dowód tego twierdzenia, odwołujący się do własności pola trójkąta: stosunek pól trójkątów o równych wysokościach równy jest stosunkowi długości podstaw tych trójkątów.

Trójkąty ABD i ACD mają wspólną wysokość poprowadzoną z wierzchołka A, zatem $\frac{P_{ABD}}{P_{ACD}} = \frac{|BD|}{|CD|}$.

Ale $P_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |AB| \cdot \sin\alpha$ oraz $P_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |AC| \cdot \sin\alpha$, czyli $\frac{P_{ABD}}{P_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|AB|\cdot\sin\alpha}{\frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot|AC|\cdot\sin\alpha} = \frac{|AB|}{|AC|}$.

Stąd $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{P_{ABD}}{P_{ACD}} = \frac{|AB|}{|AC|}$, czyli $\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AC|}$, co było do wykazania.

Przykład 1

W trójkącie ABC mamy dane: $|AB| = 6$, $|BC| = 9$, $|AC| = 12$. Wyznaczymy długości odcinków BD i CD, na jakie podzieliła bok BCdwusieczna kąta BAC.

Oznaczmy $|BD| = x$, wtedy $|CD| = 9 - x$.

Z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego wynika, że $\frac{x}{6} = \frac{9-x}{12}$.

Stąd $12x = 6 \cdot (9 - x)$, zatem $x = 3$ oraz $|BD| = 3$, $|CD| = 6$.

Przykład 2

Rozważmy ten sam trójkąt ABC, w którym $|AB| = 6$, $|BC| = 9$, $|AC| = 12$. Niech D będzie punktem wspólnym dwusiecznej kąta BAC i boku BC. Wyznaczymy długość odcinka AD.

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABC mamy w szczególności, że $12^2 = 9^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos(\sphericalangle ABC)$.

Stąd $\cos(\sphericalangle ABC) = -\frac{1}{4}$.

Korzystając z wyników Przykładu 1 i ponownie z twierdzenia cosinusów, możemy zapisać, że $|AD|^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 54$.

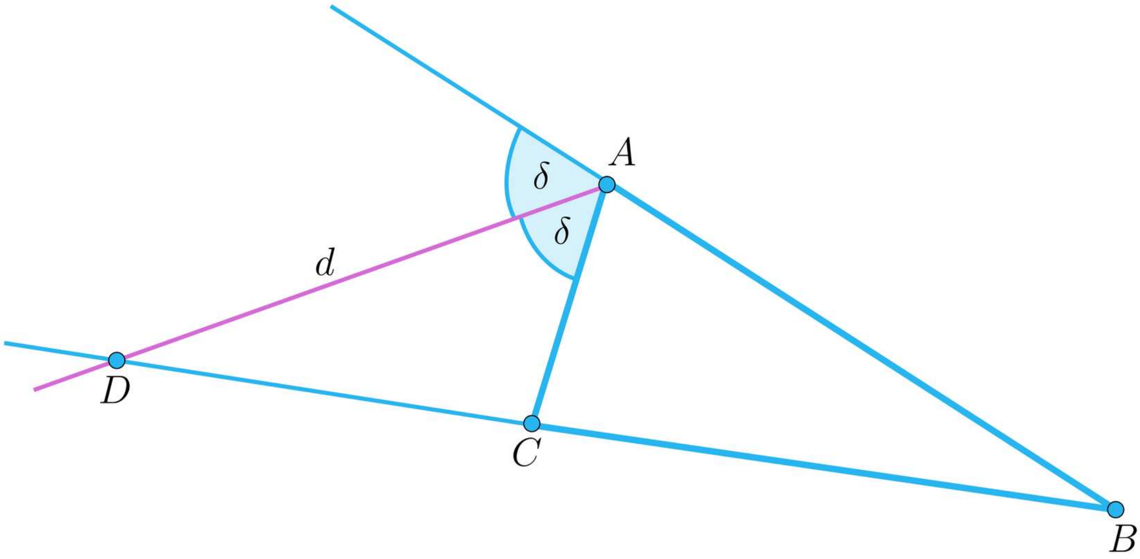
Stąd $|AD| = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$.

