Tarea 2

Miguel Torres Eric Giovanni

18 de octubre de 2018

1. Suponga que un experimento consiste en escoger un número al azar dentro del intervalo 0,1. Para cada resultado w del experimento se expresa a este número en su expansión decimal $w = 0.a_1a_2a_3...$ en donde $a_i \in \{0, 1, ..., 9\}, i = 1, 2, ...$ Para cada una de las siguientes variables aleatorias determine si ésta es discreta o continua y en cualquier caso el conjunto de valores que puede tomar:

a)$X(w) = a_1$

$\boxed{\text{Solución}}$

Es discreta y los valores qu puede tomar son (,1, ,2, ..., ,9)

b)$Y(w) = 0{,}0a_1a_2a_3...$

$\boxed{\text{Solución}}$

Es continua y los valores que puede tomar están en el intervalo $(0, 0{,}1)$

2. Comprueba que las siguientes funciones son de probabilidad:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{2^x} & \text{si } x = 1, 2, ... \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

$\boxed{\text{Solución}}$

i) $f(x) > 0$ cumple porque $x = 1, 2, ...$ vale $\frac{x-1}{2^x}$

ii) $\displaystyle\sum_{x=1}^{\infty} \frac{x-1}{2^x} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x}{2^x} - \sum_{x=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^x = \sum_{x=1}^{\infty} \sum_{y=1}^{x} (\frac{1}{2^x}) - 1 = \sum_{y=1}^{\infty} \sum_{x=y}^{\infty} (\frac{1}{2^x}) - 1 = \sum_{y=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})^y}{1-\frac{1}{2}} - 1 =$

$\displaystyle = \sum_{y=1}^{\infty} (\frac{1}{2})^{y-1} - 1 = \sum_{y=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^y - 1 = 2 - 1 = 1$

$\therefore$ es función de probabilidad

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{(1-p)p^{x-1}}{1-p^n} & \text{si } x = 1, ..., n (0 < p < 1) \\ \text{constante } 0 & e.o.c \end{cases}$

$\boxed{\text{Solución}}$

i) $f(x) > 0$, ocurre pues $x = 1, ..., n$ esta vale: $\frac{(1-p)p^{x-1}}{1-p^n}$

ii) $\displaystyle\sum_{x=1}^{n} \frac{(1-p)p^{x-1}}{1-p^n} = 1$

$\therefore$ es función de probabilidad

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

$\boxed{\text{Solución}}$

i) $f(x) > 0$

ii) $\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2}(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2}) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\Big|_0^1 = 1$

$\therefore$ es función de probabilidad

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{3(1-|x|)^2}{2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

$\boxed{\text{Solución}}$

i) $f(x) > 0$

ii) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{3(1-|x|)^2}{2}dx = \frac{3}{2}\int_0^1 (1-|x|)^2$, integrando por cambio de variable

$\Rightarrow \frac{-3}{2}\int_0^1 u^2du = \frac{-3}{2}(\frac{u^3}{3}\Big|_0^1) = (-\frac{(1-|x|)^3}{3}\Big|_0^1) = \frac{1}{3}$

$\therefore$ Por lo que no es función de probabilidad

3. Determina si la función $f(x)$ puede ser una función de densidad. En caso afirmativo, encuentra el valor de la constante c.

$f(x) = \begin{cases} c(2x - x^3) & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

$\boxed{\text{Solución}}$

$\int_0^2 c(2x - x^3)dx = 1$

$\Rightarrow c\int_0^2 2x - x^3dx = c[(x^2|_0^2) - (\frac{x^4}{4}|_0^2)] = c[4 - \frac{16}{4}] = c[4-4] \Rightarrow c = 1$

$f(x) = \begin{cases} c(2x - x^2) & \text{si } 0 < x < 2 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

$\int_0^2 c(2x - x^2)dx = 1$

$\Rightarrow c\int_0^2 2x - x^2dx = c[(x^2|_0^2) - (\frac{x^3}{3}|_0^2)] = c[4 - \frac{8}{3}] = \frac{4}{3}c \Rightarrow c = \frac{3}{4}$

4. Una moneda equilibrada se lanza repetidamente hasta obtener un mismo resultado por tercera ocasión, no necesariamente de manera consecutiva. Encuentra la función de probabilidad de la variable aleatoria que registra el número de lanzamientos necesarios hasta obtener el resultado mencionado.

