概率论与数理统计

何志坚

华南理工大学数学学院

hezhijian@scut.edu.cn

第三章：随机向量及其分布

目录

1. 随机向量的概念及其分布函数
2. 二维离散型随机变量
3. 二维连续型随机向量
4. 二维随机变量函数的分布

随机向量的概念

定义： 设$X_1,\ldots,X_n$为概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$的n个随机变量，则称向量

$$\mathbf{X}:=(X_1,\ldots,X_n):\Omega\to\mathbb{R}^n$$

为n维随机向量。

注： 多维随机向量的关键是定义在同个概率空间上。对于不同样本空间Ω_1,Ω_2上的两个随机变量，我们在乘积空间

$$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2:=\{(\omega_1,\omega_2)|\omega_1\in\Omega_1,\omega_2\in\Omega_2\}$$

及其事件域上讨论。

随机向量的分布函数

定义：设$\mathbf{X}=(X_1,\dots,X_n)$为概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$的随机向量，则它的**联合分布函数**定义为:

$$F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)=P(\cap_{i=1}^n\{X_i\le x_i\})=P\left(\mathbf{X}\in\prod_{i=1}^n(-\infty,x_i]\right).$$

随机向量分布函数的特征性质:

1. $0\le F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)\le 1,\ \forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$
2. $F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$关于每个变量$x_i$单增右连续
3. $\lim_{x_i\to-\infty}F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)=0$, $\lim_{\min x_i\to\infty}F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)=1$
4. $\forall (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\ \forall h_i>0,$

$$\Delta_{(x_1,\dots,x_n)}^{(x_1+h_1,\dots,x_n+h_n)}F_{X_1,\dots,X_n}(t_1,\dots,t_n)\ge 0.$$

注：上式n阶差分等价于$P(\cap_{i=1}^n\{x_i<X_i\le x_i+h_i\})$.

边缘分布

已知随机向量$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$的联合分布为$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$，由此可确定每个分量的边缘分布$F_{X_i}$，

$$F_{X_i}(x_i) = \lim_{x_j \to \infty, j \neq i} F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

更一般地，令$A = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq I = \{1, \ldots, n\}$，

$$F_{X_{i_1},\ldots,X_{i_k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) = \lim_{x_j \to \infty, j \in I \setminus A} F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n).$$

离散型与连续型

定义：设$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$为概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$的随机向量，

- 如果$(X_1, \ldots, X_n)$至多取可数个不同的值，则称之为离散型随机向量;
- 如果存在非负函数$f_{X_1,\ldots,X_n}$使得$(X_1, \ldots, X_n)$的联合分布函数可以表示为

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \mathrm{d}t_1 \int_{-\infty}^{x_2} \mathrm{d}t_2 \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, \mathrm{d}t_n,$$

则称$(X_1, \ldots, X_n)$为连续型随机向量，称$f_{X_1,\ldots,X_n}$为它的分布密度函数。对于任意区域$D \subset \mathbb{R}^n$, 有

$$P(\mathbf{X} \in D) = \int \cdots \int_D f_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n)\, \mathrm{d}t_1 \cdots \mathrm{d}t_n.$$

随机变量的独立性

定义： 设$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$为概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$的随机向量，如果

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n),\ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

则称$X_1, \ldots, X_n$相互独立。

等价形式： 任意集合$A_1, \ldots, A_n$, 满足

$$P(\cap_{i=1}^n \{X_i \in A_i\}) = \Pi_{i=1}^n P(X_i \in A_i).$$

即所有与X_i相关的事件都相互独立。

独立性判别方法

定理： 设$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$为概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$的随机向量，

- 如果$X_1, \ldots, X_n$都为离散型随机变量，有分布列

$$P(X_i = a_j^{(i)}), j = 1, 2, \cdot, i = 1, \ldots, n,$$

则$X_1, \ldots, X_n$相互独立的充要条件为

$$P(X_1 = a_{\ell_1}^{(1)}, X_2 = a_{\ell_2}^{(2)}, \ldots, X_n = a_{\ell_n}^{(n)}) = P(X_1 = a_{\ell_1}^{(1)}) \cdots P(X_n = a_{\ell_n}^{(n)}),$$

