

3.3

潮流方程的求解方法



■ 问题引入:

电路计算的节点电压方程

$$I_i = \sum_{j=1}^n Y_{ij} U_j$$

潮流计算的功率方程

$$\tilde{S}_i = U_i I_i^* = U_i \left(\sum_{j=1}^n Y_{ij} U_j \right)^* = U_i \sum_{j=1}^n Y_{ij}^* U_j^*$$

	潮流计算	交流电路计算
已知及待求量	功率和电压	电流和电压
数学模型	非线性	线性
求解方法	迭代法	消去法

- ✓ 潮流方程是一组非线性代数方程组，非线性代数方程组求解是一个基本而又重要的问题，由于潮流方程不存在求根公式，因此求精确根非常困难，甚至不可能。
- ✓ 人们通常利用数值解法寻找方程的近似根——迭代

3.3.1 高斯-塞德尔法潮流计算

■ 高斯-塞德尔 (GAUSS-SEIDEL) 迭代法

◆ 单变量函数

$$f(x) = 0$$



$$x = g(x)$$

高斯迭代法

$$\begin{cases} x^{(1)} = g(x^{(0)}) \\ x^{(2)} = g(x^{(1)}) \\ \vdots \\ x^{(k)} = g(x^{(k-1)}) \\ x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \end{cases}$$

给定初始值 $x^{(0)}$ ，代入上式，逐步迭代，直至收敛。

➤ 若满足 $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon$ ，则收敛得到真解。

◆ 多变量函数

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$



$$\begin{aligned} x_i &= g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = g_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = g_2(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = g_n(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k)}) \end{cases}$$

高斯迭代法

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = g_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = g_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \\ \vdots \\ x_{n-1}^{(k+1)} = g_{n-1}(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{n-2}^{(k+1)}, x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k)}) \\ x_n^{(k+1)} = g_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{n-2}^{(k+1)}, x_{n-1}^{(k+1)}, x_n^{(k)}) \end{cases}$$

高斯-塞德尔
迭代法

利用最新信息
迭代收敛更快

3.3.1 高斯-塞德尔法潮流计算

高斯-塞德尔法潮流计算

非线性节点电压方程 $\mathbf{YU} = \left[\frac{\mathbf{S}}{\mathbf{U}} \right]^*$

展开 $Y_{ii}\dot{U}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n Y_{ij}\dot{U}_j = \frac{P_i - jQ_i}{U_i^*}$



$$\dot{U}_i = \frac{1}{Y_{ii}} \left(\frac{P_i - jQ_i}{U_i^*} - \sum_{j=1, j \neq i}^n Y_{ij}\dot{U}_j \right)$$

◆ 高斯法

$$\dot{U}_i^{(k+1)} = \frac{1}{Y_{ii}} \left(\frac{P_i - jQ_i}{\dot{U}_i^{*(k)}} - \sum_{j=1, j \neq i}^n Y_{ij} \dot{U}_j^{(k)} \right)$$

➤ 迭代至

$$|\dot{U}_i^{(k+1)} - \dot{U}_i^{(k)}| \leq \varepsilon$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad i \neq s$$

平衡节点编号为 s 。

平衡节点电压已知，不参与迭代

满足这个等式就可停止计算，其中 $\varepsilon = 10^{-5} \sim 10^{-2}$ 。

◆ 高斯-塞德尔法

$$\dot{U}_i^{(k+1)} = \frac{1}{Y_{ii}} \left(\frac{P_i - jQ_i}{\dot{U}_i^{*(k)}} - \sum_{j=1}^{i-1} Y_{ij} \dot{U}_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n Y_{ij} \dot{U}_j^{(k)} \right)$$

➤ 迭代至

$$\left| \dot{U}_i^{(k+1)} - \dot{U}_i^{(k)} \right| \leq \varepsilon$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad i \neq s$$

