

具有基数约束的多阶段均值-方差投资组合优化

郝 静¹, 张 鹏²

(1. 武汉科技大学管理学院, 湖北武汉 430081; 2. 武汉理工大学经济学院, 湖北武汉 430070)

摘要:考虑交易成本、阈值约束和借贷约束,提出了具有基数约束的多阶段均值-方差投资组合模型. 该模型是一个具有路径依赖性的混合整数动态优化问题. 提出了离散近似迭代法求解,并证明了算法的收敛性. 最后,以一个具体的算例比较了不同基数约束的投资组合最优投资策略,并验证了模型和算法的有效性.

关键词:多阶段投资组合;均值-方差;基数约束;交易成本;离散近似迭代法

中图分类号:F224.9;O221.2 **文献标识码:**A **doi:**10.3969/j.issn.0253-2778.2016.02.00

引用格式: Hao Jing, Zhang Peng. Multi-period mean-variance optimization with cardinality constraints [J].

Journal of University of Science and Technology of China, 2016, 46(2): 156-164.

郝静, 张鹏. 具有基数约束的多阶段均值-方差投资组合优化[J]. 中国科学技术大学学报, 2016, 46(2): 156-164.

Multi-period mean-variance optimization with cardinality constraints

HAO Jing¹, ZHANG Peng²

(1. School of Management, Wuhan University of Science and Technology, Wuhan 430081, China;

2. School of Economics, Wuhan University of Technology, Wuhan 430070, China)

Abstract: The multi-period mean-variance portfolio selection was presented by taking into account transaction cost, threshold constraints, borrowing constraints and cardinality constraints. Because of the transaction costs, the multi-period portfolio selection is the mix integer dynamic optimization problem with path dependence. The discrete approximate iteration method was designed to obtain the optimal portfolio strategy. Finally, the comparison analysis of the differently desired number of assets in the portfolio selection was provided by a numerical example to illustrate the efficiency of the proposed approaches and the designed algorithm.

Key words: multi-period portfolio selection; mean-variance; cardinality constraint; transaction costs; discrete approximate iteration

0 引言

Markowitz^[1]提出了单阶段均值-方差投资组合选择模型,奠定了现代投资组合理论的基础. 之后许

多学者拓展了 Markowitz 投资组合理论. 主要是考虑了现实市场的实际情况,如限制最优投资组合中所含资产的数量(基数约束)或在每个资产的投资比例上规定上下界(阈值约束),使得该模型变得更符

收稿日期:2015-05-10;修回日期:2015-08-30

基金项目:国家自然科学基金(71271161),国家社会科学基金(13BJL0062)资助.

作者简介:郝静,女,1990年生,硕士生.研究方向:投资决策. E-mail: 841145353@qq.com

通讯作者:张鹏,博士/教授. E-mail: zhangpeng300478@aliyun.com

合实际. 在实际投资中, 由于有交易成本、最小规模、管理的复杂性以及资产管理公司政策等因素的影响, 持有大量的资产是不可取的. 为了克服这些不利因素, 特别是从计算角度许多学者对具有基数约束的单阶段投资组合进行了研究, 有些学者提出了精确算法进行求解, 如 Bertsimas 和 Shioda^[2] 结合分枝定界法和 Lemke 的旋转算法进行求解; Bienstock^[3] 提出了分枝和剪枝方法; Li 等^[4] 提出了收敛性 Lagrangian 法; Shaw 等^[5] 基于 Lagrangian 松弛法提出了分枝定界法; Vielma 等^[6] 基于锥二次约束改进多面体松弛法提出了分枝定界算法; Cui 等^[7] 结合 Lagrangian 分解法和二次锥规划方法求解; Thi 和 Moeini^[8,9] 提出了微分凸算法; Sun 等^[10] 提出了分枝定界和分枝剪枝法; Cesarone 等^[11] 提出了增加集方法; Murray 和 Shek^[12] 提出局部松弛算法. 精确算法难以在规定时间内求出最优解, 特别是当模型的规模较大时精确算法很难求解. 近年来一些学者提出了智能算法求解, 如 Arriaga 和 Valenzuela-Rendón^[13] 提出了最快爬山法; Woodside-Oriakhi 等^[14] 提出了启发式法; Gaspero 等^[15] 提出了超启发式方法; Anagnostopoulos 和 Mamanis^[16] 提出了多目标进化算法; Fernández 和 Gómez^[17] 提出了神经网络方法; Ruiz-Torrubiano 和 Suarez^[18] 提出了混合智能算法和降维法; Deng 等^[19] 提出了改进蚁群算法; Soleimani 等^[20] 提出了遗传算法.

上述研究假定投资为单阶段. 但在现实生活中, 由于投资者可以重新分配自己的财富, 所以投资组合策略通常是多期的. 因此, 很自然地将单阶段投资组合扩展到多阶段, 参见文献[21-33].

由于交易成本、管理的复杂性等限制, 投资者一般会限制最优投资组合中所含资产种类的数量, 即具有基数约束. 交易量的阈值约束限制了投资于每种资产的最大投资数量, 并防止任何资产很小的投资数量. 本文综合考虑交易成本、借款限制、阈值约束和基数约束, 提出了多阶段均值-方差投资组合模型. 该模型为具有路径依赖性的混合整数动态优化问题. 本文提出了离散近似迭代法求解, 并证明了该算法是收敛的.

