模型-经济管理-博弈论-完全信息静态博弈(纳什均衡)【hxy】

1. 模型名称

完全信息静态博弈（Complete Information Static Game）

2. 均衡状态

纳什均衡（Nash Equilibrium）

3. 模型框架

4. 假设和局限性

- **理性人假设(Hypothesis of Rational Man)**：每个参与者都是利己的，即寻求最大自身利益
- **共同知识(Common Knowledge)**

5. 典型案例

5.1 囚徒困境(Prisoner's Dilemma)-占优战略均衡(Dominant Strategy Equilibrium)

5.1.1 场景描述

5.1.2 均衡分析

对囚徒乙来说：如果囚徒甲选择“供认”，那他选择“供认”是最优的；如果囚徒甲选择“拒供”，那他选择“供认”是最优的。所以无论囚徒甲选择什么，囚徒乙选择“供认”都是最优的。根据对称性，囚徒甲也会选择“供认”。

在四种行动选择组合中，**（拒供，拒供）**是**帕累托最优(Pareto Optimality)**，因为偏离这个行动选择组合的任何其他行动选择组合都至少会使一个人的情况变差，而**（供认，供认）**是**占优战略均衡(Dominant Strategy Equilibrium)**，即**纳什均衡(Nash Equilibrium)**。

5.2. 智猪博弈(Pigs’ Payoffs)-精炼占优战略均衡(Refining Dominant Strategy Equilibrium)

5.2.1 场景描述

大猪/小猪	行动	等待
行动	5，1	4，4
等待	9，-1	0，0

5.2.2 均衡分析

当大猪选择“行动”的时候，小猪如果“行动”，其收益是1，小猪如果“等待”，其收益是4，所以小猪会选择“等待”；当大猪选择“等待”的时候，小猪如果“行动”，其收益是-1，小猪如果“等待”，其收益是0，所以小猪会选择“等待”。即“等待”是小猪的占优策略。由于小猪会选择“等待”，如果大猪选择“行动”，其收益是4，如果大猪选择“等待”，其收益是0，所以大猪会选择“行动”。

在四种行动选择组合中，**（行动，等待）**是**精炼占优战略均衡(Refining Dominant Strategy Equilibrium)**，即**纳什均衡(Nash Equilibrium)**。

5.3 斗鸡博弈(Game of Chicken)-纯策略纳什均衡(Pure Strategy Nash Equilibrium)

5.3.1 场景描述

在懦夫博弈中，如果两人都选择向前，那么双方均车毁人亡，收益最低；如果一人选择转向一人选择向前，那么没有事故发生，但是转向的人会被称为“懦夫”（“chicken”），向前的人获得最高收益；如果两人都选择转向，那么两人都获得一个较低的收益。

司机甲/司机乙	转向	向前
转向	1，1	-2，2
向前	2，-2	-4，-4

5.3.2 均衡分析

我们依次来看四种策略组合是否是纳什均衡。策略组合为**（向前，向前）**时，只要有一方将策略变为转向，那么双方的收益都将增加，故**（向前，向前）**不可能是纳什均衡。策略组合为**（转向，转向）**时，只要有一方将策略变为向前，那么他的收益就会增加，故**（转向，转向）**不可能是纳什均衡。策略组合为**（向前，转向）**时，司机甲将策略变为转向会将自身的收益从2变为1，降低了收益；司机乙将策略从转向变为向前会将自身的收益从-2变为-4，降低了收益。因此**（向前，转向）**是纳什均衡，类似的，**（转向，向前）**也是纳什均衡。即**纯策略纳什均衡(Pure Strategy Nash Equilibrium)**为一个司机向前，另一个司机转向避让。

5.4 公地悲剧(Tragedy of the Commons)-纯策略纳什均衡(Pure Strategy Nash Equilibrium)

5.4.1 场景描述

一个村庄有n个农民和一块公共草地，每个农民都有在草地上放牧、养羊的自由。

用$g_i \in \{0, \infty\}$代表第i个农民饲养的数量，$G = \sum g_i$代表n个农民饲养的总数量，V代表每只羊的平均价值，是关于G的函数，$V = V(G)$。