满足这个等式就可停止计算，其中 $\varepsilon = 10^{-5} \sim 10^{-2}$ 。

➤ **PQ**节点直接使用上式迭代

➤ 对 **PV** 节点 (假定编号为 p) : 已知 P_p 和 U_{p0}

$$\dot{U}_i^{(k+1)} = \frac{1}{Y_{ii}} \left(\frac{P_i - jQ_i}{U_i^{*(k)}} - \sum_{j=1}^{i-1} Y_{ij} \dot{U}_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n Y_{ij} \dot{U}_j^{(k)} \right)$$

未知

以下式估算

$$Q_p^{(k)} = \text{Im} \left[\dot{U}_p^{(k)} \sum_{j=1}^n Y_{pj}^* U_j^{*(k)} \right]$$

若越限, 则取 Q 为限值, **PV** 节点转为 **PQ** 节点

$$\dot{U}_p^{(k+1)} = U_p^{(k+1)} \angle \delta_p^{(k+1)}$$

保留

舍去 $U_p^{(k+1)}$

用 U_{p0} 代替

$$\dot{U}_p^{(k+1)} = U_{p0} \angle \delta_p^{(k+1)}$$

- 平衡节点不参与迭代计算，直到潮流收敛后，用有功和无功功率计算公式即可求出平衡节点（假定编号为 s ）所发出的功率。

$$\tilde{S}_s = P_s + jQ_s = \dot{U}_s \sum_{j=1}^n \dot{Y}_{sj}^* \dot{U}_j^*$$

- 利用电路基本定理完成各支路功率分布和支路功率损耗的计算。

(基于导纳矩阵的)高斯-塞德尔法潮流计算的特点

直接迭代解节点电压方程。

■ 优点

- ✓ 导纳矩阵是一个对称且高度稀疏的矩阵，因此非常节省内存；
- ✓ 每次迭代所需的计算量小（各种潮流算法中最小），和网络所包含的节点数成正比关系；
- ✓ 原理简单，程序设计容易；
- ✓ 计算时，对初值要求低。

■ 缺点

- 收敛速度慢；
- 对病态条件系统，计算往往会收敛困难：如包含有负电抗支路(如某些三绕组变压器或线路串联电容等)的系统；
- 程序设计中需要复数计算。

电力系统中最早应用的潮流计算方法，目前潮流计算中已很少使用。

3.3.2 牛顿-拉夫逊法潮流计算

求解非线性代数方程的牛顿拉夫逊法

$$f(x) = 0$$

非线性函数

$$f(x^{(0)} + \Delta x^{(0)}) = 0 \quad \text{设解的初值为 } x^{(0)}, \text{ 与真解的误差为 } \Delta x^{(0)}$$

$$f(x^{(0)} + \Delta x^{(0)}) \approx f(x^{(0)}) + f'(x^{(0)})\Delta x^{(0)} \approx 0 \quad \text{泰勒展开}$$

$$\Delta x^{(0)} = -\frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \Delta x^{(0)}$$