$S_x = 3, 4, 5$, $\mathbb{P}(aguila) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(sol) = \frac{1}{2}$

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } \frac{1}{2} \\ 0 & \text{con probabilidad } \frac{1}{2} \end{cases}$

$\boxed{\text{Solución}}$

$f(x) = (\frac{1}{2})^x(\frac{1}{2})^{1-x}\mathbb{I}_{0,1}(x)$

5. Muestra que la siguiente función es de probabilidad y encuentra la correspondiente función de distribución y grafica ambas funciones.

$f(x) = \begin{cases} 4e^{-4x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

$\boxed{\text{Solución:}}$

(1) ¿Es una función de probabilidad?

$i)$ $f(x) \geq 0$

$f(x) > 0$ pues $x > 0$

$ii)$ $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} 4e^{-4x}dx = \int_{0}^{\infty} 4e^{-4x}dx \;\; u = -4x,\; du = -4dx$$

$$\Rightarrow \int_{0}^{\infty} e^{u}du = e^{u}\big|_{0}^{\infty} = e^{\infty} - e^{0} = 1$$

$\therefore$ $f(x)$ es una función de probabilidad.

(2) La función de distribución $(F(x))$:

Como $f(x) = \frac{d}{dx}F(x)$, entonces $F(x) = \int f(x)dx$.

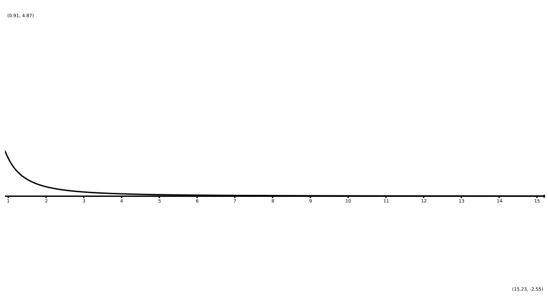
$\int 4e^{-4x}dx = -e^{-4x}$

$\therefore F(x) = -e^{-4x}$.

6. Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

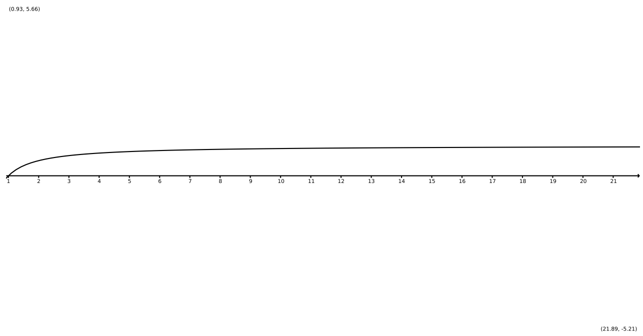
a) Grafica $f(x)$ y comprueba que es funcion de densidad



$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b\to\infty}(-\frac{1}{x})|_1^b = (-\frac{1}{\infty}) - (-\frac{1}{1}) = 1$$
$\therefore f(x)$ es $f.d.p.$

b)Encuentra y grafica la funcion de distribución de X.

$$F_x(X) = \int_1^x t^{-2}dx = -t^{-1}|_1^x = 1 - \frac{1}{x}$$



c) Encuentra y grafica la funcion de distribución de la variable $Y = e^{-x}$

7. Calcula la esperanza de las siguientes variables aleatorias con función de probabilidad:

a)$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{n(n+1)} & \text{si } x = 1,2,...,n \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

$\boxed{\text{Solución}}$

$$M_x(t) = E(e^{tx})(\sum_{x=1}^{n} e^{tx}(\frac{1}{2^x})) = e^t\sum_{x=1}^{n}(\frac{1}{2^x}) = e^t(1) = e^t$$
$M_x(t) = e^t$