Rozważania podane niżej pokazują, że używanie skrótu myślowego o brzmieniu „twierdzenie o dwusiecznej” może być mylące, bowiem analogiczną proporcję zapiszemy w przypadku dwusiecznej kąta zewnętrznego.

Twierdzenie: Twierdzenie o dwusiecznej kąta zewnętrznego w trójkącie

Przypuśćmy, że w trójkącie ABC dwusieczna kąta zewnętrznego przy wierzchołku A przecina przedłużenie boku BC w punkcie D. Wtedy odcinki BD i CD są proporcjonalne do odcinków AB i AC, czyli

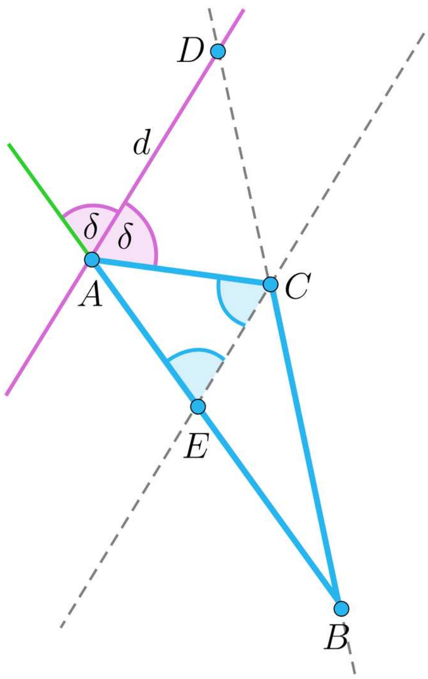
$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AC|}$$



Dowód

Zanim przeprowadzimy dowód, zauważmy, że niezbędne jest zapisanie, że dwusieczna przecina odpowiednie przedłużenie boku, bowiem gdybyśmy rozważyli trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AB| = |AC|$, to wtedy dwusieczna kąta zewnętrznego przy wierzchołku A byłaby równoległa do podstawy BC tego trójkąta.

Przejdźmy teraz do dowodu i oznaczmy przez δ każdy z kątów, na jaki dwusieczna podzieliła kąt zewnętrzny przy wierzchołku A oraz poprowadźmy równoległą do tej dwusiecznej, przechodzącą przez punkt C i przecinającą bok AB w punkcie E, jak na rysunku.



Mamy oczywiście $|\sphericalangle ECA| = |\sphericalangle CAD| = \delta$ oraz $|\sphericalangle CEA| = \delta$.

Stąd trójkąt CAE jest trójkątem równoramiennym, w którym $|AC| = |AE|$.

Z twierdzenia Talesa wynika w szczególności, że $\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AE|}$, ale $|AC| = |AE|$, zatem $\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AC|}$.

Co kończy dowód.

Słownik

dwusieczna

dwusieczną kąta nazywamy półprostą, której początkiem jest wierzchołek tego kąta i która dzieli ten kąt na dwa równe kąty

Animacja

Polecenie 1

Przeanalizuj przedstawiony dowód twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie. Zmodyfikuj ten dowód, wykorzystując dwukrotnie następujący fakt:

Stosunek pól trójkątów o równych wysokościach jest równy stosunkowi długości podstaw tych trójkątów.

Tę własność wykorzystaj dla trójkątów ADC i BDC, prowadząc raz wspólną wysokość tych trójkątów z wierzchołka C, a drugi raz prowadząc równe wysokości tych trójkątów z wierzchołka D.

Film dostępny pod adresem https://zpe.gov.pl/a/D1CcqvO70

Film nawiązujący do treści materiału dotyczącej twierdzenia dwusiecznej kąta w trójkącie.

Polecenie 2

Rozważ trójkąt prostokątny ABC o kątach $|\sphericalangle CAB| = 30^\circ$, $|\sphericalangle CBA| = 60^\circ$ oraz $|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$. Poprowadź dwusieczną kąta CAB i wyznacz, podobnie jak w zaprezentowanym w animacji przykładzie, długość odcinka CD, gdzie D jest punktem przecięcia dwusiecznej kąta BAC i przyprostokątnej BC. Następnie oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta 15°. Postępując analogicznie, oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kąta $7^\circ 30$’.