$$f(x^{(k)}) = -J^{(k)}\Delta x^{(k)}$$

$$J^{(k)} = f'(x^{(k)})$$

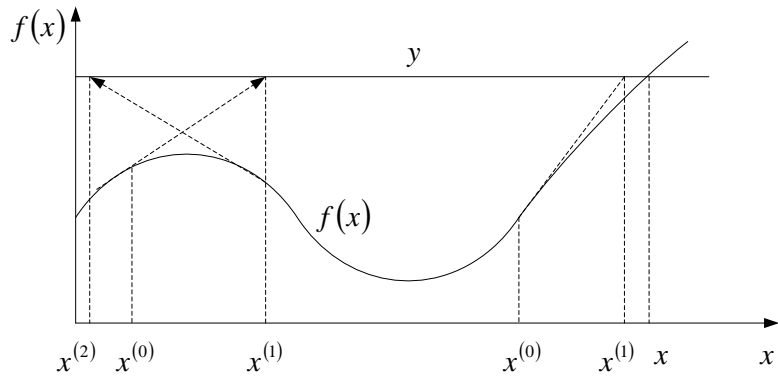
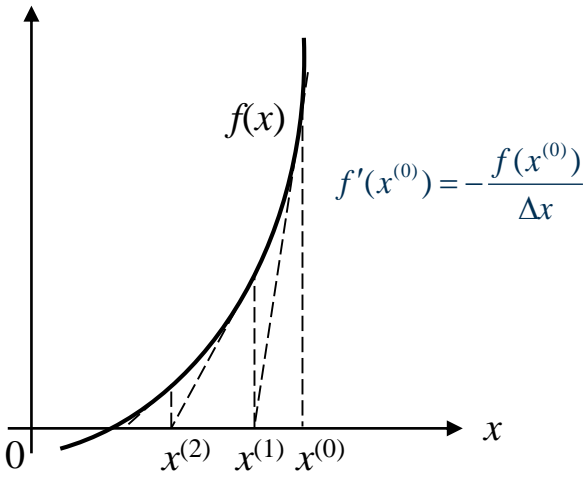
雅可比因子

求解非线性代数方程的牛顿拉夫逊法

N – R迭代的实质：

切线法，是一种逐步线性化的方法。

特点：二阶收敛，收敛较快，但对初值 $x^{(0)}$ 的选择较严。



N-R算法初值对收敛性的影响

求解非线性代数方程的牛顿拉夫逊法

推广至 n 维变量的情况

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_1 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_2 \\ &\dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= y_n \end{aligned} \right\}$$



$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) &= y_1 \\ f_2(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) &= y_2 \\ &\dots\dots\dots \\ f_n(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \dots, x_n^{(0)} + \Delta x_n) &= y_n \end{aligned} \right\}$$

泰勒展开



$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_0 \Delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big|_0 \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Big|_0 \Delta x_n &= y_1 \\ f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Big|_0 \Delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Big|_0 \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \Big|_0 \Delta x_n &= y_2 \\ &\dots\dots\dots \\ f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \Big|_0 \Delta x_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \Big|_0 \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \Big|_0 \Delta x_n &= y_n \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{cases} f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_0 \Delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big|_0 \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Big|_0 \Delta x_n = y_1 \\ f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Big|_0 \Delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Big|_0 \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \Big|_0 \Delta x_n = y_2 \\ \dots \\ f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) + \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \Big|_0 \Delta x_1 + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \Big|_0 \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \Big|_0 \Delta x_n = y_n \end{cases}$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} y_1 - f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \\ y_2 - f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \\ \dots \\ y_n - f_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \Big|_0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \Big|_0 & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \Big|_0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Big|_0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \Big|_0 & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \Big|_0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \Big|_0 & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \Big|_0 & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \Big|_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{bmatrix}$$

不平衡量
mismatch

可写成

$$\Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)}) = \mathbf{J}^{(k)} \Delta \mathbf{x}^{(k)}$$

修正方程

$$\Delta \mathbf{x}^{(k)} = [\mathbf{J}^{(k)}]^{-1} \Delta \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(k)})$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}^{(k)}$$

修正量

雅可比 (Jacobi)
矩阵

收敛判据 $\max \left\{ \left| \Delta f_i(x^{(k)}) \right| \right\} < \varepsilon$

3.3.2 牛顿-拉夫逊法潮流计算

牛顿-拉夫逊法潮流计算 (极坐标形式)

■ 极坐标形式的功率方程：

$$\begin{cases} P_i = U_i \sum_{j=1}^n U_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) \\ Q_i = U_i \sum_{j=1}^n U_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) \end{cases}$$

其中： $\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$

■ 对各类节点的处理

- ✓ 平衡节点：电压大小、相位均为已知，不需要参加联立求解，当迭代结束后再求该节点的有功功率和无功功率；
- ✓ PQ节点：每个PQ节点有两个变量 ΔU 和 $\Delta \theta$ 待求，P和Q都要参加联立求解；
- ✓ PV节点：节点电压给定， ΔU 为零，只有一个变量 $\Delta \theta$ 待求。因此，该类节点只有有功部分参加联立求解，但每次迭代中需计算该节点的无功功率，以校验是否越限。