1 多阶段投资组合模型

1.1 问题描述及符号说明

假设一个多阶段投资组合有 n 种风险资产和 1

种无风险资产可供选择. 假设投资者用初始财富 W_1 进行投资, 投资者将其财富投资 $n+1$ 种资产进行 T 期连续投资, 他的财富将在每个时期的开始进行调整. 为了方便说明, 现将所有下文中将使用的符号列在下面.

x_{it} 表示第 t 阶段对于风险资产 i 的投资比例; x_{i0} 表示第 0 阶段对于风险资产 i 的投资比例; x_t 表示第 t 阶段的投资组合, $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})$; x_{ft} 表示第 t 阶段对于无风险资产 i 的投资比例,

$$x_{ft} = 1 - (x_{1t} + x_{2t} + \dots + x_{nt});$$

x_{ft}^b 表示第 t 阶段无风险资产的投资下界, $x_{ft} \geq x_{ft}^b$; R_{it} 表示第 t 阶段风险资产 i 的随机收益; r_{it} 表示 R_{it} 的期望收益; σ_{ij}^t 表示 R_{it} 和 R_{jt} 的协方差; r_{pt} 表示第 t 阶段投资组合 x_t 的回报率; u_{it} 表示 x_{it} 的上界约束; r_{Nt} 表示第 t 阶段投资组合 x_t 的净回报率; W_t 表示第 t 期的初始财富; r_{lt} 表示第 t 期无风险资产的借款利率; r_{lt} 表示第 t 期无风险资产的贷款利率; c_{it} 表示第 t 期第 i 种风险资产的单位交易成本; K 表示第 t 期最优投资组合中所含资产的数量.

1.2 多阶段投资组合的收益及风险

下面我们将介绍收益、风险、借款约束、交易成本和基数约束. 假设整个投资过程是自融资, 即每一个时期没有额外的资本加入.

借款限制是投资组合选择的一个重要因素, 大部分经纪公司都提供给投资者借款的机会以便他们收购不同的资产. 一些学者研究了借款约束, 例如, Deng 和 Li^[34] 提出具有借贷约束的均值-方差模糊投资组合模型; Sadjadi 等^[35] 提出具有不同借贷利率的多阶段模糊投资组合模型. 本文假设无风险资产具有借款限制, 则第 t 阶段的投资组合 $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})'$ 的期望收益率为

$$r_{pt} = \sum_{i=1}^n r_{it} x_{it} + r_{ft} (1 - \sum_{i=1}^n x_{it}), t = 1, \dots, T \quad (1)$$

$$r_{ft} = \begin{cases} r_{lt}, & 1 - \sum_{i=1}^n x_{it} \geq 0; \\ r_{lt}, & 1 - \sum_{i=1}^n x_{it} \leq 0, \end{cases} \quad r_{lt} \geq r_{lt}.$$

对于投资组合管理者而言, 交易成本是另一个重要的考察因素. Arnott 和 Wagner^[36], Yoshimoto^[37] 研究发现如果忽略交易成本则易导致无效的投资组合; Bertsimas 和 Pachamanova^[38] 及 Gulpinar 等^[39]

研究了具有交易成本的多阶段投资组合问题. 考虑线性交易成本、熵及偏度, Zhang 等^[40-41], Liu 等^[42-43]提出多阶段模糊投资组合模型, 并分别运用遗传算法、混合智能算法和差分进化算法求解. 本文设交易成本是第 t 阶段的投资组合 $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})$ 和第 $t-1$ 阶段的投资组合 $x_{t-1} = (x_{1,t-1}, x_{2,t-1}, \dots, x_{n,t-1})$ 的 V 型函数, 即第 t 阶段资产 i 的交易成本为 $c_{it} |x_{it} - x_{i,t-1}|$.

则第 t 阶段投资组合 $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})$ 的总交易成本为

$$C_t = \sum_{i=1}^n c_{it} |x_{it} - x_{i,t-1}|, t = 1, \dots, T \quad (2)$$

第 t 阶段投资组合 $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})$ 的净收益率为

$$r_{Nt} = \sum_{i=1}^n r_{it} x_{it} + r_{ft} (1 - \sum_{i=1}^n x_{it}) - \sum_{i=1}^n c_{it} |x_{it} - x_{i,t-1}|, t = 1, \dots, T \quad (3)$$

第 t 期和第 $t+1$ 期财富变化可以表示为

$$W_{t+1} = W_t (1 + r_{Nt}) = W_t \left(1 + \sum_{i=1}^n r_{it} x_{it} + r_{ft} (1 - \sum_{i=1}^n x_{it}) - \sum_{i=1}^n c_{it} |x_{it} - x_{i,t-1}| \right), t = 1, \dots, T \quad (4)$$

投资组合 x_t 的方差为

$$\text{Var}_t(x_t) = x_t' H_t x_t \quad (5)$$

式中, $H_t = (\sigma_{ij}^t)_{n \times n}$.

假设第 t 阶段的效用函数为

$$U_t(r_{Nt}, \text{Var}_t(x_t)) = (1 - \theta) \left(\sum_{i=1}^n r_{it} x_{it} + r_{ft} (1 - \sum_{i=1}^n x_{it}) - \sum_{i=1}^n c_{it} |x_{it} - x_{i,t-1}| \right) - \theta x_t' H_t x_t \quad (6)$$

式中, $\theta (0 \leq \theta \leq 1)$ 为投资者的偏好系数, 不同的 θ 表示投资者对均值和方差不同的偏好. 当 $\theta = 1$ 时, 表示在整个投资期间内, 投资者仅考虑风险, 即他为风险规避者; 当 $\theta = 0.5$ 时, 表示投资者同等关注均值和方差; 当 $\theta = 0$ 时, 表示投资者仅考虑收益.

