概率论与数理统计

何志坚

华南理工大学数学学院

hezhijian@scut.edu.cn

教师简介

姓　　名	何志坚
职　　称	数学学院副教授
研究兴趣	统计模拟与计算、随机算法、金融工程
联系方式	hezhijian@scut.eud.cn (by email only!)
办公地址	五山校区四号楼4301
个人主页	www.hezhijian.com

教材

主要教材：

- 何春雄，龙卫江，朱锋峰。概率论与数理统计。高等教育出版社。2012.

辅助教材：

- 茆诗松，程依明，濮晓龙。概率论与数理统计教程(第二版)。高等教育出版社。2011.
- Jay L. Devore. Probability and Statistics (第5版)(影印版), 高等教育出版社, 2004.
- 薛毅，陈立萍。R语言实用教程。清华大学出版社。2014.

教学安排

上课时间：1-16周每周五上午，9-16周每周三下午（48学时）

上课地点：大学城校区A1-308

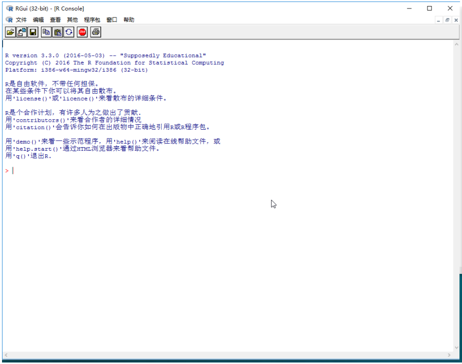
公共邮箱：myslideshare@163.com（密码：sharemyslide）

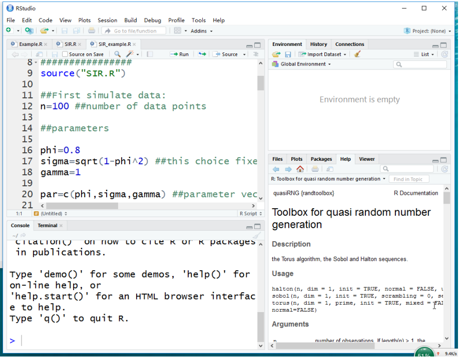
第一章	随机事件与概率	1-5周（10学时）
第二章	一维随机变量及其分布	6-8周（6学时）
第三章	随机向量及其分布	9-10周（6学时）
第四章	随机变量的数字特征	10-11周（6学时）
第五章	大数定律和中心极限定理	12周（4学时）
第六章	数理统计的基本概念	13周（4学时）
第七章	参数估计	14-15周（6学时）
第八章	假设检验	15-16周（4学时）
总复习	总复习	16周（2学时）

R软件（自学）

R软件下载地址：https://www.r-project.org/

RStudio编辑器：https://www.rstudio.com/





考核方式

$$\text{最终成绩} = \text{平时成绩}(30\%) + \text{期末成绩}(70\%)$$

- 平时成绩：作业+考勤
- 期末考试：闭卷、百分制、统一出卷和改卷
- 学霸模式：如果期末考满分，则最终成绩为满分！

几点说明

- 遵守课堂纪律，请参考《学生手册》。
- 考试结束后不接受分数查询，也不接受任何求情。
- 质疑分数者可按有关规定查阅试卷。
- 欢迎找我讨论问题（课间、办公室或者邮件），但希望你的问题是“经过思考的”。在提问前，我鼓励大家事先通过网上资源或者与同学交流来寻找答案。这样可提高自学能力。
- 欢迎对本课程提宝贵意见，发送至hezhijian@scut.edu.cn

学这门课程有什么用?

- 可以凑学分，毕业?
- 可以学到有用的知识?
- 用严格的数学方法研究随机现象！

案例

- 用1部新手机充电五分钟测试，观测通话时间为1.5h
- 用50部新手机充电五分钟测试，观测50次通话时间为

$$1.7 \quad 1.8 \quad 1.3 \quad 2.1 \quad 2.3 \quad \cdots \quad 2.5$$

- 每次测试通话时间是随机的
- 如何刻画这样的规律？概率论：概率分布
- 如何基于这些实验数据做出判断？统计学：假设检验

第一章：随机事件与概率

目录

随机试验、随机现象和随机事件

- 随机试验特点：可重复性、不可预知性
- 随机试验观测到的现象为随机现象
  - 概率论与数理统计研究的对象
  - 概率论研究随机现象的统计规律
  - 数理统计研究随机现象的数据收集与分析
- 随机试验的某些可能结果组成的集合称为随机事件，简称事件

序号	随机试验	事件A	事件B
(1)	观测一部手机的通话时间	通话时间等于2h	通话时间大于2h
(2)	观测一颗骰(tóu)子的点数	点数为奇数	点数为偶数
(3)	某新型药的治疗效果	治疗有效	治疗无效

