Tarea 2

Miguel Torres Eric Giovanni

17 de octubre de 2018

1. Suponga que un experimento consiste en escoger un nmero al azar dentro del intervalo 0,1. Para cada resultado w del experimento se expresa a este nmero en su expansin decimal $w = 0.a_1a_2a_3...$ en donde $a_i \in 0, 1, ..., 9, i = 1, 2, ...$ Para cada una de las siguientes variables aleatorias determine si sta es discreta o continua y en cualquier caso el conjunto de valores que puede tomar:

a)$X(w) = a_1$

Es discreta y los valores qu puede tomar son $(,1, ,2, ..., ,9)$

b)$Y(w) = 0{,}0a_1a_2a_3...$

Es continua y los valores que puede tomar estn en el intervalo $(0, 0{,}1)$

2. Comprueba que las siguientes funciones son de probabilidad:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2^x} & \text{si } x = 1, 2, ... \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{(1-p)p^{x-1}}{1-p^n} & \text{si } x = 1, ..., n (0 < p < 1) \\ \text{constante } 0 & e.o.c \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{3(1-|x|)^2}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

3. Determina si la funcin $f(x)$ puede ser una funcin de densidad. En caso afirmativo, encuentra el valor de la constante c.

$f(x) = \begin{cases} c(2x - x^3) & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

$$\int_0^2 c(2x - x^3)dx = 1$$

$$\Rightarrow c\int_0^2 2x - x^3 dx = c[(x^2|_0^2) - (\frac{x^4}{4}|_0^2)] = c[4 - \frac{16}{4}] = c[4 - 4] \Rightarrow c = 1$$

$f(x) = \begin{cases} c(2x - x^2) & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

$$\int_0^2 c(2x - x^2)dx = 1$$

$$\Rightarrow c\int_0^2 2x - x^2 dx = c[(x^2|_0^2) - (\frac{x^3}{3}|_0^2)] = c[4 - \frac{8}{3}] = \frac{4}{3}c \Rightarrow c = \frac{3}{4}$$

4. Una moneda equilibrada se lanza repetidamente hasta obtener un mismo resultado por tercera ocasin, no necesariamente de manera consecutiva. Encuentra la funcin de probabilidad de la variable aleatoria que registra el nmero de lanzamientos necesarios hasta obtener el resultado mencionado.

$S_x = 3, 4, 5$, $\mathbb{P}(aguila) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(sol) = \frac{1}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } \frac{1}{2} \\ 0 & \text{con probabilidad } \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\boxed{\text{Solucin}}$

$f(x) = (\frac{1}{2})^x (\frac{1}{2})^{1-x} \mathbb{I}_{0,1}(x)$

5. Muestra que la siguiente funcin es de probabilidad y encuentra la correspondiente funcin de distribucin y grafica ambas funciones.

$$f(x) = \begin{cases} 4e^{-4x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

$\boxed{\text{Solucin:}}$

(1) Es una funcin de probabilidad?

i) $f(x) \geq 0$

$f(x) > 0$ pues $x > 0$

ii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} 4e^{-4x}dx = \int_{0}^{\infty} 4e^{-4x}dx \;\; u = -4x,\; du = -4dx$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\infty} e^{u}du = e^{u}\Big|_{0}^{\infty} = e^{\infty} - e^{0} = 1$$

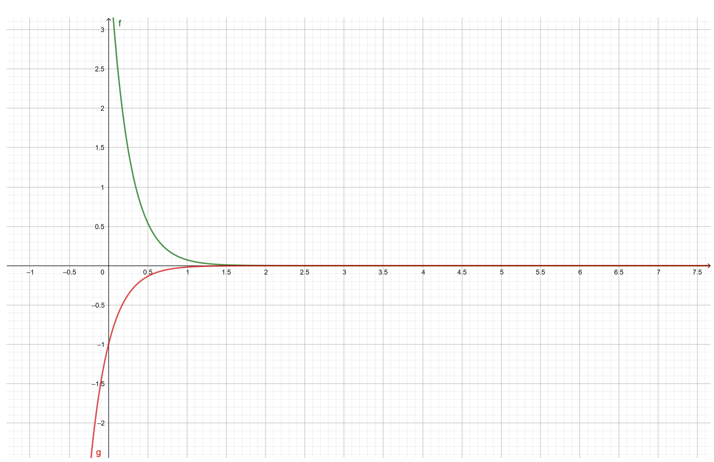
$\therefore f(x)$ es una funcin de probabilidad.

