概率论与数理统计

何志坚

华南理工大学数学学院

hezhijian@scut.edu.cn

第七章：参数估计

参数估计

在实际问题中，对于一个总体X往往是仅知其分布的类型，而其中所含的一个或几个参数的值却是未知的，因此只有在确定这些参数后，才能通过其分布来计算概率，如何确定这些参数的数值呢？这就是统计推断中的“参数估计”问题。

目录

参数的点估计

定义： 构造一个统计量$\hat{\theta}$对参数θ作定值的估计称为**参数的点估计**

$$\begin{cases} \text{点估计量：} \hat{\theta} & = T(X_1, \ldots, X_n) \\ \text{点估计值：} \hat{\theta} & = T(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

矩法估计

矩估计的想法来源于大数定理。如果总体X存在k阶矩，对任意$\epsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k - \mathbb{E}[X^k]\right| \geq \epsilon\right) = 0.$$

这说明，当样本容量n较大时，样本k阶矩与总体k阶矩差别很小。矩法估计就是用样本k阶矩估计总体的k阶矩。通常用$\hat{\theta}_M$表示。一般步骤如下：

- 第一步：列出估计式

$$E[X^k] = g_k(\theta_1, \ldots, \theta_m), \;\; k = 1, \ldots, m.$$

- 第二步：求解关于估计量的方程组

$$\theta_k = \theta_k(E[X^1], \ldots, E[X^m]), \;\; k = 1, \ldots, m.$$

- 第三步：用$M_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$替代$E[X^k]$得到矩估计

$$\hat{\theta}_k = \theta_k(M_1, \ldots, M_m), \;\; k = 1, \ldots, m.$$

例1

例： 求总体X的期望$\mu = \mathbb{E}[X]$与方差$\sigma^2 = \mathrm{Var}[X]$的矩估计。

解: (1)列出估计式

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X] & = \mu \\ \mathbb{E}[X^2] & = \mathrm{Var}[X] + (\mathbb{E}[X])^2 = \mu^2 + \sigma^2 \end{cases}$$

(2)求解关于估计量的方程组

$$\begin{cases} \mu & = \mathbb{E}[X] \\ \sigma^2 & = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \end{cases}$$

所以，$\hat{\mu}_M = \bar{X}$, $\hat{\sigma}_M^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - (\bar{X})^2 = S_n^2$.

注： 不难证明，总体的各阶中心矩的矩估计就是样本各阶中心矩。

例2

例： 设总体$X \sim U[a, b]$, 求a, b的矩估计。

解: $\mathbb{E}[X] = (a+b)/2$, $\mathrm{Var}[X] = (b-a)^2/12$. 所以，

$$\begin{cases} a & = \mathbb{E}[X] - \sqrt{3\mathrm{Var}[X]} \\ b & = \mathbb{E}[X] + \sqrt{3\mathrm{Var}[X]}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{a}_M & = \bar{X} - \sqrt{3}S_n \\ \hat{b}_M & = \bar{X} + \sqrt{3}S_n. \end{cases}$$

例

例：设总体X的分布密度为

$$f(x) = \frac{\theta}{2} e^{-\theta|x|}, \ x \in \mathbb{R}, \theta > 0.$$

求θ的矩估计。

解:

$$\mathbb{E}[X] = 0, \ \mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{\theta}{2} e^{-\theta|x|} \, \mathrm{d}x = \theta \int_0^{\infty} x^2 e^{-\theta x} \, \mathrm{d}x = \frac{2}{\theta^2}$$

$$\hat{\theta}_M = \sqrt{\frac{2n}{\sum_{i=1}^n X_i^2}}.$$

除外，还可以由$\mathbb{E}[|X|] = 1/\theta$得到另一种矩估计。

最大似然估计

最大似然估计法是求估计的另一种方法。它最早由高斯(C.F.Gauss)提出，后来被费歇(R. A. Fisher)完善。最大似然估计这一名称也是费歇给的。这是一个目前仍得到广泛应用的方法。它是建立在最大似然原理基础上的一个统计方法。

例：设有外形完全相同的两个箱子，甲箱中有99个白球和1个黑球，乙箱中有99个黑球和1个白球，今随机地抽取一箱并从中随机抽取一球，结果取得白球，问这球是从哪个箱子中取出？

最大似然原理：最先出现的是概率最大的

最大似然估计

似然函数： 样本$(X_1,...,X_n)$的联合分布（密度）函数

$$L(x_1,...,x_n;\theta)=L(\theta)=\begin{cases}\prod_{i=1}^n P(X_i=x_i;\theta), & \text{离散型}\\ \prod_{i=1}^n f(x_i;\theta), & \text{连续型}.\end{cases}$$

