

开环策略下多阶段均值 - 方差投资组合优化研究

刘德彬^{1,2}, 肖和录³, 汤 龙^{4,*}

(1. 北京大学 经济学院, 北京 100871)

(2. 中国民生银行, 北京 100621)

(3. 湖南大学 工商管理学院, 湖南 长沙 410082)

(4. 广东工业大学 可拓学与创新方法研究所, 广东 广州 510006)

摘 要: 首先研究开环策略下不同财富动态过程的多阶段均值 - 方差投资组合优化模型, 讨论它们的实际意义和计算方法, 其中投资比例财富动态过程模型为高度非线性非凸数学规划. 进一步研究投资比例财富动态过程模型实际计算问题, 并且通过构造辅助模型, 给出投资比例两阶段模型的全局解求解方法并通过数值算例和仿真说明该方法的有效性和准确性. 最后通过数值算例比较不同财富动态过程在开环策略下和闭环策略下前沿面的关系, 结果表明在闭环策略下三种财富过程等价, 但是在开环策略下资产财富模型的前沿面最高、资产调整模型的前沿面次之、投资比例多阶段模型的前沿面最低.

关键词: 多阶段投资; 组合优化; 开环策略

1 引言

1952 年, Markowitz^[1] 在《金融期刊》上发表了题为《资产组合选择》的文章, 首次采用收益率的方差对投资组合的风险进行度量, 并建立了均值 - 方差模型, 开创了现代投资组合理论的先河, 为投资组合理论的发展奠定了坚实的基础. Markowitz 投资组合理论表明, 投资者在进行证券投资时主要根据收益和风险两个指标进行权衡选择. 就 Markowitz 提出的经典投资组合优化模型而言, 仅考虑了单阶段投资组合优化问题. 而实际上, 一个投资者需要随投资环境的变化适时地调整投资组合头寸. 因此, 许多学者对多阶段的情形进行了研究, Mossin^[2]; Chen 等^[3]; Hakansson^[4]; Dumas 等^[5]; Mulvey 等^[6]; Dantzig 等^[7] 从最终财富期望效用最大化的角度研究了动态投资, 同时还考虑了交易费等市场因素, 建立多阶段投资组合模型并研究了其求解方法. 但是从期望效用的角度来研究, 脱离了 Markowitz 的经典框架. Li 等^[8] 直接研究多阶段 Markowitz 均值 - 方法模型, 运用辅助问题和动态规划原理, 首次求出了多阶段投资的最优投资策略以及前沿面的解析表达式, 该成果是多阶段投资组合问题的重要突破. 此后, 许多学者在 Li 等^[8] 研究的基础上进一步扩展. 如: 李仲飞^[9] 从财富增长倍数的角度, 得到了多阶段投资组合的最优投资策略以及前沿面的解析解. Leippold 等^[10] 通过几何方法简化了多阶段投资组合的求解. 为体现投资者关注中间的财富状态, Zhu 等^[11]

收稿日期: 2016-08-10

资助项目: 国家自然科学基金 (61503085)

* 通信作者

研究了不允许破产下的均值 - 方差投资组合模型. Costa 等^[12]、Costa 等^[13]推广了 Zhu 等^[11]的结论,得到了广义条件下的均值 - 方差最优策略与前沿面函数的迭代关系式. Celikyurt 等^[14]、Çakmak 等^[15]讨论了随机市场下的多阶段投资组合问题,解出了最优投资策略和前沿面函数的解析表达式. Wei 等^[16]则提出了在随机市场破产控制下的多阶段均值 - 方差投资组合优化模型. Gülpınar 等^[17]为随机优化场景树方面构建了一个多阶段均值 - 方差模型的框架. Calafiore^[18-19]在假设线性反馈形式下,研究了多阶段投资组合的求解以及存在交易费模型的求解. Zhang 等^[20]研究了模糊回报下的多阶段投资组合优化问题,在考虑投资回报、风险、交易成本和投资组合的多元化程度等四个指标的情况下,构建了均值 - 半方差 - 熵多期投资组合模型,并进一步通过混合智能算法获得最优投资策略.

但是上述研究都是求解的多阶段模型的闭环 (close-loop) 解,即投资者需要根据每一时间节点上的财富状态来调整资产配置.但是实际中,一般的投资者没有能力或者时间来时时

的根据反馈来调整资产配置,同时闭环策略的求解也非常困难. Calafiore^[18]研究了开环投资策略 (open-loop) 下的多阶段投资组合优化模型.开环策略也称为确定型控制策略,即决策变量是确定型变量,它与每阶段财富的状态无关.在开环策略下投资者在投资期初就可以确定出整个投资过程中各阶段的投资策略,因此开环策略对于非专业的投资者更加的省事,同时还能得到不错的结果,更加实用.

综上所述,本文研究了开环策略下三种常用财富动态过程的多阶段投资组合优化模型,由于资产财富动态过程^[8]和资产财富调整动态^[18]过程都为线性关系,因此对应的开环策略模型是凸规划,比较容易求解.但投资比例财富动态过程^[9]为非线性,而且随着阶段的增加,模型的非线性、非凸特征更加显著,求解将相当困难.本文进一步研究了投资比例财富动态过程模型实际计算问题,并且通过构造辅助模型,给出了投资比例两阶段模型的全局求解方法并通过数值算例说明该方法的有效性以及前沿面为凹函数,并进一步应用仿真验证了本文方法的准确性,通过仿真验证了该求解方法的准确性.最后还通过数值算例比较了不同财富动态过程在开环策略下和闭环策略下前沿面的关系,结果表明三种财富过程在闭环策略下等价,但是在开环策略下资产财富模型的前沿面最高、资产调整模型的前沿面次之、投资比例多阶段模型的前沿面最低.