其中ℓ_i为任意正整数。

- 如果$X_1, \ldots, X_n$都为连续型随机变量，有联合分布密度函数$f_{X_1,\ldots,X_n}$，则$X_1, \ldots, X_n$相互独立的充要条件为

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_n}(x_n), \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

目录

1 随机向量的概念及其分布函数

2 二维离散型随机变量

3 二维连续型随机向量

4 二维随机变量函数的分布

二维离散型随机变量

定义： 设二维离散型随机变量(X,Y)的取值为$(x_i,y_j), i,j=1,2\cdots$. 分布列为

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots.$$

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}=\sum_j p_{1j}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}=\sum_j p_{2j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}=\sum_j p_{ij}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}=\sum_i p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}=\sum_i p_{i2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}=\sum_i p_{ij}$	$\cdots$	1

其中，X的边缘分布为$P(X=x_i)=p_{i\cdot}$，Y的边缘分布为$P(Y=y_j)=p_{\cdot j}$.

例1

例： 袋中有五件产品，其中两件次品，三件正品，从袋中任意依次取出两件，每次取出的产品进行检查后放回袋中，设每次取出产品时，袋中每件产品被取到的可能性相等，求下列随机变量的联合分布列以及边缘分布：

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次取到正品}\\ 0, & \text{第一次取到次品}\end{cases},\quad Y=\begin{cases}1, & \text{第二次取到正品}\\ 0, & \text{第二次取到次品}\end{cases}$$

解：

$X\backslash Y$	0	1	
0	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{6}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{3}{5}$
	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

例2

例： 在例 1 中，如果每次取出后不放回，求(X, Y)的联合分布列以及边际分布。

解：

$X \backslash Y$	0	1	
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$
	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

例3

设随机试验只有A、B和C三个结果，各结果出现的概率分别是p, q和$1-p-q$. 现将该随机试验独立做n次，记X和Y分别为n次试验中A和B发生的次数，试求(X,Y)的联合分布和边缘分布。

解:

$$P(X=i,Y=j)=C_n^iC_{n-i}^jp^iq^j(1-p-q)^{n-i-j},\ 0\leq i+j\leq n.$$

边缘分布$X\sim B(n,p)$, $Y\sim B(n,q)$.

二维离散型随机向量条件分布列

独立： X,Y相互独立的充要条件是对所有可能的取值，有

$$P(X=x_i,Y=y_i)=P(X=x_i)P(Y=y_i),$$

即$p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$, $i,j\geq 1$.

注： 例1独立，例2和例3不独立。

条件分布列： 设(X,Y)为二维离散型随机变量，其联合分布列为

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\ \ i,j=1,2,\ldots.$$

已知事件$\{Y=y_j\}$发生，在此条件下X的分布列称条件分布列，

$$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\ \ i=1,2,\cdots.$$

同样可以定义已知事件$\{X=x_i\}$发生，在此条件下Y的条件分布列。独立情况下，条件分布退化成无条件分布。

例：

考虑例2，求$\{X=1\}$条件下Y的条件分布列，$\{Y=0\}$条件下X的条件分布列。

$X\backslash Y$	0	1	
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$
	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

解：

$$P(Y=0|X=1)=P(Y=1|X=1)=\frac{3/10}{3/5}=\frac{1}{2}$$

$$P(X=0|Y=0)=\frac{1/10}{2/5}=\frac{1}{4},\ P(X=1|Y=0)=\frac{3/10}{2/5}=\frac{3}{4}.$$

目录

1 随机向量的概念及其分布函数

2 二维离散型随机变量

3 二维连续型随机向量

4 二维随机变量函数的分布

二维连续型随机向量

定义： 若(X, Y)为连续型随机型随机向量，则其分布函数

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

分布密度函数$f_{X,Y}$满足：

- 非负性： $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$，$(x, y) \in \mathbb{R}^2$
- 正则性： $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 1$
- 若$f_{X,Y}(x, y)$在点(x_0, y_0)处连续，则

$$f_{X,Y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}$$

- 对二维平面的任何区域D有

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f_{X,Y}(u, v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