转换成

✓ 如果 $Q_i^{(k)} > Q_{imax}$ ，则令 $Q_i^{(k)} = Q_{imax}$

✓ 如果 $Q_i^{(k)} < Q_{imin}$ ，则令 $Q_i^{(k)} = Q_{imin}$

PV节点  **PQ节点**

设网络中共有 n 个节点，其中

- PQ节点 m 个，编号为， $1, \dots, m$
- PV节点 $n-m-1$ 个。编号为 $m+1, m+2, \dots, n-1$
- 平衡节点 1 个，编号为 n

则未知量为：

- $1 \sim m$ 节点的电压幅值 U_i
- $1 \sim n-1$ 节点的电压相角 θ_i
- 未知量总数为 $m+n-1$ 个。

$$\begin{cases} \Delta P_i = P_i - U_i^{(k)} \sum_{j=1}^n U_j^{(k)} \left(G_{ij} \cos(\theta_i^{(k)} - \theta_j^{(k)}) + B_{ij} \sin(\theta_i^{(k)} - \theta_j^{(k)}) \right) \\ \Delta Q_i = Q_i - U_i^{(k)} \sum_{j=1}^n U_j^{(k)} \left(G_{ij} \sin(\theta_i^{(k)} - \theta_j^{(k)}) - B_{ij} \cos(\theta_i^{(k)} - \theta_j^{(k)}) \right) \end{cases}$$

PQ和PV节点， $n-1$ 个

PQ节点， m 个

共 $m+n-1$ 个方程式

潮流计算的修正方程式

对功率不平衡方程求导，可以得到修正方程：

雅可比矩阵

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \vdots \\ \Delta P_{n-1} \\ \Delta Q_1 \\ \vdots \\ \Delta Q_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P_1}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial P_1}{\partial U_1} U_1 & \dots & \frac{\partial P_1}{\partial U_m} U_m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial P_{n-1}}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial P_{n-1}}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial P_{n-1}}{\partial U_1} U_1 & \dots & \frac{\partial P_{n-1}}{\partial U_m} U_m \\ \hline \frac{\partial Q_1}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial Q_1}{\partial U_1} U_1 & \dots & \frac{\partial Q_1}{\partial U_m} U_m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial Q_m}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial Q_m}{\partial \theta_{n-1}} & \frac{\partial Q_m}{\partial U_1} U_1 & \dots & \frac{\partial Q_m}{\partial U_m} U_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_1 \\ \vdots \\ \Delta \theta_{n-1} \\ \Delta U_1/U_1 \\ \vdots \\ \Delta U_m/U_m \end{bmatrix}$$

只是为了让偏导数公式形式更相似

潮流计算的修正方程式

第k次迭代过程修正方程：

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1^{(k)} \\ \Delta P_2^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta P_p^{(k)} \\ \Delta P_{n-1}^{(k)} \\ \hline \Delta Q_1^{(k)} \\ \Delta Q_2^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta Q_m^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1p} & H_{1,n-1} & N_{11} & N_{12} & \cdots & N_{1m} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2p} & H_{2,n-1} & N_{21} & N_{22} & \cdots & N_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ H_{p1} & H_{p2} & \cdots & H_{pp} & H_{p,n-1} & N_{p1} & N_{p2} & \cdots & N_{pm} \\ H_{n-1,1} & H_{n-1,2} & \cdots & H_{n-1,p} & H_{n-1,n-1} & N_{n-1,1} & N_{n-1,2} & \cdots & N_{n-1,m} \\ \hline J_{11} & J_{12} & \cdots & J_{1p} & J_{1,n-1} & L_{11} & L_{12} & \cdots & L_{1m} \\ J_{21} & J_{22} & & J_{2p} & J_{2,n-1} & L_{21} & L_{22} & & L_{2m} \\ \cdots & & & & \cdots & \cdots & & & \cdots \\ J_{m,1} & J_{m,2} & & J_{m,p} & J_{m,n-1} & L_{m,1} & L_{m,2} & & L_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta_1^{(k)} \\ \Delta \theta_2^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta \theta_p^{(k)} \\ \Delta \theta_{n-1}^{(k)} \\ \hline \Delta U_1^{(k)} / U_1^{(k)} \\ \Delta U_2^{(k)} / U_2^{(k)} \\ \vdots \\ \Delta U_m^{(k)} / U_m^{(k)} \end{bmatrix}$$

