模型-运筹学-规划论-非线性规划【czy】

1. 模型名称

非线性规划（Nonlinear programming）

2. 适用范围

非线性规划是具有**非线性约束条件**或**目标函数**的数学规划。目标函数与约束函数中只要有一个为非线性函数，即称该问题为非线性规划问题(nonlinear programming problem)。

3. 形式

3.1 一般形式和参数说明

$$\text{目标函数} \, minf(x)$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} g_i(x) \leq 0 & i = 1, 2, \ldots, m \\ h_j(x) = 0 & j = 1, 2, \ldots, l \end{cases}$$

g_i 和 h_j是给定的n元实值函数,称为约束函数 (constraint function)，满足上述约束条件(constraint)

向量$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$使得实值目标函数 (objective function) f 在 x 处达到最小。

一般称上述问题为数学规划问题 (mathematical programming problem) 或者最优化问题 (optimization problem)。

在上述问题中，满足约束条件的向量 *x* 称为可行解 (feasible solution)，

全体可行解构成的集合称为可行域 (feasible region)。

可行域中使得目标函数值为最小的向量 *x* 称为问题的最优解。最优解一般又分为全局最优解 (Global Optimum)与局部最优解 (Local Optimum)。[1]

3.1 特殊形式和参数说明

由约束条件和目标函数的不同类型，非线性规划问题有以下特殊情况：

1. 当目标函数 f 为二次函数，而约束函数 g_i, h_j 均为线性函数时，问题称为二次规划问题 (quadratic programming problem)。
2. 若目标函数 f与所有不等式约束函数 g_i均为凸函数，而所有等式约束函数 h_j均为线性函数，则称问题为凸规划函数 (convex programming problem)。
3. 若约束条件中含有矩阵的半正定条件，则称为半定规划问题 (semi-definite programming problem)

·无约束非线性规划：

$$minf(x)$$
$$x \in E^{(n)}$$

·有约束非线性规划：

3.1.1 二次规划((quadratic programming)

3.1.1.1 表达式和定义

$$minf(x) = \frac{1}{2}x^TGx + x^Tc$$
$$s.t. a_i^Tx \geq b_i, i \in tau$$

其中 *G* 是 Hessian 矩阵。

如果 *G* 是半正定的，则该式为凸二次规划，这种情况下该问题的困难程度类似于线性规划。

如果有至少一个向量满足约束并且在可行域有下界，则凸二次规划问题就有一个全局最小值。如果 *G* 是正定的，则这类二次规划为严格的凸二次规划，那么全局最小值就是唯一的。如果是一个不定矩阵，则为非凸二次规划，这类二次规划更有挑战性，因为它们有多个平稳点和局部极小值点。

3.1.2 凸规划(convex programming)

3.1.2.1 表达式和定义

$$minf(x)$$
$$s.t. \begin{cases} g_i(x) \leq 0, i = 1, \cdots, m \\ a_j^Tx = b_j, j = 1, \cdots, l \end{cases}$$

与一般的最优化问题标准形式相比，凸规划有三点附加条件：

– 目标函数 f 必须是凸函数

– 不等式约束函数g_i 必须是凸函数，不等式$g_i \leq 0$组成的区域为凸集

– 等式约束函数 h_j必须是仿射的 (即线性函数和常函数的和函数)

3.1.2.2 性质

- 凸规划问题的任一局部极小点是全局极小点，且全体局部极小点的集合为凸集；
- 当凸规划的目标函数 f 为严格凸函数时，若存在最优解，则这个最优解一定是唯一的最优解。

3.1.2.3 最优性条件

设凸规划问题中的目标函数 f 是可微的，记可行域为 D，即

$$D = \{x \mid g_i(x) \le 0, i = 1, 2, \cdots, m; a_j^T x = b_j, j = 1, \cdots, l\}$$