二维连续型随机向量的边缘分布

设(X, Y)为连续型随机型随机向量，其密度函数为$f_{X,Y}(x,y)$, 则X的边缘分布函数、密度函数分别为

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u.$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

同样，Y的边缘密度函数为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

二维均匀分布

定义：设D为二维平面上的一个有界区域，面积为$S_D < \infty$, 若随机向量(X, Y)的分布密度函数为

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D}, & (x, y) \in D, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则称(X, Y)服从D上的均匀分布。

二维正态分布

定义：若随机向量(X,Y)的分布密度函数为

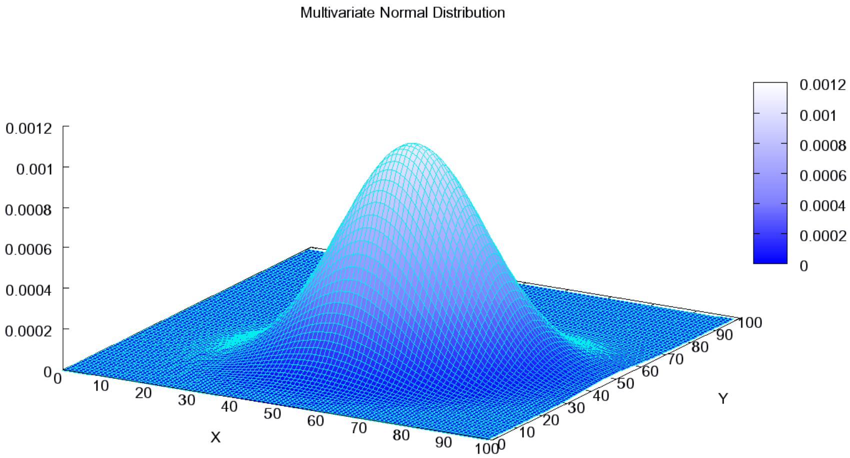
$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)\right\},$$

其中$\sigma_1,\sigma_2>0, |\rho|<1$, 则称$(X,Y)$服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$的正态分布，记为

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho).$$

试证明，$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

二维正态分布的密度函数



n维正态分布

定义： 更一般地，n维正态分布$\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)^\top$的密度函数为

$$f_{\mathbf{X}}(x_1,\ldots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|\boldsymbol{\Sigma}\right|^{1/2}}\exp\{-(1/2)(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^\top\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\}$$

其中$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\ldots,\mu_n)^\top$, $\boldsymbol{\Sigma}$为n阶正定矩阵，记$X\sim N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$.

注1： $X_i\sim N(\mu_i,\Sigma_{ii})$, $i=1,\ldots,n$.

注2： $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$等价于$(X,Y)\sim N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$, 其中$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\mu_2)^\top$,

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix}.$$

例1

例： 设二维连续型随机变量(X, Y)的分布函数为

$$F(x, y) = (A + B\arctan x)(C + \arctan y).$$

- 求常数A, B, C;
- (X, Y)的密度函数;
- $D = \{(x, y)|x - y > 0, x \leq 1\}$, 求$P\{(X, Y) \in D\}$.

解： (1)由二维分布函数的性质知,

$$F(-\infty, y) = (A - \frac{\pi}{2}B)(C + \arctan y) = 0$$
$$F(x, -\infty) = (A + B\arctan x)(C - \frac{\pi}{2}) = 0$$
$$F(\infty, \infty) = (A + \frac{\pi}{2}B)(C + \frac{\pi}{2}) = 1,$$

可得$C = \pi/2$, $A = 1/(2\pi)$, $B = 1/\pi^2$.

例1

例：设二维连续型随机变量(X, Y)的分布函数为

$$F(x, y) = (A + B \arctan x)(C + \arctan y).$$

- (X, Y)的密度函数；
- $D = \{(x, y) | x - y > 0, x \leq 1\}$，求$P\{(X, Y) \in D\}$.