其中：

$$\begin{cases} H_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial \theta_j}; N_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial U_j} U_j \\ J_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_j}; L_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial U_j} U_j \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & N \\ J & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta U/U \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 & & \\ & \ddots & \\ & & U_m \end{bmatrix}$$

对角元:

$$\begin{cases} P_i = U_i \sum_{j=1}^n U_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) \\ Q_i = U_i \sum_{j=1}^n U_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) \\ \theta_{ij} = \theta_i - \theta_j \end{cases}$$

非对角元:

$$\begin{cases} H_{ii} = \frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} = -U_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) = -Q_i - U_i^2 B_{ii} \\ J_{ii} = \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} = U_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) \\ N_{ii} = \frac{\partial P_i}{\partial U_i} U_i = U_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) + 2U_i^2 G_{ii} \\ L_{ii} = \frac{\partial Q_i}{\partial U_i} U_i = U_i \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n U_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) - 2U_i^2 B_{ii} = Q_i - U_i^2 B_{ii} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} = U_i U_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) \\ J_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial \theta_j} = -U_i U_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) \\ N_{ij} = \frac{\partial P_i}{\partial U_j} U_j = U_i U_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) \\ L_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial U_j} U_j = U_i U_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) \end{cases}$$

■ 雅可比矩阵的特点

1. 雅可比矩阵为一非奇异方阵。传统的，当节点电压以**极坐标**表示时，该矩阵为 **$(m+n-1)$** 阶方阵；当节点电压以**直角坐标**表示时，该矩阵为 **$2 \times (n-1)$** 阶方阵。
2. 矩阵元素与节点电压有关，故每次迭代时都要重新计算。
3. 各块与导纳矩阵具有相似的结构，当 $Y_{ij} = 0$ ， H_{ij} 、 N_{ij} 、 J_{ij} 、 L_{ij} 均为0，因此也是高度稀疏的矩阵。
4. 具有强对角性和结构对称性，但数值不对称。

根据修正方程式，将电压幅值和相位的修正量解出

$$\begin{bmatrix} \Delta\theta^{(k)} \\ \Delta\mathbf{U}^{(k)}/\mathbf{U}^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^{(k)} & \mathbf{N}^{(k)} \\ \mathbf{J}^{(k)} & \mathbf{L}^{(k)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{P}^{(k)} \\ \Delta\mathbf{Q}^{(k)} \end{bmatrix}$$

然后对求量进行修正

$$\begin{bmatrix} \theta^{(k+1)} \\ U^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta^{(k)} \\ U^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta\theta^{(k)} \\ \Delta U^{(k)} \end{bmatrix}$$