2 开环策略下多阶段投资组合优化模型

假定投资者可以投资于 n 种资产,投资期限为 T 期.给定初始财富值为 w_0 , w_t 为 t 阶段末的财富值.令 $e_t = [e_t^1, e_t^2, \dots, e_t^n]'$, 其中 e_t^i 表示 t 阶段第 i 种资产的随机收益率, $t = 0, \dots, T-1$, 且阶段间 $e_t, t = 0, \dots, T-1$ 统计独立.已知 t 阶段 n 种资产的期望收益 $E(e_t) = [E(e_t^1), E(e_t^2), \dots, E(e_t^n)]'$ 和资产之间的协方差矩阵

$$Cov(e_t) = \begin{bmatrix} Cov(e_t^1, e_t^1) & Cov(e_t^1, e_t^2) & \cdots & Cov(e_t^1, e_t^n) \\ Cov(e_t^2, e_t^1) & Cov(e_t^2, e_t^2) & \cdots & Cov(e_t^2, e_t^n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(e_t^n, e_t^1) & Cov(e_t^n, e_t^2) & \cdots & Cov(e_t^n, e_t^n) \end{bmatrix}$$

其中 $Cov(e_t^i, e_t^j), i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$, 表示 t 阶段第 i, j 种资产的协方差.

2.1 开环策略下资产财富多阶段均值 - 方差模型

令 $u_t = [u_t^1, u_t^2, \dots, u_t^n]'$, 其中 u_t^i 表示 t 阶段投资在第 i 种资产上的财富, 则投资组合的财富动态过程为 $w_t = \sum_{i=1}^n u_t^i e_t^i$, 本文称之为资产财富动态过程 (例如, Li 等^[8] 采用该财富动态过程), 如图 1 所示.

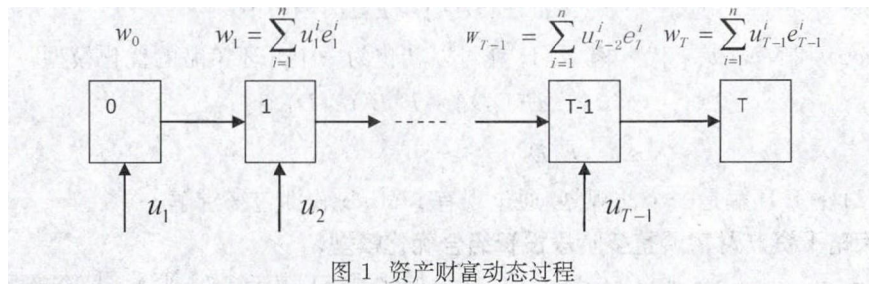


图 1 资产财富动态过程

可建立如下的开环策略下资产财富多阶段投资组合优化模型

$$\begin{aligned}
 & \min \text{Var}(w_T) \\
 & \text{s.t. } E(w_T) \geq \varepsilon \\
 & w_{t+1} = \sum_{i=1}^n u_t^i e_t^i, t = 0, 1, \dots, T-1 \\
 & w_t = \sum_{i=1}^n u_t^i, t = 0, 1, \dots, T-1
 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 & \max E(w_T) \\
 & \text{s.t. } \text{Var}(w_T) \leq \sigma \\
 & w_{t+1} = \sum_{i=1}^n u_t^i e_t^i, t = 0, 1, \dots, T-1 \\
 & w_t = \sum_{i=1}^n u_t^i, t = 0, 1, \dots, T-1
 \end{aligned} \quad (2)$$

模型 (1) 与模型 (2) 等价, 下文将只针模型 (1) 求解.

记 $P_t = [P_t^1, P_t^2, \dots, P_t^{n-1}]' = [(e_t^1 - e_t^n), (e_t^2 - e_t^n), \dots, (e_t^{n-1} - e_t^n)]'$, $u_t = [u_t^1, u_t^2, \dots, u_t^{n-1}]'$, $t = 0, 1, \dots, T-1$, 则有 $w_t = P_{t-1}' u_{t-1} + e_t^n w_{t-1}$.

记 $u = [w_0, u_0', \dots, u_{T-1}']'$, $D = [(\prod_{t=0}^{T-1} e_t^n), (\prod_{t=1}^{T-1} e_t^n) P_1', \dots, P_{T-1}']'$, $w_T = D' u$, $x_T^2 = u' D D' u$.

$$\begin{aligned}
 E(D) &= [(\prod_{t=0}^{T-1} E(e_t^n)), (\prod_{t=1}^{T-1} E(e_t^n)) E(P_0'), \dots, E(P_{T-1}')]']' \\
 E(DD') &= \begin{bmatrix} \prod_{t=0}^{T-1} E(e_t^n)^2 & E(e_0^n P_0') \prod_{t=1}^{T-1} E(e_t^n)^2 & \dots & E(e_{T-1}^n P_{T-1}') \prod_{t=0}^{T-1} E(e_t^n)^2 \\ E(e_1^n P_0') \prod_{t=1}^{T-1} E(e_t^n)^2 & E(P_0 P_0') \prod_{t=1}^{T-1} E(e_t^n)^2 & \dots & E(P_1) E(e_T^n P_T') \prod_{t=1}^{T-1} E(e_t^n)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(e_{T-1}^n P_{T-1}') \prod_{t=0}^{T-2} E(e_t^n)^2 & E(e_{T-1}^n P_{T-1}') E(P_0') \prod_{t=1}^{T-2} E(e_t^n)^2 & \dots & E(P_{T-1} P_{T-1}') \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