给定样本观测值$(x_1,...,x_n)$，记$L(x_1,...,x_n;\theta)$的最大值点为$\theta=T(x_1,...,x_n)$. 则θ的最大似然估计量(MLE, maximum likelihood estimator)为

$$\hat{\theta}_L=T(X_1,...,X_n).$$

最大似然估计的一般步骤

第一步：写出似然函数$L(x_1, \dots, x_n; \theta)$

第二步：若似然函数L是θ的可微函数，则最大值必然满足似然方程

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta} = 0$$

解出θ, 并验证其是否是极大值：

$$\frac{\mathrm{d}^2 L}{\mathrm{d}\theta^2} < 0.$$

注1：为方便求导，一般求对数似然函数求极大值点

$$\ln L(x_1, \dots, x_n; \theta) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \ln P(X_i = x_i; \theta), & \text{离散型} \\ \sum_{i=1}^{n} \ln f(x_i; \theta), & \text{连续型}. \end{cases}$$

注2：若有多个参数$\theta_1, \dots, \theta_m$，对每个变量求偏导，联立$m$个方程求解。

例1：0-1离散型

例：设总体$X \sim B(1,p)$, 从中抽取样本$X_1,...,X_n$的观测值为$x_1,...,x_n$. 求参数p的最大似然估计。

解: 似然函数为

$$L(x_1,...,x_n;p) = \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} = p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

令$y = \sum_{i=1}^{n} x_i$, 对数似然函数为:

$$\ln L = y \ln p + (n-y)\ln(1-p).$$

对数似然方程为:

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}p} = y/p - (n-y)/(1-p) = 0.$$

解得$p = y/n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. 因为$\frac{\mathrm{d}^2 \ln L}{\mathrm{d}p^2} < 0$, 所以$p = y/n$是极大值。$\hat{p}_L = \bar{X}$.

例2：正态分布

例：设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，从中抽取样本$X_1, \dots, X_n$的观测值为$x_1, \dots, x_n$．求参数μ, σ^2的最大似然估计。

解: 似然函数为

$$L(x_1, \dots, x_n; \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x_i-\mu)^2/(2\sigma^2)}$$

令$\theta_1 = \mu, \theta_2 = \sigma^2$, 对数似然函数为：

$$\ln L = (n/2)\ln(2\pi) - (n/2)\ln\theta_2 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)^2}{2\theta_2}$$

对数似然方程组为：

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)}{\theta_2} = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \theta_2} = -\frac{n}{2\theta_2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2}{2\theta_2^2} = 0 \end{cases}$$

解得$\hat{\mu}_L = \bar{X}$, $\hat{\sigma}_L^2 = S_n^2$. (可以验证二阶导函数非正定，即取得极大值。)

例3

例：设总体$X \sim U[a,b]$, 从中抽取样本$X_1,\ldots,X_n$的观测值为$x_1,\ldots,x_n$. 求参数a,b的最大似然估计。

解: 似然函数为

$$L(x_1,\ldots,x_n;a,b)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{b-a}\mathbf{1}\{a\le x_i\le b\}=\frac{1}{(b-a)^n}\prod_{i=1}^{n}\mathbf{1}\{a\le x_i\le b\}$$

注意到L关于a,b不可微。容易观察到，

当$a=\min_{i=1,\ldots,n}\{x_i\}$, $b=\max_{i=1,\ldots,n}\{x_i\}$时$L$取得最大值。故

$$\hat{a}_L=X_{(1)},\ \hat{b}_L=X_{(n)}.$$

关于最大似然估计的一些说明

- 最大似然估计的不变性：如果$\hat{\theta}$是θ的最大似然估计，则对任一函数$g(\theta)$，其最大似然估计为$g(\hat{\theta})$.
- 当分布中有多余的参数或者数据为截尾或缺失时，似然函数的求极大值比较困难。针对这种问题，文献

  Dempster, A.P.; Laird, N.M.; Rubin, D.B. (1977). "Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm". **Journal of the Royal Statistical Society, Series B**. 39 (1): 1–38. (cited by 53600, 2018/5/16)