Sprawdź się

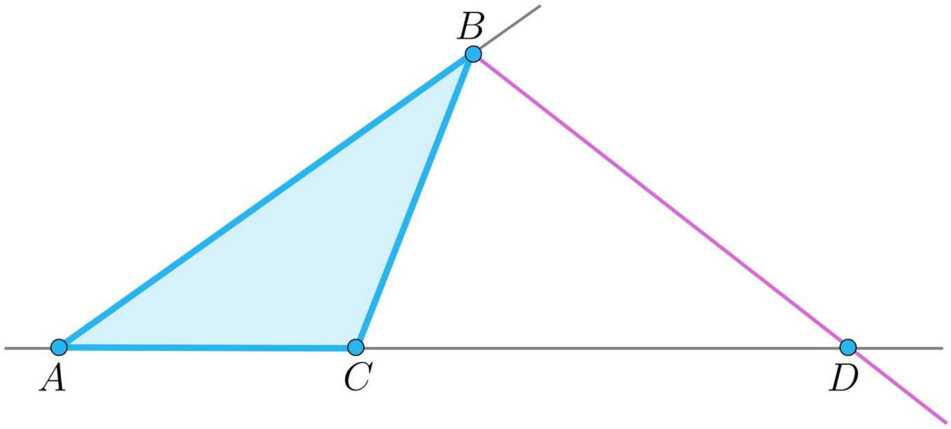
Pokaż ćwiczenia:

Ćwiczenie 1

W trójkącie ABC, w którym $|AB| = 14$, $|AC| = 22$, odcinki, na jakie dwusieczna kąta wewnętrznego BAC podzieliła bok BC różnią się o 4. Oblicz obwód tego trójkąta.

Ćwiczenie 2

Dany jest trójkąt ABC, w którym długości boków są liczbami całkowitymi. Dwusieczna kąta zewnętrznego przy wierzchołku B przecięła prostą AC w punkcie D, jak na rysunku. Oblicz długości boków trójkąta, jeżeli: $|AB| - |BC| = 2$ oraz $|AD| = 14$.



Ćwiczenie 3

Dwusieczna kąta ostrego w trójkącie prostokątnym ABC podzieliła przyprostokątną w stosunku $5 : 13$. Wyznacz sinusy kątów ostrych tego trójkąta.

Ćwiczenie 4

Ćwiczenie 5

W trójkącie ABC o obwodzie 25 odcinki, na jakie dwusieczna kąta wewnętrznego BAC podzieliła bok BC są odpowiednio równe: $|BD| = 2$, $|CD| = 3$. Oblicz długości boków trójkąta.