样本空间与随机事件

样本空间：随机试验所有可能结果的集合称为样本空间。常用Ω表示。
样本点：样本空间的元素称为样本点，常用ω表示。

序号	随机试验	样本空间
(1)	观测一部手机的通话时间	$\Omega = [0, \infty)$
(2)	观测一颗骰(tóu)子的点数	$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
(3)	某新型药的治疗效果	$\Omega = \{$治疗有效, 治疗无效$\}$

有限样本空间：试验(2)和试验(3)
无限样本空间：试验(1)
随机事件是某些样本点组成的集合。

随机事件

在一次试验中，当试验结果属于事件A时，称这次试验中事件A发生。否则称事件A不发生。

必然事件	$A = \Omega$
不可能事件	$A = \emptyset$
基本事件/简单事件	$A = \{\omega\}, \omega \in \Omega$
复合事件	$A \subseteq \Omega$

注意：基本事件是相对的，不是绝对的！

例

在一批含有20件正品，5件次品的产品中随机地抽取2件，可能结果如下：

A = {2件全是正品}

B = {只有1件是正品}

C = {2件全是次品}

- 在不计次序的假定下，A、B、C是基本事件。
- 如果考虑次序，B不再是基本事件，它可分解为B_1和B_2两个基本事件。

  B_1 = {第1次抽到正品，第2次是次品}

  B_2 = {第1次抽到次品，第2次是正品}

事件的关系

- 事件的包含：如果事件A发生，事件B一定发生。则称事件B包含事件A。记为$A \subset B$。显然$A \subset \Omega$。
- 事件的相等：$A = B \Leftrightarrow A \subset B$且$B \subset A$
- 事件的互斥：$A \cap B = \varnothing$
- 事件的对立：$A \cap B = \varnothing$且$A \cup B = \Omega$，记$A = \bar{B}$或者$B = \bar{A}$

考虑投骰子的例子：$A =${出现偶数点}，$B =${出现奇数点}，$C =${出现点数1和3}，$D =${出现点数5和6}，$E =${出现点数大于4}

- 事件A和B的关系?
- 事件B和C的关系?
- 事件C和D的关系?
- 事件D和E的关系?

事件的运算：交、并、差

- 事件的交(或积)：$A \cap B$或者AB，事件A和B同时发生
- 事件的并(或和)：$A \cup B$，事件A和B至少一个发生。若A和B互斥，则$A \cup B$可表示为$A + B$。
- 事件的差：$A \backslash B$，或表示为$A - B$，事件A发生但事件B不发生
- 多个事件的交$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$，多个事件的并$\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

▶韦恩图

例

设A、B、C为任意三个事件，写出下列事件的表达式：

- AC都发生B不发生。$AC\backslash B = A\bar{B}C$
- 恰有二个事件发生。$AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$
- 至少有一个事件发生。$A \cup B \cup C$
- 三个事件同时发生。ABC
- 三个事件都不发生。$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
- 三个事件不都发生。$\overline{ABC}$

事件的运算法则

对于任意三个事件A,B,C，满足下列运算：

- 交换律：$AB = BA$, $A \cup B = B \cup A$
- 结合律：$(AB)C = A(BC)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- 分配律：$A(B \cup C) = AB \cup AC$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- 对偶律：$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

推广到多个事件：

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i$$

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \bar{A}_i$$

目录

概率的统计定义

频率的定义：设事件A在n次试验中出现了r次，则比值r/n称为事件A在n次试验中出现的频率。

概率的统计定义：在同一组条件下所作的大量重复试验中，事件A出现的频率总是在区间$[0,1]$上的一个确定的常数p附近摆动，并且稳定于p（频率的稳定值），则p称为事件A的概率，记作$P(A)$。

注意：P(这里面只能为事件！)。如，P(骰子的点数$) = 1/6$是错误的。

古典概率

古典概型的随机试验要求满足下两条件:

- 有限性。只有有限多个不同的基本事件。
- 等可能性。每个基本事件出现的可能性相等。

在古典概型中，如果基本事件（样本点）的总数为n，事件A所包含的基本事件（样本点）个数为$r(r \leq n)$，则定义事件A的概率$P(A)$为r/n。即

$$P(A) = \frac{r}{n} = \frac{\text{A中包含的基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}}$$

简单例子：抛均匀的硬币、骰子

思考： 古典概型的取值范围?

例1：抽球类型

袋中有a个黄球，b个白球，从中接连任意取出k个球$(k \leq a+b)$，且每次取出的球**不再放回去**，求第k次取出的球是黄球的概率？

- 事件A={第k次取出的球是黄球}
- 基本事件?
- 是否是古典概型？有限性、等可能性?

