模型-预测主题-连续型预测时间序列模型-指数平滑法【hxy】
1. 模型名称
2. 模型评价
2.1 模型适用
2.2 模型局限
3. 基本算法
3.1 一次指数平滑预测
3.2 二次指数平滑预测
3.3 三次指数平滑预测
4. 实例
4.1 一次指数平滑预测
4.1.1 问题描述
4.1.2 数学解法
4.1.3 代码实现
4.2 二次指数预测模型
4.2.1 问题描述
4.2.2 数学解法
4.3 三次指数平滑预测
4.3.1 问题描述
4.3.2 数学解法
5. 参考资料

模型-预测主题-连续型预测时间序列模型-指数平滑法【hxy】

1. 模型名称

指数平滑法（Exponential Smoothing）

2. 模型评价

2.1 模型适用

- 一次指数平滑法：没有趋势和季节性的序列
- 二次指数平滑法：有趋势但没有季节性的序列
- 三次指数平滑法：有趋势也有季节性的序列
- 中短期经济发展趋势预测

2.2 模型局限

- 不适合长期预测

3. 基本算法

3.1 一次指数平滑预测

当时间序列无明显的趋势变化，可用一次指数平滑预测。其预测公式为：

$$y'_{t+1} = ay_t + (1-a)y'_t$$

式中，y'_{t+1} 为 $t+1$ 期的预测值，即本期（t 期）的平滑值S_t； y_t为 t 期的实际值； y'_t为 t 期的预测值，即上期的平滑值S_{t-1} 。

同时，称 α 为**记忆衰减因子**更合适**——**因为 α 的值越大，模型对历史数据“遗忘”的就越快。

一次指数平滑所得的计算结果可以在数据集及范围之外进行扩展，因此也就可以用来进行预测。预测方式为：

$$x_{i+h} = s_i$$

s_i是最后一个已经算出来的值，$h=1$代表预测的下一个值。

3.2 二次指数平滑预测

$$\hat{Y}_{t+T} = a_t + b_t \cdot T \qquad (2)$$

$$S_t^{(2)} = aS_t^{(1)} + (1-a)S_{t-1}^{(2)}$$

$$\begin{cases} a_t = 2S_t^{(1)} - S_t^{(2)} \\ b_t = \frac{a}{1-a}\left(S_t^{(1)} - S_t^{(2)}\right) \end{cases} \qquad (3)$$

- $S_t^{(2)}$——第t周期的二次指数平滑值
- $S_t^{(1)}$——第t周期的一次指数平滑值
- $S_{t-1}^{(2)}$——第t-1周期的二次指数平滑值
- α**——**加权系数（也称为平滑系数)

3.3 三次指数平滑预测

若时间序列的变动呈现出二次曲线趋势，则需要采用**三次指数平滑法**进行预测。三次指数平滑是在二次指数平滑的基础上再进行一次平滑，其计算公式为：

$$S_t^{(3)} = \alpha S_t^{(2)} + (1-\alpha)S_{t-1}^{(3)}$$

三次指数平滑法的预测模型为：

$$\hat{y}_{t+T} = a_t + b_t T + c_t T^2$$

$$a_t = 3S_t^{(1)} - 3S_t^{(2)} + S_t^{(3)}$$

$$b_t = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2}[(6-5\alpha)S_t^{(1)} - 2(5-4\alpha)S_t^{(2)} + (4-3\alpha)S_t^{(3)}]$$

$$c_t = \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2}[S_t^{(1)} - 2S_t^{(2)} + S_t^{(3)}]$$

4. 实例

4.1 一次指数平滑预测

4.1.1 问题描述

已知某种产品最近15个月的销售量如下表所示，用一次指数平滑值预测下个月的销售量y_{16}。

时间序号t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
销售量y_t	10	15	8	20	10	16	18	20	22	24	20	26	27	29	29

4.1.2 数学解法

为了分析加权系数a的不同取值的特点，分别取$a = 0.1$，$a = 0.3$，$a = 0.5$计算一次指数平滑值，并设初始值为最早的三个数据的平均值，以$a = 0.5$的一次指数平滑值计算为例，有

$$S_0^{(1)} = 10.0$$
$$S_1^{(1)} = \alpha y_1 + (1-\alpha)S_0^{(1)} = 0.5 \times 10 + 0.5 \times 10.0 = 10.0$$
$$S_2^{(1)} = \alpha y_2 + (1-\alpha)S_1^{(1)} = 0.5 \times 15 + 0.5 \times 10.0 = 12.5$$