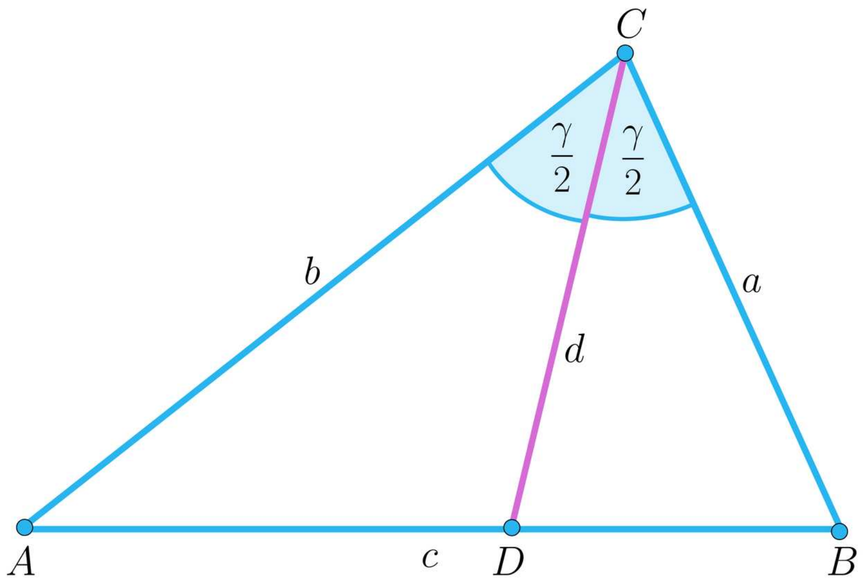
Ćwiczenie 6

Zaznacz poprawną odpowiedź. Dany jest trójkąt ABC, w którym dwa boki mają odpowiednio długości 9 i 12. Dwusieczna kąta wewnętrznego podzieliła trzeci bok trójkąta na dwa odcinki, z których jeden ma długość równą 10. Trzeci bok tego trójkąta ma długość:

- $\frac{40}{3}$
- $\frac{70}{3}$
- $\frac{15}{2}$
- $\frac{35}{2}$

Ćwiczenie 7

Dany jest trójkąt ABC, o bokach długości a, b, c, jak na rysunku.



Zapoznaj się z następującym twierdzeniem:

Długość odcinka CD dwusiecznej kąta wewnętrznego ACB trójkąta ABC jest równa

$$|CD| = \frac{\sqrt{ab\left[(a+b)^2-c^2\right]}}{a+b}.$$

Ułóż we właściwej kolejności etapy dowodu tego twierdzenia.
Dowód:

Podstawiając teraz obliczoną wcześniej długość odcinka $|AD|$ otrzymujemy: $|CD|^2 = b^2 + \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2 - 2b \cdot \frac{bc}{a+b} \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

Wykorzystując wyznaczoną wartość cosinusa możemy zapisać odpowiednią równość dla trójkąta ADC: $|CD|^2 = b^2 + |AD|^2 - 2b \cdot |AD| \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

A korzystając ze wzoru skróconego mnożenia możemy zapisać, że $\frac{ab(a^2+b^2-c^2+2ab)}{(a+b)^2} = \frac{ab\left[(a+b)^2-c^2\right]}{(a+b)^2}$.

Pozostaje przekształcić wyrażenie: $b^2 + \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2 - 2b \cdot \frac{bc}{a+b} \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

Teraz dwukrotnie skorzystamy z twierdzenia cosinusów.

Redukując wyrazy podobne i wyłączając wspólny czynnik przed nawias dostajemy: $\frac{ab\left(a^2+b^2-c^2+2ab\right)}{(a+b)^2}$.

Stąd $|CD| = \frac{\sqrt{ab\left[(a+b)^2-c^2\right]}}{a+b}$, co należało wykazać.

Po doprowadzeniu do wspólnego mianownika otrzymujemy, że
$b^2 + \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2 - 2b \cdot \frac{bc}{a+b} \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} =$
$= \frac{b^2(a+b)^2+b^2c^2-b(a+b)\left(b^2+c^2-a^2\right)}{(a+b)^2}$.

Najpierw dla trójkąta ABC mamy: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$, zatem
$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

Zacznijmy od zastosowania twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego. Wtedy mamy, że: $\frac{|AD|}{b} = \frac{c-|AD|}{a}$.

Stąd $|AD| = \frac{bc}{a+b}$.

Dla nauczyciela

Autor: Henryk Dąbrowski

Przedmiot: Matematyka

Temat: Twierdzenie o dwusiecznej kąta w trójkącie

Grupa docelowa:

III etap edukacyjny, liceum, technikum, zakres rozszerzony

Podstawa programowa:

VIII. Planimetria. Zakres podstawowy.

7) stosuje twierdzenia: Talesa, odwrotne do twierdzenia Talesa, o dwusiecznej kąta oraz o kącie między styczną a cięciwą;

12) przeprowadza dowody geometryczne.