  提出了一种有效的Expectation–Maximization (EM)算法。

常见分布的矩估计与最大似然估计的对比

分布名称	记号	期望	方差	矩估计	极大似然
0-1分布	$B(1,p)$	p	pq	$\hat{p}_M = \bar{X}$	$\hat{p}_L = \bar{X}$
泊松分布	$Pois(\lambda)$	λ	λ	$\hat{\lambda}_M = \bar{X}$	$\hat{\lambda}_L = \bar{X}$
几何分布	$Geo(p)$	$1/p$	q/p^2	$\hat{p}_M = 1/\bar{X}$	$\hat{p}_L = 1/\bar{X}$
均匀分布	$U[a,b]$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$	$\hat{a}_M = \bar{X} - \sqrt{3}S_n$ $\hat{b}_M = \bar{X} + \sqrt{3}S_n$	$\hat{a}_L = X_{(1)}$ $\hat{b}_L = X_{(n)}$
指数分布	$Exp(\lambda)$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$	$\hat{\lambda}_M = 1/\bar{X}$	$\hat{\lambda}_L = 1/\bar{X}$
正态分布	$N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2	$\hat{\mu}_M = \bar{X}$ $\hat{\sigma}^2_M = S_n^2$	$\hat{\mu}_L = \bar{X}$ $\hat{\sigma}^2_L = S_n^2$

练习：计算上述前六种分布参数的矩估计与最大似然估计。

顺序统计量估计

总体是连续型随机变量且分布密度对称时，总体中位数就是均值。此时可用样本中位数估计总体均值μ，用样本极差估计总体标准差σ, 即

$$\begin{cases} \hat{\mu} & = \tilde{X} \\ \hat{\sigma} & = X_{(n)} - X_{(1)}. \end{cases}$$

三种点估计方法的比较

- 矩估计法（也称数字特征法）
  直观意义比较明显，但要求总体k阶矩存在。
- 极大似然估计法
  具有一些理论上的优点，但要求似然函数可微。
- 顺序统计量法
  使用起来方便，无需多大计算，但准确度不高。

目录

估计量优劣性的评价

定义： 设总体$X \sim F(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$, 统计量$T(X_1,...,X_n)$为$g(\theta)$的估计量。

- **无偏估计量：** $\mathbb{E}[T(X_1,...,X_n)] = g(\theta)$
- **渐近无偏估计量：** $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[T(X_1,...,X_n)] = g(\theta)$

注： 无偏性意味着：虽然估计量T由于随机可能偏离真值$g(\theta)$, 但取其平均值（期望）却等于$g(\theta)$. 即没有系统偏差。

例1

例： 样本均值是总体的均值的无偏估计；样本方差是总体方差的渐近无偏估计；修正样本方差是总体方差的无偏估计。

解：

$$\mathbb{E}[\bar{X}] = \mathbb{E}[(X_1 + \cdots + X_n)/n] = \mathbb{E}[X]$$

$$\mathbb{E}[S_n^2] = \frac{n-1}{n}\mathrm{Var}[X] \to \mathrm{Var}[X]$$

$$\mathbb{E}[S_n^{*2}] = \mathrm{Var}[X]$$

例2

例： 设总体X的期望μ方差为σ^2, $X_1, \ldots, X_n$为其样本，证明下列估计量

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1} C_i X_i$$

为μ的无偏估计的充要条件是$\sum_{i=1}^n C_i = 1$. 在满足该条件前提下，C_i取何值时，$\hat{\mu}$的方差最小。

解:

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}] = \mu \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n C_i = 1$$

$$\mathrm{Var}[\hat{\mu}] = \sigma^2 \sum_{i=1}^n C_i^2 \geq \sigma^2 \frac{(C_1 + \cdots + C_n)^2}{n} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

而且唯一的最小值在$C_i = 1/n, i = 1, \ldots, n$处取得。

一致最小方差无偏估计量

从上一个例子中可以看出，无偏估计量不唯一。由于方差是度量分布的离散程度，一个好的估计量不仅应该是待估参数的无偏估计，而且应该有尽可能小的方差。

定义1：如果$T_1(X_1, \ldots, X_n)$和$T_2(X_1, \ldots, X_n)$均为$g(\theta)$的无偏估计，如果

$$\mathrm{Var}[T_1] \le \mathrm{Var}[T_2],$$

则称T_1比T_2更有效。

注：对于上一个例子，样本均值$\bar{X}$比其他的估计量更有效。

定义2：如果$T_0(X_1, \ldots, X_n)$为$g(\theta)$的无偏估计，如果对于$g(\theta)$的任意无偏估计量$T(X_1, \ldots, X_n)$都有

$$\mathrm{Var}[T_0] \le \mathrm{Var}[T], \ \forall \theta \in \Theta$$

则称T_0为$g(\theta)$的一致最小方差无偏估计量。

相合估计量

我们不仅希望一个估计是无偏的，且具有较小的方差，有时还希望当子样容量无限增大时，即观察次数无限增多时，估计能在某种意义下越来越接近被估计的参数的真实值，这就是所谓一致性的要求。