由于 $u = [w_0, u'_0, \dots, u'_{T-1}]'$ 为确定型变量, 故 $E(x_T^2) = u'E(DD')u$, $E(x_T) = E(D')u$, 此时 T 阶段末财富值的方差为

$$\begin{aligned} Var(w_T) &= E(w_T^2) - E(w_T)^2 \\ &= u'E(DD')u - u'E(D')E(D)u \\ &= u'[E(DD') - E(D')E(D)]u \end{aligned}$$

将 $E(w_T)$ 和 $Var(w_T)$ 代入模型 (1) 就可以转化为一个开环策略的优化模型.

$$\begin{aligned} \min \quad & u'[E(DD') - E(D')E(D)]u \\ \text{s.t.} \quad & E(D')u \geq \varepsilon \end{aligned} \tag{3}$$

模型 (3) 的开环解是一个凸规划, 通过现有 Matlab 软件包来求解.

2.2 开环策略下资产财富调整多阶段投资组合优化模型

令 $v_t = [v_t^1, v_t^2, \dots, v_t^n]'$, $t = 0, 1, \dots, T-1$, 其中 v_t^i 表示 t 时刻第 i 种资产上的财富. 令 $\Delta v_t = [\Delta v_t^1, \Delta v_t^2, \dots, \Delta v_t^n]'$, $t = 0, 1, \dots, T-1$, 其中 Δv_t^i 表示 t 阶段投资在第 i 种资产上财富的调整. 投资组合的财富动态过程为 $w_t = \sum_{i=1}^n (v_{t-1}^i + \Delta v_{t-1}^i)e_{t-1}^i$ 成立, 本文称之为——资产财富调整动态过程 (例如, Calafiore^[18] 采用了该财富过程), 如图 2 所示.

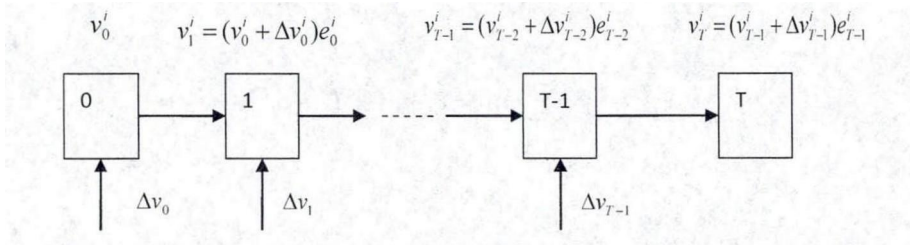


图 2 资产财富调整动态过程

根据上述财富动态过程, 可建立如下的多阶段投资组合优化模型:

$$\begin{aligned} \min \quad & Var(w_T) \\ \text{s.t.} \quad & E(w_T) \geq \varepsilon \\ & w_{t+1} = \sum_{i=1}^n (v_t^i + \Delta v_t^i)e_t^i \quad t = 0, \dots, T-1 \\ & \sum_{i=1}^n \Delta v_t^i = 0 \quad t = 0, \dots, T-1 \end{aligned} \tag{4}$$

实际投资中会遇到很多跟交易量有关费用或者限制, 比如投资时的各种交易费是根据在各种资产上投资额的变化量来缴纳. 还比如最小交易量的限制, 在多阶段模型中体现为当进行资产调整时, 资产调整量要大于最小交易量. 因此针对这类和调整量有关的市场摩擦, 上述模型更为适用. 但是该模型也有缺陷, 由于单独分析投资在每个资产上财富的动态过程, 因此计算量较大, 而且在闭环策略下难以求出前沿面的解析解. Calafiore^[18] 讨论了模型 (4) 开环策略下和假定线性闭环策略下的解. 在开环策略下模型 (4) 是一个凸规划, 通过现有 Matlab 软件包来求解.

2.3 开环策略下投资比例多阶段投资组合优化模型

$x_t = [x_t^1, x_t^2, \dots, x_t^n]'$ 为 t 阶段的投资比例向量 (投资策略), 其中 x_t^i 表示 t 阶段第 i 种资产的投资比例, 且满足 $\sum_{i=1}^n x_t^i = 1$. 则投资组合的财富动态过程为 $w_{t+1} = w_t \sum_{i=1}^n x_t^i e_t^i$, 本文

称为投资比例财富动态过程 (例如, 李仲飞^[9] 采用了该财富动态过程), 如图 3 所示.

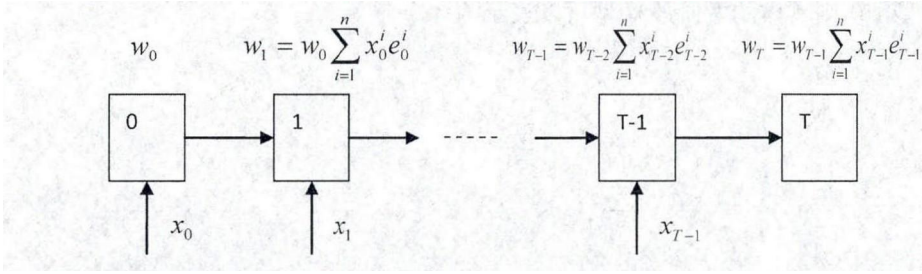


图 3 投资比例财富动态过程

根据图 3 的动态过程, 可以建立如下的多阶段投资组合优化模型:

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{Var}(w_T) \\ \text{s.t.} \quad & E(w_T) \geq \varepsilon \\ & w_{t+1} = w_t \sum_{i=1}^n x_t^i e_t^i, t = 0, \dots, T-1 \\ & \sum_{i=1}^n x_t^i = 1, t = 0, \dots, T-1 \end{aligned} \quad (5)$$

根据 $w_t = w_{t-1} \sum_{i=1}^n x_{t-1}^i e_{t-1}^i$, 则有 $w_T = w_0 \prod_{\tau=1}^T \left(\sum_{i=1}^n x_{\tau}^i e_{\tau}^i \right)$

由于 $e_t, t = 0, \dots, T-1$, 统计独立, 且投资比例为确定型变量, 因此有:

$$\begin{aligned} E(w_T) &= E(w_0 x'_0 e_0 x'_1 e_1 \cdots x'_{T-1} e_{T-1}) \\ &= w_0 E(x'_0 e_0) E(x'_1 e_1) \cdots E(x'_{T-1} e_{T-1}) \\ &= w_0 x'_0 E(e_0) x'_1 E(e_1) \cdots x'_T E(e_{T-1}) \\ &= w_0 \prod_{t=0}^{T-1} \left[\sum_{i=1}^n x_t^i E(e_t^i) \right] \end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned} E[(w_T)^2] &= w_0^2 E[(x'_0 e_0 x'_1 e_1 \cdots x'_{T-1} e_{T-1})^2] \\ &= w_0^2 E[(x'_0 e_0)^2] E[(x'_1 e_1)^2] \cdots E[(x'_{T-1} e_{T-1})^2] \\ &= w_0^2 \prod_{t=0}^{T-1} E \left[\sum_{i=1}^n x_t^i e_t^i \right]^2 \end{aligned}$$

因此 T 阶段财富的方差为:

$$\text{Var}(w_T) = w_0^2 \prod_{t=0}^{T-1} E \left[\sum_{i=1}^n x_t^i e_t^i \right]^2 - w_0^2 \prod_{t=0}^{T-1} \left[\sum_{i=1}^n x_t^i E(e_t^i) \right]^2$$

模型 (5) 等价于:

$$\begin{aligned} \min \quad & w_0^2 \prod_{t=0}^{T-1} E \left[\sum_{i=1}^n x_t^i e_t^i \right]^2 - w_0^2 \prod_{t=0}^{T-1} \left[\sum_{i=1}^n x_t^i E(e_t^i) \right]^2 \\ \text{s.t.} \quad & w_0 \prod_{t=0}^{T-1} \left[\sum_{i=1}^n x_t^i E(e_t^i) \right] \geq \varepsilon \\ & \sum_{i=1}^n x_t^i = 1, t = 0, 1, \dots, T-1 \end{aligned} \quad (6)$$

从模型 (6) 是一个非凸规划, 尤其针对多阶段, 出现高度非线性问题, 求解困难. 本文首先研究两阶段投资组合问题的计算方法.

2.3.1 开环策略下两阶段投资比例模型求解

根据模型 (5) 则具体的两阶段模型可以表示为:

$$\begin{aligned} \min \quad & Var(w_2) \\ \text{s.t.} \quad & E(w_2) \geq \varepsilon \\ & w_2 = w_0 \sum_{i=1}^n x_0^i e_0^i \cdot \sum_{i=1}^n x_1^i e_1^i \\ & \sum_{i=1}^n x_t^i = 1, \quad t = 0, 1 \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} Var(w_2) &= E(w_2^2) - E^2(w_2) \\ &= w_0^2 [x_1' E[(e_1 e_0') x_0] [(e_1 e_0') x_0]' x_1 - w_0^2 x_1' [E(e_1 e_0') x_0'] [E(e_1 e_0') x_0]' x_1] \\ &= w_0^2 x_1' \{ E[(e_1 e_0') x_0] [(e_1 e_0') x_0]' - [E(e_1 e_0') x_0] [E(e_1 e_0') x_0]' \} x_1 \\ &= w_0^2 x_1' \{ x_0' B_{11} x_0 B_{21} - x_0' B_{12} x_0 B_{22} \} x_1 \end{aligned} \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} B_{11} &= \begin{pmatrix} E(e_0^1)^2 & E(e_0^1 e_0^2) & \cdots & E(e_0^1 e_0^n) \\ E(e_0^2 e_0^1) & E(e_0^2)^2 & \cdots & E(e_0^2 e_0^n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(e_0^n e_0^1) & E(e_0^n e_0^2) & \cdots & E(e_0^n)^2 \end{pmatrix} \\ B_{12} &= \begin{pmatrix} E^2(e_0^1) & E(e_0^1) E(e_0^2) & \cdots & E(e_0^1) E(e_0^n) \\ E(e_0^2) E(e_0^1) & E^2(e_0^2) & \cdots & E(e_0^2) E(e_0^n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(e_0^n) E(e_0^1) & E(e_0^n) E(e_0^2) & \cdots & E^2(e_0^n) \end{pmatrix} \\ B_{21} &= \begin{pmatrix} E(e_1^1)^2 & E(e_1^1 e_1^2) & \cdots & E(e_1^1 e_1^n) \\ E(e_1^2 e_1^1) & E(e_1^2)^2 & \cdots & E(e_1^2 e_1^n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(e_1^n e_1^1) & E(e_1^n e_1^2) & \cdots & E(e_1^n)^2 \end{pmatrix} \\ B_{22} &= \begin{pmatrix} E^2(e_1^1) & E(e_1^1) E(e_1^2) & \cdots & E(e_1^1) E(e_1^n) \\ E(e_1^2) E(e_1^1) & E^2(e_1^2) & \cdots & E(e_1^2) E(e_1^n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(e_1^n) E(e_1^1) & E(e_1^n) E(e_1^2) & \cdots & E^2(e_1^n) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