(2) La funcin de distribucin $(F(x))$:

Como $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$, entonces $F(x) = \int f(x)dx$.

$\int 4e^{-4x}dx = -e^{-4x}$

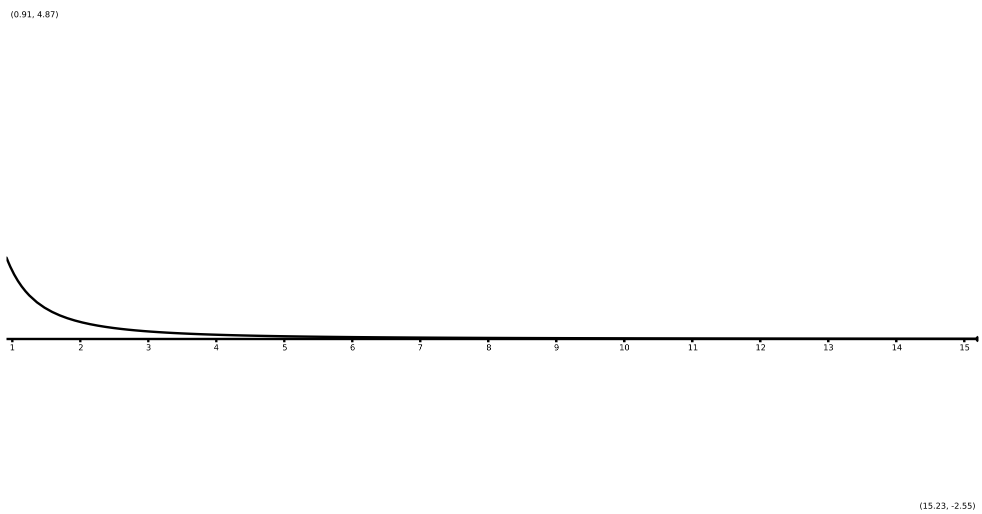
$\therefore F(x) = -e^{-4x}$.



6. Sea X una variable aleatoria continua con funcin de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

a) Grafica $f(x)$ y comprueba que es funcion de densidad



b)Encuentra y grafica la funcion de distribucin de X.

c) Encuentra y grafica la funcion de distribucin de la variable $Y = e^{-x}$

7. Calcula la esperanza de las siguientes variables aleatorias con funcin de probabilidad:

a)$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{n(n+1)} & \text{si } x = 1, 2, ..., n \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

b)$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}} & \text{si } x > 2 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

8. a) Demuestra las siguientes frmulas

i. Sea X una variable aleatoria discreta con funcin de distribucin $F(X)$, con esperanza finita y posibles valores dentro del conjunto $0, 1, 2, ...$, entonces $E(X) = \sum_{x=0}^{\infty}(1 - F(x))$

$\boxed{\text{Demostracin:}}$

Sabemos lo siguiente: $F(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$ y $1 - F(x) = \mathbb{P}[X > x]$, entonces...

$$\sum_{x=0}^{infty}(1 - F(x)) = \sum_{x=0}^{\infty}(\sum_{y=x+1}^{\infty} f(y)) = \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=0}^{y-1} f(y) = \sum_{y=1}^{\infty} yf(y) + 0 = \sum_{y=0}^{\infty} yf(y) = E(X) \blacksquare$$

ii. Sea X una variable aleatoria continua con funcin de distribucin $F(X)$, con esperanza finita y posibles valores en el intervalo $[0, \infty)$, entonces $E(X) = \int_0^{\infty}(1 - F(x))$