为了计算多阶段投资组合模型的基数约束, 引入 0-1 决策变量:

$$z_{it} = \begin{cases} 1, & \text{第 } t \text{ 期第 } i \text{ 种资产被选择} \\ & (i = 1, \dots, n; t = 1, \dots, T); \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^n z_{it} \leq K \quad (8)$$

1.3 多阶段投资组合优化基本模型

假设投资者的目标是要在整个 T 期的效用最大化. 同时, 投资组合在每个 t 期内的基数约束不能超过 K . 因此, 多阶段投资组合优化问题可以表述为如下的问题:

$$\max \sum_{t=1}^T \left((1 - \theta) \cdot \left(\sum_{i=1}^n r_{it} x_{it} + r_{ft} (1 - \sum_{i=1}^n x_{it}) - \sum_{i=1}^n c_{it} |x_{it} - x_{i,t-1}| \right) - \theta x_t' H_t x_t \right) \quad \text{s. t.}$$

$$\begin{cases} W_{t+1} = \left(1 + \left(\sum_{i=1}^n r_{it} x_{it} + r_{ft} (1 - \sum_{i=1}^n x_{it}) - \sum_{i=1}^n c_{it} |x_{it} - x_{i,t-1}| \right) \right) W_t; \end{cases} \quad (a)$$

$$\begin{cases} 1 - \sum_{i=1}^n x_{it} \geq x_{ft}^b; \end{cases} \quad (b)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n z_{it} \leq K, z_{it} \in \{0, 1\}; \end{cases} \quad (c)$$

$$\begin{cases} l_{it} z_{it} \leq x_{it} \leq u_{it} z_{it}, i = 1, \dots, n, t = 1, \dots, T \end{cases} \quad (d) \quad (9)$$

式中, 约束条件 (a) 为财富转移约束; 约束条件 (b) 为第 t 阶段对无风险资产借款约束; 约束条件 (c) 表示投资组合中的基数约束; 约束条件 (d) 为 x_{it} 的上下界约束.

2 离散近似迭代法

本节提出离散近似迭代法求解模型 (9).

2.1 计算方法

第 t 阶段的状态变量按由小到大分成 4 等份, 即每个时期有 5 个离散状态变量值. 则模型 (9) 可转变成多阶段赋权有向图, 如图 1 所示, 阶段数为投资时期, 第 t 期目标函数值和状态变量的离散值分别为多阶段有向图第 t 阶段的权重和点.

步骤 1 第 $t (t = 2, \dots, T+1)$ 期离散状态变量可以这样确定:

步骤 1.1 设 $W_1 = 1$. W_t^{\min} (第 t 期的最小值) 和 W_t^{\max} (第 t 期的最大值) 可以通过下面方法获得:

投资者仅考虑第 t 期投资组合风险的最小值, 此时 r_{pt} 为最小值.

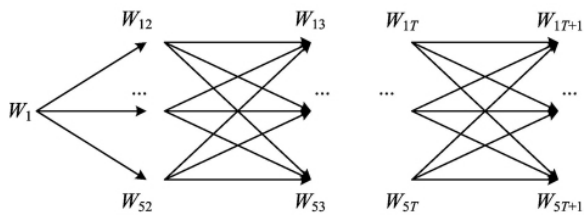


图1 多阶段加权有向图

Fig. 1 The multi-period weighted digraph

$$\begin{aligned} \min & x_t' H_t x_t \\ \text{s. t.} & \begin{cases} 1 - \sum_{i=1}^n x_{it} \geq r_{ft}^b; \\ \sum_{i=1}^n z_{it} \leq K, z_{it} \in \{0, 1\}; \\ l_{it} z_{it} \leq x_{it} \leq u_{it} z_{it}, i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

可以结合分枝定界和 Lemke 的旋转算法^[2]求出 $x_t^{\min*}$ (模型(10)的最优解 $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})'$). 同时,也得到了 r_{pt}^{\min} (r_{pt} 的最小值). 因此得出 r_{Nt}^{\min} (r_{Nt} 的最小值)如下:

$$\begin{aligned} r_{Nt}^{\min} &= r_{pt}^{\min} - \sum_{i=1}^n c_{it} |x_{it}^{\min*} - x_{it-1}^{\min*}|, \\ W_t^{\min} &= W_{t-1}^{\min} (1 + r_{Nt}^{\min}). \end{aligned}$$

投资者仅考虑第 t 期投资组合期望收益最大, 此时 r_{pt} 为最大值.

$$\begin{aligned} \max & \sum_{i=1}^n r_{it} x_{it} + r_{ft} (1 - \sum_{i=1}^n x_{it}) \\ \text{s. t.} & \begin{cases} 1 - \sum_{i=1}^n x_{it} \geq r_{ft}^b; \\ \sum_{i=1}^n z_{it} \leq K, z_{it} \in \{0, 1\}; \\ l_{it} z_{it} \leq x_{it} \leq u_{it} z_{it}, i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

结合分枝定界和 Lemke 的旋转算法^[2]求出 $x_t^{\max*}$ (模型(11)的最优解 $x_t = (x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt})'$). 同时,也得到了 r_{pt}^{\max} (r_{pt} 的最大值). 因此得出 r_{Nt}^{\max} (r_{Nt} 的最大值)如下:

$$\begin{aligned} r_{Nt}^{\max} &= r_{pt}^{\max} - \sum_{i=1}^n c_{it} |x_{it}^{\max*} - x_{it-1}^{\max*}|, \\ W_t^{\max} &= W_{t-1}^{\max} (1 + r_{Nt}^{\max}). \end{aligned}$$

步骤 1.2 第 t ($t=2, \dots, T+1$) 期离散状态变量可以通过将 $W_t^{\max} - W_t^{\min}$ 的离散区间值分为 4 个等式来获得. 就是说

$$W_{it} = W_t^{\min} + \frac{(W_t^{\max} - W_t^{\min})}{4} i, i = 0, \dots, 4.$$

步骤 2 图 1 中有向赋权图的权重可以通过以下 3 个步骤得到:

步骤 2.1 第 1 期投资组合 $r_{N1}(1, j)$, (j 是第 1 阶段有向赋权图点的数量, $j=1, \dots, 5$) 的净期望收益率可表示为 $r_{N1}(1, j) = \frac{W_{j1}}{W_1} - 1$;

步骤 2.2 第 t 期投资组合 $r_{Nt}(j, k)$ (j 是第 t 阶段有向赋权图点的数量, $j=1, \dots, 5$; k 是第 $t+1$ 阶段有向赋权图点的数量, $k=1, \dots, 5$) 的净预期收益率可以表示为 $r_{Nt}(j, k) = \frac{W_{kt+1}}{W_{jt}} - 1$;

步骤 2.3 第 t 阶段有向赋权图边的权重(目标函数 $F_1(1, j)$ 和 $F_t(j, k)$ 的值)可按照下面方法求解:

当 $r_{Nt}(k, l)$ 已知, 模型(9)第 t 期的子问题可以转化为

$$\begin{aligned} \max & (1 - \theta) \left(\sum_{i=1}^n r_{it} x_{it} + r_{ft} (1 - \sum_{i=1}^n x_{it}) - \sum_{i=1}^n c_{it} |x_{it} - x_{it-1}| \right) - \theta x_t' H_t x_t \\ \text{s. t.} & \begin{cases} \sum_{i=1}^n r_{it} x_{it} + r_{ft} (1 - \sum_{i=1}^n x_{it}) - \sum_{i=1}^n c_{it} |x_{it} - x_{it-1}| \geq r_{Nt}(k, l); \\ 1 - \sum_{i=1}^n x_{it} \geq x_{ft}^b; \\ \sum_{i=1}^n z_{it} \leq K, z_{it} \in \{0, 1\}; \\ l_{it} z_{it} \leq x_{it} \leq u_{it} z_{it}, i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

令 $\lambda (\lambda \geq 0)$ 为模型(12)的拉格朗日乘数, 则该模型转化为

$$\begin{aligned} \max & (1 - \theta + \lambda) \left(\sum_{i=1}^n r_{it} x_{it} + r_{ft} (1 - \sum_{i=1}^n x_{it}) \right) - (1 - \theta + \lambda) \sum_{i=1}^n c_{it} (|x_{it} - x_{it-1}|) + \lambda r_{Nt}(k, l) - \theta x_t' H_t x_t \\ \text{s. t.} & \begin{cases} 1 - \sum_{i=1}^n x_{it} \geq x_{ft}^b; \\ \sum_{i=1}^n z_{it} \leq K, z_{it} \in \{0, 1\}; \\ l_{it} z_{it} \leq x_{it} \leq u_{it} z_{it}, i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (13)$$

因为交易成本 $\sum_{i=1}^n c_{it} (|x_{it} - x_{it-1}|)$, 模型 (13)

是具有路径依赖的混合整数优化问题. 假设

$$\Delta x_t = \sum_{i=1}^n c_{it} (|x_{it} - x_{it-1}|), \Delta x_t \geq 0,$$

模型 (13) 可以近似转化为

$$\begin{aligned} & \max(1 - \theta + \lambda) \left(\sum_{i=1}^n r_{it} x_{it} + r_{ft} \left(1 - \sum_{i=1}^n x_{it} \right) \right) - \\ & (1 - \theta + \lambda) \Delta x_t + \lambda r_{Nt}(k, l) - \theta x_t' H_t x_t \\ \text{s. t. } & \begin{cases} 1 - \sum_{i=1}^n x_{it} \geq x_{ft}^b; \\ \sum_{i=1}^n z_{it} \leq K, z_{it} \in \{0, 1\}; \\ l_{it} z_{it} \leq x_{it} \leq u_{it} z_{it}, i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

定理 1 假设模型 (13) 的最优解和目标函数值分别为 x^{1*} 和 $G(x^{1*}, \lambda^*)$. 假设模型 (14) 的最优解和目标函数值分别为 x^{2*} 和 $F(x^{2*}, \lambda^{**})$. 则

$$\begin{aligned} & G(x^{1*}, \lambda^*) - G(x^{2*}, \lambda^{**}) \leq \\ & \max\{1 - \theta + \lambda^*, 1 - \theta + \lambda^{**}\} \cdot \\ & \sum_{i=1}^n c_{it} |x_{it}^{1*} - x_{it}^{2*}| + (\lambda^{**} - \lambda^*) \Delta x_t^*. \end{aligned}$$

证明 由于模型 (13) 和模型 (14) 的可行解集是一样的, x^{1*} 和 x^{2*} 分别为模型 (14) 和模型 (13) 的可行解. 那么

$$\begin{aligned} & G(x^{1*}, \lambda^*) \geq G(x^{2*}, \lambda^{**}), \\ & F(x^{2*}, \lambda^{**}) \geq F(x^{1*}, \lambda^*). \end{aligned}$$

也就是说

$$\begin{aligned} & G(x^{1*}, \lambda^*) + F(x^{2*}, \lambda^{**}) \geq \\ & G(x^{2*}, \lambda^{**}) + F(x^{1*}, \lambda^*). \end{aligned}$$

那么

$$\begin{aligned} & G(x^{1*}, \lambda^*) - G(x^{2*}, \lambda^{**}) + F(x^{2*}, \lambda^{**}) - \\ & F(x^{1*}, \lambda^*) \geq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

