模型-评价主题-打分式评价-数据包络分析法【hxy】

1. 模型名称

数据包络分析法（Data Envelopment Analysis，DEA）

2. 适用范围

根据多项投入指标和多项产出指标，对具有可比性的同类型单元（称为决策单元DMU）进行有效性评价，最初用于一些非赢利部门（如教育、卫生、政府机构）的运转的有效性的评价，后来被用于更广泛的领域（如金融、经济、项目评估等）

例如：大学一个系的投入包括教师、教师的工资、办公经费、文献资料费等，产出包括培养本科生和研究生、发表的论文、完成的科研项目等。DEA可以对若干个同类型的这种部门或单位（它们有相同的目标和任务，有相同的输入和输出指标，有相同的外部环境）进行相对有效性的评价。

3. 形式

多项投入指标，多项产出指标，有同类型决策单元DMU

	DMU_1	$\cdots$	DMU_i	$\cdots$	DMU_n
输入 1	x_{11}	$\cdots$	x_{1i}	$\cdots$	x_{1n}
输入 2	x_{21}	$\cdots$	x_{2i}	$\cdots$	x_{2n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
输入 m	x_{m1}	$\cdots$	x_{mi}	$\cdots$	x_{mn}
输出 1	y_{11}	$\cdots$	y_{1i}	$\cdots$	y_{1n}
输出 2	y_{21}	$\cdots$	y_{2i}	$\cdots$	y_{2n}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
输出 s	y_{s1}	$\cdots$	y_{si}	$\cdots$	y_{sn}

4. 求解过程

4.1 步骤

1. 解得DMU_i的**最佳权向量**ω_i^*，μ_i^*及**最佳权向量**时**效率评价指数**E_{ii}

   对每一个DMU_i，解以下**极大化问题**（对于E_{ii}公式推导过程，见参考资料）

$$\max E_{ii}=\max\frac{y_i^Tu}{x_i^Tv}$$

$$s.t.\begin{cases}\frac{y_j^Tu}{x_j^Tv}\le 1,\ j=1,2,\ldots,n\\ u\ge 0,\ v\ge 0\end{cases}$$

$$where\quad x_i=(x_{1i},x_{2i},\ldots,x_{mi})^T,\quad y_i=(y_{1i},y_{2i},\ldots,y_{si})^T$$

$$input\ weight\ vector:\ v=(v_1,v_2,\ldots,v_n)^T$$

$$output\ weight\ vector:\ u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)^T$$

   此问题是**分式规划问题**，令

$$t=\frac{1}{x_i^Tv},\ \omega=tv,\ \mu=tu$$

   转化为解等价的**线性规划问题**P（**Charnes-Cooper变换**）

$$\max E_{ii}=\max y_i^T\mu$$

$$s.t.\begin{cases}-x_j^T\omega+y_j^T\mu\le 0,\ j=1,2,\ldots,n\\ x_i^T\omega=1\\ \omega\ge 0,\ \mu\ge 0\end{cases}$$

   解得DMU_i的**最佳权向量**ω_i^*，μ_i^*及**最佳权向量**时**效率评价指数**E_{ii}

2. 检验DEA的**有效性**

方法一

- **CASE1** $E_{ii}\neq 1$：**非DEA有效**
- **CASE2** $E_{ii}=1$：**弱DEA有效(C^2R)**
- **CASE3** 存在$\omega_i^*>0,\ \mu_i^*>0$ 且 $E_{ii}=1$：**DEA有效(C^2R)**

方法二(常用)

解P**的对偶模型的等式形式**D_ϵ

$$\min\left(\theta-\varepsilon\left(e_1^T s^- + e_2^T s^+\right)\right)$$
$$s.t.\begin{cases}\sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + s^- = \theta x_i,\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j - s^+ = y_i,\\ \lambda \geq 0, s^- \geq 0, s^+ \geq 0\end{cases}$$

$$\epsilon = 10^{-6}(\text{一个很小的正数}),$$
$$m\text{项输入的松弛变量：}s^- = \left(s_1^-, s_2^-, \cdots, s_m^-\right),$$
$$s\text{项输出的松弛变量：}s^+ = \left(s_1^+, s_2^+, \cdots, s_s^+\right),$$
$$n\text{个}DMU\text{的组合系数：}\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n),$$
$$e_1^T = (1,1,\cdots,1)_{1\times m},\ e_2^T = (1,1,\cdots,1)_{1\times s}$$

- **CASE1** $\theta^* \neq 1$：**非DEA有效**
- **CASE2** $\theta^* = 1$：**弱DEA有效(C^2R)**
- **CASE3** 存在$s^{*-} > 0$，$s^{*+} > 0$ 且 $\theta^* = 1$：**DEA有效(C^2R)**