此时模型 (7) 可以进一步改写为

$$\begin{aligned} \min \quad & w_0^2 [x_0' B_{11} x_0 x_1' B_{21} x_1 - x_0' B_{12} x_0 x_1' B_{22} x_1] \\ \text{s.t.} \quad & w_0 x_0' E(e_0 e_1') x_1 \geq \varepsilon \\ & \sum_{i=1}^n x_t^i = 1, \quad t = 0, 1 \end{aligned} \quad (9)$$

令

$$C = \begin{pmatrix} E(e_0^1) E(e_1^1) & E(e_0^1) E(e_1^2) & \cdots & E(e_0^1) E(e_1^n) \\ E(e_0^2) E(e_1^1) & E(e_0^2) E(e_1^2) & \cdots & E(e_0^2) E(e_1^n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(e_0^n) E(e_1^1) & E(e_0^n) E(e_1^2) & \cdots & E(e_0^n) E(e_1^n) \end{pmatrix}$$

每阶段收益率的协方差记为 $cov(e_t)$, 又因为

$$cov(e_0) = (B_{11} - B_{12})$$

$$cov(e_1) = (B_{21} - B_{22})$$

此时模型 (9) 等价于:

$$\begin{aligned} \min \quad & w_0^2 [x_0' cov(e_0) x_0 x_1' B_{21} x_1 + x_0' B_{12} x_0 x_1' cov(e_1) x_1] \\ \text{s.t.} \quad & w_0 x_0' C x_1 \geq \varepsilon \\ & \sum_{i=1}^n x_t^i = 1, \quad t = 0, 1 \end{aligned} \quad (10)$$

记

$$f_1 = x_0' C x_1, f_2 = x_0' cov(e_0) x_0 x_1' B_{21} x_1 + x_0' B_{12} x_0 x_1' cov(e_1) x_1$$

现在来对模型 (10) 进行分析, 首先来判断下 f_1 和 f_2 的凹凸性, 当考虑两资产时:

将 $x_t^1 + x_t^2 = 1, t = 0, 1$ 代入 f_1 可得:

$$\begin{aligned} f_1 &= (x_0^1, 1 - x_0^1) C (x_1^1, 1 - x_1^1)' \\ &= (e_0^1 - e_0^2)(e_1^1 - e_1^2)x_0^1 x_1^1 + e_0^2(e_1^1 - e_1^2)x_1^1 + e_1^2(e_0^1 - e_0^2)x_0^1 + e_0^2 e_1^2 \end{aligned}$$

f_1 的 Hessian 矩阵为

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & (e_0^1 - e_0^2)(e_1^1 - e_1^2) \\ (e_0^1 - e_0^2)(e_1^1 - e_1^2) & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} |\alpha E - H_1| &= \begin{vmatrix} \alpha & -(e_0^1 - e_0^2)(e_1^1 - e_1^2) \\ -(e_0^1 - e_0^2)(e_1^1 - e_1^2) & \alpha \end{vmatrix} \\ &= [\alpha^2 - (e_0^1 - e_0^2)^2(e_1^1 - e_1^1)^2] \end{aligned}$$

此时矩阵 H_1 的特征根为一正一负, 故 H_1 为不定矩阵, 因此可行域不是凸集.

对可行域进行变换, 将 f_1 看作是两个函数的乘积

$$\begin{aligned} f_1 &= (x_0^1, 1 - x_0^1) C (x_1^1, 1 - x_1^1)' \\ &= (e_0^1 - e_0^2)(e_1^1 - e_1^2)x_0^1 x_1^1 + e_0^2(e_1^1 - e_1^2)x_1^1 + e_1^2(e_0^1 - e_0^2)x_0^1 + e_0^2 e_1^2 \\ &= [(e_0^1 - e_0^2)x_0^1 - e_0^2][(e_1^1 - e_1^2)x_1^1 - e_1^2] \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} h = (e_0^1 - e_0^2)x_0^1 + e_0^2 \\ g = (e_1^1 - e_1^2)x_1^1 + e_1^2 \end{cases}$$

则

$$f_1 = hg \geq \varepsilon$$

f_1 是一双曲面, 其对应的可行域可以分解成为两个凸集. 这样就可以将可行域分为两个凸集, 求解时可以分别在两个凸集上求解.

类似的, 当考虑 n 资产时候, 令

$$\begin{cases} g = \sum_{i=1}^{n-1} (e_0^i - e_0^n)x_0^i + e_0^n \\ h = \sum_{j=1}^{n-1} (e_1^j - e_1^n)x_1^j + e_1^n \end{cases}$$

同理可得

$$f_1 = gh \geq d.$$

现在来考虑 f_2 的凸凹性, 将 f_2 分为两部分

$$\begin{cases} f_{21} = x'_0 \text{cov}(e_0) x_0 x'_1 B_{21} x_1 \\ f_{22} = x'_0 B_{12} x_0 x'_1 \text{cov}(e_1) x_1 \end{cases}$$

由于 $\text{cov}(e_0)$ 与 B_{21} 都是实对称的正定矩阵 (半正定矩阵), 则存在可逆矩阵 P 使得 $\text{cov}(e_0)$ 与 B_{21} 同时对角化, $P' \text{cov}(e_0) P = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix}$, 则有 $\text{cov}(e_0) = (P^{-1})' \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix} P^{-1}$,

$$\text{同理 } B_{21} = (P^{-1})' \begin{pmatrix} \eta_1 & 0 \\ 0 & \eta_2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\text{做线性变换, 令 } P^{-1}x_0 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, P^{-1}x_1 = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{此时 } f_{21} = (\xi_1 y_1^2 + \xi_2 y_2^2)(\eta_1 z_1^2 + \eta_2 z_2^2),$$

其中 $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \geq 0$, 由此可知 f_2 是非凸非凹的函数.