4.1.3 代码实现

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib as mpl

def alpha_analysis(data,itype=2):
    '''
    判断误差最小的平滑系数
    :param data:    原始序列：list
    :param itype:   平滑类型：1,2,3
    :return:        返回平均绝对误差最小的平滑系数和最小平均绝对误差
    '''
    alpha_all = [0.01 * i for i in range(1,100)]  #只需要0.1-0.9修改为alpha_triple = [0.1
* i for i in range(1,10)]
    best_alpha = 0
    min_MAE = float('Inf') #  无穷大
    if itype == 2:
        for i in range(len(alpha_all)):
```

```
            alpha = alpha_all[i]
            a_double,b_double,F_double = exponential_smoothing_2(alpha, data)
            AE_double, MAE_double, RE_double, MRE_double =
model_error_analysis(F_double, data)
            if MAE_double <= min_MAE:
                min_MAE = MAE_double
                best_alpha = alpha
            else:
                pass
    elif itype == 3:
        for i in range(len(alpha_all)):
            alpha = alpha_all[i]
            a_triple, b_triple, c_triple, F_triple = exponential_smoothing_3(alpha,
data)
            AE_triple, MAE_triple, RE_triple, MRE_triple =
model_error_analysis(F_triple, data)
            if MAE_triple <= min_MAE:
                min_MAE = MAE_triple
                best_alpha = alpha
            else:
                pass
    else:
        for i in range(len(alpha_all)):
            alpha = alpha_all[i]
            F_single = exponential_smoothing_1(alpha, data)
            AE_single, MAE_single, RE_single, MRE_single =
model_error_analysis(F_single, data)
            if MAE_single <= min_MAE:
                min_MAE = MAE_single
                best_alpha = alpha
            else:
                pass

    return best_alpha, min_MAE

def model_error_analysis(F, data):
    '''
    误差分析
    :param F:     预测数列：list
    :param data:  原始序列：list
    :return:      返回各期绝对误差，相对误差：list，返回平均绝对误差和平均相对误差
    '''
    AE = [0 for i in range(len(data)-1)]
    RE = []
    AE_num = 0
    RE_num = 0
    for i in range(1,len(data)):
        _AE = abs(F[i-1] - data[i])
        _RE = _AE / data[i]
```

```python
        AE_num += _AE
        RE_num += _RE
        AE[i-1] = _AE
        RE.append('{:.2f}%'.format(_RE*100))
    MAE = AE_num / (len(data)-1)
    MRE = '{:.2f}%'.format(RE_num *100 / (len(data)-1))
    return AE, MAE, RE, MRE

def exponential_smoothing_1(alpha, data):
    '''
    一次指数平滑
    :param alpha:  平滑系数
    :param data:   数据序列：list
    :return:       返回一次指数平滑值：list
    '''
    s_single=[]
    s_single.append((data[0]+data[1]+data[2])/3)
    for i in range(1, len(data)):
        s_single.append(alpha * data[i-1] + (1 - alpha) * s_single[i-1])
    return s_single

t = [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15]
data = [10,15,8,20,10,16,18,20,22,24,20,26,27,29,29]
alpha_analysis(data,itype=1)
alpha = 0.5
s = exponential_smoothing_1(alpha, data)
print(s)
```

结果：$(\alpha = 0.5)$

