

【正式】经济管理-博弈论-动态博弈【gyj】

1. 斯塔克博格模型
 - 1.1 模型描述
 - 1.2 模型内容
2. 讨价还价博弈
 - 2.1 三回合讨价还价
 - 2.2 无限回合讨价还价
3. 子博弈精炼纳什均衡
 - 3.1 子博弈精炼纳什均衡
 - 3.2 逆推归纳法
5. 参考资料

【正式】经济管理-博弈论-动态博弈【gyj】

动态博弈是指人的行动有先后顺序，并且行动在后者可以观察到行动在前者的选择，从而做出相应的选择。

动态博弈的困难在于，在前一刻最优的决策在下一刻可能不再为最优，因此在求解上发生很大的困难。动态博弈行动有先后顺序，不同的参与人在不同时点行动，**先行动者的选择影响后行动者的选择空间**，后行动者可以观察到先行动者做了什么选择，因此，为了做最优的行动选择，每个参与人都必须这样思考问题：如果我如此选择，对方将如何应对？

1. 斯塔克博格模型

1.1 模型描述

是一个双寡头¹动态模型。该假设有两个企业，这两个企业的决策选择是产量。在这两个企业中，其中一个处于支配地位，先行动进行产量选择，另一个企业处于从属地位，在之前企业选择产量之后再进行选择。因此这是一个动态博弈问题。

1.2 模型内容

斯塔克博格双寡头博弈的顺序如下：企业1首先选择产量 $q_1 \geq 0$ ，企业2观察到 $q_1 \geq 0$ ，于是企业 $i(i = 1, 2)$ 的收益由下面的收益函数给出： $u_i(q_i, q_j) = q_i[p(Q) - c]$ ，其中 $p(Q) = a - Q$ 为市场出清时候的价格。 $Q = q_1 + q_2$ 。 c 为常数是企业的边际成本（假设企业没有固定成本）

我们采用逆向归纳法来找出该博弈的子博弈精炼纳什均衡。两厂商的得益为：

$$u_1(q_1, q_2) = q_1 P(Q) - cq_1 = q_1(a - q_1 - q_2) - cq_1 \quad (1)$$

$$u_2(q_1, q_2) = q_2 P(Q) - cq_2 = q_2(a - q_1 - q_2) - cq_2 \quad (2)$$

假设由厂商1先决定产量，厂商2根据厂商1的产量再决定其产量。先分析第2个阶段厂商2的决策。在第2个阶段厂商2决策时，厂商1选择的 q_1 实际上已经决定了，并且厂商2知道 q_1 ，因此对厂商2来说，相当于在给定 q_1 的情况下求 u_2 实现最大值 q_2 ，这样的 q_2 必须满足(q_1 的导数为0)：

$$\frac{\partial u_2}{\partial q_2} = a - c - q_1 - 2q_2 = 0$$

解的厂商2的产量 q_2^*

$$q_2^* = \frac{1}{2}(a - c - q_1) \quad (3)$$

厂商1知道厂商2的这种决策思路，因此在选择 q_1 时就知道厂商2的产量 q_2^* 会根据公式(3)确定，所以可以直接将公式(3)带入自己的得益函数(1)式，这样厂商1的得益函数实际上转化成了他自己产量的一元函数

$$u_1(q_1, q_2^*) = q_1(a - q_1 - q_2^*) - cq_1 = \frac{1}{2}q_1(a - c - q_1)$$

上式对 q_1 求导并令导数等于0得：

$$q_1^* = \frac{1}{2}(a - c)$$

将上式带入(3)式后可得

$$q_2^* = \frac{1}{4}(a - c)$$

具体地，若设 $a = 8, c = 2$ ，则 $q_1^* = 3, q_2^* = 1.5, Q^* = 4.5, u_1^* = 4.5, u_2^* = 2.25$