定义： 设总体$X \sim F(x;\theta)$，$\theta \in \Theta$，统计量$T(X_1,\ldots,X_n)$为$g(\theta)$的估计量。如果$T(X_1,\ldots,X_n) \xrightarrow{P} g(\theta)$，则称$T(X_1,\ldots,X_n)$为$g(\theta)$的**相合估计量（一致估计量）**，即对于任意$\epsilon > 0$有，

$$\lim_{n\to\infty} P(|T(X_1,\ldots,X_n) - g(\theta)| \geq \epsilon) = 0,$$

或者等价地

$$\lim_{n\to\infty} P(|T(X_1,\ldots,X_n) - g(\theta)| < \epsilon) = 1.$$

例

例： 设总体X的期望μ方差为σ^2, $X_1, \ldots, X_n$为其样本，证明

- 样本均值$\bar{X}$是μ的相合估计量；
- 样本k阶原点矩M_k是总体k阶原点矩$\mathbb{E}[X^k]$的相合估计量；
- 样本方差S_n^2和修正样本方差S_n^{2*}都是σ^2的相合估计量。

证明： 由辛钦大数定律知，$\bar{X} \xrightarrow{\mathrm{P}} \mu$, $M_k \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathbb{E}[X^k]$.

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \sigma^2$$

同理，

$$S_n^{2*} = \frac{n-1}{n} S_n^2 \xrightarrow{\mathrm{P}} \sigma^2$$

注： 这里用到依概率收敛的性质：假设$X_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X$，$Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} Y$.
则$X_n + Y_n \xrightarrow{\mathrm{P}} X + Y$. 如果$g$连续，则$g(X_n) \xrightarrow{\mathrm{P}} g(X)$, $g(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathrm{P}} g(X, Y)$.

相合估计量的充分条件

定理： 设总体$X \sim F(x;\theta)$, $\theta \in \Theta$, 统计量$T(X_1,\dots,X_n)$为$g(\theta)$的估计量。如果

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[T(X_1,\dots,X_n)] = g(\theta), \quad \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}[T(X_1,\dots,X_n)] = 0,$$

则$T(X_1,\dots,X_n)$为$g(\theta)$的相合估计量。

证明： 令$T_n = T(X_1,\dots,X_n)$. 注意到

$$\{|T_n - g(\theta)| \geq \epsilon\} \subset \{|T_n - \mathbb{E}[T_n]| \geq \epsilon/2\} \cup \{|\mathbb{E}[T_n] - g(\theta)| \geq \epsilon/2\}.$$

对任意$\epsilon > 0$, 存在N, 当$n \geq N$时，$|\mathbb{E}[T_n] - g(\theta)| < \epsilon/2$. 此时

$$\{|T_n - g(\theta)| \geq \epsilon\} \subset \{|T_n - \mathbb{E}[T_n]| \geq \epsilon/2\}$$

所以，

$$P(|T_n - g(\theta)| \geq \epsilon) \leq P(|T_n - \mathbb{E}[T_n]| \geq \epsilon/2) \leq \frac{4\mathrm{Var}[T_n]}{\epsilon^2} \to 0.$$

目录

参数的区间估计

定义：设总体$X \sim F(x;\theta)$，$\theta \in \Theta$. 如果统计量$T_1(X_1,\ldots,X_n)$, $T_2(X_1,\ldots,X_n)$使得对给定的$\alpha \in (0,1)$有

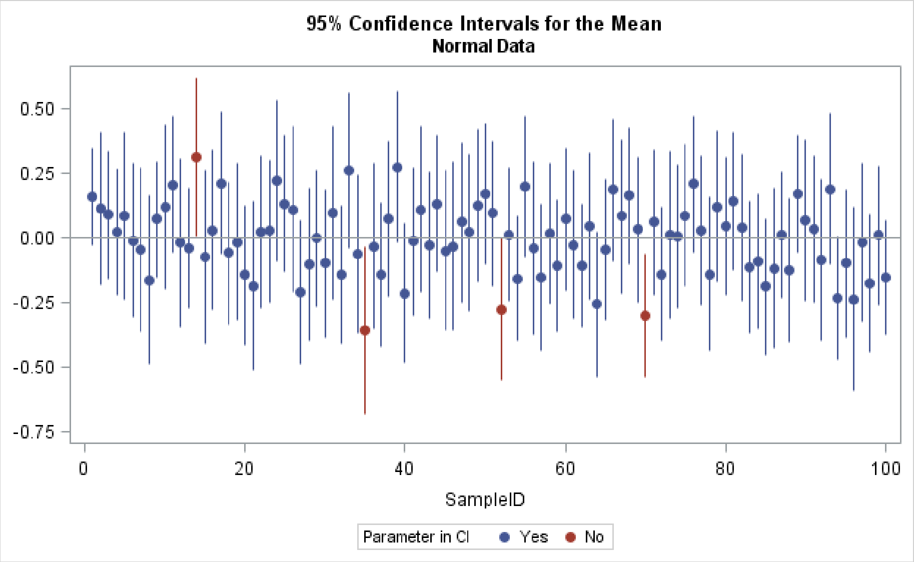
$$P(T_1 \le g(\theta) \le T_2) = 1-\alpha,$$

