

模型 - 评价主题 - 统计类评价 - 肯德尔和谐系数【gyj】

1. 模型名称
2. 适用范围
3. 形式
4. 求解方法
5. 补充资料

模型 - 评价主题 - 统计类评价 - 肯德尔和谐系数【gyj】

1. 模型名称

肯德尔和谐系数检验(Kendall Coefficient of Concordance, Kendall's W)

2. 适用范围

肯德尔和谐系数检验适用于检验若干评分者对同一组样本的意见是否一致。在医学科研、教育检测和竞赛评分中得到广泛应用。

3. 形式

使用肯德尔和谐系数检验仅仅针对如下情况：

- 评分者数： $3 \leq K \leq 20$
- 样本数： $N \leq 3$

4. 求解方法

4.1 概念

假设有K个评分者对N个样本进行评分，对每一个评分者，我们将其所有样品打出的分数转化成等级1~N，令 r_{ij} ($1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq N$) 表示第i个评分者给第j个样品打出的等级。

- 样本秩和(R_{ij})：对每个样本j，都有K个评分员分别给出等级，将这K个等级相加称为该样本的秩和。

$$R_{ij} = \sum_{i=1}^k r_{ij}$$

- 一组样本的秩和均值(\bar{R})

$$\bar{R} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i$$

- 秩和的离差平方和(S)：将秩和作为主要考察的样本。K个评委评分越一致，秩和的离差平方和越大。

$$S = \sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})^2$$

- 肯德尔和谐系数(W)：W反映评委的评分一致性。W越大，K个评委评分越一致。

- 取值范围： $0 < W < 1$

- 计算公式：

- 情况1：评分者评定等级无相同等级：一个评分者对不同样本打出不同的分数。

$$W = \frac{S}{\frac{1}{12} K^2 (N^3 - N)}$$

K ：评分者数； N ：样本数

- 情况2：评分者评定等级有相同等级：某评分者对一组样本的打分出现了相同等级或分数。

- 则我们需要取秩次的均值作为他们的秩。

例：若一组样本为(2.1, 1.3, 1.6, 1.6, 0.9)

按照从小到大的顺序给上面五个数编号，则变成(5, 2, 3, 4, 1). 这里1.6是两个相同的数，所以本质上不可以用3, 4来表示它们，故取其平均数3.5. 于是秩变成了(5, 2, 3.5, 3.5, 1)

- 修正项(T_j)：对第j个评分者，设其评分中出现了 m_j 种相同的评分(等级)，其中第k种相同的评分出现的次数为 n_{jk} ，则有

$$T_j = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{m_j} (n_{jk}^3 - n_{jk})$$

- 肯德尔和谐系数计算公式(W)

$$W = \frac{S}{\frac{1}{12} K^2 (N^3 - N) - K \sum_{j=1}^K T_j}$$

○ 检验：

- 小样本情况：($3 \leq K \leq 20, 3 \leq N \leq 7$)

- 以离差平方和S作为检验统计量。根据K和N的值查阅下方表格得到临界值 S_α

附录 A 和谐系数临界值表

表 6 肯德尔和谐系数显著性临界值表

K	N					N = 3	
	3	4	5	6	7	K	S
显著性水平 $\alpha = 0.05$							
3			64.4	103.9	157.3	9	54.0
4		49.5	88.4	143.3	217.0	12	71.9
5		62.6	112.3	182.4	276.2	14	83.8
6		75.7	136.1	221.4	335.2	16	95.8
8	48.1	101.7	183.7	299.0	453.1	18	107.7
10	60.0	127.8	231.2	376.7	571.0		
15	89.8	192.9	349.8	570.6	864.9		
20	119.7	258.0	468.5	764.4	158.7		
显著性水平 $\alpha = 0.01$							
3			75.6	122.8	185.6	9	75.9
4		61.4	109.3	176.2	265.0	12	103.5
5		80.5	142.8	229.4	343.8	14	121.9
6		99.5	176.1	282.4	422.6	16	140.2
8	66.8	137.4	242.7	388.3	579.9	18	158.6
10	85.1	175.3	309.1	494.0	737.0		
15	131.0	269.8	475.2	758.2	1129.5		
20	177.0	364.2	641.2	1022.2	1521.9		

- 写出拒绝域W:

$$W = \{S | S \geq S_\alpha\}$$

【注】若 $S > S_{0.05}$ 且 $S > S_{0.01}$ ，则称W达到极显著水平，评分者的一致性很高

■ 大样本情况 ($3 \leq K \leq 20, N \geq 8$):

- 构造检验统计量 $\chi^2 = K(N-1)W$. 查 χ^2 分布表得到自由度为 $N-1$ 时的临界值 $\chi^2_{(N-1)\alpha}$
- 确定拒绝域:

$$W = \{\chi^2 | \chi^2 \geq \chi^2_{(N-1)\alpha}\}$$

4.2 步骤

- 提出假设:

H_0 : 评分者的评分意见不一致

H_1 : 评分者的评分意见一致

- 取定显著性水平 α
- 计算每个样本的秩和

$$R_{ij} = \sum_{i=1}^k r_{ij}$$

- 计算每个样本的秩和均值

$$\bar{R} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i$$

- 计算秩和的离差平方和

$$S = \sum_{i=1}^N (R_i - \bar{R})^2$$

- 根据样本数的大小，用对应的公式计算肯德尔和谐系数

◦ 小样本: $3 \leq K \leq 20, 3 \leq N \leq 7$

■

■

$$W = \frac{S}{\frac{1}{12} K^2 (N^3 - N)}$$

■ 大样本: $3 \leq K \leq 20, N \geq 8$

■

■

$$T_j = \frac{1}{12} \sum_{k=1}^{m_j} (n_{jk}^3 - n_{jk})$$

$$W = \frac{S}{\frac{1}{12} K^2 (N^3 - N) - K \sum_{j=1}^K T_j}$$

- 计算拒绝域

4.3 例子

题目：有A, B, C, D, E, F六位教师各自评阅五篇作文，他们给每篇作文的评定等级如下表所示，问这六位教师所评等级的一致性如何？

指标	一	二	三	四	五
A	3	5	2	4	1
B	3	5	2	4	1
C	3	4	1	5	2
D	3	5	1	4	2
E	3	5	2	4	1
F	3	5	2	4	1
R_i	18	29	10	25	8

- 提出假设: H_0 :六位老师所评等级不具有 consistency

$$K = 6, N = 5$$

- 令显著性水平 $\alpha = 0.05$
- 计算各样本的秩和 R_i

$$R_1 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18; R_2 = 5 + 5 + 4 + 5 + 5 + 5 = 29, \dots, R_5 = 1 + 1 + 3 + 3 + 1 + 1 = 8$$

- 计算各样本的秩和均值 \bar{R}

$$\bar{R}_1 = \frac{18 + 29 + 10 + 25 + 8}{5} = 18$$

- 计算离差平方和S

$$S = (18 - 18)^2 + (29 - 18)^2 + (10 - 18)^2 + (25 - 18)^2 + (8 - 18)^2 = 334$$

- 计算和谐系数W

- N=5, 属于小样本情况, 直接带入W的公式, 得到:

$$W = \frac{334}{\frac{1}{12} \cdot 6^2 \cdot (5^3 - 5)} = 0.928$$

- 查表得到 $S_{0.05}(6, 5) = 136.1 < S$, 拒绝域: $W = \{S | S \geq 136.1\}$ 。又 $S > S_{0.01} = 176.1$
 - 结论: 六位老师所评等级具有极高一致性。