$M'(0) = 1$

$\therefore$ La esperanza es igual a 1

b)$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}} & \text{si } x > 2 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

8. a) Demuestra las siguientes fórmulas

i. Sea X una variable aleatoria discreta con función de distribución $F(X)$, con esperanza finita y posibles valores dentro del conjunto $0, 1, 2, ...$, entonces $E(X) = \sum_{x=0}^{\infty}(1 - F(x))$

$\boxed{\text{Demostración:}}$

Sabemos lo siguiente: $F(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$ y $1 - F(x) = \mathbb{P}[X > x]$, entonces...

$$\sum_{x=0}^{\infty}(1 - F(x)) = \sum_{x=0}^{\infty}(\sum_{y=x+1}^{\infty} f(y)) = \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=0}^{y-1}f(y) = \sum_{y=1}^{\infty}yf(y) + 0 = \sum_{y=0}^{\infty}yf(y) = E(X) \blacksquare$$

ii. Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución $F(X)$, con esperanza finita y posibles valores en el intervalo $[0, \infty)$, entonces $E(X) = \int_0^{\infty}(1 - F(x))$

$\boxed{\text{Demostración:}}$

Sabemos lo siguiente: $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)du$, entonces...

$\int_0^\infty (1 - F(x))dx = \int_0^\infty \int_x^\infty f(y)dydx = \int_0^\infty \int_0^y f(y)dxdy = \int_0^\infty yf(y)dy = E(X)$ ■

b)Usando el ejercicio anterior, encuentra la esperanza de X cuando ésta tiene función de distribución:

i. $F(x) = \begin{cases} 1 - (\frac{1}{2})^k & \text{si } k \leq x < k+1; k = 1, 2, ... \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

ii. $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

9. Demustra o proporciona un contraejemplo:

a) Si $E(X) = 0$ entonces $X = 0$

FALSO. Tomemos $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x = -1, 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

$E(X) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$

b) Si $E(X) = E(Y)$ entonces $X = Y$

FALSO. Tomemos dos funciones:

$f(x_1) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

$E(X_1) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = \frac{2x^3}{3}|_0^1 = \frac{2}{3}$

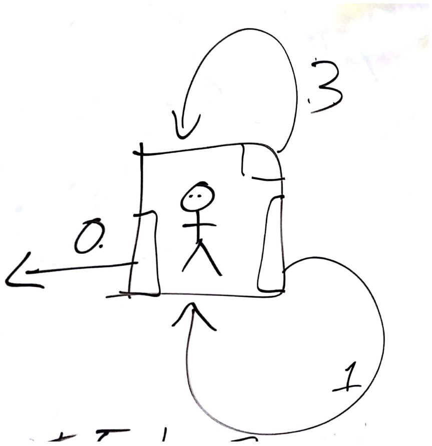
$f(x_2) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < \sqrt[3]{2} \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

$E(X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\sqrt[3]{2}} x^2dx = \frac{x^3}{3}|_0^{\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{3}$

Tenemos que $E(X_1) = E(X_2)$ pero $X_1 \neq X_2$

10. El ladrón de Bagdad ha sido colocado en una prisión en donde hay tres puertas. Una de las puertas conduce a un túnel que requiere de un día de travesía y que lo regresa a la misma prisión. Otra de las puertas lo conduce a otro túnel, aun más largo, que lo regresa nuevamente a la prisión, pero después de 3 días de recorrido. Finalmente, la tercera puerta lo conduce a la libertad inmediatamente. Suponga que el ladrón escoge al azar cada una de estas puertas, una por una, hasta quedar libre. Encuentre el número promedio de días que le toma al ladrón quedar en libertad.