公地最大可牧羊量为G_{max}，当$G < G_{max}$时，$V(G) > 0$；当$G \geq G_{max}$时，$V(G) = 0$。

同时，$\frac{\partial V}{\partial G} < 0, \frac{\partial^2 V}{\partial G^2} < 0$，即平均收益和边际收益都递减。

5.4.2 均衡分析

1. 公地产权不清下的个体决策行为

在这个博弈里，每个农民的问题是选择g以最大化自己的利润

$$\text{假定购买一只羊羔的价格为}c\text{，那么，第}i\text{个农户养羊的利润函数为：}$$
$$\pi_i(g_1, \ldots, g_i, \ldots, g_n) = g_i V(G) - g_i c,\ i = 1, 2, \ldots, n$$
$$\text{最优化的一阶条件是：}\ \frac{\partial \pi_i}{\partial g_i} = V(G) + g_i V'(G) - c = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n$$
$$\text{上述}n\text{个一阶条件定义了}n\text{个反应函数：}\ g_i^* = g_i^*(g_1, \ldots, g_{i-1}, g_{i+1}, \ldots, g_n),\ i = 1, 2, \ldots, n$$
$$n\text{个反应函数的交叉点就是纳什均衡：}\ g^* = (g_1^*, \ldots, g_i^*, \ldots, g_n^*)$$
$$\text{纳什均衡的总饲养量为：}\ G^* = \sum_{i=1}^{n} g_i^*$$
$$\text{将}n\text{个一阶条件相加，得到：}\ V(G^*) + \frac{G^*}{n} V'(G^*) = c$$

2. 公地产权清晰下的决策行为

现在假设公地由一家农户享有所有权，其最优的目标是最大化总剩余价值

$$\text{最大化总剩余价值：}\ \max_G GV(G) - Gc$$
$$\text{最优化的一阶条件为：}\ V(G^{**}) + G^{**} V'(G^{**}) = c$$
$$\text{其中，}G^{**}\text{是其最优的饲养量}$$

3. 两种情况的比较与结论

比较一家农户的最优化的一阶条件与多家农户的最优化的一阶条件可知，$G^* > G^{**}$，共有草地被过度放牧了，这就是公地悲剧

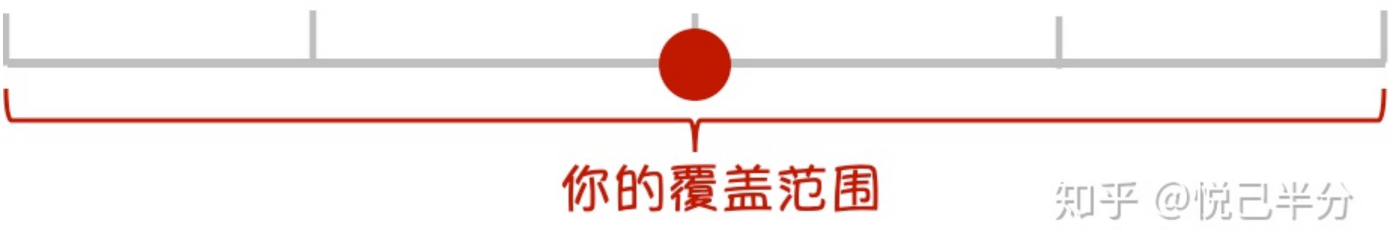
5.5 选址博弈(Positional Game)-纯策略纳什均衡(Pure Strategy Nash Equilibrium)