方程 (15) 的右边为

$$\begin{aligned} & G(x^{1*}, \lambda^*) - G(x^{2*}, \lambda^*) + \\ & F(x^{2*}, \lambda^{**}) - F(x^{1*}, \lambda^*) = \\ & (1 - \theta + \lambda^*) \sum_{i=1}^n c_{it} |x_{it}^{1*} - x_{it-1}^*| - \\ & (1 - \theta + \lambda^{**}) \sum_{i=1}^n c_{it} |x_{it}^{2*} - x_{it-1}^*| + (\lambda^{**} - \lambda^*) \Delta x_t^* \leq \\ & \max\{1 - \theta + \lambda^*, 1 - \theta + \lambda^{**}\} \cdot \\ & \sum_{i=1}^n c_{it} |x_{it}^{1*} - x_{it}^{2*}| + (\lambda^{**} - \lambda^*) \Delta x_t^*, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} & G(x^{1*}, \lambda^*) - G(x^{2*}, \lambda^*) \leq \\ & \max\{1 + \lambda^*, 1 + \lambda^{**}\} \cdot \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n c_{it} |x_{it}^{1*} - x_{it}^{2*}| + (\lambda^{**} - \lambda^*) \Delta x_t^*. \quad \square$$

因为 $c_{it} \ll r_{it}$, 其中资产 i 属于投资组合的有效资产集,

$$\max\{1 - \theta + \lambda^*, 1 - \theta + \lambda^{**}\} \cdot$$

$$\sum_{i=1}^n c_{it} |x_{it}^{1*} - x_{it}^{2*}| + (\lambda^{**} - \lambda^*) \Delta x_t^*$$

比较小, $G(x^{1*}, \lambda^*) - G(x^{2*}, \lambda^{**})$ 的值也小. 所以第 t 期边的权重 (图 1 中目标函数 $F_1(1, j)$ 和 $F_t(j, k)$ 的值) 可以通过解出下面的模型得到:

$$\begin{aligned} & \max(1 - \theta) \left(\sum_{i=1}^n r_{it} x_{it} + r_{ft} \left(1 - \sum_{i=1}^n x_{it} \right) - \Delta x_t \right) - \\ & \theta x_t' H_t x_t \\ \text{s. t. } & \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n r_{it} x_{it} + r_{ft} \left(1 - \sum_{i=1}^n x_{it} \right) - \Delta x_t \right) \geq \\ r_{Nt}(k, l); \\ 1 - \sum_{i=1}^n x_{it} \geq x_{ft}^b, \Delta x_t \geq 0; \\ \sum_{i=1}^n z_{it} \leq K, z_{it} \in \{0, 1\}; \\ l_{it} z_{it} \leq x_{it} \leq u_{it} z_{it}, i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

步骤 3 多阶段赋权有向图最长路径的计算

我们可以利用由 Bernd^[44] 提出的极大代数, 计算从起点到终点多阶段赋权有向图的最长路径.

定义 矩阵 $A_{n \times m} = (a_{ij})_{n \times m}$, $B_{m \times k} = (b_{ij})_{m \times k}$, $a_{ij}, b_{ij} \in R$, 在半场中 $A = \{R^+, \max, \times\}$, 于是 $C = A \otimes B$, $C_{n \times k} = (c_{ij})_{n \times k}$, 其中 $c_{ij} = \max_{l=1}^m \{a_{il} + b_{lj}\}$.

多阶段赋权有向图最长路径 F 的方法可以如下得到:

$$U = U_1 \otimes U_2 \otimes \dots \otimes U_T \quad (17)$$

步骤 4 第 $k+1$ 次迭代为以下 3 个步骤:

假设第 k 次迭代的最长路径 $U^{(k)}$ 为 $W_1 \rightarrow W_{i_2 2}^{(k)} \rightarrow W_{i_3 3}^{(k)} \rightarrow \dots \rightarrow W_{i_{T+1} T+1}^{(k)}$. 图 1 最长路径的最优解也是多阶段均值-方差投资组合优化模型的可行方案. 依据 $(W_1, W_{i_2 2}^{(k)}, W_{i_3 3}^{(k)}, \dots, W_{i_{T+1} T+1}^{(k)})$, 从第 1 期到第 T 期的状态变量可以按照以下方法获得.

步骤 4.1 分别将 W_2^{\min} 和 $W_{i_2 2}^{(k)}, W_{i_2 2}^{(k)}$ 和 W_2^{\max} 间分解为两部分. 那么 $(W_2^{\min}, W_{22}^{(k+1)}, W_{i_1 2}^{(k+1)}, W_{32}^{(k+1)}, W_2^{\max})$ 是 S_2 的 5 个离散点.

步骤 4.2 根据 $(W_{i_3 3}^{(k)}, \dots, W_{i_{T+1} T+1}^{(k)})$, 用同样的方法, 可以得到第 3 期到第 $T+1$ 期的状态变量的 5 个离散值以及第 t 期的目标函数值.

步骤 4.3 第 $k+1$ 次迭代 $U^{(k+1)}$ 的最长路径和另一个可行解可以通过步骤 3 得到.

如果 $|U^{(k+1)} - U^{(k)}| \leq 1 \times 10^{-6}$, 那么最长路径 $U^{(k+1)}$ 的最优解也就是模型 (11) 的近似最优解. 否则返回步骤 2.

2.2 离散近似迭代法的收敛性

定理 2 离散近似迭代法是收敛的

证明 假设第 1 期的最长路径为 $U_1(1, j_2)$, 第 t 期的最长路径为 $U_t(i_t, j_{t+1})$, $t=2, \dots, T+1$, 第 T 期的最长路径为 $U_T(i_T, j_{T+1})$. 那么模型 (9) 解的上界为 $U_1(1, j_2) \times \dots \times U_T(i_T, j_{T+1})$.