Solución:



$E(X) = (E[X]+1)E[X|X=1] + (E[X]+3)E[X|X=2]$
pero $E[X|X=1] = E[X|X=2] = E[X|X=3] = \frac{1}{3}$
$\Rightarrow E[x] = \frac{E[X]}{3} + \frac{1}{3} + \frac{E[X]}{3} + \frac{3}{3} = \frac{2E[X]}{3} + \frac{4}{3}$
$\Rightarrow \frac{E[X]}{3} = \frac{3}{4} \Rightarrow E[X] = 4$

11. Sea $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

a) Calcula la media y la varianza de la variable aleatoria X con distribución $f(x)$

$\boxed{\text{Solución}}$

$$Media = E(x) = \int_0^1 x(6x-6x^2)dx = \int_0^1 6x^2dx - \int_0^1 6x^3dx = \frac{6x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{6x^4}{4}\Big|_0^1 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

b) Encuentra el n-ésimo momento de la variable aleatoria X con distribución $f(x)$

$\boxed{\text{Solución}}$

$Var(x) = E(x^2) - E^2(x)$

$$E(x^2) = \int_0^1 x^2(6x-6x^2)dx = \int_0^1 (6x^3-6x^4)dx = \left(\frac{3x^4}{2} - \frac{6x^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{6}{5} = \frac{3}{10}$$

$Var(x) = \frac{3}{10} - \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

c) Encuentra su función generadora de momentos

$\boxed{\text{Solución}}$

$M(t) = E(e^{tx}) = \int_0^1 e^{tx}(6x-6x^2)dx = \int_0^1 6xe^{tx}dx - \int_0^1 6x^2e^{tx}dx = -6\int_0^1 x^2e^{tx}dx + 6\int_0^1 xe^{tx}dx$
Integrando por partes, tenemos que:
$M(t) = \frac{6(e^t(t-2)+t+2)}{t^3}$

12. Demuestra o proporciona un contraejemplo:

a) $Var(E(X)) = E(X)$

$\boxed{\text{Solución:}}$

FALSO. Contraejemplo:

$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

$E[X] = (1)(1) = 1$
$Var(X) = 0 \neq 1 = E[x]$
$\therefore E[X] \neq Var(E[X])$

b) $E(Var(X)) = Var(X)$

$\boxed{\text{Demostración:}}$

Sea X una variable aleatoria.
$c = Var(X) \in \mathbb{R}^+$
$E[c] = c$
$\therefore E[Var(X)] = Var(V)$

13. Encuentra la función generadora de momentos de X y, a partir de ella, calcula la media y la varianza de X

a)$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^x} & \text{si } x = 1, 2, ... \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

$\boxed{\text{Solución}}$

$$M_x(t) = E(e^{tx})(\sum_{x=1}^{n} e^{tx}(\frac{1}{2^x})) = e^t \sum_{x=1}^{n}(\frac{1}{2^x}) = e^t(1) = e^t$$

$M_x(t) = e^t$
$M'(0) = 1$
$\therefore$ La esperanza es igual a 1
$Var(x) = E(x^2) - (E(x))^2$

$$Var(x) = \sum_{x=1}^{n} \frac{x^2}{2x} - \sum_{x=1}^{n} \frac{x}{2^x} = 2^{-n}(-n^2 - 4n + 6(2^n - 1)) - 2^{-n}(-n + 2^{n+1} - 2)$$

b)$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$

$\boxed{\text{Solución}}$

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_0^{\infty} e^{tx}e^{-x}dx = \int_0^{\infty} e^{(t-1)x}dx = \left.\frac{e^{(t-1)x}}{t-1}\right|_0^{\infty}, (t-1) < 0$$

$M_x(t) = \frac{-1}{t-1}$
$E(x) = M'(0) = \frac{d}{dt}(\frac{-1}{t-1})\Big|_{t=0} = \frac{t}{(t-1)^2}\Big|_{t=0} = 1$
$E(x^2) = M''(0) = \frac{d}{dt}\frac{1}{(t-1)^2}\Big|_{t=0} = 2$, ahora saquemos la varianza:
$Var(x) = E(x^2) - E(x) = 2 - 1 = 1$
$\therefore$ la varianza es 1

14. Una póliza de seguro grupal cubre los reclamos médicos de los empleados de una pequeña empresa. El valor, V, de las reclamaciones hechas en un año se describe por $V = 100,000$ donde Y es una variable aleatoria con f.d.p $f(y) = \begin{cases} k(1-y)^4 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$ donde k es una constante. ¿Cuál es la probabilidad de que V exceda $40,000$ dado que V excede $10,000$?