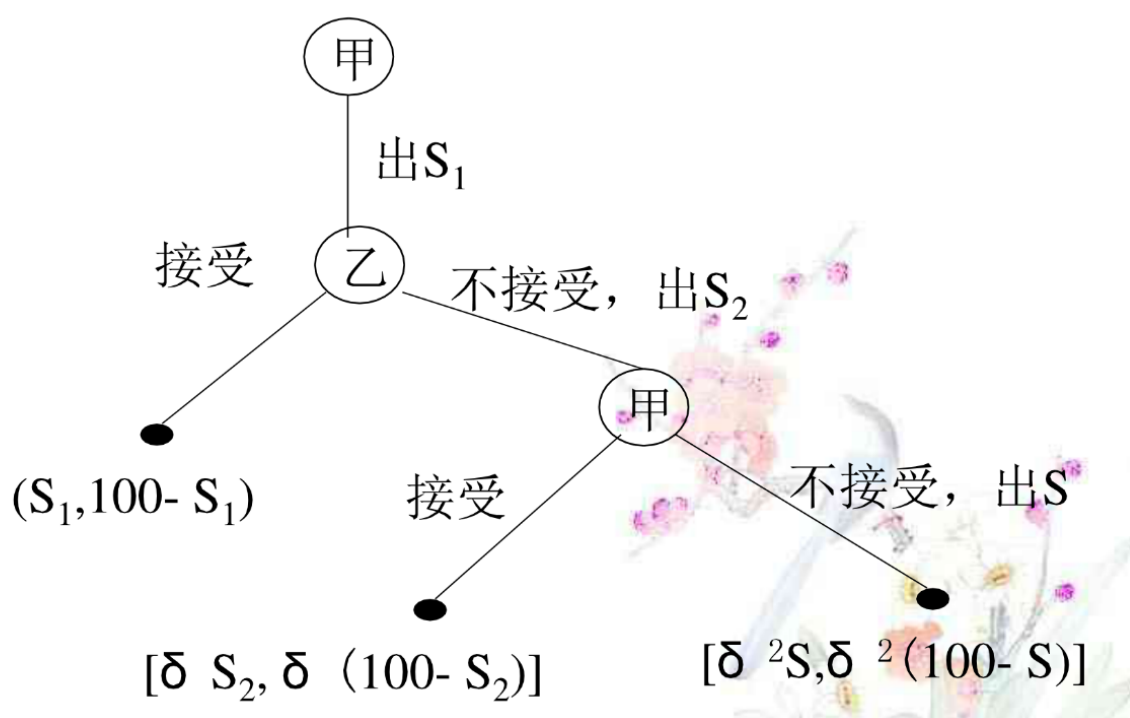
将上述结果与古诺模型比较，不难发现斯塔克伯格模型的总产量大于古诺产量，价格低于古诺模型，总利润(两厂商的得益之和)小于古诺模型。不过其中厂商1的得益缺大于古诺模型中两个厂商的得益；厂商2的得益却小于古诺模型中两个厂商的得益。本例也说明在信息不对称的博弈中，信息较多的一方不一定能得到较多的利益。

2. 讨价还价博弈

2.1 三回合讨价还价

假设有两人就如何分享100元现金双份进行谈判，并且已经定下了这样的规则：首先由甲提出一个分割比例，对甲提出的比例乙可以接受也可以拒绝(为一个回合)；如果乙拒绝甲的方案，则他自己应提出另一个方案，让甲选择接受或拒绝(为一个回合)；...在上述循环过程中，只要任何一方接受对方的方案，博弈就告结束。讨价还价每多进行一个回合，双方的利益都要打一个折扣 $\delta (0 < \delta < 1)$ ，我们称 δ 为“消耗系数”。

下图为三回合讨价还价博弈图：



在第三回合，因为甲的出价 S 乙必须接受，因此通常甲会选择 $S = 100$ ，也就是自己独得这笔钱，双方的得益分别为 $[\delta^2 S, \delta^2 (100 - S)]$ 。

现在推到第二回合乙的选择，乙知道一旦博弈进行到第三回合，甲将出 S ，自己将得到 $\delta^2(100 - S)$ ，甲得到 $\delta^2 S$ ，乙在第二回合出 S_2 ，应使甲选择接受的得益不小于第三回合的得益，即 $\delta S_2 \geq \delta^2 S$ 。由此得到， $S_2 \geq \delta S$ ，则乙出价 $S_2 = \delta S$ 。双方的得益分别为 $[\delta^2 S, \delta(100 - \delta S)]$

再回到第一回合甲的考虑。甲在第一回合出价 S_1 ，应使乙选择接受的得益不小于第二、三回合的得益，即 $100 - S_1 \geq \delta(100 - \delta S)$ 。由此得到： $S_1 \leq 100 - 100\delta + \delta^2$ 。可知甲应出价 $S_1 = 100 - 100\delta + \delta^2 S$ ，双方的得益分别为 $[100(1 - \delta + \delta^2), 100(\delta - \delta^2)]$

2.2 无限回合讨价还价

对于一个无限回合讨价还价博弈来讲，在无限回合讨价还价博弈中，不管是从第一回合开始还是从第三回合开始，都是甲先出价，然后双方交替出价，直到一方接受位置。**因此无论是从第三回合开始(假如能到达第三回合的话)，还是从第一回合开始，结果应该都是一样的。**

设博弈结果是甲在第一回合出价 S ，乙接受时双方的得益是 $(S, 100 - S)$ 。根据夏克德和萨顿的结论，从第三回合开始这个无限回合博弈，与从第一回合开始应该得到一样的结果，因此上述逆推归纳的解也应该是从第三回合开始的博弈结果，也就是说，第三回合也应该是甲出 S ，乙接受，双方得益 S 和 $100 - S$ ，而这个结果是最终结果。

