模型-评价主题-打分式评价-理想解法 TOPSIS【czy】

1.模型名称

理想解法(Technique for Order Preference by Similarity to an Ideal Solution,TOPSIS)

2.适用范围

多属性决策问题

3.形式

m个评价对象，n个评价指标。

4.求解方法

4.1概念

设多属性决策方案集为**D**={d_1,d_2,...,d_m},

衡量方案优劣的属性变量为$x_1, x_2, \ldots, x_n$,

通过构造评价问题的正理想解C^* [1] 和负理想解C^0，即各指标的最优解和最劣解，将D中的各方案d_i与C^*和C^0的距离进行比较，既靠近正理想解又远离负理想解的方案就是方案集**D**中的最优方案；并可以据此排定方案集**D**中各方案的优先序。

4.2步骤

1. 列出决策矩阵$A = (a_{ij})_{m\times n}$
2. 属性规范化，求出规范化决策矩阵:$B = (b_{ij})_{m\times n}$
   - 方法一：线性变换

     原始决策矩阵为$A = (a_{ij})_{m\times n}$,变换后的矩阵为$B = (b_{ij})_{m\times n}$,$i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$。

     设a_j^{min}是决策矩阵第j列中的最小值，a_j^{max}是决策矩阵第j列中的最大值。

     若x_j为效益性属性，则

     $$b_{ij} = a_{ij}/a_j^{max}$$

     上述变化后，最差属性值不一定为0，最优属性值为1。

     若x_j为成本型属性，则

     $$b_{ij} = 1 - a_{ij}/a_j^{max}$$

     上述变化后，最优属性值不一定为1，最差属性值为0。

- 方法二：标准0-1变化

  好处：使每个属性变换后最优值为1，最差值为0

  若x_j为效益型属性，则

$$b_{ij}=\frac{a_{ij}-a_j^{min}}{a_j^{max}-a_j^{min}}$$

  若x_j为成本型属性，则

$$b_{ij}=\frac{a_j^{max}-a_{ij}}{a_j^{max}-a_j^{min}}$$

- 方法三：区间型属性的变换

  设给定的最优属性区间为$[a_j^0,a_j^*]$,$a_j^{'}$为无法容忍下限，$a_j^{''}$为无法容忍上限。

$$b_{ij}=\begin{cases}1-(a_j^0-a_{ij})/(a_j^0-a_j^{'}), & a_j^{'}\le a_{ij}\le a_j^0\\ 1, & a_j^0\le a_{ij}\le a_j^*\\ 1-(a_{ij}-a_j^*)/(a_j^{''}-a_j^*), & a_j^*<a_{ij}\le a_j^{''}\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

- 方法四：向量规范化

  范围：无论是成本型变量还是效益型变量

$$b_{ij}=a_{ij}/\sqrt{\sum_{i=1}^{m}a_{ij}^2},i=1,2,\ldots,m;j=1,2,\ldots,n$$

  变换后各方案的同一属性值的平方和为1，因此常用于计算各方案与各种虚拟方案（如正负理想点）的欧几里得距离。

  但变化后属性值的大小上无法分辨属性值的优劣。

- 方法五：标准化处理

  目的：实际问题中不同变量有不同的测量单位。为了消除变量的量纲效应

$$b_{ij}=\frac{a_{ij}-\mu_j}{s_j},i=1,2,\ldots,m,j=1,2,\ldots,n,$$

  式中：$\mu_j=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}$,$s_j=\sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(a_{ij}-\mu_j)^2}$,j=1,2,...,n。

3. 构造加权规范矩阵$C=(c_{ij})_{m\times n}$。设决策人给定各属性的权重向量为$w=[w_1,w_2,\ldots,w_n]^T$，则

$$c_{ij}=w_j\cdot b_{ij}$$

4. 确定正理想解和负理想解。$j=1,2,\ldots,n$。

$$正理想解：c_j^*=\begin{cases}\max_i c_{ij},j为效益型属性\\ \min_i c_{ij},j为成本型属性\end{cases}$$

$$负理想解：c_j^0=\begin{cases}\min_i c_{ij},j为效益型属性\\ \max_i c_{ij},j为成本型属性\end{cases}$$

5. 计算各方案到正理想解和负理想解的距离。

   备选方案d_i到正理想解之间的距离为

$$s_i^0=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}-c_j^0)^2},i=1,2,\ldots,m;$$

   备选方案d_i到负理想解之间的距离为

$$s_i^0 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(c_{ij} - c_j^0)^2}, i = 1, 2, \ldots, m;$$