则 x^* 是最优点的充分必要条件是：

对任意的 $y \in D$ ，有

$$\nabla f(x^*)(y - x^*) \ge 0$$

4. 非线性规划问题的解法

4.1 一般算法

	无约束线性规划	**有约束非线性规划**
	1.一般迭代法	1.可行方向法
	2.一维搜索法	2.制约函数法(有约束转化为无约束)
	1）最速下降法	1）外点法
	2）共轭梯度法	2）内点法
	3）牛顿法	
	4）拟牛顿法	
	5）变尺度法	

4.2 进阶算法

由于经典算法在处理**大规模问题**时得到的解通常不能保证**全局最优性**，为局部最优解。而进阶算法常常具有跳出局部最优解的机制。

4.2.1 遗传算法

是根据生物演化，模拟演化过程中基因染色体的选择、交叉和变异得到的算法。在进化过程中，较好的个体有较大的生存几率。

4.2.2 模拟退火

是模拟统计物理中固体物质的结晶过程。在退火的过程中，如果搜索到好的解接受；否则，以一定的概率接受不好的解（即实现多样化或变异的思想），达到跳出局部最优解得目的。

4.2.3 神经网络

模拟大脑神经处理的过程，通过各个神经元的竞争和协作，实现选择和变异的过程。

4.2.4 禁忌搜索

模拟人的经验，通过禁忌表记忆最近搜索过程中的历史信息，禁忌某些解，以避免走回头路，达到跳出局部最优解的目的。

4.2.5 蚂蚁算法

模拟蚂蚁的行为，拟人拟物，向蚂蚁的协作方式学习。

4.3 软件求解

2.3.3软件求解

MATLAB优化工具箱常用命令：

命令	适用类型
fmincon	约束非线性极小化
fminsearch	无约束非线性最优化
fminunc	无约束非线性最优化
quadprog	二次规划

5. 实例

5.1 例1：经济管理——股票的投资组合问题

5.1.1 问题描述

投资的效益与风险：

一个投资者拟选择 A,B,C 三支业绩好的股票来进行长期组合投资。通过对这三支股票的市场分析和统计预测得到相关数据如下表所示：

股票名称	五年期望收益(%)	五年的协方差(%)		
		A	B	C
A	92	180	36	110
B	64	36	130	-30
C	41	110	-30	110

试从两个方面分别给出三支股票的投资比例：

1. 希望将投资组合中的股票收益的标准差降到最小，以降低投资风险，并希望五年后的期望收益率不少于 65
2. 希望在标准差最大不超过 12

5.1.2 符号与假设

决策变量x_i	股票i 的投资比例
r_i	股票 i 五年的期望收益率
目标函数 R	五年后投资组合总收益
目标函数$Var(R)$	投资组合的方差
目标函数D	投资组合的标准差

5.1.3 模型的建立

$$R = x_1r_1 + x_2r_2 + x_3r_3$$

$$Var(R) = x_1^2Var(x_1) + x_2^2Var(x_2) + x_3^2Var(x_3) + 2x_1x_2Cov(r_1,r_2) + 2x_2x_3Cov(r_2,r_3) + 2x_1x_3Cov(r_1,r_3)$$

1. 问题一的模型——二次规划

$$minD = \sqrt{180x_1^2 + 120x_2^2 + 140x_3^2 + 72x_1x_2 + 220x_1x_3 - 60x_2x_3}$$

$$
s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 0.92x_1 + 0.64x_2 + 0.41x_3 \geq 0.65 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}
$$

2. 问题二的模型——约束非线性规划

$$
maxR = 0.92x_1 + 0.64x_2 + 0.41x_3
$$

$$
s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \sqrt{180x_1^2 + 120x_2^2 + 140x_3^2 + 72x_1x_2 + 220x_1x_3 - 60x_2x_3} \leq 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}
$$

5.2 例2：生产与工程管理——选址问题

5.2.1 问题描述

> **供应与选址**
>
> 6 个建筑工地水泥的日用量分别为 3,5,4,7,6,11(吨)，两个临时料场 A，B 日储量各有 20 吨。假设从料场到工地均有直线道路相连。试制定每天 A，B 两料场向各工地供应水泥的供应计划，为进一步减少吨千米数，打算舍弃两个临时料场，改建两个新的，日储量仍各为 20 吨，问应建在何处使总的吨千米数最小?