则称随机区间$[T_1, T_2]$为参数$g(\theta)$的置信度（置信概率）为$1-\alpha$的置信区间，T_1, T_2分别称为置信下界和置信上界。

注1：随机区间$[T_1, T_2]$包含$g(\theta)$的概率为$1-\alpha$. 在重复取样下，将得到许多不同的区间$[T_1, T_2]$，根据伯努利大数定理，这些区间中大约有$100(1-\alpha)\%$的区间包含未知参数。

注2：但对于一次抽样所得到的一个区间，决不能说“不等式$T_1 \le g(\theta) \le T_2$成立的概率为$1-\alpha$”。因为这时$T_1, T_2$是两个确定的数，从而只有两种可能，要么这个区间包含$g(\theta)$，要么这个区间不包含$g(\theta)$.

置信区间示意图


95% Confidence Intervals for the Mean
Normal Data
0.50
0.25
0.00
-0.25
-0.50
-0.75
0
20
40
60
80
100
SampleID
Parameter in CI
Yes
No

单个正态总体的期望的区间估计

(1) σ已知，求μ的置信区间

由抽样定理知，$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$. 因此

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \le u_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

即

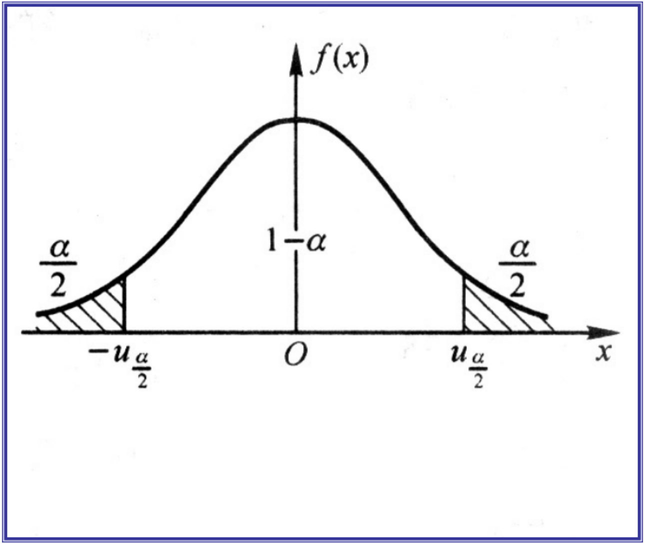
$$P\left(\bar{X} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{X} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

所以，区间

$$\left[\bar{X} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{X} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

为μ的置信度为$1 - \alpha$的置信区间。

示意图


$f(x)$
$\frac{\alpha}{2}$
$1-\alpha$
$\frac{\alpha}{2}$
$-u_{\frac{\alpha}{2}}$
O
$u_{\frac{\alpha}{2}}$
x

例

例： 已知OPPO手机充电五分钟通话时间$X \sim N(\mu, 0.06)$. 随机抽取6部手机测试通话时间（单位：小时）为

$$1.6,\ 2.1,\ 1.9,\ 1.8,\ 2.2,\ 2.1,$$

求μ的置信度为95%的置信区间。

解： $\bar{X} = (1.6 + \cdots + 2.1)/6 = 1.95$. 已知$1 - \alpha = 0.95$. 查表知，$u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.96$, 置信区间为

$$\left[1.95 - 1.96\frac{\sqrt{0.06}}{\sqrt{6}},\ 1.95 + 1.96\frac{\sqrt{0.06}}{\sqrt{6}}\right] = [1.754,\ 2.146].$$

单个正态总体的期望的区间估计

(2) σ未知，求μ的置信区间

由抽样定理知，

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S_n/\sqrt{n-1}}\sim t(n-1)$$

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{S_n/\sqrt{n-1}}\right|\leq t_{1-\alpha/2}\right)=1-\alpha$$