解：(2)密度函数

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\pi^2 (1 + x^2)(1 + y^2)}$$

(3)

$$P\{(X, Y) \in D\} = \int_{(x,y)\in D} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{1 + x^2} \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{1 + y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \left[\frac{1}{2} (\arctan x)^2 + \frac{\pi}{2} \arctan x \right]_{-\infty}^{1} = \frac{9}{32}.$$

例2

例： 已知二维随机向量(X, Y)的密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} kxy & x^2 \le y \le 1, 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

试确定k的数值，并求(X, Y)落在区域$D = \{(x, y) | x^2 \le y \le x, 0 \le x \le 1\}$的概率。

解： (1)由概率密度性质，知

$$\int\int f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = k\int_0^1 x\int_{x^2}^1 y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{k}{6} = 1 \Rightarrow k = 6.$$

(2)

$$P\{(X, Y) \in D\} = 6\int_0^1 x\int_{x^2}^x y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}.$$

二维连续型随机向量的独立性

独立的充要条件：设(X,Y)是二维连续型随向量，$f(x,y)$及$f_X(x),f_Y(y)$分别是(X,Y)的联合分布密度及边缘分布密度，则X,Y相互独立的充要条件是：对任意点(x,y)，有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y).$$

例：易知例1独立。现考虑例2，当$0\le x,y\le 1$时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y=6x\int_{x^2}^{1} y\,\mathrm{d}y=3x-3x^5.$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=6y\int_{0}^{\sqrt{y}} x\,\mathrm{d}x=3y^2.$$

因为$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以X,Y不独立。

二维正态分布独立的充要条件

定理： 若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$, X与Y独立的充要条件是$\rho=0$.

注： ρ称为相关系数，刻画X与Y的相关性。

证明： 若X,Y独立，则有$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$. 从而有

$$\sup_{x,y} f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\sup_{x,y} f_X(x)f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2},$$

所以$\rho=0$. 反过来，如果$\rho=0$, 则易知，$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$.

二维连续型随机向量的条件分布

设(X,Y)是二维连续型随向量，先考虑$Y=y$的条件下，X的条件分布。

$$
\begin{aligned}
P(X\le x|Y=y) &= \lim_{\Delta y\to 0+} P(X\le x|y\le Y\le y+\Delta y)\\
&= \lim_{\Delta y\to 0+} \frac{P(X\le x, y\le Y\le y+\Delta y)}{P(y\le Y\le y+\Delta y)}\\
&= \lim_{\Delta y\to 0+} \frac{\int_{\infty}^{x}\int_{y}^{y+\Delta y} f_{X,Y}(u,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u}{\int_{y}^{y+\Delta y} f_Y(v)\,\mathrm{d}v} \quad \text{中值定理}\\
&= \lim_{\Delta y\to 0+} \frac{\int_{\infty}^{x} \Delta y f_{X,Y}(u,v^*)\,\mathrm{d}u}{\Delta y f_Y(v^{**})} = \int_{\infty}^{x} \frac{f_{X,Y}(u,y)}{f_Y(y)}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}
$$

定义： 如果$f_Y(y)>0$, 在$Y=y$的条件下, X的条件密度可以定义为:

$$
f_{X|Y}(x|y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)},\ \forall x\in\mathbb{R}.
$$

如果$f_X(x)>0$，同样方式可以定义$f_{Y|X}(y|x)$. 独立情况下，条件分布退化成无条件分布。

例2（续）

例： 已知二维随机向量(X,Y)的密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6xy & x^2\le y\le 1, 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求$f_{X|Y}(x|y)$和$f_{Y|X}(y|x)$.