$\boxed{\text{Solución}}$

$$k\int_0^1 (1-y)^4 = k\int_0^1 (y^4-4y^3+6y^2-4y+1)dy = k\ \frac{y^5}{5} - y^4 + 2y^3 - 2y^2 + y\Big|_0^1 = k(\frac{1}{5}-1+2-2+1) = k(\frac{1}{5}),$$

luego:

$\frac{k}{5} = 1$

$k = 5$

15. Una compañía de seguros asegura una gran cantidad de viviendas. Se supone que el valor asegurado X de una vivienda seleccionada al azar, tiene la siguiente f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^{-4} & \text{si } x > 1 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Dada que una casa seleccionada al azar está asegurada por al menos 1.5, ¿Cuál es la probabilidad de que esté asegurado por menos de 2?

Solución

$\mathbb{P}(-1{,}5 \leq x < 2) = \int_{1,5}^{2} 3x^{-4}dx = 3(\frac{x^{-3}}{-3})\Big|_1 ,5^2) = 3(\frac{37}{648}) = \frac{111}{648} = 0{,}1712$

$\therefore 17{,}12\,\%$

16. La pérdida debida a un incendio en un edificio comercial está modelada por la variable aleatoria X con f.d.p.

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}005(20-x) & \text{si } 0 < x < 20 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Dado que una pérdida de incendio excede de 8. ¿Cuál es la probabilidad de que exceda 16?

Solución

$$\mathbb{P}(x > 8) = \int_8^{20} (0{,}005)(20-x)dx = (0{,}005)(\,20x - \frac{x^2}{2}\Big|_8^{20}) = (20(20) - \frac{20^2}{2}) - (20(8) - \frac{8^2}{2})$$

$= 0{,}005(200 - 128) = 0{,}005(72) = {,}36$

$$\mathbb{P}(x > 16) = \int_{16}^{20} (0{,}005)(20-x)dx = (0{,}005)(\,20x - \frac{x^2}{2}\Big|_{16}^{20}) = (20(20) - \frac{20^2}{2}) - (20(16) - \frac{16^2}{2})$$

$= 0{,}04$

17. La vida útil de un aparato tiene una distribución continua en el intervalo $(0, 40)$ con f.d.p

$f(x) = (10+x)^{-2}$

Calcula la probabilidad de que la vida útil del aparato sea menor a 6.

Solución

$\mathbb{P}(x < 6) = \int_0^6 (10+x)^{-2}dx$, Hagamos cambio de variable

$u = 10 + x$, y $du = dx$, entonces los limites quedan como 10 y 16, entonces

$\mathbb{P}(x < 6) = \int_{10}^{16} \frac{1}{u^2}du = (\frac{-1}{u})\big|_{10}^{16} = \frac{3}{80}$

18. Sea X variable aleatoria con f.d.p $f(x) = \begin{cases} 1{,}4e^{-2x} + 0{,}9e^{-3x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$: calcula $E(X)$

Solución

$$E(X) = \int_0^\infty x(1{,}4e^{-2x} + 0{,}9e^{-3x})dx = e^{-3x}(e^{5x}({,}7x - {,}35) - {,}3x - {,}1)\big|_0^\infty = 0 - 1(1(0 - {,}35) + {,}1) = \frac{9}{20}$$

19. Sea X una variable aleatoria continua con f.d.p. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x(4-x) & \text{si } 0 < x < 3 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$: ¿Cuál es la moda de X?

Solución

Derivamos la funcion de densidad de probabilidad, tenemos que:

$f'(x) = \frac{4}{9} - \frac{2x}{9}$, igualamos a cero para obtener el máximo

$\frac{4}{9} - \frac{2x}{9} = 0$

$\frac{2x}{9} = \frac{4}{9}$

$x = 2$

Evaluamos antes y después en la original para ver que sea máximo.