解法一：考虑第1次到第k次的取球结果。

$$P(A) = \frac{C_a^1 A_{a+b-1}^{k-1}}{A_{a+b}^k} = \frac{a}{a+b}$$

解法二：只考虑第k次的取球结果。

$$P(A) = \frac{C_a^1}{C_{a+b}^1} = \frac{a}{a+b}$$

结论：抽签与顺序无关（如同有放回的情况）！基本事件是相对的！

例2：m个质点在n个格子中的分布问题

设有m个不同质点，每个质点都以概率$1/n$落入n个格子$(n \geq m)$的每一个之中，求下列事件的概率：

1. A: 指定m个格子中各有一个质点；
2. B: 任意m个格子中各有一个质点；
3. C: 指定的一个格子中恰有$k(k \leq m)$个质点。

解:

$$P(A) = \frac{m!}{n^m}$$

$$P(B) = \frac{C_n^m m!}{n^m} = \frac{A_n^m}{n^m}$$

$$P(C) = \frac{C_m^k (n-1)^{m-k}}{n^m}$$

例3：同一天生日问题

某班级有n个人，问至少有两个人的生日在同一天的概率为多大？（假设一年有365天）

解：

记$A=$\{n个人中至少有两个人的生日相同\}。$\bar{A}=$\{n个人中的生日全不相同\}，易知

$$P(\bar{A})=\frac{A_{365}^{n}}{365^{n}}=\frac{365!}{365^{n}(365-n)!}.$$

因此，

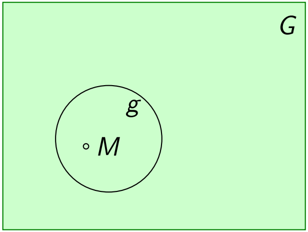
$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{365!}{365^{n}(365-n)!}.$$

注意：上述只是对$n\leq 365$成立。如果$n>365$，则显然$P(A)=1$.

概率的几何定义

平面上有可测的区域G和g，向G中随机投掷一点M，设M必落在G内。如M落在g内的概率只与g的面积成正比，而与g的位置和形状无关。这样的随机实验，称为几何概型。点M落入G内的部分区域g的概率为：

$$P = \frac{g\text{的面积}}{G\text{的面积}}$$



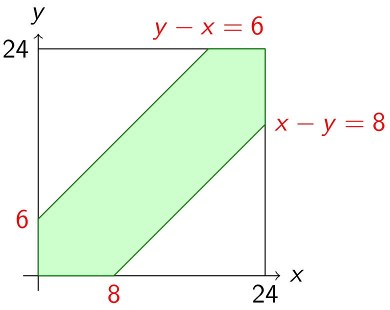
注意：随机投点是指M落入G内任一处均是等可能的。

思考： 几何概型的取值范围?

例1：会面问题

已知甲乙两船将在同一天的0点到24点之间随机地到达码头，该码头只有一个泊位。若甲先到达，需停靠6小时后才离开码头。若乙先到达，则要停靠8小时后才离开码头。问这两船中有船需等候泊位空出的概率?

解：设甲船到达码头的时刻是x，乙船到达码头的时刻是y，显然$0 \le x, y \le 24$。若这两船中有船需等候泊位空出，则$y - x < 6$且$x - y < 8$.



$$P(A) = \frac{24^2 - (16^2 + 18^2)/2}{24^2} \approx 0.4965$$

例2：蒲丰投针实验

蒲丰是几何概率的开创者，并以蒲丰投针问题闻名于世，发表在其1777年的论著《或然性算术试验》中。

由于通过他的投针试验法可以利用很多次随机投针试验算出π的近似值，所以特别引人瞩目，这也是最早的几何概率问题。并且蒲丰本人对这个实验给予证明。

1850年，瑞士数学家沃尔夫在苏黎世，用一根长36mm的针，平行线间距为45mm，投掷5000次，得$\pi \approx 3.1596$。1864年，英国人福克投掷了1100次，求得$\pi \approx 3.1419$。1901年，意大利人拉泽里尼投掷了3408次，得到了准确到6位小数的π值。

图：George-Louis Leclerc de Buffon (1707.9.7-1788.4.16)，法国数学家、自然科学家。

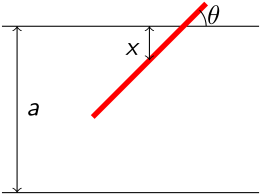
例2：蒲丰投针实验

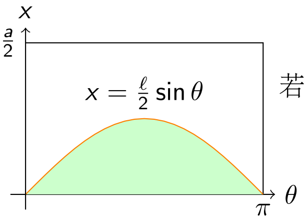
平面上画着一些平行线，它们之间的距离等于a,向此平面任投长度为$\ell(\ell < a)$的针，试求此针与任一平行线相交的概率。

解：设x表示针的中点到最近的一条平行线的距离，θ表示针与平行线的交角。显然$0 \le x \le a/2$, $0 \le \theta \le \pi$. 为使针与平行线相交，必须$x \le \frac{\ell}{2}\sin\theta$.