4.2 实例

	DMU_1	DMU_2	DMU_3	DMU_4	DMU_5
投入-教职工（人）	60	70	85	106	35
投入-教职工工资（万元）	156	200	157	263	105
投入-运转经费（万元）	50	180	100	86	30
产出-毕业的本科生（人）	80	60	90	96	30
产出-毕业的研究生（人）	12	13	20	17	8
产出-发表的论文（篇）	27	25	15	28	3
产出-完成的科研项目（项）	4	2	5	5	1

1. 解得DMU_i的**最佳权向量**ω_i^*，μ_i^*及**最佳权向量**时**效率评价指数**E_{ii}

	DMU_1	DMU_2	DMU_3	DMU_4	DMU_5
ω	0.0167	0.0143	0.0118	0.0000	0.0263
ω	0.0000	0.0000	0.0000	0.0014	0.0000
ω	0.0000	0.0000	0.0000	0.0073	0.0026
μ	0.0125	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
μ	0.0000	0.0554	0.0235	0.0442	0.1250
μ	0.0000	0.0071	0.0000	0.0000	0.0000
μ	0.0000	0.0000	0.1059	0.0138	0.0000
E_{ii}	1.0000	0.8982	1.0000	0.8206	1.0000

2. 检验DEA的**有效性**

采用**方法二**

	DMU_1	DMU_2	DMU_3	DMU_4	DMU_5
λ^*	1.0000	0.8472	0.0000	1.0964	0.0000
λ^*	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
λ^*	0.0000	0.1417	1.0000	0.0536	0.0000
λ^*	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
λ^*	0.0000	0.0000	0.0000	0.3464	1.0000
s^{*-}	0.0000	0.0000	0.0000	4.5215	0.0000
s^{*-}	0.0000	25.2345	0.0000	0.0000	0.0000
s^{*-}	0.0000	105.1508	0.0000	0.0000	0.0000
s^{*+}	0.0000	20.5278	0.0000	6.9272	0.0000
s^{*+}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
s^{*+}	0.0000	0.0000	0.0000	3.4454	0.0000
s^{*+}	0.0000	2.0972	0.0000	0.0000	0.0000
θ^*	1.0000	0.8982	1.0000	0.8206	1.0000

可知：

- DMU_1：$\theta^*=1$且$s^{*-}=0$，$s^{*+}=0$，满足**CASE3**，**DEA有效(C^2R)**
- DMU_2：$\theta^*\neq 1$，满足**CASE1**，**非DEA有效**

  根据**有效性的经济意义**，在不减少各项输出的前提下，构造一个新的DMU_2：

  $$\begin{aligned}DMU_2 &= 0.8472\times DMU_1+0.1417\times DMU_3\\ &=(62.8750,154.4083,56.5278,80.5278,13.0000,25.0000,4.0972)^T\end{aligned}$$

  可以使DMU_2的投入按比例减少到原投入的$\theta_2^*=0.8982$倍；由非零的松弛变量可知，可以进一步减少教职工工资25.2345万元、减少运转费用105.1508万元、多培养本科生20人，多完成2项科研项目
- DMU_3：$\theta^*=1$且$s^{*-}=0$，$s^{*+}=0$，满足**CASE3**，**DEA有效(C^2R)**
- DMU_4：$\theta^*\neq 1$，满足**CASE1**，**非DEA有效**

  根据**有效性的经济意义**，在不减少各项输出的前提下，构造一个新的DMU_4：

  $$DMU_4=1.0964\times DMU_1+0.0536\times DMU_3+0.3464\times DMU_5$$

  可以使DMU_4的投入按比例减少到原投入的$\theta_4^*=0.8206$倍；由非零的松弛变量可知，可以进一步减少教职工人数4人、多培养本科生6人，多发表3篇论文
- DMU_5：$\theta^*=1$且$s^{*-}=0$，$s^{*+}=0$，满足**CASE3**，**DEA有效(C^2R)**

4.3 代码实现

1. Matlab解线性规划P

DEA1.m

代码：

```
clear
X=[ 60 70 85 106 35;
156 200 157 263 105;
50 180 100 86 30];         %用户输入多指标输入矩阵X
Y=[ 80 60 90 96 30;
12 13 20 17 8;
27 25 15 28 3;
4 2 5 5 1];         %用户输入多指标输出矩阵Y
%n为DMU数量，m为输入指标数量，n为输出指标数量
n=size(X',1);m=size(X,1);s=size(Y,1);
A=[-X'    Y'];
b=zeros(n,1);
LB=zeros(m+s,1);UB=[ ];
for i=1:n;
f=[zeros(1,m) -Y(:,i)'];
Aeq=[X(:,i)' zeros(1,s)];beq=1;
w(:,i)=linprog(f,A,b,Aeq,beq,LB,UB);
%解线性规划，得DMUi的最佳权向量wi
E(i, i)=Y(:,i)'*w(m+1:m+s,i);
%求出DMUi的相对效率值Eii
end
w                 %输出最佳权向量
E                 %输出相对效率值Eii
omega=w(1:m,:)     %输出投入权向量omega
mu=w(m+1:m+s,:)   %输出产出权向量mu
```