$\boxed{\text{Demostracin:}}$

Sabemos lo siguiente: $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)du$, entonces...

$$\int_0^{\infty}(1 - F(x))dx = \int_0^{\infty}\int_x^{\infty} f(y)dydx = \int_0^{\infty}\int_0^{y} f(y)dxdy = \int_0^{\infty} yf(y)dy = E(X) \blacksquare$$

b)Usando el ejercicio anterior, encuentra la esperanza de X cuando sta tiene funcin de distribucin:

i. $F(x) = \begin{cases} 1-(\frac{1}{2})^k & \text{si } k \leq x < k+1; k=1,2,... \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

ii. $F(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

9. Demustra o proporciona un contraejemplo:

a) Si $E(X) = 0$ entonces $X = 0$

FALSO. Tomemos $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = -1, 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

$E(X) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

b) Si $E(X) = E(Y)$ entonces $X = Y$

FALSO. Tomemos dos funciones:

$f(x_1) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

$E(X_1) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = \frac{2x^3}{3}|_0^1 = \frac{2}{3}$

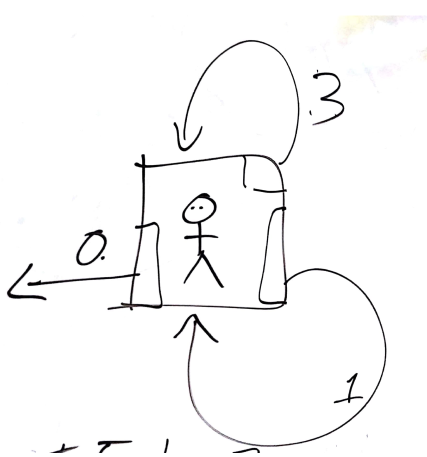
$f(x_2) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < \sqrt[3]{2} \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

$E(X_2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\sqrt[3]{2}} x^2dx = \frac{x^3}{3}|_0^{\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{3}$

Tenemos que $E(X_1) = E(X_2)$ pero $X_1 \neq X_2$

10. El ladrn de Bagdad ha sido colocado en una prisin en donde hay tres puertas. Una de las puertas conduce a un tnel que requiere de un da de travesa y que lo regresa a la misma prisin. Otra de las puertas lo conduce a otro tnel, aun ms largo, que lo regresa nuevamente a la prisin, pero despus de 3 das de recorrido. Finalmente, la tercera puerta lo conduce a la libertad inmediatamente. Suponga que el ladrn escoge al azar cada una de estas puertas, una por una, hasta quedar libre. Encuentre el nmero promedio de das que le toma al ladrn quedar en libertad.

Solucin:



$E(X) = (E[X]+1)E[X|X=1] + (E[X]+3)E[X|X=2]$

pero $E[X|X=1] = E[X|X=2] = E[X|X=3] = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow E[x] = \frac{E[X]}{3} + \frac{1}{3} + \frac{E[X]}{3} + \frac{3}{3} = \frac{2E[X]}{3} + \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \frac{E[X]}{3} = \frac{3}{4} \Rightarrow E[X] = 4$

11. Sea $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

a) Calcula la media y la varianza de la variable aleatoria X con distribucin $f(x)$

Solucin

$Media = E(x) = \int_0^1 x(6x - 6x^2)dx = \int_0^1 6x^2 dx - \int_0^1 6x^3 dx = \frac{6x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{6x^4}{4}\Big|_0^1 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

b) Encuentra el n-simo momento de la variable aleatoria X con distribucin $f(x)$

Solucin

$Var(x) = E(x^2) - E^2(x)$

$E(x^2) = \int_0^1 x^2(6x - 6x^2)dx = \int_0^1 (6x^3 - 6x^4)dx = (\frac{3x^4}{2} - \frac{6x^5}{5})\Big|_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{6}{5} = \frac{3}{10}$

$Var(x) = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

c) Encuentra su funcin generadora de momentos

Solucin

$M(t) = E(e^{tx}) = \int_0^1 e^{tx}(6x - 6x^2)dx = \int_0^1 6xe^{tx}dx - \int_0^1 6x^2 e^{tx}dx = -6\int_0^1 x^2 e^{tx}dx + 6\int_0^1 xe^{tx}dx$