$f(1) = \frac{1}{9}(3) = \frac{3}{9}$

$f(4) = \frac{4}{9}(0) = 0$

$\therefore$ Es máximo

20. En la siguiente tabla se muestra una distribución de probabilidad de los tamaños de reclamación para una póliza de seguros de autos.

Tamaño de la reclamación	20	30	40	50	60	70	80
Probabilidad	.15	.1	.05	.2	.1	.1	.3

¿Qué porcentaje de las reclamaciones se encuentran dentro de una desviación estándar del tamaño promedio de la reclamación?

Solución

Desviación estándar: $\sqrt{\frac{\sum(|x - prom(x)|)}{n}}$

$prom(x) = 50$

$|x_i - prom(x_i)|^2 = |20-50|^2 + |30-50|^2 + |40-50|^2 + |50-50|^2 + |60-50|^2 + |70-50|^2 + |80-50|^2 = 4600$

$sqrt\frac{4600}{7} = 25{,}634$

Coeficiente de variacion: $\frac{\Sigma}{|prom(x)|} * 100$

Coeficiente de variación $= 51{,}2\,\%$

21. Un actuario determina que el tamaño de la reclamación para una determinada clase de accidente es una variable aleatoria X, con función generadora de momentos $M_x(t) = \frac{1}{(1-2500t)^4}$; determina la desviación estándar del tamaño de la reclamación para esta clase de accidentes.

Solución

$M'_x(t) = \frac{-4(\frac{d}{dt}(1-2500t))}{(1-2500t)^5} = \frac{-4}{(1-2500t)^5} - 2500\frac{d}{dt} = \frac{10000}{(1-2500t)^5}$, ahora evaluemos en $t = 0$

$M'_x(t) = \frac{10000}{1^5} = 10000$

Ahora calculemos el segundo momento

$M''_x(t) = 10000\frac{d}{dt}(\frac{1}{(1-2500t)^5}) = 10000(\frac{-5\frac{d}{dt}(1-2500t)}{(1-2500t)^6}) = \frac{-50000(\frac{d}{dt}(1-2500t))}{(1-2500t)^6} = \frac{125000000}{(1-2500t)^6} = 5000$

Ahora calculemos la varianza de x:

$Var(x) = E(x^2) - E^2(x) = 125000000 - 10000^2 = 25000000$

Y tenemos que la desviación estándar es: $\sqrt(Var(x)) = \sqrt(25000000) = 5000$

22. La función generadora de momentos de la variable aleatoria X está dada por $M_x(t) = \frac{1}{(1+t)}$, encuentra el tercer momento de X sobre el punto $x = 2$

$\boxed{\text{Solución}}$

$\frac{d}{dx}M_x(t) = -\frac{1}{(1+t)^2} \Rightarrow \frac{d}{dx}M_x(0) = -1 = E(X)$

$\frac{d^2}{dx^2}M_x(t) = \frac{2}{(1+t)^3} \Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}M_x(0) = 2 = E(X^2)$

$\frac{d^3}{dx^3}M_x(t) = -\frac{6}{(1+t)^4} \Rightarrow \frac{d^3}{dx^3}M_x(0) = -6 = E(X^3)$

Tenemos que calcular $E[(X-c)^3]$

$E[(X-c)^3] = E[X^3 - 3X^2c + 3Xc^2 - c^3] = E(X^3) - 3E(X^2)c + 3E(X)c^2 - c^3$

$E[(X-c)^3] = -6 - 6c + c^2 - c^3$

23. Una variable aleatoria tiene la siguiente función de distribución.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 1 \\ \frac{x^2-2x+2}{2} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{para } x \geq 2 \end{cases}$$

Encuentra la varianza de X.

$\boxed{\text{Solución:}}$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$E(X) = \int_1^2 xF$$

24. El monto de la pérdida X, para una póliza de seguro médico tiene una función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ \frac{1}{9}(2x^2 - \frac{x^3}{3}) & \text{para } 0 \leq x \leq 3 \\ 1 & \text{para } x > 3 \end{cases}$$

Calcula la moda de la distribución.