综上所述, 不论是几资产, 模型 (10) 中目标函数都不是凸函数, 且可行域也不是凸集, 因此求得最优解较为困难. 但是该模型有一定特殊性, 首先目标函数是由两个凸函数的乘积的和构成, 同时通过变量代换可行域也可以分解成几个凸集.

引进四个辅助变量, $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, 记

$$\begin{cases} f_{21}(x_0) = x'_0 \text{cov}(e_0) x_0 \\ f_{22}(x_0) = x'_0 B_{12} x_0 \\ g_{21}(x_1) = x'_1 B_{21} x_1 \\ g_{22}(x_1) = x'_1 \text{cov}(e_1) x_1 \end{cases}$$

针对模型 (10) 可以构造如下的辅助模型:

$$\begin{aligned} \min F(x_0, x_1, \alpha, \beta) &= \frac{1}{2} w_0^2 \left[\sum_{j=1}^n \xi_j (f_{2j}(x_0))^2 + \sum_{j=1}^n \eta_j (g_{2j}(x_1))^2 \right] \\ \text{s.t. } w_0 x'_0 C x_1 &\geq \varepsilon \\ \sum_{i=1}^n x_i^t &= 1, \quad t = 0, 1 \\ \xi_j \eta_j &\geq 1, \quad j = 1, 2 \\ \xi_j, \eta_j &\geq 0, \quad j = 1, 2 \end{aligned} \quad (11)$$

定理 1 记 $(x_0^*, x_1^*, \alpha^*, \beta^*)$ 是模型 (11) 的最优解, 那么 (x_0^*, x_1^*) 是模型 (10) 的最优解.

证明 对于任意的 (x_0, x_1) , 本文有

$$\begin{aligned} &\min \{F(x_0, x_1, \alpha, \beta) | \alpha_i \beta_i \geq 1, i = 1, 2, (\alpha_i, \beta_i) \geq 0\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \min \{ \alpha_j (f_{2j}(x_0))^2 + \frac{1}{\alpha_j} (g_{2j}(x_1))^2 | \alpha_j > 0 \} = \sum_{j=1}^2 f_{2j}(x_0) g_{2j}(x_1) \end{aligned}$$

因此定理 1 成立.

根据定理 1, 由于模型 (10) 和模型 (11) 等价, 那么就可以直接求解模型 (11), 为后文描

述方便, 将模型 (11) 表示为如下形式:

$$Q = \min \frac{1}{2} x_0^2 \left[\sum_{j=1}^2 \xi_j (f_{2j}(x_0))^2 + \sum_{j=1}^2 \eta_j (g_{2j}(x_1))^2 \right]$$

$$\text{s.t. } (x_0, x_1) \in \Omega \quad (12)$$

$$\xi_j \eta_j \geq 1, j = 1, 2$$

$$\xi_j, \eta_j \geq 0, j = 1, 2$$

$$Q_1 = \min \frac{1}{2} x_0^2 \left[\sum_{j=1}^2 \xi_j (f_{2j}(x_0))^2 + \sum_{j=1}^2 \eta_j (g_{2j}(x_1))^2 \right]$$

$$\text{s.t. } (x_0, x_1) \in \Omega_1 \quad (13)$$

$$\xi_j \eta_j \geq 1, j = 1, 2$$

$$\xi_j, \eta_j \geq 0, j = 1, 2$$

$$Q_2 = \min \frac{1}{2} x_0^2 \left[\sum_{j=1}^2 \xi_j (f_{2j}(x_0))^2 + \sum_{j=1}^2 \eta_j (g_{2j}(x_1))^2 \right]$$

$$\text{s.t. } (x_0, x_1) \in \Omega_2 \quad (14)$$

$$\xi_j \eta_j \geq 1, j = 1, 2$$

$$\xi_j, \eta_j \geq 0, j = 1, 2$$

其中

$$\Omega = \{(x_0, x_1) | w_0 x_0' C x_1 \geq \varepsilon, \sum_{i=1}^n x_t^i = 1, t = 0, 1\}$$

$$\Omega_1 = \{(x_0, x_1) | w_0 x_0' C x_1 \geq \varepsilon, x_0' E(e_0) > 0, x_1' E(e_1) > 0, \sum_{i=1}^n x_t^i = 1, t = 0, 1\}$$

$$\Omega_2 = \{(x_0, x_1) | w_0 x_0' C x_1 \geq \varepsilon, x_0' E(e_0) < 0, x_1' E(e_1) < 0, \sum_{i=1}^n x_t^i = 1, t = 0, 1\}$$

且满足 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, 则有 $Q = \min(Q_1, Q_2)$.

针对模型 (13) 或 (14), Konno 等^[21] 给出一种外逼近算法, 但是该方法需要 (x_0^*, x_1^*) 的可行域为闭集, 从而来确定 $\xi_j, \eta_j, j = 1, 2$ 的初值. 而本文中可行域 (x_0^*, x_1^*) 是开集, 从而得到 $\xi_j > 0, \eta_j > 0, j = 1, 2$, 计算时可以用一个非常小的值来代替 ξ_j, η_j 的初值.