6. 计算各方案的排序指标值（即综合评价指数），即

$$f_i^* = s_i^0/(s_i^0 + s_i^*), i = 1, 2, \ldots, m$$

7. 按f_i^*由大到小排列方案的优劣次序

4.3.例子

对研究生院进行评估，下面资料给出5所研究生院关于4个方面的数据

表14.1：

	人均专著 x_1 / (本/人)	生师比 x_2	科研经费x_3/（万元/年）	逾期毕业率x_4/%
1	0.1	5	5000	4.7
2	0.2	6	6000	5.6
3	0.4	7	7000	6.7
4	0.9	10	10000	2.3
5	1.2	2	400	1.8

1. 第一步：

对表14.1中属性2的数据进行最优值为**给定区间的变换**[2]：使用方法三。

属性2的数据处理表14.2如下

表14.2 表14.1的属性2的数据处理

	生师比 x_2	处理后的生师比
1	5	1
2	6	1
3	7	0.8333
4	10	0.3333
5	2	0

然后对属性值进行**向量规范化**:使用方法四，结果如下表14.4

表14.4 表14.1的数据经规范化后的属性值

	人均专著	生师比	科研经费	逾期毕业率
1	0.0638	0.597	0.3449	0.4546
2	0.1275	0.597	0.4139	0.5417
3	0.2550	0.4975	0.4829	0.6481
4	0.5738	0.199	0.6898	0.2225
5	0.7631	0	0.0276	0.1741

2. 第二步：

设权向量为$w=[0.2,0.3,0.4,0.1]$,得加权的向量规范化属性矩阵见表14.5：

表14.5 表14.1的数据经规范化后的加权属性值

	人均专著	生师比	科研经费	逾期毕业率
1	0.0128	0.1791	0.1380	0.0455
2	0.0255	0.1791	0.1656	0.0542
3	0.0510	0.1493	0.1931	0.0648
4	0.1148	0.0597	0.2759	0.0222
5	0.1530	0	0.0110	0.0174

3. 第三步：

由上述表可得

正理想解 $C^*=[0.1530,0.1791,0.2759,0.0174]$

负理想解 $C^0=[0.0128,0,0.0110,0.0648]$

4. 第四步：

求各方案到正理想解的距离和负理想解的距离，见下表14.6：

表14.6 距离值及综合指标值

	s_i^*	s_i^0	f_i^*
1	0.1987	0.2204	0.5258
2	0.1726	0.2371	0.5787
3	0.1428	0.2385	0.6255
4	0.1255	0.2932	0.7003
5	0.3198	0.1481	0.3165

5. 第五步：

计算排序指标值f_i^*，由f_i^*值的大小确定各方案由优到劣的次序为：4，3，2，1，5

4.4Matlab代码实现

```
clc,clear
a=[0.1 5 5000 4.7
   0.2 6 6000 5.6
   0.4 7 7000 6.7
   0.9 10 10000 2.3
   1.2 2 400 1.8];
[m,n]=size(a);
x2=@(qujian,lb,ub,x)(1-(qujian(1)-x)./(qujian(1)-lb)).*...
(x>=lb&x<qujian(1))+(x>=qujian(1)&x<=qujian(2))+...
(1-(x-qujian(2))./(ub-qujian(2))).*(x>qujian(2)&x<=ub);
qujian=[5,6];lb=2;ub=12;
a(:,2)=x2(qujian,lb,ub,a(:,2));       %对属性2进行变换
b=a./vecnorm(a)                       %利用矩阵广播进行向量规范化
w=[0.2 0.3 0.4 0.1];
c=b.*w;                               %利用矩阵广播求加权矩阵
Cstar=max(c);                         %求正理想解
Cstar(4)=min(c(:,4))                  %属性4为成本型的
C0=min(c);                            %q求负理想解
C0(4)=max(c(:,4))                     %属性4为成本型的
Sstar=vecnorm(c-Cstar,2,2)            %逐行计算2范数即到正理想解的距离
S0=vecnorm(c-C0,2,2)                  %逐行计算2范数即到负理想解的距离
f=S0./(Sstar+S0)
[sf,ind]=sort(f,'descend')            %求排序结果
```

计算表14.2:

```
clc,clear
x2=@ (qujian,lb,ub,x)(1-(qujian(1)-x)./(qujian(1)-lb)).*...
(x>=lb&x<qujian(1))+(x>=qujian(1)&x<=qujian(2))+...
(1-(x-qujian(2))./(ub-qujian(2))).*(x>qujian(2)&x<=ub);
qujian=[5,6];lb=2;ub=12;      %最优区间，无法容忍上下界
x2data=[5 6 7 10 2]';         %x2属性值
y2=x2(qujian,lb,ub,x2data)    %调用匿名函数，进行数据变换
```

---

1. 正理想解C^*是方案集D中并不存在的虚拟的最佳方案，它的每个属性值都是决策矩阵中该属性的最优值（负理想解C^0反之）； ↩
2. 设研究生院的生师比最优区间为[5,6]，$a_2^{'}=2,a_2^{''}=12$。 ↩