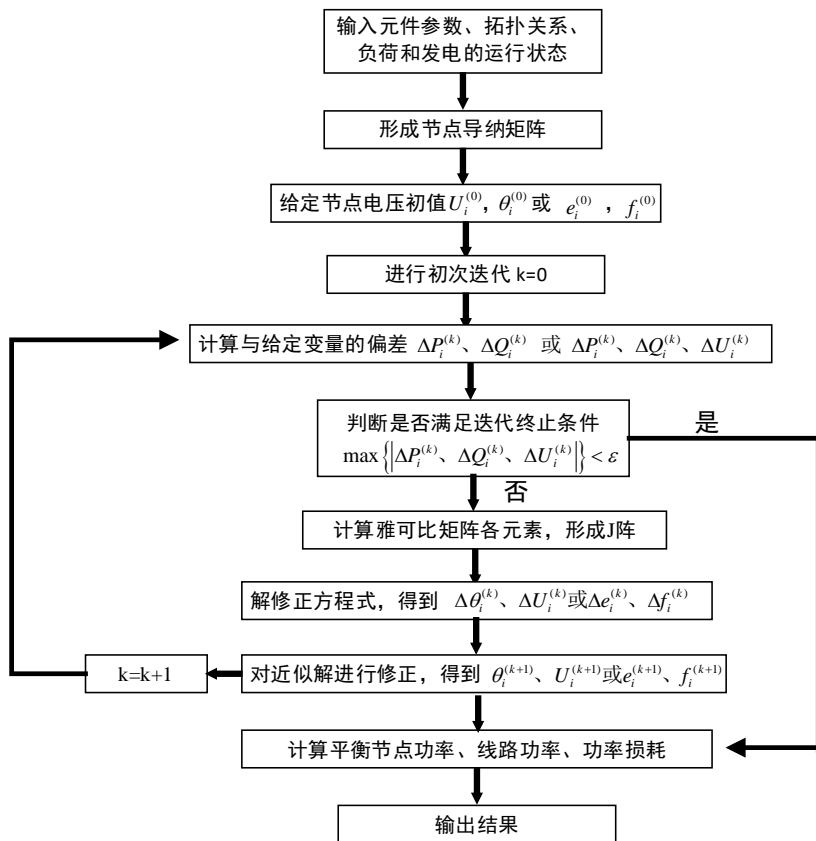


代入

$$\begin{cases} \Delta P_i = P_i - U_i^{(k)} \sum_{j=1}^n U_j^{(k)} (G_{ij} \cos(\theta_i^{(k)} - \theta_j^{(k)}) + B_{ij} \sin(\theta_i^{(k)} - \theta_j^{(k)})) \\ \Delta Q_i = Q_i - U_i^{(k)} \sum_{j=1}^n U_j^{(k)} (G_{ij} \sin(\theta_i^{(k)} - \theta_j^{(k)}) - B_{ij} \cos(\theta_i^{(k)} - \theta_j^{(k)})) \end{cases}$$

收敛判据： $\max \{|\Delta P, \Delta Q|\} < \varepsilon$

牛顿-拉夫逊法潮流计算的基本步骤



- 平衡节点的注入功率可以通过该节点的电压与该节点注入电流的乘积获得，即

$$\tilde{S}_n = \dot{U}_n \sum_{j=1}^n Y_{nj}^* \dot{U}_n^* = P_n + jQ_n$$

- 各条线路传输的功率也可以用已求得的电压表示如下

$$\tilde{S}_{ij} = \dot{U}_i \dot{I}_{ij}^* = \dot{U}_i [\dot{U}_i^* y_{i0}^* + (\dot{U}_i^* - \dot{U}_j^*) y_{ij}^*] = P_{ij} + jQ_{ij}$$

$$\tilde{S}_{ji} = \dot{U}_j \dot{I}_{ji}^* = \dot{U}_j [\dot{U}_j^* y_{j0}^* + (\dot{U}_j^* - \dot{U}_i^*) y_{ji}^*] = P_{ji} + jQ_{ji}$$

- 线路上损耗的功率可以计算

$$\Delta \tilde{S}_{ij} = \tilde{S}_{ij} + \tilde{S}_{ji} = \Delta P_{ij} + j\Delta Q_{ij}$$