Integrando por partes, tenemos que:

$M(t) = \frac{6(e^t(t-2)+t+2)}{t^3}$

12. Demuestra o proporciona un contraejemplo:

a) $Var(E(X)) = E(X)$

Solucin:

FALSO. Contraejemplo:

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

$E[X] = (1)(1) = 1$

$Var(X) = 0 \neq 1 = E[x]$

$\therefore E[X] \neq Var(E[X])$

b) $E(Var(X)) = Var(X)$

Demostracin:

Sea X una variable aleatoria.

$c = Var(X) \in \mathbb{R}^+$

$E[c] = c$

$\therefore E[Var(X)] = Var(V)$

13. Encuentra la funcin generadora de momentos de X y, a partir de ella, calcula la media y la varianza de X

a)$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^x} & \text{si } x = 1, 2, ... \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

b)$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

14. Una pliza de seguro grupal cubre los reclamos mdicos de los empleados de una pequea empresa. El valor, V, de las reclamaciones hechas en un ao se describe por $V = 100,000$ donde Y es una variable aleatoria con f.d.p $f(y) = \begin{cases} k(1-y)^4 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$ donde k es una constante. Cul es la probabilidad de que V exceda $40,000$ dado que V excede $10,000$?

Solucin

$k\int_0^1 (1-y)^4 = k\int_0^1 (y^4-4y^3+6y^2-4y+1)dy = k\ \frac{y^5}{5} - y^4 + 2y^3 - 2y^2 + y\Big|_0^1 = k(\frac{1}{5}-1+2-2+1) = k(\frac{1}{5}),$
luego:

$\frac{k}{5} = 1$

$k = 5$

15. Una compaa de seguros asegura una gran cantidad de viviendas. Se supone que el valor asegurado X de una vivienda seleccionada al azar, tiene la siguiente f.d.p.

$f(x) = \begin{cases} 3x^{-4} & \text{si } x > 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

Dada que una casa seleccionada al azar est asegurada por al menos 1.5, Cul es la probabilidad de que est asegurado por menos de 2?

Solucin

$\mathbb{P}(-1{,}5 \leq x < 2) = \int_{1{,}5}^{2} 3x^{-4}dx = 3(\frac{x^{-3}}{-3})\Big|_1 ,5^2) = 3(\frac{37}{648}) = \frac{111}{648} = 0{,}1712$

$\therefore 17{,}12\,\%$

16. La prdida debida a un incendio en un edificio comercial est modelada por la variable aleatoria X con f.d.p.

$f(x) = \begin{cases} 0{,}005(20-x) & \text{si } 0 < x < 20 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

Dado que una prdida de incendio excede de 8. Cul es la probabilidad de que exceda 16?

Solucin

$\mathbb{P}(x > 8) = \int_8^{20} (0{,}005)(20-x)dx = (0{,}005)(\,20x - \frac{x^2}{2}\Big|_8^{20}) = (20(20) - \frac{20^2}{2}) - (20(8) - \frac{8^2}{2})$

$= 0{,}005(200-128) = 0{,}005(72) = {,}36$

$\mathbb{P}(x > 16) = \int_{16}^{20} (0{,}005)(20-x)dx = (0{,}005)(\,20x - \frac{x^2}{2}\Big|_{16}^{20}) = (20(20) - \frac{20^2}{2}) - (20(16) - \frac{16^2}{2})$

$= 0{,}04$

17. La vida til de un aparato tiene una distribucin continua en el intervalo $(0, 40)$ con f.d.p

$f(x) = (10+x)^{-2}$

Calcula la probabilidad de que la vida til del aparato sea menor a 6.