即

$$P\left(\bar{X}-t_{1-\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n-1}}\leq\mu\leq\bar{X}+t_{1-\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n-1}}\right)=1-\alpha$$

所以，区间

$$\left[\bar{X}-t_{1-\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n-1}},\ \bar{X}+t_{1-\alpha/2}\frac{S_n}{\sqrt{n-1}}\right]$$

为μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间。

例

例： 已知OPPO手机充电五分钟通话时间$X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 随机抽取6部手机测试通话时间（单位：小时）为

$$1.6,\ 2.1,\ 1.9,\ 1.8,\ 2.2,\ 2.1,$$

求μ的置信度为95%的置信区间。

解： $\bar{X} = (1.6 + \cdots + 2.1)/6 = 1.95$. $S_n = 0.206$. 已知$1 - \alpha = 0.95$. 查表知，$t_{1-\alpha/2} = t_{0.975} = 2.5706$, 置信区间为

$$\left[1.95 - 2.5706\frac{0.206}{\sqrt{6-1}},\ 1.95 + 2.5706\frac{0.206}{\sqrt{6-1}}\right] = [1.713,\ 2.187].$$

一些思考...

- 分析这两种的结果会发现，由同一组样本观察值，按同样的置信概率，对μ计算出的置信区间因为σ的是否已知会不一样。这因为：当σ为已知时，我们掌握的信息多一些，在其他条件相同的情况下，对μ的估计精度要高一些，即表现为μ的置信区间长度要小些。反之，当σ为未知时，对μ的估计精度要低一些，即表现为μ的置信区间长度在大一些。
- 还可以发现，当样本量n不断增大时，两种情况下的置信区间会慢慢接近。也就意味着大样本信息可以弥补σ的缺失带来的偏差（大数定律）。

单个正态总体的方差的区间估计

(1) μ已知，求σ^2的置信区间

构造统计量

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n)$$

$$P\left(\chi^2_{\alpha/2}(n)\le\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}\le\chi^2_{1-\alpha/2}(n)\right)=1-\alpha$$

即

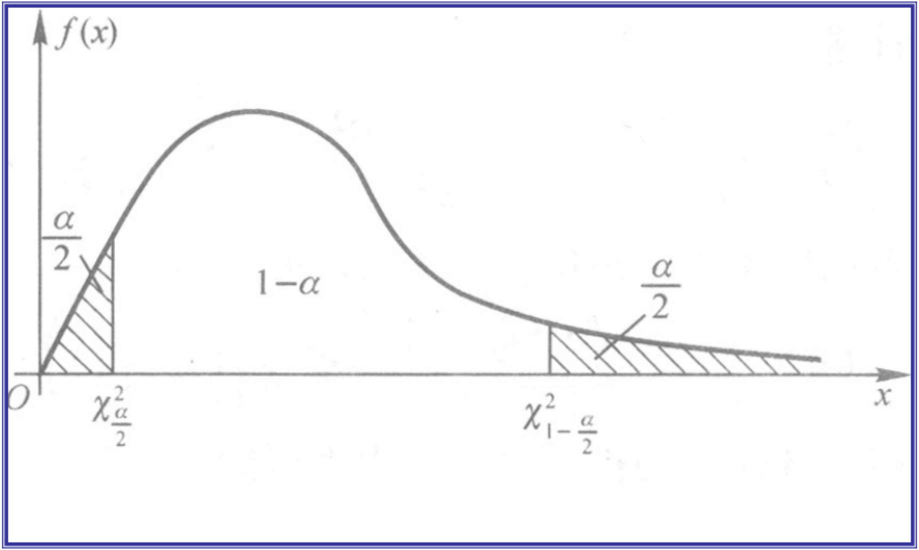
$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}\le\sigma^2\le\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right)=1-\alpha$$

所以，区间

$$\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)},\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)}\right]$$

为σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间。

示意图


$f(x)$
$\frac{\alpha}{2}$
$1-\alpha$
$\frac{\alpha}{2}$
O
$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$
$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$
x

例

例：已知OPPO手机充电五分钟通话时间$X \sim N(2, \sigma^2)$. 随机抽取6部手机测试通话时间（单位：小时）为

$$1.6,\ 2.1,\ 1.9,\ 1.8,\ 2.2,\ 2.1,$$

求σ^2的置信度为95%的置信区间。

解：$\sum_{i=1}^{n}(X_i-2)^2 = 0.27$. 已知$1-\alpha = 0.95$. 查表知，$\chi^2_{\alpha/2}(6) = \chi^2_{0.025}(6) = 1.24$, $\chi^2_{1-\alpha/2}(6) = \chi^2_{0.975}(6) = 14.45$, 置信区间为

$$\left[\frac{0.27}{14.45},\ \frac{0.27}{1.24}\right] = [0.019,\ 0.218].$$

单个正态总体的方差的区间估计

(2) μ未知，求σ^2的置信区间

构造统计量

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}=\frac{nS_n^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$$

$$P\left(\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\le\frac{nS_n^2}{\sigma^2}\le\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\right)=1-\alpha$$