牛顿-拉夫逊法潮流计算的特点

牛顿-拉夫逊法其要点是把非线性方程式的求解过程变成反复地对相应的线性方程式进行求解的过程，即通常所称的逐次线性化过程

■ 优点

- ✓ 1. 收敛速度快，若选择到一个较好的初值，算法将具有平方收敛特性，一般迭代4-5次便可以收敛到一个非常精确的解。而且其迭代次数与所计算网络的规模基本无关。
- ✓ 2. 具有良好的收敛可靠性，对于前面提到的对以节点导纳矩阵为基础的高斯—塞德尔法呈病态的系统，牛顿法均能可靠地收敛。

■ 缺点

- 牛顿法的可靠收敛取决于有一个良好的启动初值。如果初值选择不当，算法有可能根本不收敛或收敛到一个无法运行的解点上。
- 所需的内存量及每次迭代所需时间均较前述的高斯—塞德尔法为多，并与程序设计技巧有密切关系。

3.3.3 PQ分解法潮流计算

■ 问题引入:

- ✓ 牛顿-拉夫逊法的缺点：牛顿-拉夫逊法的雅可比矩阵在每一次迭代过程中都有变化，需要重新形成和求解，这占据了计算的大部分时间，成为牛顿-拉夫逊法计算速度不能提高的主要原因。
- ✓ P - Q 分解法是在极坐标形式 N - R 迭代法基础上的改进形式，该方法利用电力系统的一些特有的运行特性，对牛顿-拉夫逊法进行简化，以改进和提高计算速度。

PQ分解法潮流计算


■ 前提和简化条件

1. 输电网络中的电抗远大于电阻

则系统中有功功率分布主要受节点电压相角的影响，无功功率分布主要受节点电压幅值的影响，所以可以近似的忽略电压幅值变化对有功功率和电压相位变化对无功功率分布的影响，即 $N=0$ ， $J=0$ 。得到

$$\begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta U / U \end{bmatrix}$$

2. 电力系统正常运行时, θ_{ij} 不大, 且 $B_{ij} \gg G_{ij}$


$$\begin{aligned} \cos \theta_{ij} &\approx 1 \\ G_{ij} \sin \theta_{ij} &\approx 0 \end{aligned}$$

PQ分解法潮流计算

$$G_{ij} \sin \theta_{ij} \approx 0$$

$$\cos \theta_{ij} \approx 1$$

非对角元:

$$H_{ij} = -U_i U_j \left(G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij} \right) \approx -U_i U_j B_{ij}$$

$$L_{ij} = -U_i U_j \left(G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij} \right) \approx -U_i U_j B_{ij}$$

对角元:

$$H_{ii} = -Q_i - U_i^2 B_{ii}$$

$$L_{ii} = Q_i - U_i^2 B_{ii}$$

3. 考虑到 $Q_i \ll U_i^2 B_{ii}$ 则
$$\begin{cases} H_{ii} = -Q_i - U_i^2 B_{ii} \approx -U_i^2 B_{ii} \\ L_{ii} = Q_i - U_i^2 B_{ii} \approx -U_i^2 B_{ii} \end{cases}$$

$$H_{ii} \approx -U_i^2 B_{ii} \quad H_{ij} \approx -U_i U_j B_{ij}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} U_1 B_{11} U_1 & U_1 B_{12} U_2 & \cdots & U_1 B_{1,n-1} U_{n-1} \\ U_2 B_{21} U_1 & U_2 B_{22} U_2 & \cdots & U_2 B_{2,n-1} U_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{n-1} B_{n-1,1} U_1 & U_{n-1} B_{n-1,2} U_2 & \cdots & U_{n-1} B_{n-1,n-1} U_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} U_1 & & & 0 \\ & U_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & U_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1,n-1} \\ B_{21} & B_{12} & \cdots & B_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n-1,1} & B_{n-1,2} & \cdots & B_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & & & 0 \\ & U_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & U_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$L_{ii} \approx -U_i^2 B_{ii} \quad L_{ij} \approx -U_i U_j B_{ij}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} U_1 B_{11} U_1 & U_1 B_{12} U_2 & \cdots & U_1 B_{1m} U_m \\ U_2 B_{21} U_1 & U_2 B_{22} U_2 & \cdots & U_2 B_{2m} U_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_m B_{m1} U_1 & U_m B_{m2} U_2 & \cdots & U_m B_{mm} U_m \end{bmatrix}$$