5.5.1 场景描述

假设在这个夏天，你在海滩买太阳眼镜，一开始海滩只有你一个摊位在卖

第一天

你会把摊位放在海滩中心（此时你的销售范围是整个海滩），这样四面八方的游客走到你这里的平均距离最短，最方便



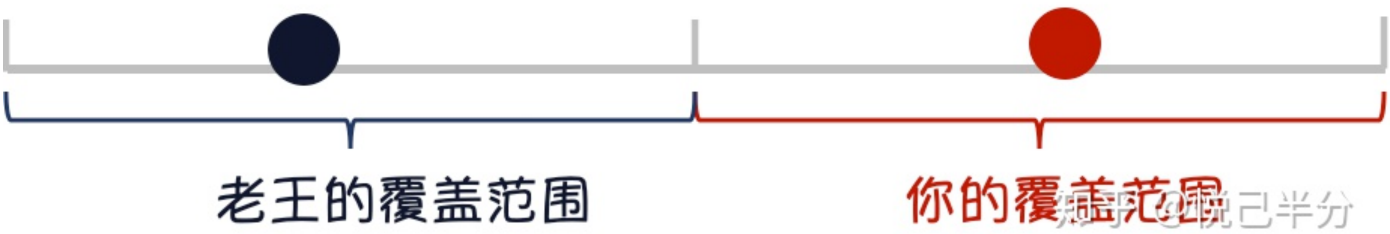
第二天

你隔壁家老王看你赚了这么钱以后，他也模仿你一样，也来到了海滩开始摆摊

由于是邻居，你也不好与他起冲突，于是你们协商好，他在左边，你在右边，各占半边海滩（此时你或老王的销售范围都是半个海滩）

这样对于你们两个是最公平的，按理想计算，你们会平分海滩上所有销售太阳眼镜的收益

于是你们各自在各自半边的海滩的中间开始做生意，同时也让海滩里的游客能够更方便地买到太阳眼镜（平均距离是第一天的一半）

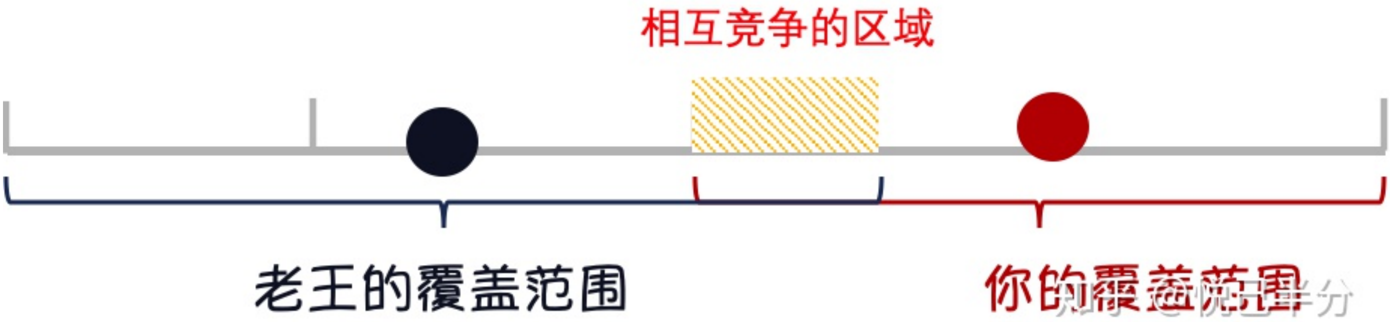


从理想的角度来计算，此时应该是最优的（即：博弈论中的帕累托最优），顾客走最少的路就可以买到一个产品，而每个商家赚到的钱也很平均

但这个状态非常不稳定，很容易被打破。于是第三天的故事来了...

第三天

老王开始觉得他还可以赚得多点，于是偷偷地把摊位向右边移动了，于是出现是下面的情况



如果你还是在右边中心的位置，那么你的客户数量就会大大减少，因为在海滩右边的游客里，有一些人觉得去海滩老王的摊位买太阳眼镜需要走的路更短，所以就没必要去你的摊位了。

而且左边的游客还是只能去老王的摊位，虽然这样他们走的路要比之前多了一些，但也没有办法。

对你来讲，显然这不科学。

于是你为了报复老王，一气之下你把摊位又放在了第一天摆摊的那个位置上，于是老王也跟进你的策略。

于是你和老王才再一次平分这片海滩，达到纳什均衡

5.5.2 均衡分析

第二天两人平分海滩达到**帕累托最优(Pareto Optimality)**，第三天最后两人都占据海滩中心位置达到**纳什均衡(Nash Equilibrium)**