2

5.2.2 符号与假设

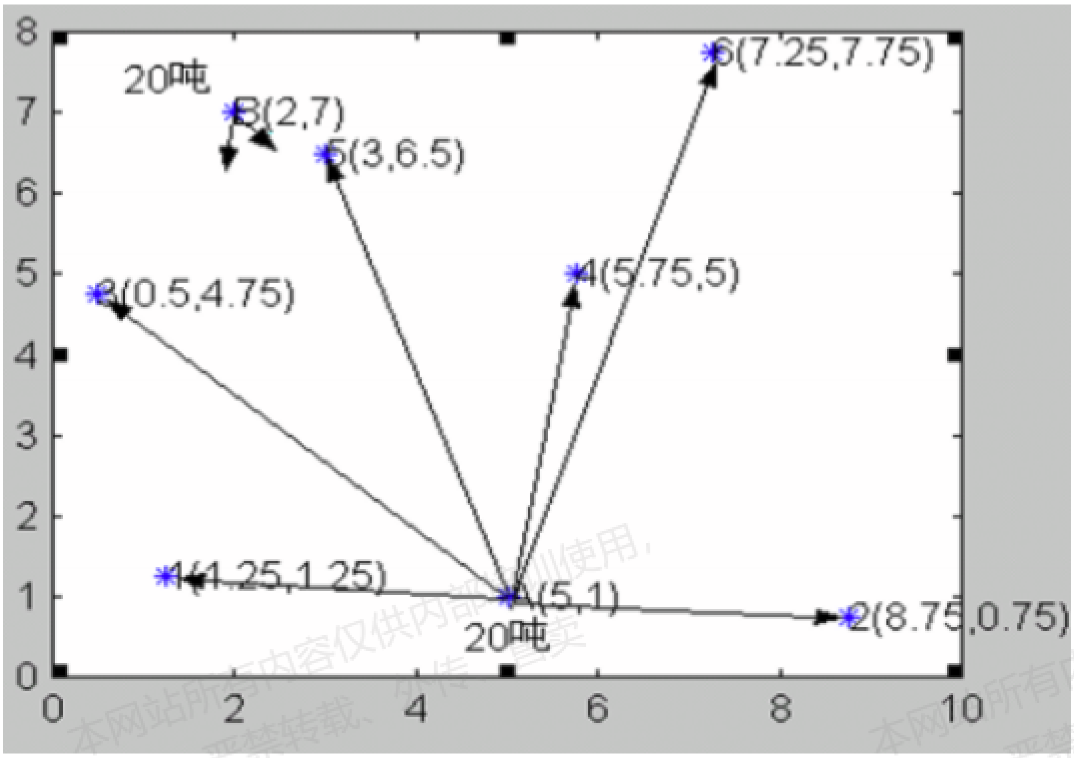

图 1: 料场与工地分布

决策变量z_{ij}	从料场j 向工地 i 的运送量为 z_{ij}
(x_j, y_j)	料场j的位置
目标函数f	吨千米数
(a_i, b_i)	工地位置
r_j	料场日储量
d_i	水泥日用量

5.2.3 模型的建立——约束非线性规划

$$minf = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{6} z_{ij}\sqrt{(x_j-a_i)^2+(y_j-b_i)^2}$$

$$s.t. \begin{cases} \sum_{j=1}^{2} z_{ij} = d_i, i = 1,\cdots,6 \\ \sum_{i=1}^{6} z_{ij} \le r_j, j = 1,2 \\ z_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

6. 参考资料

1. 数学建模培训营----非线性规划

---

1. 在现有的求解算法下，许多非线性规划问题通常只能得到局部最优解，初始值不同则最优解常常不同 (而凸规划的局部最优解即全局最优解)。 ↩
2. 这个指标是用运送货物的重量（单位：吨）乘以运送的距离（单位：千米），用来衡量运输企业的运送能力。" ↩