第 k 次迭代 $U^{(k)}$ 的多阶段赋权有向图的最长路径是由方程 (17) 得到. 假设第 k 次迭代的最长路径为 $W_1 \rightarrow W_{i_2 2}^{(k)} \rightarrow W_{i_3 3}^{(k)} \rightarrow \dots \rightarrow W_{i_{T+1} T+1}^{(k)}$, 用步骤 4, 可以得到第 $k+1$ 次迭代的多阶段加权有向图. 第 $k+1$ 次迭代 $U^{(k+1)}$ 的多阶段赋权有向图的最长路径可以通过方程 (17) 得到. 那么 $U^{(k+1)} \geq U^{(k)}$, 解变得越来越大. 因此离散近似迭代是收敛的. \square

3 实证研究

假设投资者从上证权重股中选择 20 只股票, 分别为 S_1 (600036), S_2 (600002), S_3 (600060), S_4 (600362), S_5 (600519), S_6 (601111), S_7 (601318), S_8 (600900), S_9 (600887), S_{10} (600690), S_{11} (6000970), S_{12} (600000), S_{13} (600009), S_{14} (600019), S_{15} (600029), S_{16} (600104), S_{17} (600315), S_{18} (600518),

S_{19} (600570), S_{20} (600880). 投资者用初始财富 $W_1=1$ 进行 5 期连续投资, 他的财富将在每个时期的开始进行调整. 我们收集了从 2006 年 4 月到 2012 年 12 月的数据, 并且每 3 个月为 1 个周期进行处理. 之所以采用 2006 年 4 月到 2012 年 12 月的数据, 主要是考虑到那时股票市场数据比较平稳, 便于分析问题.

设单位交易成本 $c_{it}=0.003$ ($i=1, \dots, 20$; $t=1, \dots, 5$). 该投资者的偏好为 $\theta=0.9$, 第 t 阶段的资产数量为 $K=6$ 或 7, $t=1, \dots, 5$. 对无风险资产的投资比例下界为 $x_{ft}^b=-1$, 无风险资产的借贷利率为 $r_{ft}=0.017$, 无风险资产的贷款利率率为 $r_{lt}=0.009$, $t=1, \dots, 5$, 下界约束 $l_{it}=0.05$, 上界约束 $u_{it}=0.3$ ($i=1, \dots, 20$; $t=1, \dots, 5$). 运用离散近似迭代法求解模型 (9), 可得:

当 $K=6$ 时, 多阶段投资组合的最优解如表 1 所示.

当 $K=6$ 时, 第 1 阶段的最优化投资策略为: $x_{11}=0.3$, $x_{41}=0.3$, $x_{51}=0.3$, $x_{71}=0.3$, $x_{101}=0.3$, $x_{201}=0.181966$, 其他不投资, 即投资者以 30%, 30%, 30%, 30%, 30%, 18.1966% 的比例分别投资于资产 1, 资产 4, 资产 5, 资产 7, 资产 10, 资产 20. 从表 1 也可以得到其他时期的最优投资策略. 最终财富为 2.1758.

当 $K=7$ 时, 多阶段投资组合的最优解如表 2 所示, 最终财富为 2.2387.

从表 1 和表 2 可知, 当 $K=6$ 和 $K=7$, 最优投资组合中所包含非负资产的种类大部分相同, 如第 1, 2, 3 和第 4 期有 5 种资产相同; 第 5 期有 6 种资产相同.

表 1 当 $K=6$ 时, 多阶段投资组合的最优解

Tab. 1 The optimal solution when $K=6$

t	资产 i 及最优投资比例						
1	资产 1 0.3	资产 4 0.3	资产 5 0.3	资产 7 0.3	资产 10 0.3	资产 20 0.181966	其他 0
2	资产 1 0.3	资产 4 0.3	资产 5 0.3	资产 7 0.3	资产 10 0.3	资产 20 0.204638	其他 0
3	资产 1 0.3	资产 4 0.3	资产 5 0.3	资产 7 0.3	资产 10 0.3	资产 20 0.224541	其他 0
4	资产 1 0.3	资产 4 0.3	资产 5 0.3	资产 7 0.3	资产 10 0.3	资产 20 0.224714	其他 0
5	资产 1 0.3	资产 4 0.3	资产 5 0.3	资产 7 0.3	资产 10 0.3	资产 19 0.183909	其他 0

表 2 当 $K = 7$ 时,多阶段投资组合的最优解Tab. 2 The optimal solution when $K = 7$

t	资产 i 及最优投资比例							
1	资产 1 0.3	资产 3 0.3	资产 4 0.3	资产 5 0.3	资产 7 0.3	资产 10 0.3	资产 19 0.1563	其他 0
2	资产 1 0.3	资产 3 0.3	资产 4 0.3	资产 5 0.3	资产 7 0.3	资产 10 0.3	资产 19 0.1687	其他 0
3	资产 1 0.3	资产 3 0.3	资产 4 0.3	资产 5 0.3	资产 7 0.3	资产 10 0.3	资产 19 0.1783	其他 0
4	资产 1 0.3	资产 3 0.3	资产 4 0.3	资产 5 0.3	资产 7 0.3	资产 10 0.3	资产 19 0.1928	其他 0
5	资产 1 0.3	资产 3 0.3	资产 4 0.3	资产 5 0.3	资产 7 0.3	资产 10 0.3	资产 19 0.2045	其他 0

表 3 当 $K = 1, \dots, 10$ 时, 多阶段投资组合的最终财富Tab. 3 The optimal terminal wealth when $K = 1, \dots, 10$

K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
W_6	1.085 0	1.360 4	1.644 08	1.870 3	1.995 4	2.074 5	2.175 8	2.238 7	2.246 3	2.252 3	2.252 3

当 $K=1, \dots, 10$ 时, 运用离散近似迭代法可得多阶段投资组合的最终财富, 如表 3 所示. 从表 3 可以看出, 当 $K \geq 10$ 时, 多阶段投资组合的最终财富与 $K=9$ 相同. 从表 3 还可以看出当 $0 \leq K \leq 9$ 时, 随着 K 的增加, 最终财富也增加. 因此, 当 K 较小时, 最终财富随着 K 的增加而增加; 当 K 大于某个值时, 最终财富不随着 K 的增加而变化.