5.6 警匪博弈(Police Bandit Game)-混合策略均衡(Mixed Strategy Nash Equilibrium)

5.6.1 场景描述

数字表示小偷的收益

警/匪	银行	菜场
银行	-2	5
菜场	10	-1

5.6.2 均衡分析

当警察选择“银行”，小偷选择“菜场”是最优策略；当警察选择“菜场”，小偷选择“银行”是最优策略。故纯策略不存在均衡，存在**混合策略均衡(Mixed Strategy Nash Equilibrium)**。

混合策略求解方法：**线性规划(Linear programming。LP)**

$$\text{设小偷去银行、菜场的概率为}p_1,p_2\text{，则有约束}1:p_1+p_2=1$$
$$\text{无论警察选择什么策略，小偷的优化目标是平均收益不小于}V$$
$$\text{约束}2:-2p_1+5p_2\geq V$$
$$\text{约束}3:10p_1-p_2\geq V$$
$$\text{令}x_1=\frac{p_1}{V},x_2=\frac{p_2}{V}\text{，则最大化}V\text{等价于求解一下规划：}$$
$$\min x_1+x_2$$
$$s.t.\begin{cases}-2x_1+5x_2\geq 1\\10x_1-x_2\geq 1\end{cases}$$
$$\text{解得：}p_1^*=\frac{1}{3},p_2^*=\frac{2}{3},V=\frac{4}{3}$$

5.7 麦琪的礼物博弈(Maggie's Gift Game)-混合策略均衡(Mixed Strategy Nash Equilibrium)

5.7.1 场景描述

假设他们真的非常了解对方，他们就该意识到，为了给对方买一份礼物，两人都有可能卖掉他或者她的心爱之物，结果将是一个悲剧性的结果。当然，假如他们两人都能克制自己，谁也不送礼物，又会变成另外一种错误。我们给这两个坏结果都打0分，而在一个送礼物而另一个收礼物的两种结果中，假设各方均认为献出（2分）胜过接受（1分）

妻子/丈夫	卖表	不买表
不卖发	1，2	0，0
卖发	0，0	2，1

5.7.2 均衡分析

1. 纳什均衡

通过划线法，可知有两个纳什均衡，即**（妻子不卖发，丈夫卖表）**和**（妻子卖发，丈夫不卖表）**。可知，他们两个都没有优势策略。

2. 混合策略均衡

由于“出人意料”是礼物的一个重要特点，因此他们不会提前商量以达成共识，这是一个混合策略。

用**支付等值法**进行概率计算

$$\text{设丈夫卖表的概率为}Q\text{，则不卖表的概率为}1-Q$$
$$\text{设妻子卖发的概率为}P\text{，则不卖发的概率为}1-P$$
$$\text{对妻子：}Q\times 1+(1-Q)\times 0=Q\times 0+(1-Q)\times 2$$
$$\text{对丈夫：}(1-P)\times 2+P\times 0=(1-P)\times 0+P\times 1$$
$$\text{可得：}Q=P=\frac{2}{3}$$
$$\text{丈夫的选择：}(2/3\text{卖表},1/3\text{不卖表})\quad\text{妻子的选择：}(2/3\text{卖发，}1/3\text{不卖发})$$

3. 两种情况的比较：混合策略均衡不如纳什均衡

$$\text{纳什均衡总效用：}1+2=3$$

$$\text{混合策略总效用：}\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times(1+2)+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times(0+0)+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times(0+0)+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times(2+1)=\frac{4}{3}$$

6. 参考资料

1. 寒假第一次培训运筹学 0116-张嘉乐-运筹学模型概览.pdf
2. 百度百科-博弈论
3. 百度百科-斗鸡博弈
4. 公地悲剧
5. MBA智库-公地悲剧
6. 选址博弈
7. 麦琪的礼物博弈
8. 博弈论重要名词中英文