即

$$P\left(\frac{nS_n^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\le\sigma^2\le\frac{nS_n^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right)=1-\alpha$$

所以，区间

$$\left[\frac{nS_n^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)},\ \frac{nS_n^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right]$$

为σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间。

例

例：已知OPPO手机充电五分钟通话时间$X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 随机抽取6部手机测试通话时间（单位：小时）为

$$1.6,\ 2.1,\ 1.9,\ 1.8,\ 2.2,\ 2.1,$$

求σ^2的置信度为95%的置信区间。

解：$S_n^2 = 0.042$. 已知$1-\alpha = 0.95$. 查表知，$\chi^2_{\alpha/2}(5) = \chi^2_{0.025}(5) = 0.83$, $\chi^2_{1-\alpha/2}(5) = \chi^2_{0.975}(5) = 12.83$, 置信区间为

$$\left[\frac{6\times 0.042}{12.83},\ \frac{6\times 0.042}{0.83}\right] = [0.020,\ 0.304].$$

两个正态总体期望之差的区间估计

设总体$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $(X_1, \ldots, X_m)$为其样本，样本均值为$\bar{X}$, 样本方差为S_{1m}^2;
另有与X独立的总体$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $(Y_1, \ldots, Y_n)$为其样本，样本均值为$\bar{Y}$, 样本方差为S_{2n}^2.

(1) σ_1^2, σ_2^2已知，求$\mu_1 - \mu_2$的置信区间

$$U = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}} \sim N(0, 1).$$

$$P\left(\bar{X} - \bar{Y} - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \le \mu_1 - \mu_2 \le \bar{X} - \bar{Y} + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}\right) = 1-\alpha$$

所以，区间

$$\left[(\bar{X} - \bar{Y}) - u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}, \ (\bar{X} - \bar{Y}) + u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}\right]$$

为$\mu_1 - \mu_2$的置信度为$1-\alpha$的置信区间。

两个正态总体期望之差的区间估计

(2) σ_1^2, σ_2^2未知（已知$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$），求$\mu_1-\mu_2$的置信区间

$$T=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{1/m+1/n}}\sim t(m+n-2).$$

$$P\left(\left|\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)\right|\le t_{1-\alpha/2}(m+n-2)S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right)=1-\alpha$$

令$t_{1-\alpha/2}(m+n-2)=t_{1-\alpha/2}$，区间

$$\left[(\bar{X}-\bar{Y})-t_{1-\alpha/2}S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}},\ (\bar{X}-\bar{Y})+t_{1-\alpha/2}S_w\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\right]$$

为$\mu_1-\mu_2$的置信度为$1-\alpha$的置信区间，其中

$$S_w=\sqrt{(mS_{1m}^2+nS_{2n}^2)/(m+n-2)}.$$

例

例： 已知OPPO手机充电五分钟通话时间$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, VIVO手机充电五分钟通话时间$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. 随机抽取6部手机测试通话时间（单位：小时）为

OPPO	1.6	2.1	1.9	1.8	2.2	2.1
VIVO	1.8	2.2	1.5	1.4	2.0	1.7

求$\mu_1 - \mu_2$的置信度为95%的置信区间:

- 已知$\sigma_1^2 = 0.06$, $\sigma_2^2 = 0.08$.
- 已知$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

解： $m = n = 6$, $\bar{X} = 1.95$, $\bar{Y} = 1.77$, $S_{1m}^2 = 0.042$, $S_{2n}^2 = 0.064$, $S_w = 0.252$. 已知$1 - \alpha = 0.95$. 查表知，$u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.96$, $t_{1-\alpha/2} = t_{0.975} = 2.5706$. 第一种情况置信区间为$[-0.12, 0.48]$. 第二种情况置信区间为$[-1.94, 0.554]$.