$\boxed{\text{Solución:}}$

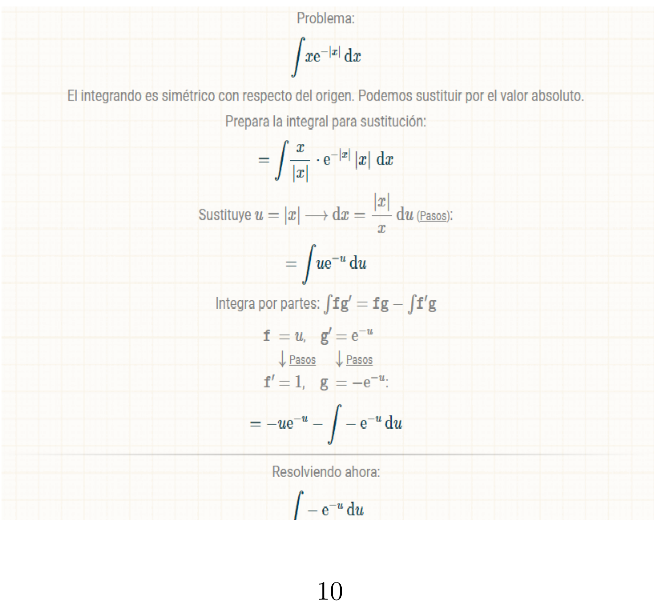
Para calcular la moda de la distribución se tiene que calcular $f.d.p.$ entonces $\frac{d}{dx}(F_x(x)) = f_x(x)$

$\frac{d}{dx}(\frac{2x^2}{9} - \frac{x^3}{27}) = \frac{4x}{9} - \frac{x^2}{9}$

$\Rightarrow x(\frac{4}{9} - \frac{x}{9}) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{x}{9} \Rightarrow x = 4$

Entonces, $x = 0$ ó $x = 4$. $\therefore$ la moda de la función de distribución es 4.

25. La variable aleatoria X tiene f.d.p. $f(x) = ce^{-|x|}$ para $-\infty < x < \infty$. Encuentra la varianza de X.



Problema:

$$\int xe^{-|x|}\,dx$$

El integrando es simétrico con respecto del origen. Podemos sustituir por el valor absoluto.

Prepara la integral para sustitución:

$$= \int \frac{x}{|x|} \cdot e^{-|x|}\,|x|\,dx$$

Sustituye $u = |x| \longrightarrow dx = \frac{|x|}{x}\,du$ (Pasos):

$$= \int ue^{-u}\,du$$

Integra por partes: $\int fg' = fg - \int f'g$

$f = u, \quad g' = e^{-u}$

$\downarrow$ Pasos $\quad \downarrow$ Pasos

$f' = 1, \quad g = -e^{-u}$:

$$= -ue^{-u} - \int -e^{-u}\,du$$

Resolviendo ahora:

$$\int -e^{-u}\,du$$

Aplica la regla para integrar funciones exponenciales:

$$\int a^{v}\,dv = \frac{a^{v}}{\ln(a)} \text{ con } a = e:$$

$$= e^{v}$$

Deshace la sustitución $v = -u$:

$$= e^{-u}$$

Reemplaza las integrales ya resueltas:

$$-ue^{-u} - \int -e^{-u}\,du$$

$$= -ue^{-u} - e^{-u}$$

Deshace la sustitución $u = |x|$:

$$= -e^{-|x|}\,|x| - e^{-|x|}$$

El problema está resuelto:

$$\int xe^{-|x|}\,dx$$

$$= -e^{-|x|}\,|x| - e^{-|x|} + C$$

Reescribe/simplifica:

$$= -e^{-|x|}\,(|x| + 1) + C$$

INTEGRAL DEFINIDA:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx =$$

$$0$$

Nota: La integral definida fue calculada usando la propiedad de la función de ser simétrica.