```
>>>
== RESTART: /Users/xinyuanhe/Desktop/【正式】模型-预测主题-连续型预测时间序列模型-指数平
滑法【hxy】/es1.py =
[11.0, 10.5, 12.75, 10.375, 15.1875, 12.59375, 14.296875, 16.1484375, 18.0742187
5, 20.037109375, 22.0185546875, 21.00927734375, 23.504638671875, 25.252319335937
5, 27.126159667968 75, 28.063079833984375]
```

4.2 二次指数预测模型

4.2.1 问题描述

某地1983年至1993年财政入的资料如下，试用指数平滑法求解趋势直线方程并预测1996年的财政收入

4.2.2 数学解法

年份	t	财政收入（元）	$S_t^{(1)}=aY_t+(1-a)S_{t-1}^{(1)}$ a=0.9 初始值为23	$S_t^{(2)}=aS_t^{(1)}+(1-a)S_{t-1}^{(2)}$ a=0.9 初始值为28.40
1983	1	29	28.40	
1984	2	36	35.24	34.56
1985	3	40	39.52	39.02
1986	4	48	47.15	46.14
1987	5	54	53.32	52.62
1988	6	62	61.13	60.28
1989	7	70	69.0	68.23
1990	8	76	75.31	74.60
1991	9	85	84.03	83.09
1992	10	94	93.00	92.01
1993	11	103	102.00	101.00

由上表可知：$S_0^{(1)}=23$；$S_{11}^{(1)}=102$；$S_0^{(2)}=28.4$；$S_{11}^{(2)}=101$ a=0.9 则

$$a_1=2S_t^{(1)}-S_t^{(2)}a_{11}=2\times S_{11}^{(1)}-S_{11}^{(2)}=2\times 102=103$$

$$b_t=\frac{a}{1-a}(S_t^{(1)}-S_t^{(2)})b_{11}=\frac{0.9}{1-0.9}(102-101)=9$$ 所求模型为：

$$Y_{11+T}=103+9\cdot T$$

1996年该地区财政收入预测值为：$Y_{11+3}=103+9\times 3=130$（万元）

4.3 三次指数平滑预测

4.3.1 问题描述

我国某种耐用消费品1996年至2006年的销售量如表所示，试预测2007、2008年的销售量。

4.3.2 数学解法

三次指数平滑的计算表：

时间序号（t）	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
年份		1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
销售量（y_t）		225.2	249.9	263.2	293.6	318.9	356.7	363.3	424.2	466.5	582.0	750.0

通过实际数据序列呈非线性递增趋势，采用三次指数平滑预测方法。确定指数平滑的初始值和权系数（平滑系数）a。设一次、二次指数平滑的初始值为最早三个数据的平均值，即

$$S_0^{(1)}=S_0^{(2)}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=\frac{225.2+249.9+263.2}{3}=246.1$$

取

$$S_0^{(3)} = 244.5$$

实际数据序列的倾向性变动较明显，权系数（平滑系数）α 不宜取太小，故取α= 0.3。

根据指数平滑值计算公式依次计算一次、二次、三次指数平滑值：

($\alpha=0.3$) $S_t^{(1)}$	246.1	237.8	242.8	248.9	262.3	279.3	302.5	320.8	351.9	386.3	445.0	536.5
$S_t^{(2)}$	246.1	244.2	243.7	245.3	250.4	259.1	272.1	286.7	306.3	330.3	364.7	416.2
$S_t^{(3)}$	244.5	244.4	244.3	244.5	246.3	250.1	256.7	265.7	277.9	293.6	314.9	345.3

计算非线性预测模型的系数：

$$a_{11} = 3S_{11}^{(1)} - 3S_{11}^{(2)} + S_{11}^{(3)} = 3 \quad 536.5 - 3 \quad 416.2 + 345.3 = 706.2$$

$$b_{11} = \frac{\alpha}{2(1-\alpha)^2}[(6-5\alpha)S_{11}^{(1)} - 2(5-4\alpha)S_{11}^{(2)} + (4-3\alpha)S_{11}^{(3)}]$$

$$= \frac{0.3}{2(1-0.3)^2}[(6-5\times0.3)536.5 - 2(5-4\times0.3)416.2 + (4-3\times0.3)345.3] = 98.4$$

$$c_{11} = \frac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2}(S_{11}^{(1)} - 2S_{11}^{(2)} + S_{11}^{(3)}) = 4.4$$

建立非线性预测模型得：

$$\hat{y}_{t+T} = a_t + b_t T + c_t T^2 = 706.2 + 98.4T + 4.4T^2 \quad (t = 11)$$

预测2007年和2008年的产品销售量。2007年，其预测超前周期为T= 1；2008年，其预测超前周期为T= 2。代入模型，得

$$y_{2007} = \hat{y}_{11+1} = 706.2 + 98.4 + 4.4\times1^2 = 809\text{（万台）}$$

$$y_{2008} = \hat{y}_{11+2} = 706.2 + 98.4\times2 + 4.4\times2^2 = 920\text{（万台）}$$

于是得到2007年的产品销售量的预测值为809万台，2008年的产品销售量的预测值为920万台。预测人员可以根据市场需求因素的变动情况，对上述预测结果进行评价和修正。

5. 参考资料

1. [预测算法——指数平滑法]
2. [参考代码]