4 结论

考虑交易成本、借贷约束和阈值约束, 本文提出了具有基数约束的多阶段的均值-方差投资组合模型. 该模型为具有路径依赖性的混合整数动态最优优化问题. 文章提出了离散近似迭代法求解, 并证明了其收敛性. 最后, 用实证研究得到了以下结论: ①当 $K=6$ 和 $K=7$, 最优投资组合中所包含非负资产的种类大部分相同; ②当 $K \geq 10$ 时, 多阶段投资组合的最终财富与 $K=9$ 相同, 当 $0 \leq K \leq 9$ 时, 随着 K 的增加, 最终财富也增加.

本文研究虽取得了一些有意义的结果, 但仍然存在一些问题需要进一步研究: ①研究具有各种现实约束(比如整手交易、基数约束、预算约束以及具有折扣交易等)的多期投资组合优化问题; ②研究其他风险度量方法的多期投资组合选择问题; ③研究考虑消费因素的多期投资组合选择问题; ④将本文的算法与其他有效智能算法或数值方法比较.

参考文献(References)

- [1] Markowitz H M. Portfolio selection[J]. Journal of Finance, 1952, 7: 77-91.
- [2] Bertsimas D, Shioda R. Algorithms for cardinality-constrained quadratic optimization[J]. Computational Optimization and Applications, 2009, 43: 1-22.
- [3] Bienstock D. Computational study of a family of mixed-integer quadratic programming problems [J]. Mathematical Programming, 1996, 74: 121-140.
- [4] Li D, Sun X, Wang J. Optimal lot solution to cardinality constrained mean-variance formulation for portfolio selection[J]. Mathematical Finance, 2006, 16: 83-101.
- [5] Shaw D X, Liu S, Kopman L. Lagrangian relaxation procedure for cardinality-constrained portfolio optimization[J]. Optimization Methods & Software, 2008, 23: 411-420.
- [6] Vielma J, Ahmed S, Nemhauser G. A lifted linear programming branch-and-bound algorithm for mixed integer conic quadratic programs[R]. Atlanta, GA: Georgia Institute of Technology, 2007.
- [7] Cui X T, Zheng X J, Zhu S S, et al. Convex relaxations and MIQCQP reformulations for a class of cardinality-constrained portfolio selection problems[J]. J Glob Optim, 2013, 56: 1 409-1 423.
- [8] Le Thi H A, Moeini M, Dinh T P. Portfolio selection under downside risk measures and cardinality constraints based on DC programming and DCA[J]. Comput Manag Sci, 2009, 6: 459-475.

- [9] Le Thi H A, Moeini M. Long-short portfolio optimization under cardinality constraints by difference of convex functions algorithm[J]. J Optim Theory Appl, 2014, 161:199-224.
- [10] Sun X L, Zheng X J, Li D. Recent advances in mathematical programming with semi-continuous variables and cardinality constraint[J]. JORC, 2013, 1: 55-77.
- [11] Cesarone F, Scozzari A, Tardella F. A new method for mean-variance portfolio optimization with cardinality constraints[J]. Ann Oper Res, 2013, 205: 213-234.
- [12] Murray W, Shek H. A local relaxation method for the cardinality constrained portfolio optimization problem [J]. Comput Optim Appl, 2012, 53: 681-709.
- [13] Arriaga J, Valenzuela-Rendón M. Steepest ascent hill climbing for portfolio selection[M]// Applications of Evolutionary Computation, Lecture Notes in Computer Science. Berlin: Springer, 2012, 7248: 145-154.
- [14] Woodside-Oriakhi M, Lucas C, Beasley J E. Heuristic algorithms for the cardinality constrained efficient frontier [J]. European Journal of Operational Research, 2011, 213: 538-550.
- [15] Gaspero L, Tollo G, Roli A, et al. Hybrid metaheuristics for constrained portfolio selection problems[J]. Quant Finance, 2011, 11: 1 473-1 487.
- [16] Anagnostopoulos K P, Mamanis G. The mean-variance cardinality constrained portfolio optimization problem: an experimental evaluation of five multiobjective evolutionary algorithms [J]. Expert Systems With Applications, 2011, 38: 14 208-14 217.
- [17] Fernández A, Gómez S. Portfolio selection using neural networks [J]. Computers & Operations Research, 2007, 34: 1 177-1 191.
- [18] Ruiz-Torrubiano R, Suarez A. Hybrid approaches and dimensionality reduction for portfolio selection with cardinality constraints [J]. IEEE Computational Intelligence Magazine, 2010, 5: 92-107.
- [19] Deng G F, Lin W T, Lo C C. Markowitz-based portfolio selection with cardinality constraints using improved particle swarm optimization [J]. Expert Systems With Applications, 2012, 39: 4 558-4 566.
- [20] Soleimani H, Golmakani H R, Salimi M H. Markowitz-based portfolio selection with minimum transaction lots, cardinality constraints and regarding sector capitalization using genetic algorithm[J]. Expert Systems with Applications, 2009, 36: 5 058-5 063.
- [21] Mossion J. Optimal multiperiod portfolio policies[J]. Journal of Business, 1968, 41: 215-229.
- [22] Hakansson N H. Multi-period mean-variance analysis: toward a general theory of portfolio choice[J]. Journal of Finance, 1971, 26: 857-884.
- [23] Li D, Chan T F, Ng W L. Safety-first dynamic portfolio selection [J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive, Systems Series B: Applications and Algorithms, 1998, 4(4): 585-600.
- [24] Li D, Ng W L. Optimal dynamic portfolio selection: Multiperiod mean-variance formulation [J]. Mathematical Finance, 2000, 10(3): 387-406.
- [25] Calafiore G C. Multi-period portfolio optimization with linear control policies[J]. Automatica, 2008, 44(10): 2 463-2 473.
- [26] Zhu S S, Li D, Wang S Y. Risk control over bankruptcy in dynamic portfolio selection: A generalized mean-variance formulation[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(3): 447-457.
- [27] Wei S Z, Ye Z X. Multi-period optimization portfolio with bankruptcy control in stochastic market [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 186(1): 414-425.
- [28] Güpınar N, Rustem B. Worst-case robust decisions for multi-period mean-variance portfolio optimization[J]. European Journal of Operational Research, 2007, 183(3): 981-1 000.
- [29] Yu M, Takahashi S, Inoue H, et al. Dynamic portfolio optimization with risk control for absolute deviation model[J]. European Journal of Operational Research, 2010, 201(2): 349-364.
- [30] Çlikyurt U, Öekici S. Multiperiod portfolio optimization models in stochastic markets using the mean-variance approach [J]. European Journal of Operational Research, 2007, 179(1): 186-202.
- [31] Yan W, Li S R. A class of multi-period semi-variance portfolio selection with a four-factor futures price model [J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2009, 29: 19-34.
- [32] Yan W, Miao R, Li S R. Multi-period semi-variance portfolio selection: Model and numerical solution[J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 194: 128-134.
- [33] Pınar M Ç. Robust scenario optimization based on downside-risk measure for multi-period portfolio selection[J]. OR Spectrum, 2007, 29: 295-309.
- [34] Deng X, Li R. A portfolio selection model with borrowing constraint based on possibility theory[J]. Applied Soft Computing, 2012, 12: 754-758.
- [35] Sadjadi S J, Seyedhosseini S M, Hassanlou K. Fuzzy multi-period portfolio selection with different rates for borrowing and lending[J]. Applied Soft Computing, 2011, 11: 3 821-3 826.
- [36] Arnott R D, Wagner W H. The measurement and control of trading costs [J]. Financial Analysts Journal, 1990, 6: 73-80.