Solucin

$\mathbb{P}(x < 6) = \int_0^6 (10+x)^{-2}dx$, Hagamos cambio de variable

$u = 10 + x$, y $du = dx$, entonces los limites quedan como 10 y 16, entonces

$\mathbb{P}(x < 6) = \int_{10}^{16} \frac{1}{u^2} du = (\frac{-1}{u})\Big|_{10}^{16} = \frac{3}{80}$

18. Sea X variable aleatoria con f.d.p $f(x) = \begin{cases} 1{,}4e^{-2x} + 0{,}9e^{-3x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$: calcula $E(X)$

$\boxed{\text{Solucin}}$

$$E(X) = \int_0^{\infty} x(1{,}4e^{-2x} + 0{,}9e^{-3x})dx = e^{-3x}(e^{5x}(,7x - ,35) - ,3x - ,1)\Big|_0^{\infty} = 0 - 1(1(0 - ,35) + ,1) = \frac{9}{20}$$

19. Sea X una variable aleatoria continua con f.d.p. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x(4-x) & \text{si } 0 < x < 3 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$: Cul es la moda de X?

$\boxed{\text{Solucin}}$

Derivamos la funcion de densidad de probabilidad, tenemos que:

$f'(x) = \frac{4}{9} - \frac{2x}{9}$, igualamos a cero para obtener el mximo

$\frac{4}{9} - \frac{2x}{9} = 0$

$\frac{2x}{9} = \frac{4}{9}$

$x = 2$

Evaluamos antes y despus en la original para ver que sea mximo.

$f(1) = \frac{1}{9}(3) = \frac{3}{9}$

$f(4) = \frac{4}{9}(0) = 0$

$\therefore$ Es mximo

20. En la siguiente tabla se muestra una distribucin de probabilidad de los tamaos de reclamacin para una pliza de seguros de autos.

Tamao de la reclamacin	20	30	40	50	60	70	80
Probabilidad	.15	.1	.05	.2	.1	.1	.3

Qu porcentaje de las reclamaciones se encuentran dentro de una desviacin estndar del tamao promedio de la reclamacin?

$\boxed{\text{Solucin}}$

Desviacin estndar: $\sqrt{\frac{\sum(|x - prom(x)|)}{n}}$

$prom(x) = 50$

$|x_i - prom(x_i)|^2 = |20-50|^2 + |30-50|^2 + |40-50|^2 + |50-50|^2 + |60-50|^2 + |70-50|^2 + |80-50|^2 = 4600$

$sqrt\frac{4600}{7} = 25{,}634$

Coeficiente de variacion: $\frac{\Sigma}{|prom(x)|} * 100$

Coeficiente de variacin $= 51{,}2\,\%$

21. Un actuario determina que el tamao de la reclamacin para una determinada clase de accidente es una variable aleatoria X, con funcin generadora de momentos $M_x(t) = \frac{1}{(1-2500t)^4}$; determina la desviacin estndar del tamao de la reclamacin para esta clase de accidentes.

$\boxed{\text{Solucin}}$

$M_x'(t) = \frac{-4(\frac{d}{dt}(1-2500t))}{(1-2500t)^5} = \frac{-4}{(1-2500t)^5} - 2500\frac{d}{dt} = \frac{10000}{(1-2500t)^5}$, ahora evaluemos en $t = 0$

$M_x'(t) = \frac{10000}{1^5} = 10000$

Ahora calculemos el segundo momento

$M''_x(t) = 10000\frac{d}{dt}(\frac{1}{(1-2500t)^5}) = 10000(\frac{-5\frac{d}{dt}(1-2500t)}{(1-2500t)^6}) = \frac{-50000(\frac{d}{dt}(1-2500t))}{(1-2500t)^6} = \frac{125000000}{(1-2500t)^6} = 5000$

Ahora calculemos la varianza de x:

$Var(x) = E(x^2) - E^2(x) = 125000000 - 10000^2 = 25000000$

Y tenemos que la desviacin estndar es: $\sqrt(Var(x)) = \sqrt(25000000) = 5000$

22. La funcin generadora de momentos de la variable aleatoria X est dada por $M_x(t) = \frac{1}{(1+t)}$, encuentra el tercer momento de X sobre el punto $x = 2$