Kształtowane kompetencje kluczowe:

- kompetencje w zakresie rozumienia i tworzenia informacji
- kompetencje matematyczne oraz kompetencje w zakresie nauk przyrodniczych, technologii i inżynierii
- kompetencje cyfrowe

Cele operacyjne:

Uczeń:

- zna pojęcie i stosuje własności dwusiecznej
- zna i stosuje twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego w trójkącie
- przeprowadza dowód twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego trójkącie
- przeprowadza dowód twierdzenia o dwusiecznej kąta zewnętrznego trójkącie
- przeprowadza dowody geometryczne z zastosowaniem twierdzenia o dwusiecznej

Strategie nauczania:

- konstruktywizm

Metody i techniki nauczania:

- dyskusja
- rozmowa nauczająca z wykorzystaniem ćwiczeń interaktywnych

Formy pracy:

- praca indywidualna
- praca w grupach
- praca całego zespołu klasowego

Środki dydaktyczne:

- komputery z dostępem do Internetu w takiej liczbie, żeby każda para uczniów miała do dyspozycji komputer; lekcję tę można przeprowadzić, mając do dyspozycji jeden komputer z rzutnikiem multimedialnym

Przebieg lekcji

Faza wstępna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie pojęcia dwusiecznej i jej własności oraz symetralnej i jej własności, szczególnie w kontekście osi symetrii.
2. Nauczyciel sygnalizuje, że na lekcji uczniowie dalej będą poznawać własności dwusiecznej i formułuje problem dotyczący punktu wspólnego dwusiecznej i symetralnej boku leżącego naprzeciw danego kąta. Korzystając z przygotowanego wcześniej rysunku (apletu Geogebry) formułuje tezę o położeniu tego punktu na okręgu opisanym na trójkącie i zachęca uczniów, by w domu zastanowili się nad dowodem tej zależności.
3. Nauczyciel podaje temat i cele zajęć, uczniowie ustalają kryteria sukcesu.

Faza realizacyjna:

1. Nauczyciel prosi o przypomnienie twierdzenia sinusów a następnie formułuje problem dotyczący proporcji między odcinkami wyznaczonymi przez dwusieczną i bokami oraz kątami odpowiednich trójkątów, tak sterując dyskusją, by otrzymać proporcję znaną z twierdzenia o dwusiecznej kąta wewnętrznego.
2. Nauczyciel formułuje twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego i prezentuje rysunek, na którym dorysowano odpowiednią prostą równoległą do dwusiecznej. Prosi o zapisanie odpowiednich proporcji prowadzących do tezy twierdzenia.
3. Nauczyciel sygnalizuje możliwość przeprowadzenia dowodu odwołującego się do zależności między polem trójkątów o równych wysokościach i długością podstaw i prosi uczniów o jego zredagowanie – w razie potrzeby sugeruje wykorzystanie wzoru na pole trójkąta w zależności od sinusa odpowiedniego kąta.
4. Uczniowie analizują przykłady w sekcji Przeczytaj prezentujące typowe problemy, w których wykorzystuje się twierdzenie o dwusiecznej kąta wewnętrznego.
5. Nauczyciel poleca uczniom obejrzeć animację i prosi o wykonanie dołączonych poleceń.

6. Następnie nauczyciel sygnalizuje, że analogiczną proporcję odcinkową można, przy odpowiednich założeniach, zapisać dla dwusiecznej kąta zewnętrznego – prezentuje trójkąt równoramienny i formułuje pytanie o położenie dwusiecznej kąta zewnętrznego. Następnie formułuje twierdzenie i prosi wybranych uczniów o przedstawienie dowodu.
7. Uczniowie wykonują zaproponowane ćwiczenia interaktywne, wykorzystując umiejętności z różnych działów matematyki.

Faza podsumowująca:

- Nauczyciel prosi wybranych uczniów o przedstawienie najważniejszych elementów, jakie były omawiane w trakcie lekcji.

Praca domowa:

Nauczyciel poleca, aby uczniowie wykonali w domu ćwiczenia interaktywne, które nie zostały wykonane w czasie zajęć oraz przeprowadzili dowód zależności omawianej we wstępie.

Materiały pomocnicze:

Dwusieczne kąta

Wskazówki metodyczne:

Animację można zastosować w ramach powtórzenia przed sprawdzianem. Można ją też wykorzystać przy realizacji tematu o okręgu wpisanym w wielokąt.