解： 已知

$$f_X(x)=\begin{cases}3x-3x^5 & 0\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}3y^2 & 0\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

所以，当$0<y\le 1$，　　当$0<x<1$时，

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}2x/y & 0\le x\le \sqrt{y}\\ 0 & \text{其他}\end{cases},\quad f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}2y/(1-x^4) & x^2\le y\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

二维正态向量的条件分布

定理： 若$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$, 则

$$X|Y = y \sim N(\mu_1 + \rho(y - \mu_2)\sigma_1/\sigma_2, \sigma_1^2(1 - \rho^2)),$$

$$Y|X = x \sim N(\mu_2 + \rho(x - \mu_1)\sigma_2/\sigma_1, \sigma_2^2(1 - \rho^2)).$$

证明： 只须证明第一部分，第二部分由对称性可得。

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_2}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \times$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right) + \frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left[x - (\mu_1 + \rho(y-\mu_2)\sigma_1/\sigma_2)\right]^2\right\}.$$

目录

1 随机向量的概念及其分布函数

2 二维离散型随机变量

3 二维连续型随机向量

4 二维随机变量函数的分布

离散型随机向量和函数的分布

设二维离散型随机向量(X,Y)的分布列为

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\ \ i,j=1,2,\cdots.$$

则$Z=X+Y$的分布列为

$$P(Z=z_k)=\sum_{x_i+y_j=z_k}p_{ij},\ \ k=1,2,\cdots.$$

特别地，如果(X,Y)的分布列为

$$P(X=i,Y=j)=p_{ij},\ \ i,j=0,1,2,\cdots.$$

则Z的分布列为

$$P(Z=k)=\sum_{i=1}^{k}P(X=i,Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}p_{i(k-i)},\ \ k=0,\cdots.$$

泊松分布的可加性

定理： 如果$X \sim Pois(\lambda_1)$, $Y \sim Pois(\lambda_2)$, 且X与Y独立，则

$$X + Y \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2).$$

证明： 令$Z = X + Y$. 对任意非负整数k,

$$\begin{aligned}
P(Z = k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X = i, Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i)P(Y = k - i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^i}{i!} \frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} = e^{-\lambda_1-\lambda_2}\lambda_2^k \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda_1/\lambda_2)^i}{i!(k-i)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}\lambda_2^k}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda_1/\lambda_2)^i k!}{i!(k-i)!} = \frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}\lambda_2^k}{k!} (\lambda_1/\lambda_2 + 1)^k \\
&= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} e^{-\lambda_1-\lambda_2}
\end{aligned}$$

二项分布的可加性

定理： 如果$X \sim B(n,p)$，$Y \sim B(m,p)$，且X与Y独立，则

$$X + Y \sim B(n+m, p).$$

证明： 令$Z = X + Y$. 对任意非负整数$k \le n+m$,

$$\begin{aligned}
P(Z=k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X=i)P(Y=k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} C_n^i p^i (1-p)^{n-i} C_m^{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-k+i} \\
&= \left(\sum_{i=0}^{k} C_n^i C_m^{k-i} \right) p^k (1-p)^{n+m-k} \\
&= C_{n+m}^k p^k (1-p)^{n+m-k}
\end{aligned}$$

连续型随机向量和函数的分布

设(X, Y)的联合密度为$f(x, y)$, 则$Z = X + Y$的分布函数为

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) = P(Z \le z) &= \int_{x+y\le z} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{z} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y-x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

求导得到Z的密度函数为

$$
f_Z(z) = F_Z'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, z-x)\,\mathrm{d}x.
$$

特别地，如果X与Y独立，则

$$
f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-x) f_Y(x)\,\mathrm{d}x.
$$

这就是卷积公式。

正态分布的可加性

定理： 如果$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，且$X$与$Y$独立，则

$$X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

证明： 令$X' = (X - \mu_1)/\sigma_2 \sim N(0, \tilde{\sigma}_1^2)$，其中$\tilde{\sigma}_1 = \sigma_1/\sigma_2$
$Y' = (Y - \mu_2)/\sigma_2 \sim N(0, 1)$，$Z = X' + Y'$.