结果：

```
w =

    0.0167    0.0143    0.0118         0    0.0263
         0         0         0    0.0014         0
         0         0         0    0.0073    0.0026
    0.0125         0         0         0         0
         0    0.0554    0.0235    0.0442    0.1250
         0    0.0071         0         0         0
         0         0    0.1059    0.0138         0


E =

    1.0000         0         0         0         0
         0    0.8982         0         0         0
         0         0    1.0000         0         0
         0         0         0    0.8206         0
         0         0         0         0    1.0000


omega =

    0.0167    0.0143    0.0118         0    0.0263
         0         0         0    0.0014         0
         0         0         0    0.0073    0.0026


mu =

    0.0125         0         0         0         0
         0    0.0554    0.0235    0.0442    0.1250
         0    0.0071         0         0         0
         0         0    0.1059    0.0138         0
```

2. Matlab解线性规划D_ϵ

[DEA2.m]

代码：

```
clear
X=[ 60 70 85 106 35;
156 200 157 263 105;
50 180 100 86 30];          %用户输入多指标输入矩阵X
Y=[ 80 60 90 96 30;
12 13 20 17 8;
27 25 15 28 3;
4 2 5 5 1];          %用户输入多指标输出矩阵Y
n=size(X',1);m=size(X,1);s=size(Y,1);
epsilon=10^-10;
%定义非阿基米德无穷小 =10^(－10)
f=[zeros(1,n) -epsilon*ones(1,m+s) 1];
A=zeros(1,n+m+s+1); b=0;
```

```
LB=zeros(n+m+s+1,1);UB=[ ];
LB(n+m+s+1)=-Inf;
for i=1:n;
Aeq=[X  eye(m)     zeros(m,s)   -X(:,i)
Y  zeros(s,m)   -eye(s)      zeros(s,1)];
beq=[zeros(m,1)
Y(:,i)];
w(:,i)= linprog (f,A,b,Aeq,beq,LB,UB);
%解线性规划，得DMUi的最佳权向量wi
end
w                              %输出最佳权向量
lambda=w(1:n,:)          %输出 lambda*
s_minus=w(n+1:n+m,:)     %输出s*－
s_plus=w(n+m+1:n+m+s,:)  %输出s*＋
theta=w(n+m+s+1,:)        %输出 theta*
```

结果：

```
w =

    1.0000    0.8472         0    1.0964         0
         0         0         0         0         0
         0    0.1417    1.0000    0.0536         0
         0         0         0         0         0
         0         0         0    0.3464    1.0000
         0         0         0    4.5215         0
         0   25.2345         0         0         0
         0  105.1508         0         0         0
         0   20.5278         0    6.9272         0
         0         0         0         0         0
         0         0         0    3.4454         0
         0    2.0972         0         0         0
    1.0000    0.8982    1.0000    0.8206    1.0000


lambda =

    1.0000    0.8472         0    1.0964         0
         0         0         0         0         0
         0    0.1417    1.0000    0.0536         0
         0         0         0         0         0
         0         0         0    0.3464    1.0000


s_minus =

         0         0         0    4.5215         0
         0   25.2345         0         0         0
         0  105.1508         0         0         0


s_plus =

         0   20.5278         0    6.9272         0
         0         0         0         0         0
         0         0         0    3.4454         0
         0    2.0972         0         0         0


theta =

    1.0000    0.8982    1.0000    0.8206    1.0000
```

5. 参考资料

1. 数模官网
2. Matlab解线性规划
3. E_{ii}的推导

   a) DMU的输入和输出基础变量

$$x_i = (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{mi})^T, \quad y_i = (y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{si})^T$$
$$Multi-index\ input\ matrix:\ X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$$
$$Multi-index\ output\ matrix:\ Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$$
$$Input\ weight\ vector:\ v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$$
$$Output\ weight\ vector:\ u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$$

b) DMU_i的**总输入**I_i和**总输出**O_i

$$I_i = (v_1 x_{1i} + v_2 x_{2i} + \ldots + v_m x_{mi}) = x_i^T v$$
$$O_i = (u_1 y_{1i} + u_2 y_{2i} + \ldots + u_s y_{si}) = y_i^T u$$

c) DMU_i的**效率评价指数**E_{ii}

$$E_{ii} = \frac{O_i}{I_i} = \frac{y_i^T u}{x_i^T v}$$