所求的概率为：

$$P = \frac{\frac{\ell}{2}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\frac{1}{2}\pi a} = \frac{2\ell}{\pi a}.$$





若取$\ell = a/2$，则

$$\pi = 1/P.$$

▶模拟动画

主观概率

统计界的贝叶斯学派认为：一个事件的概率是人们根据经验对该事件发生的可能性所给出的个人信念。

- 天气预报说“明天下雨的概率为90%”
- 医生说“手术成功可能性为90%”
- 我说“考试及格的可能性为99%”

注意区别“主观概率”与“主观臆造”。

概率的公理化定义

前面学了三种概率定义，各有其局限性。

- 统计概率：要求作大量重复试验。很难观测到稳定值
- 古典概率：试验结果要求有限、互不相容、等可能。不均匀的硬币
- 几何概率：落入区域G内任一点是等可能的。高手投飞镖

如何刻画更一般的情况？1900年数学家希尔伯特(Hilbert, 1862–1943)提出要建立概率的公理化定义来解决这个问题，即以最少的几条本质特征出发去刻画概率的概念。1933年苏联数学家柯尔莫戈夫(Kolmogorov, 1903–1987)首次提出了概率的公理化定义，这个定义既概括了历史上几种概率的共同特征，又避免了各自的局限性和含混之处，不管什么随机现象，只要满足该定义的三条公理，才能说它是概率。

概率的公理化定义

样本空间Ω，事件域$\mathcal{F}$，概率测度$P:\mathcal{F}\to[0,1]$。由三元组$(\Omega,\mathcal{F},P)$定义一个概率空间。

事件域$\mathcal{F}$是由样本空间的一些子集构成的集合，并满足以下条件:

- $\Omega\in\mathcal{F}$;
- 如果$A\in\mathcal{F}$, 则$\bar{A}\in\mathcal{F}$;
- 如果$A_n\in\mathcal{F}$, $n=1,\ldots,\infty$, 则$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{F}$.

试证明：$\varnothing\in\mathcal{F}$. 如果$A_n\in\mathcal{F}$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{F}$.

概率的公理化定义

样本空间Ω，事件域$\mathcal{F}$，概率测度$P:\mathcal{F}\to[0,1]$。由三元组$(\Omega,\mathcal{F},P)$定义一个概率空间。

概率测度$P(A)$度量事件$A\in\mathcal{F}$发生的概率，满足下面三个公理。

- 公理1(非负性)： $\forall A\in\mathcal{F},\ 0\le P(A)$;
- 公理2(规范性)： $P(\Omega)=1$;
- 公理3(可列可加性)： 对可列个两两互斥的事件$A_1,A_2,\ldots,A_n,\ldots$有，

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

思考：古典概率和几何概率是否符合该公理化定义?

概率的性质

1. $P(\varnothing)=0$
2. 如果A,B互斥，则$P(A+B)=P(A)+P(B)$.
3. 单调性：如果$A\subset B$,则$P(A)\leq P(B)$.
4. $P(\bar{A})=1-P(A)$
5. $P(A\backslash B)=P(A)-P(AB)$
6. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$
7. 上连续性：如果$A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\cdots$，则
$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\lim_{i\to\infty}P(A_i).$$
8. 下连续性：如果$A_1\subset A_2\subset\cdots\subset A_n\cdots$，则
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\lim_{i\to\infty}P(A_i).$$

推论一

半可加性：对任意两个时间A, B, 有

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B).$$

对任意n个事件$A_1, A_2, \ldots, A_n$, 有

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

推论二

证明下列命题:

1. 若A_1与A_2同时发生时A发生，则有$P(A) \geq P(A_1) + P(A_2) - 1$.
   证明：因为$A_1A_2 \subset A$，则$P(A) \geq P(A_1A_2)$. 又
$$\begin{aligned} P(A_1A_2) &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2) \\ &\geq P(A_1) + P(A_2) - 1. \end{aligned} \tag{1}$$
2. 若$A_1A_2A_3 \subset A$，则有$P(A) \geq P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - 2$.
   证明：由第一题结论得到$P(A) \geq P(A_1A_2) + P(A_3) - 1$. 再由(1)可得所需结果。

思考：若$\bigcap_{i=1}^{n} A_i \subset A$，则$P(A) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - n + 1$.

第一次作业

第一章习题：1.3, 1.4, 1.6, 1.12, 1.15, 1.18