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X'}(x) f_{Y'}(z-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi\tilde{\sigma}_1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\tilde{\sigma}_1^2} - \frac{(z-x)^2}{2}\right\} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi\tilde{\sigma}_1} \exp\left\{-\frac{z^2}{2(\tilde{\sigma}_1^2+1)}\right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(1+\tilde{\sigma}_1^2)(x - \tilde{\sigma}_1^2 z/(1+\tilde{\sigma}_1^2))^2}{2\tilde{\sigma}_1^2}\right\} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\tilde{\sigma}_1^2+1}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2(\tilde{\sigma}_1^2+1)}\right\}.
\end{aligned}$$

所以$Z \sim N(0, \tilde{\sigma}_1^2 + 1)$. $X + Y = \sigma_2 Z + \mu_1 + \mu_2 \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

多维正态分布的线性组合

定理1：随机向量$\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)^\top$服从$n$维正态分布的充要条件是对任意的$\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)^\top$，$\boldsymbol{\alpha}^\top\mathbf{X}$服从一维正态分布。

定理2：如果随机向量$\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)^\top\sim N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$，则有对任意实矩阵$\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times n}$，$\mathbf{AX}\sim N(\mathbf{A}\boldsymbol{\mu},\mathbf{A}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{A}^\top)$.

注：如果X,Y都服从正态分布，(X,Y)不一定服从二维正态分布。（反例见作业题）

变量变换法

设二维随机向量(X, Y)的联合密度函数为$f_{X,Y}(x, y)$, 如果函数

$$\begin{cases} u & = g_1(x, y) \\ v & = g_2(x, y) \end{cases}$$

有连续的偏导数，且存在唯一的反函数

$$\begin{cases} x & = x(u, v) \\ y & = y(u, v) \end{cases},$$

其变换的雅克比行列式

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}^{-1} \neq 0,$$

变量变换法

若

$$\begin{cases} U &= g_1(X, Y) \\ V &= g_2(X, Y) \end{cases},$$

则(U, V)的联合密度为

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(x(u, v), y(u, v)) \left| J \right|.$$

证： 参见二重积分的变量变换法。

增补变量法

目的：求$U = g(X, Y)$的密度函数

步骤1：增补一个新的随机变量$V = h(X, Y)$ (一般令$V = X$或者$V = Y$)

步骤2：用变量变换法求出(U, V)的联合密度函数

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(x(u, v), y(u, v))\,|J|$$

步骤3：最后，通过联合密度函数$f_{U,V}(u, v)$求U的边缘分布

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u, v)\,\mathrm{d}v$$

注：利用这种方法很容易求出的两个连续随机变量“积的分布”和“商的分布”

二维连续型随机向量积的分布

例： 已知(X, Y)的联合密度为$f(x, y)$, 求$U = XY$的密度函数。

解： 设$V = X$. 则(U, V)的联合密度函数为

$$f_{U,V}(u, v) = f(v, u/v)\,|J|\,,$$

其中

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{v}$$

所以U的密度函数为

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u, v)\,\mathrm{d}v = \int_{-\infty}^{\infty} f(v, u/v)\frac{1}{|v|}\,\mathrm{d}v.$$

二维连续型随机向量商的分布

例: 已知(X, Y)的联合密度为$f(x, y)$, 求$U = X/Y$的密度函数。

解: 设$V = Y$. 则(U, V)的联合密度函数为

$$f_{U,V}(u, v) = f(uv, v)\,|J|\,,$$

其中

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v & u \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = v$$

所以U的密度函数为

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u, v)\,\mathrm{d}v = \int_{-\infty}^{\infty} f(uv, v)\,|v|\,\mathrm{d}v.$$

第三次作业

设(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{3}{8\pi\sqrt{2}}\left\{\exp\left(-\frac{9}{16}(x^2-\frac{2}{3}xy+y^2)\right)+\exp\left(-\frac{9}{16}(x^2+\frac{2}{3}xy+y^2)\right)\right\}$$

- 求X,Y的边缘分布并判断(X,Y)是否服从二维正态分布
- 分别求$X+Y$, X/Y的密度函数

第三章习题：4, 8, 10, 14, 15, 19

5月9日（周三）交！