$\boxed{\text{Solucin}}$

$\frac{d}{dx}M_x(t) = -\frac{1}{(1+t)^2} \Rightarrow \frac{d}{dx}M_x(0) = -1 = E(X)$

$\frac{d^2}{dx^2}M_x(t) = \frac{2}{(1+t)^3} \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}M_x(0) = 2 = E(X^2)$

$\frac{d^3}{dx^3}M_x(t) = -\frac{6}{(1+t)^4} \Rightarrow \frac{d^3}{dx^3}M_x(0) = -6 = E(X^3)$

Tenemos que calcular $E[(X-c)^3]$

$E[(X-c)^3] = E[X^3 - 3X^2c + 3Xc^2 - c^3] = E(X^3) - 3E(X^2)c + 3E(X)c^2 - c^3$

$E[(X-c)^3] = -6 - 6c + c^2 - c^3$

23. Una variable aleatoria tiene la siguiente funcin de distribucin.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 1 \\ \frac{x^2-2x+2}{2} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{para } x \geq 2 \end{cases}$$

Encuentra la varianza de X.

24. El monto de la prdida X, para una pliza de seguro mdico tiene una funcin de distribucin

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ \frac{1}{9}(2x^2 - \frac{x^3}{3}) & \text{para } 0 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{para } x > 3 \end{cases}$$

Calcula la moda de la distribucin.

$\boxed{\text{Solucin:}}$

Para calcular la moda de la distribucin se tiene que calcular $f.d.p.$ entonces $\frac{d}{dx}(F_x(x)) = f_x(x)$

$\frac{d}{dx}(\frac{2x^2}{9} - \frac{x^3}{27}) = \frac{4x}{9} - \frac{x^2}{9}$

$\Rightarrow x(\frac{4}{9} - \frac{x}{9}) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{x}{9} \Rightarrow x = 4$

Entonces, $x = 0$ $x = 4$. $\therefore$ la moda de la funcin de distribucin es 4.

25. La variable aleatoria X tiene f.d.p. $f(x) = ce^{-|x|}$ para $-\infty < x < \infty$. Encuentra la varianza de X.

Problema:

$$\int x e^{-|x|}\, dx$$

El integrando es simétrico con respecto del origen. Podemos sustituir por el valor absoluto.

Prepara la integral para sustitución:

$$= \int \frac{x}{|x|} \cdot e^{-|x|}\, |x|\, dx$$

Sustituye $u = |x| \longrightarrow dx = \frac{|x|}{x}\, du$ (Pasos):

$$= \int u e^{-u}\, du$$

Integra por partes: $\int \mathrm{f}\mathrm{g}' = \mathrm{f}\mathrm{g} - \int \mathrm{f}'\mathrm{g}$

$\mathrm{f} = u, \quad \mathrm{g}' = e^{-u}$

$\downarrow$ Pasos $\quad \downarrow$ Pasos

$\mathrm{f}' = 1, \quad \mathrm{g} = -e^{-u}$:

$$= -u e^{-u} - \int -e^{-u}\, du$$

Resolviendo ahora:

$$\int -e^{-u}\, du$$

Aplica la regla para integrar funciones exponenciales:

$$\int a^v\, dv = \frac{a^v}{\ln(a)} \text{ con } a = e:$$

$$= e^v$$

Deshace la sustitución $v = -u$:

$$= e^{-u}$$

Reemplaza las integrales ya resueltas:

$$-u e^{-u} - \int -e^{-u}\, du$$

$$= -u e^{-u} - e^{-u}$$

Deshace la sustitución $u = |x|$:

$$= -e^{-|x|}\, |x| - e^{-|x|}$$

El problema está resuelto:

$$\int x e^{-|x|}\, dx$$

$$= -e^{-|x|}\, |x| - e^{-|x|} + C$$

Reescribe/simplifica:

$$= -e^{-|x|}\left(|x| + 1\right) + C$$

INTEGRAL DEFINIDA:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx =$$

0

Nota: La integral definida fue calculada usando la propiedad de la función de ser simétrica.