Simulación ITAM
12 de agosto de 2020 2020-II

Tarea 1.

La fecha de entrega es el **24 de agosto de 2020**. Enviar **antes de la medianoche** al correo: jorge.delavegagongora@gmail.com (o se convierte en calabaza).

Lecturas

- Robert & Casella Capítulo 2 sección 2.1 y 2.2.
- Dagpunar Capítulo 2
- Good random number generators are (not so) easy to find
- Linear Congruential Generator in R

Problemas

1. Lanzar una moneda honesta 500 veces y hacer una gráfica de:

   i r/n vs n, para $n = 1, 2, \ldots, 500$, donde n es el número de lanzamientos y r es el número de soles para esos n lanzamientos; y

   ii. $(2r - n)$ vs n, la diferencia entre el número de soles y águilas.

   Comentar sobre el comportamiento de r/n y $(2r - n)$

2. Dar 5 ejemplos de procesos en los que se puede utilizar simulación.

3. Una canoa que contiene tres mujeres y tres hombres llega a una isla deshabitada. Discutan la información que requieren para modelar la sociedad de estos individuos y cómo el tamaño de la población crece con el tiempo.

4. Considerar cómo podrían simular el siguiente modelo de una sala de cirugía que opera bajo citas:

   - Los pacientes se programan para llegar en cada 5 horas.
   - Independientemente de los otros pacientes, cada paciente falla a su cita con probabilidad 0.1
   - Independientemente de los otros pacientes, cada paciente tiene tiempos de llegada con la siguiente distribución:

Tiempo	2 hrs antes	1 hra antes	a tiempo	1 hra tarde	2 hrs tarde
probabilidad	1/10	1/5	2/5	1/5	1/10

   - Los tiempos de consulta tienen la siguiente distribución:

Tiempo en hrs	2	3	4	5	6	7	8	9
probabilidad	1/10	1/10	1/10	1/5	1/5	1/10	1/10	1/10

- Los pacientes se atienden en el orden en el que llegan.

5. Calcular el periodo del GLC $Z_i \equiv (5Z_{i-1} + 3) \mod 31$.

6. Mostrar que el promedio de las U_i's tomadas de un ciclo completo de un GLC de periodo completo es $\frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$.

7. Dada una sucesión $X_1, X_2, \ldots, X_n$ de $\mathcal{U}(0,1)$ números pseudoaleatorios, podemos hacer una gráfica de dispersión de puntos de (X_i, X_{i+1}) para $i = 1, \ldots, n-1$ para verificar si hay independencia. Hacer esta gráfica para el GLC con parámetros $m = 1{,}024, a = 401, c = 101$ y para el GLC $m = 2^{32}, a = 1{,}664{,}525, c = 1{,}013{,}904{,}223$.

8. Probar que la parte fraccional de la suma de uniformes $[0,1]$ $U_1 + U_2 + \cdots + U_k$ es también uniforme en el intervalo $[0,1]$.

9. Un generador de Fibonacci obtiene el valor X_{n+1} a partir de X_n y X_{n-1} de la siguiente forma:
$$X_{i+1} \equiv (X_i + X_{i-1}) \mod m$$
donde X_0 y X_1 están especificados.

   Supongan que $m = 5$. Sólo dos ciclos son posibles. Encontrarlos, así como su respectivo periodo.

10. El método del cuadrado medio de John von Neumann es el siguiente: comenzando con $Z_0 \in \{0, 1, \ldots, 99\}$, definir Z_n para $n \in \mathbb{N}$ a ser los dos dígitos de enmedio del número de 4 dígitos Z_{n-1}^2. Si Z_{n-1}^2 no tiene 4 dígitos, se le pegan a la izquierda con ceros. Por ejemplo, si $Z_0 = 64$, tenemos que $Z_0^2 = 4096$ y entonces $Z_1 = 09 = 9$. En el siguiente paso, encontramos que $Z_1^2 = 81 = 0081$, así que $Z_2 = 08 = 8$.

    - Escriban una función que calcule Z_n a partir de Z_{n-1}.
    - La salida del cuadrado medio tiene bucles. Por ejemplo, una vez que $Z_N = 0$, tendremos que $Z_n = 0$ para toda $n \geq N$. Escriban un programa que encuentre todos los ciclos del método del cuadrado medio y lístenlos.
    - Comenten sobre la calidad del método como generador de números aleatorios.
    - Hacer un diagrama como el mostrado en clase.

11. La siguiente página contiene el primer millón de dígitos de π. Considerando estos dígitos:

    - Realizar un histograma y verificar la hipótesis de que los dígitos corresponden a una distribución uniforme discreta.
    - Verificar independencia de los dígitos, considerando las pruebas de gaps, de poker y de rachas.

      Una idea de ver los datos está en la Figura 11:

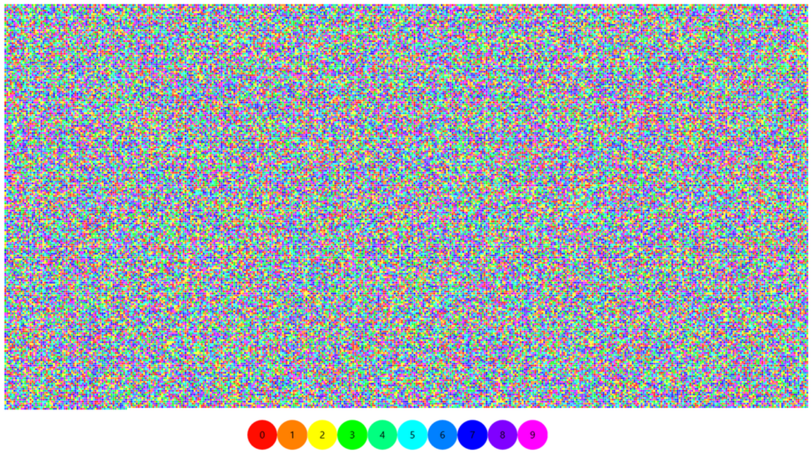

Figura 1: Cómo se ven los primeros 100,000 dígitos de π.

12. Si dos dados están cargados de tal manera que en un dado, el valor 1 aparecerá exactamente el doble de veces que los otros valores, y el otro dado está igualmente cargado hacia el 6, calculen la probabilidad p_s de que un total exactamente igual a s aparecerá en la suma de los dos dados, para $2 \leq s \leq 12$.