4.4 代码实现

Matlab

```
% 教师的打分等级
scores = [3, 5, 2, 4, 1; 3, 5, 2, 4, 1; 3, 4, 1, 5, 2; 3, 5, 1, 4, 2; 3, 5, 2, 4, 1; 3, 5, 2, 4, 1];
% 将打分等级、显著性水平和样本规模输入kendall()函数, 得到检验结果
[H, K, N, S, W, X2, bound] = kendall(scores, 0.05, 'auto')

% function [H, K, N, S, W, X2, bound] = kendall(scores, alpha, sizeType)

% H 表示最终所接受的假设。若为0, 表示接受原假设H0; 若为1, 拒绝原假设H0, 接受H1。
% K 评分者的数目。
% N 样本的数目。
% S 秩和的离差平方和。
% W 肯德尔和谐系数。
% X2 大样本检验中的检验统计量X^2。(小样本中该返回值无意义, 与W相等)
% bound 拒绝域的边界值。小样本情况中为S_a, 大样本情况中为X^2_{N-1, a}。
% scores K*N维的矩阵。每行代表每个评分者对不同样本的评分。
```

```

% alpha 显著性水平，默认0.05。
% sizeType 样本规模类型，可取值：
%         'auto': 自动识别（默认）。
%         'small': 小样本检验。
%         'large': 大样本检验。

% 注意事项：
% 1. scores的规模中K，N应满足 $3 \leq K \leq 20$ 且 $N \geq 3$ 。
% 2. sizeType默认的自动识别以N=7为界限，即N>7采用'large'，否则采用'small'。
% 3. 由于信息有限且不清楚构造原理，本程序只提供了所能搜集到的alpha=0.05和alpha=0.01的部分《肯德尔和谐系数（W）显著性临界值表》。当小样本检验无法在该表中找到合适值时，返回值H和bound将被置为-1。

% 以下为一般过程
function [ H, K, N, S, W, X2, bound ] = kendall( scores, alpha, sizeType )

%% 参数初始化。
[K, N] = size(scores);
if nargin<2
    alpha = 0.05;    %默认显著水平。
end
if nargin<3
    sizeType = 'auto';    %默认样本规模类型。
end
if K<3 || K>20 || N<3    %检验scores矩阵规模的合法性。
    error('Bad data size!');
end
if strcmpi(sizeType, 'auto')    %自动识别样本规模类型。
    if N>=8
        sizeType = 'large';
    else
        sizeType = 'small';
    end
end

%% 进行秩的分配。
tieRank = tiedrank(scores)';

%% 计算秩和的离差平方和S。
Ri = sum(tieRank);    %各样本的秩和。
sumRi = sum(Ri);    %样本秩和的总和。
sumRi2 = sum(Ri.^2);    %各样本秩和的平方和。
S = sumRi2-sumRi^2/N;    %秩和的离差平方和S。

%% 计算kendall和谐系数。
sumTj = 0;    %初始化修正项总和。
for k = 1:K
    occurs = hist(tieRank(k,:), unique(tieRank(k,:)));    %各秩的出现次数统计。
    Tj = sum(occurs.*(occurs-1).*(occurs+1))/12;    %修正项。
    sumTj = sumTj+Tj;    %更新修正项的和。
end
W = S*12/(K^2*N*(N-1)*(N+1)-K*sumTj);    %kendall和谐系数w。

%% 计算检验统计量X^2，拒绝域边界bound以及给出决定H。
switch lower(sizeType)
    case 'small'    %小样本。
        X2 = W;
        bound = partialTable(K, N, alpha);    %尝试寻找拒绝域边界，调用函数partialTable。
        if bound == -1    %若寻找边界失败，则H=-1。
            H = -1;
        else
            H = S>=bound;    %找到边界，得到最终决定H。
        end
    case 'large'    %大样本。

```

```

X2 = K*(N-1)*W; %检验统计量X^2。
bound = chi2inv(1-alpha, N-1); %拒绝域边界，由卡方分布的CDF反函数给出。
H = X2>=bound;
otherwise
    error('Unknown size type!');
end

%% 调用方式
% scores = [3, 5, 2, 4, 1; 3, 5, 2, 4, 1; 3, 4, 1, 5, 2; 3, 5, 1, 4, 2; 3, 5, 2, 4, 1; 3,
5, 2, 4, 1];
% [H ,K, N, S, W, x2, bound] = kendall(scores, 0.05, 'auto')

end

function bound = partialTable(K, N, alpha)
% function bound = partialTable(K, N, alpha)
% 查询《肯德尔和谐系数（W）显著性临界值表》的函数。

bound = -1; %默认返回-1。

valRow = -ones(1, 20); %初始化查询列。
switch alpha
    case 0.05
        switch N
            case 3
                valRow([8, 10, 15, 20, 9, 12, 14, 16, 18]) = [48.1, 60.0, 89.8, 119.7,
54.0, 71.9, 83.8, 95.8, 107.7];
            case 4
                valRow([4, 5, 6, 8, 10, 15, 20]) = [49.5, 62.6, 75.7, 101.7, 127.8, 192.9,
258.0];
            case 5
                valRow([3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 20]) = [64.4, 88.4, 112.3, 136.1, 183.7,
231.2, 349.8, 468.5];
            case 6
                valRow([3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 20]) = [103.9, 143.3, 182.4, 221.4, 299.0,
376.7, 570.6, 764.4];
            case 7
                valRow([3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 20]) = [157.3, 217.0, 276.2, 335.2, 453.1,
571.0, 864.9, 158.7];
        end
    case 0.01
        switch N
            case 3
                valRow([8, 10, 15, 20, 9, 12, 14, 16, 18]) = [66.8, 85.1, 131.0, 177.0,
75.9, 103.5, 121.9, 140.2, 158.6];
            case 4
                valRow([4, 5, 6, 8, 10, 15, 20]) = [61.4, 80.5, 99.5, 137.4, 175.3, 269.8,
364.2];
            case 5
                valRow([3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 20]) = [75.6, 109.3, 142.8, 176.1, 242.7,
309.1, 476.2, 641.2];
            case 6
                valRow([3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 20]) = [122.8, 176.2, 229.4, 282.4, 388.3,
494.0, 758.2, 1022.2];
            case 7
                valRow([3, 4, 5, 6, 8, 10, 15, 20]) = [185.6, 265.0, 343.8, 422.6, 579.9,
737.0, 1129.5, 1521.9];
        end
    otherwise
        return;
end

bound = valRow(K); %在alpha和N的查询列中查询。

```

end

5. 补充资料

1. [数模官网 - 肯德尔和谐系数](#)