- [37] Yoshimoto A. The mean-variance approach to portfolio optimization subject to transaction costs[J]. Journal of the Operational Research Society of Japan, 1996, 39: 99-117.
- [38] Bertsimas D, Pachamanova D. Robust multiperiod portfolio management in the presence of transaction costs[J]. Computers and Operations Research, 2008, 35:3-17.
- [39] Gulpınar N, Rustem B, Settergren R. Multistage stochastic mean-variance portfolio analysis with transaction cost [J]. Innovations in Financial and Economic Networks, 2003, 3: 46-63.
- [40] Zhang W G, Liu Y J, Xu W J. A possibilistic mean-semivariance-entropy model for multi-period portfolio selection with transaction costs[J]. European Journal of Operational Research, 2012, 222: 341-349.
- [41] Zhang W G, Liu Y J, Xu W J. A new fuzzy programming approach for multi-period portfolio optimization with return demand and risk control[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2014, 246: 107-126.
- [42] Liu Y J, Zhang W G, Xu W J. Fuzzy multi-period portfolio selection optimization models using multiple criteria[J]. Automatica, 2012, 48: 3 042-3 053.
- [43] Liu Y J, Zhang W G, Zhang P. A multi-period portfolio selection optimization model by using interval analysis[J]. Economic Modelling, 2013, 33: 113-119.
- [44] Heidergott B, Olsder G J, Van Der Woude J. Max Plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems; A Course on Max-Plus Algebra and its Applications[M]. Princeton, NJ: Princeton University Press, 2006.

(上接第 155 页)

- [4] Al-Ashker M M, Chen J. Cyclic codes of arbitrary lengths over $F_q + uF_q + \cdots + u^{k-1} F_q$ [J]. Palestine Journal of Mathematics, 2013, 2(1): 72-80.
- [5] Shi Minjia, Zhu Shixin. Ranks of repeated-root cyclic codes and $(1+u)$ -cyclic codes of length 2^e over the ring $F_2 + uF_2$ [J]. Application Research of Computers, 2008, 25(1): 37-38.
施敏加, 朱士信. 环 $F_2 + uF_2$ 上长为 2^e 的重根常循环码与 $(1+u)$ 循环码的秩[J]. 计算机应用研究, 2008, 25(1): 37-38.
- [6] Zhu S X, Shi M J. The ranks of cyclic and negacyclic codes over the finite ring R [J]. Journal of Electronics (China), 2008, 25(1): 96-101.
- [7] Shi Minjia, Zhu Shixin. Constacyclic codes over ring $F_q + uF_q + \cdots + u^{k-1} F_q$ [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2009, 39 (6): 583-587.
- [8] Kai X S, Zhu S X, Li P. $(1+\lambda u)$ Constacyclic codes over $F_p[u]/\langle u^k \rangle$ [J]. Journal of the Franklin Institute, 2010, 347: 751-762.
- [9] Li Yan, Zhu Shixin. A class of constacyclic codes over the ring $F_{p^m} + uF_{p^m} + \cdots + u^{k-1} F_{p^m}$ [J]. Journal of Hefei University of Technology (Natural Science), 2012, 35(3): 408-411.
李岩, 朱士信. 环 $F_{p^m} + uF_{p^m} + \cdots + u^{k-1} F_{p^m}$ 上的一类常循环码[J]. 合肥工业大学学报(自然科学版), 2012, 35(3): 408-411.