具体计算步骤:

1) 给定模型最终财富希望水平 ε

2) 通过 Konno 等^[21] 外逼近方法求解模型 (13) 和模型 (14) 的最优解 x_0^*, x_1^* 和 x_0^{**}, x_1^{**} , 以及 Q_1, Q_2

3) 如果 $Q_1 > Q_2$, 则 x_0^*, x_1^* 为模型 (12) 的最优解, 否则 x_0^{**}, x_1^{**} 为模型 (12) 的最优解

注: 在实际求解中, 如果初值给的太小, 计算机求解会有一定误差, 初值敏感, 在计算时最好能取几组初值, 将几组初值下的结果组合, 来最终确定模型的解. 一般多阶段投资比例组合是高度非线性非凸问题, 计算相当复杂, 所以在应用 Matlab 软件包时需运要多重起始点技术, 但不能保证数值解的全局性, 因此模型 (6) 的实用计算方法还需要更多的研究.

3 数值算例

算例 1: 模型 (12) 的求解与验证

假设场上有三种资产, 进行两阶段的投资, 且初始财富为 1, 各阶段资产的统计特性如下:

$$E(e_t) = [1.162, 1.246, 1.228], t = 0, 1$$

$$\text{cov}(e_t) = \begin{pmatrix} 0.0146 & 0.0187 & 0.0145 \\ 0.0187 & 0.0854 & 0.0104 \\ 0.0145 & 0.0104 & 0.0289 \end{pmatrix}, t = 0, 1$$

在财富水平 r 下, 按照上述步骤求解, 得到该财富水平下的最小方差 σ , 随着财富水平 r 的变化, 可以得到两阶段投资组合的有效前沿面, 如图 1 中曲线为两阶段投资比例模型的前沿面. 本文还通过仿真来进一步验证上述方法求得前沿面的准确性, 首先在每个阶段随机产生 500 组投资比例, 然后将各阶段资产的统计特性和随机产生的投资比例代入到累积财富均值、方差的计算公式中, 分别计算出各随机权重下的累积财富的均值和方差. 图 4 中红色点即为这些仿真点, 图 4 表明两个阶段的仿真点可以靠近或者在前沿面上, 而不会超出前沿面, 从而证明了本文计算方法的有效性.

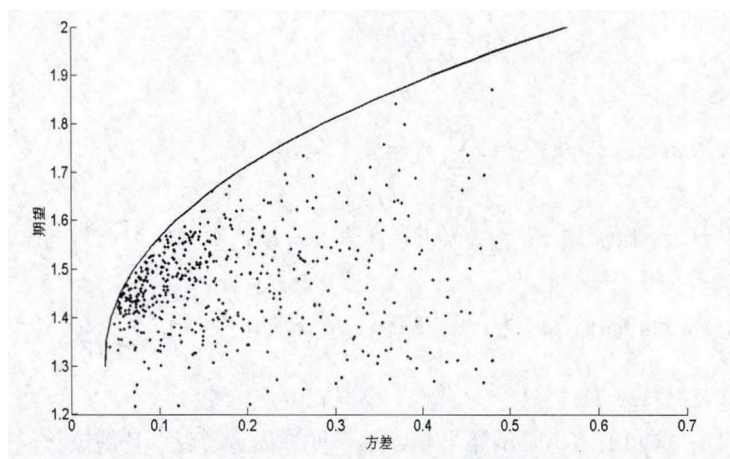


图 4 两阶段投资比例模型前沿面

算例 2: 三种财富过程下前沿面的比较图

为了比较不同财富过程在不同策略下前沿面的关系, 本文按照李仲飞^[9]、Calafiore^[18]和 Li 等^[8]中的闭环策略计算出三种财富过程下前沿面. 仍采用算例 1 中各阶段的数据, 经过计算得出在闭环策略下三条前沿面重合. 图 5 中四条前沿面由上到下分别为, 闭环策略下三种财富过程模型的前沿面, 开环策略下资产财富模型、资产财富调整模型、投资比例多阶段模型的前沿面.

4 结束语

针对非专业的投资者不可能时时的根据市场的变化调整资产分配问题. 本文从三种常见的财富动态过程出发, 研究开环策略下三种财富动态过程的多阶段投资组合优化模型. 投资者根据开环策略可以在投资期初就得到整个投资过程中各阶段的投资策略, 因此开环策略对于非专业的投资者更加的省事, 同时还能得到不错的结果, 更加实用. 其中资产财富和资产财富调整动态过程都为线性关系, 因此对应的开环策略模型是凸规划, 求解比较容易. 但投资比

例财富动态过程为非线性, 而且随着阶段的增加的, 模型的非线性特征更加显著, 求解非常困难, 本文通过构造辅助模型, 给出了两阶段投资比例多阶段模型的求解方法. 最后通过数值算例说明了开环策略下投资比例两阶段模型的前沿面是凹函数, 并进一步通过仿真验证了该求解方法的准确性, 同时还通过数值算例比较了不同财富动态过程在不同投资策略下前沿面的关系.