两个正态总体方差之比的区间估计

(1) μ_1, μ_2已知，求σ_1^2/σ_2^2的置信区间

$$T_1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(X_i - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(m)$$

$$T_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(Y_i - \mu_2)^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n)$$

$$\frac{T_1/m}{T_2/n} = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \mu_1)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mu_2)^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m, n)$$

$$P\left(F_{\alpha/2}(m, n) \le \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \mu_1)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mu_2)^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \le F_{1-\alpha/2}(m, n)\right) = 1 - \alpha$$

所以，σ_1^2/σ_2^2的置信度为$1 - \alpha$的置信区间为

$$\left[\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(m, n)} \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \mu_1)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mu_2)^2}, \ \frac{1}{F_{\alpha/2}(m, n)} \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \mu_1)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mu_2)^2}\right]$$

两个正态总体方差之比的区间估计

(2) μ_1, μ_2未知，求σ_1^2/σ_2^2的置信区间

$$T_1 = \frac{(m-1)S_{1m}^{*2}}{\sigma_1^2} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(m-1)$$

$$T_2 = \frac{(n-1)S_{2n}^{*2}}{\sigma_2^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(Y_i - \bar{Y})^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n-1)$$

$$\frac{T_1/(m-1)}{T_2/(n-1)} = \frac{S_{1m}^{*2}}{S_{2n}^{*2}} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(m-1, n-1)$$

$$P\left(F_{\alpha/2}(m-1, n-1) \leq \frac{S_{1m}^{*2}}{S_{2n}^{*2}} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \leq F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1)\right) = 1 - \alpha$$

所以，σ_1^2/σ_2^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left[\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1)} \frac{S_{1m}^{*2}}{S_{2n}^{*2}}, \frac{1}{F_{\alpha/2}(m-1, n-1)} \frac{S_{1m}^{*2}}{S_{2n}^{*2}}\right]$$

例

例： 已知OPPO手机充电五分钟通话时间$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, VIVO手机充电五分钟通话时间$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. 随机抽取6部手机测试通话时间（单位：小时）为

OPPO	1.6	2.1	1.9	1.8	2.2	2.1
VIVO	1.8	2.2	1.5	1.4	2.0	1.7

求σ_1^2/σ_2^2的置信度为90%的置信区间:

- 已知$\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 1.8$.
- μ_1, μ_2未知.

解： $m = n = 6$, $\sum_{i=1}^m (X_i - 2)^2 = 0.27$, $\sum_{i=1}^n (Y_i - 1.8)^2 = 0.46$, $S_{1m}^2 = 0.042, S_{2n}^2 = 0.064$. 已知$1 - \alpha = 0.9$. 查表知，$F_{1-\alpha/2}(6,6) = F_{0.95}(6,6) = 4.28$, $F_{0.05}(6,6) = 1/F_{0.95}(6,6) = 0.23$. $F_{0.95}(5,5) = 5.05$, $F_{0.05}(5,5) = 1/F_{0.95}(5,5) = 0.20$. 第一种情况置信区间为[0.135, 2.512]. 第二种情况置信区间为[0.131, 3.314].

单个正态总体参数的联合区间估计

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq \ell, k_1 \leq \frac{nS_n^2}{\sigma^2} \leq k_2\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq \ell\right) P\left(k_1 \leq \frac{nS_n^2}{\sigma^2} \leq k_2\right) = 1-\alpha$$

令

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq \ell\right) = P\left(k_1 \leq \frac{nS_n^2}{\sigma^2} \leq k_2\right) = \sqrt{1-\alpha}$$

取$\ell = u_{(1+\sqrt{1-\alpha})/2}$，$k_1 = \chi^2_{(1-\sqrt{1-\alpha})/2}(n-1)$，$k_2 = \chi^2_{(1+\sqrt{1-\alpha})/2}(n-1)$. 联合区间为

$$\left\{(\mu, \sigma^2) : (\bar{X}-\mu)^2 \leq \frac{\ell^2\sigma^2}{n}, \frac{nSn^2}{k_2} \leq \sigma^2 \leq \frac{nSn^2}{k_1}\right\}$$

非正态总体参数的区间估计

中心极限定理告诉我们

$$\frac{\bar{X}-\mathbb{E}[X]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]/n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0,1)$$

所以当n充分大的时候,

$$\frac{\bar{X}-\mathbb{E}[X]}{\sqrt{S_n^2/n}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mathbb{E}[X])}{S_n} \sim N(0,1)$$

所以期望$\mu=\mathbb{E}[X]$的置信度为$1-\alpha$的区间估计可以近似为

$$[\bar{X}-u_{1-\alpha/2}S_n/\sqrt{n}, \bar{X}+u_{1-\alpha/2}S_n/\sqrt{n}].$$

作业

第七章习题：6, 9, 13, 17, 18, 19, 20, 21

6月13日（周三）交！