$$= - \begin{bmatrix} U_1 & & & 0 \\ & U_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & U_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{12} & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & & & 0 \\ & U_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & U_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta \mathbf{U} / \mathbf{U} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 \\ \Delta P_2 \\ \vdots \\ \Delta P_{n-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} U_1 & & & 0 \\ & U_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & U_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n-1} \\ B_{21} & B_{12} & \cdots & B_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n-11} & B_{n-12} & \cdots & B_{n-1n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \Delta \theta_1 \\ U_2 \Delta \theta_2 \\ \vdots \\ U_{n-1} \Delta \theta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_1 \\ \Delta Q_2 \\ \vdots \\ \Delta Q_m \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} U_1 & & & 0 \\ & U_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & U_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{12} & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \vdots \\ \Delta U_m \end{bmatrix}$$

等式两边左乘

$$\begin{bmatrix} U_1 & & & 0 \\ & U_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & U_m \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{U_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{U_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{U_m} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1/U_1 \\ \Delta P_2/U_2 \\ \vdots \\ \Delta P_{n-1}/U_{n-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1,n-1} \\ B_{21} & B_{12} & \cdots & B_{2,n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n-1,1} & B_{n-1,2} & \cdots & B_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \Delta \theta_1 \\ U_2 \Delta \theta_2 \\ \vdots \\ U_{n-1} \Delta \theta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_1/U_1 \\ \Delta Q_2/U_2 \\ \vdots \\ \Delta Q_m/U_m \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{12} & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \vdots \\ \Delta U_m \end{bmatrix}$$

综上，修正方程
$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{P} \\ \Delta \mathbf{Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{N} \\ \mathbf{J} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta \mathbf{U} / \mathbf{U} \end{bmatrix}$$

简化为

$$\begin{bmatrix} \Delta P_1 / U_1 \\ \Delta P_2 / U_2 \\ \Delta P_3 / U_3 \\ \vdots \\ \Delta P_{n-1} / U_{n-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \cdots & B_{1,n-1} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \cdots & B_{2,n-1} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \cdots & B_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n-1,1} & B_{n-1,2} & B_{n-1,3} & \cdots & B_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \Delta \theta_1 \\ U_2 \Delta \theta_2 \\ U_3 \Delta \theta_3 \\ \vdots \\ U_{n-1} \Delta \theta_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta Q_1 / U_1 \\ \Delta Q_2 / U_2 \\ \vdots \\ \Delta Q_m / U_m \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \vdots \\ \Delta U_m \end{bmatrix}$$

可以简写为：

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{P} / \mathbf{U} = -\mathbf{B}' \mathbf{U} \Delta \theta \\ \Delta \mathbf{Q} / \mathbf{U} = -\mathbf{B}'' \Delta \mathbf{U} \end{cases}$$

\mathbf{U} 为节点电压有效值的对角矩阵, \mathbf{B}' 和 \mathbf{B}'' 为电纳矩阵。

注意：第一组方程是 $n-1$ 阶，第二组方程是 m 阶的方程。

PQ解耦法的特点

1. 以一个 $n-1$ 阶和一个 m 阶线性方程组代替牛顿法 $n+m-1$ 阶非线性方程组；
2. 用常数矩阵 B' 和 B'' 代替了每次迭代均起变化的 J 矩阵，显著提高了计算速度；
3. 用对称的系数矩阵 B' 和 B'' 代替了不对称的 J 矩阵，使求逆的运算量和储存容量大为减少。每次迭代所需时间约为牛顿法的 $1/5$ 。
4. 线性收敛，迭代次数比牛顿法多，但因每次迭代所需时间少很多，而比牛顿法快。也称为快速解耦法。