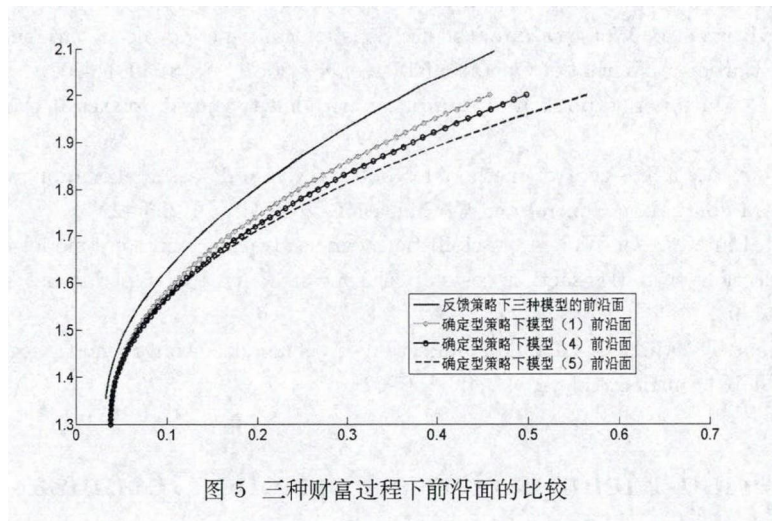


图 5 三种财富过程下前沿面的比较

参考文献

- [1] Markowitz H. Portfolio selection*[J]. The journal of finance, 1952, 7(1): 77-91.
- [2] Mossin J. Optimal multiperiod portfolio policies[J]. Journal of Business, 1968, 41(2): 215.
- [3] Chen A H Y, Jen F C, Zions S. The optimal portfolio revision policy[J]. The Journal of Business, 1971, 44(1): 51-61.
- [4] Hakansson N H. Multi-period mean-variance analysis: toward a general theory of portfolio choice *[J]. The Journal of Finance, 1971, 26(4): 857-884.
- [5] Dumas B, Luciano E. An exact solution to a dynamic portfolio choice problem under transactions costs[J]. The Journal of Finance, 1991, 46(2): 577-595.
- [6] Mulvey J M, Vladimirou H. Stochastic network programming for financial planning problems[J]. Management Science, 1992, 38(11): 1642-1664.
- [7] Dantzig G B, Infanger G. Multi-stage stochastic linear programs for portfolio optimization[J]. Annals of Operations Research, 1993, 45(1): 59-76.
- [8] Li D, Ng W L. Optimal dynamic portfolio selection: multiperiod mean-variance formulation[J]. Mathematical Finance, 2000, 10(3): 387-406.
- [9] 李仲飞. 投资组合优化与无套利分析 [D]. 中国科学院系统科学研究所, 2000.
- [10] Leippold M, Trojani F, Vanini P. A geometric approach to multiperiod mean variance optimization of assets and liabilities[J]. Journal of Economic Dynamics and Control, 2004, 28(6): 1079-1113.
- [11] Zhu S S, Li D, Wang S Y. Risk control over bankruptcy in dynamic portfolio selection: A generalized mean-variance formulation[J]. Automatic Control, IEEE Transactions on, 2004, 49(3): 447-457.
- [12] Costa O L V, Nabholz R B. Multiperiod mean-variance optimization with intertemporal restrictions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2007, 134(2): 257-274.
- [13] Costa O L V, Araujo M V. A generalized multi-period mean-variance portfolio optimization with Markov switching parameters[J]. Automatica, 2008, 44(10): 2487-2497.

- [14] Çakmak U, Özekici S. Portfolio optimization in stochastic markets[J]. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2006, 63(1): 151-168.
- [15] Celikyurt U, Özekici S. Multiperiod portfolio optimization models in stochastic markets using the mean-variance approach[J]. *European Journal of Operational Research*, 2007, 179(1): 186-202.
- [16] Wei S, Ye Z. Multi-period optimization portfolio with bankruptcy control in stochastic market[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2007, 186(1): 414-425.
- [17] Gülpınar N, Rustem B. Worst-case robust decisions for multi-period mean-variance portfolio optimization[J]. *European Journal of Operational Research*, 2007, 183(3): 981-1000.
- [18] Calafiore G C. Multi-period portfolio optimization with linear control policies[J]. *Automatica*, 2008, 44(10): 2463-2473.
- [19] Calafiore G C. An affine control method for optimal dynamic asset allocation with transaction costs[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2009, 48(4): 2254-2274.
- [20] Zhang W G, Liu Y J, Xu W J. A possibilistic mean-semivariance-entropy model for multi-period portfolio selection with transaction costs[J]. *European Journal of Operational Research*, 2012, 222(2): 341-349.
- [21] Konno H, Kuno T, Yajima Y. Global minimization of a generalized convex multiplicative function[J]. *Journal of Global Optimization*, 1994, 4(1): 47-62.

Multi-period Mean-variance Portfolio Optimization with Open-loop Strategy

LIU De-bin^{1,2}, XIAO He-lu³, TANG Long⁴

(1. School of Economics, Peking University, Beijing, 100871, China)

(2. China Minsheng Bank, Beijing 100621, China)

(3. Business School of Hunan University, Changsha 410082, China)

(4. Research Institute of Extenics and Innovation Methods, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

Abstract: This paper studies the multi-period mean-variance portfolio model with open-loop strategy under different wealth dynamic process and discusses their practical significance and calculation methods, where the investment ratio wealth dynamic process model is highly nonlinear and non convex mathematical programming. We further investigate the problem of solving investment ratio model. By constructing auxiliary model, we get the global optimal solution of two-stage investment ratio model and illustrate the validity and accuracy by numerical examples and simulations. Finally, we compare the frontiers under different wealth dynamics process in open-loop and closed-loop strategies through numerical examples. The results show that the frontiers of three wealth dynamics process are the same in close-loop strategy, but in an open-loop strategy, frontier of asset wealth model is highest, frontier of asset adjustment model followed and frontier of investment ratio model is lowest.

Keywords: multi-period investment; portfolio optimization; open-loop strategy