如果再回头把上述第三回合理解成第一阶段开始的无限回合博弈的第三回合，那么由于甲再第三回合的出价就是最终出价，因此**这个无限回合博弈相当于一个前面讨论过的，甲在第三回合的出价有强制力的三回合讨价还价博弈。**

根据前面对三回合讨价还价博弈的逆推归纳法的结论可知，该博弈的解是甲在第一回合出价 $S_1 = 100 - 100\delta + \delta^2 S$ ；双方的得益分别为 $[100 - 100\delta + \delta^2 S, 100\delta - \delta^2 S]$

由于这个三回合博弈等于从第一回合开始的无限回合讨价还价博弈，因此 $S = S_1 = 100 - 100\delta + \delta^2 S$ 。从这个方程中可解的 $S = 100/(1 + \delta)$ ，即在这个无限回合和他家还价博弈中，均衡的结果是

甲在第一回合出价： $S = 100/(1 + \delta)$

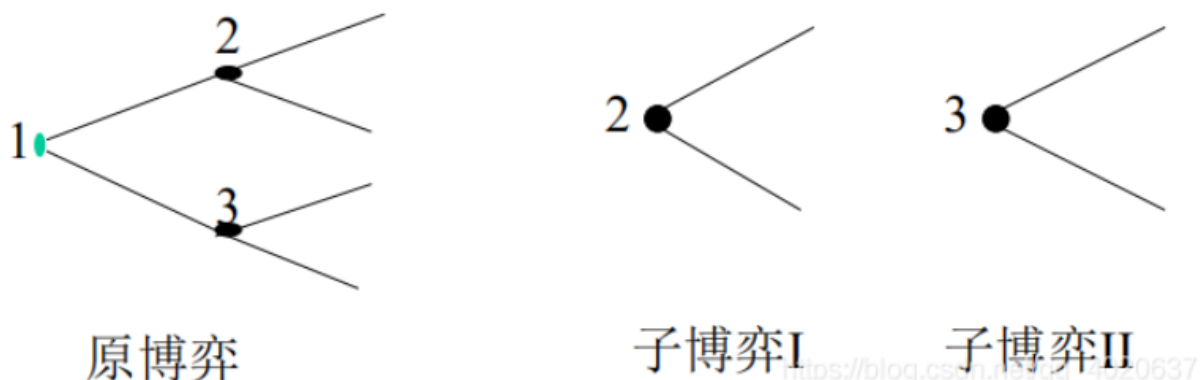
乙接受并获得： $100 - S = 100\delta/(1 + \delta)$

3. 子博弈精炼纳什均衡

3.1 子博弈精炼纳什均衡

纳什均衡指满足下面性质的策略组合：任何一位玩家在此策略组合下单方面改变自己的策略(其他玩家策略不变)，都不会提高自身的收益。

子博弈指：由原博弈中某个决策点开始的部分构成一个子博弈。



子博弈精炼纳什均衡：不包含不可置信(令别人不能相信)的行動的战略所组成的纳什均衡。也就是说，无论过去发生了什么，构成精炼纳什均衡的战略，其所规定的行动在每一个决策点上都是**最优的**。

3.2 逆推归纳法

解析动态博弈的一般方法。从博弈树最后的决策节为起点，求出对应的参与人的最优选择，然后在给定这种选择的情况下倒推至该决策节的前一个决策节，直至初始的决策节。当这个倒推过程完成后，则得到一个路径，这个路径给出了每一个参与人一个特定的战略，所有这些战略构成一个纳什均衡就是动态博弈的解。

使用逆推归纳法只能分析明确设定的博弈问题，要求博弈的结构，包括次序、规则和得益情况等都非常清楚，并且各个博弈方了解博弈结构，相互知道对方了解博弈结构。

逆推法不能分析比较复杂的动态博弈(因为该方法是从动态博弈的最后阶段开始对每种可能路径进行比较)。数量不是很大的离散策略，或者有连续得益函数的连续分布策略等较适合用逆推归纳法。

在遇到两条路径利益相同的情况时，你退归纳法将会发生选择困难，无法确定唯一的最优路径，推断中断。

逆推归纳法对博弈方的理性要求较高，不仅要求博弈方都有高度的理性，不允许博弈方犯任何错误，而且要求所有博弈方相互了解新入对对方的理性。对理性(个体理性、集体理性、风险偏好等)有相同的理解，或进一步有"理性的共同知识"。

如果不满足上述条件就使用逆推归纳法，子博弈精算纳什均衡的有效性往往会有问题。

5. 参考资料

1. [博弈论经典动态博弈模型](#)
2. 文中出现的其他知识点

1. 寡头：指为数不多的销售者。在寡头垄断市场上，只有少数几家厂商供给该行业全部或大部分产品，对市场价格和产量有举足轻重的影响。 