高校应用数学学报
2011, 26(3): 343-354

模糊蕴涵格理论

裴道武, 王三民, 杨 瑞

(浙江理工大学 理学院, 浙江杭州 310018)

摘 要: 模糊蕴涵代数, 在文献中简称为FI代数, 最初由吴望名先生于1990年提出, 至今已经有许多研究成果. 文中综述有关FI代数的概念, 性质等主要研究工作, 同时给出这类代数的一些新的性质. 重点强调构成格结构的FI代数, 称之为模糊蕴涵格, 简称为FI格. 这类代数结构与模糊逻辑中几个重要的代数系统具有紧密的联系, 文中将揭示这些联系, 一些重要的模糊逻辑代数系统都是FI格类的子类. 另外, 所有正则FI格构成代数簇, 即等式代数类. 这个代数簇将在模糊逻辑与近似推理中发挥重要的作用.

关键词: 模糊逻辑; 模糊蕴涵代数; 模糊蕴涵格; 剩余格; 代数簇

中图分类号: O141.1

文献标识码: A **文章编号**: 1000-4424(2011)03-0343-12

§1 引 言

近年来, 关于模糊逻辑代数结构的研究受到关注, 并且已经取得了较大的进展. 在这个领域, 最杰出的贡献当数基于t-范数[1-2]的模糊逻辑代数的研究, 其中包括Hájek的BL代数及其三个特例: MV代数, G代数和积代数[3], 也包括Esteva和Godo的MTL代数及其三个特例: IMTL代数, WNM代数和NM代数[4], 还包括我国王国俊先生提出的R_0代数[5-6] (注: 本文作者已经证明, R_0代数和NM代数是相同的代数系统[7]). 另外, 与直觉主义逻辑密切相关的Heyting代数[8]也是十分重要的模糊逻辑代数. 关于这些代数系统的研究已经成为当代模糊逻辑研究的热点之一, 并且这些研究的成果已经被应用于模糊逻辑形式系统及模糊推理的研究[5,9-10].

值得注意的是, 在模糊逻辑的理论与应用研究中, 蕴涵联结词“如果⋯那么”起着非常重要的作用[5,11]. 因此, 探讨在模糊逻辑中经常使用的模糊蕴涵算子的共同性质是有意义的工作. 为此, 吴望名先生在文献[12]中提出一类新的模糊逻辑代数, 叫做模糊蕴涵代数, 简称为FI代数.

在过去几年里, 一些作者对FI代数发生了兴趣, 这类代数的许多有趣的性质已经被揭示, 它和其它一些模糊逻辑代数系统的关系也被仔细地讨论[6,13-16], 文献[12]还在FI代数中引进了若干代数概念, 比如, 滤子, 同余关系, 商代数, 同态和同构等. 还有的文献讨论了FI代数类的形式化问题[17].

收稿日期: 2011-03-24 修回日期:2011-05-12
基金项目: 国家自然科学基金(10871229; 60863002); 浙江理工大学研究生教改项目(YJG-Z07001)

然而, 对于FI代数的研究仍然存在一些问题值得做进一步考虑. 比如, FI代数与刚才提到的几个重要的模糊逻辑代数(MTL代数, BL代数, Heyting代数等)的关系还不够清楚, 不同作者报告的研究成果相对地比较分散和零碎, 特别地, 已经提出的几种特殊的FI代数, 例如, 正则FI代数, 正规FI代数, 交换FI代数等, 这些代数的相互关系也需要澄清. 还有一个重要的问题是, 由所有的FI代数组成的代数类是否构成代数簇, 即等式代数类? 需要做深入的讨论.

本文将综述关于FI代数研究的主要结果, 包括它的概念和性质, 特别关注构成格结构的FI代数, FI格, 系统地讨论FI格与相近代数系统之间的关系, 研究与FI格相关的几个重要问题, 表述一些新的研究成果.

§2 FI代数与FI格

吴望名先生于1990年在以下定义中提出了模糊蕴涵代数的概念.

定义2.1[12] 一个(2,0)-型代数$(X,\to,0)$称为模糊蕴涵代数, 简称为FI代数, 如果以下条件对于任何$x,y,z\in X$成立:

(I_1) $x\to(y\to z)=y\to(x\to z)$;

(I_2) $(x\to y)\to((y\to z)\to(x\to z))=1$;

(I_3) $x\to x=1$;

(I_4) $x\to y=y\to x=1 \implies x=y$;

(I_5) $0\to x=1$,

这里$1=0\to 0$.

在FI代数X中, 可以按照以下方式定义一个二元关系$\le$和四个运算C, T, S和$\odot$:

$$x\le y \iff x\to y=1,\quad x,y\in X; \tag{1}$$

$$\begin{gathered} C(x)=x\to 0,\quad x\odot y=(x\to y)\to y,\\ T(x,y)=C(x)\to y,\quad S(x,y)=C(x\to C(y)),\ x,y\in X. \end{gathered} \tag{2}$$

不难证明, 关系$\le$是X上的偏序关系, 即它是自反的, 反对称的和传递的, 算子C是X上的否定算子, 即它是逆序的, 并且满足$C(0)=1$和$C(1)=0$. $\le$和C分别称为由FI代数X诱导的偏序和否定算子.

FI代数X是正则的, 或者, 一个RFI代数, 如果算子C是一个强否定, 即它是具有以下性质的否定算子:

(I_6)(对合律) $CC(x)=x$.

RFI代数X是正规的[6], 或者一个NFI代数, 如果以下条件成立:

(I_7) $(x\to y)\to y=(y\to x)\to x$.

FI代数X是交换的[15], 或者一个CFI代数, 如果运算$\odot$满足交换律, 或者等价地, 条件(I_7)成立.

如果X是FI代数, $(X,\le)$构成格, 并且条件:

(I_8) $x\to y\vee z=(x\to y)\vee(x\to z)$

成立, 那么我们称X为模糊蕴涵格, 简称为FI格. 正则的FI格称为RFI格.

引入条件(I_8)的主要目的是使得蕴涵运算$\to$和格上的偏序具有协调性(见定理2.3), 而这种协调性正是模糊逻辑系统所需要的. 本文重点讨论FI格, 它的性质, 以及它与其它模糊逻辑代数结构之间的关系.

例2.1 如果$X=[0,1]$且R_T是由左连续t-范数T诱导的剩余型蕴涵, 即

$$R_T(x,y)=\sup\{z\in[0,1]\mid T(x,z)\le y\},\tag{3}$$

那么有序三元组$(X,R_T,0)$是FI格.

值得指出的是, 如果t-范数T不是左连续的, 那么$(X,R_T,0)$不必是FI代数. 事实上, 一般说来, R_T不必满足条件(I_1) 和(I_2).

以下命题列出了FI代数和RFI代数的主要性质[6,12-16].

命题2.1 假设X是FI代数, 那么对于任何$x,y,z\in X$, 我们有

(I_9) $x\to 1=1$;

(I_{10}) $x\to(y\to x)=1$;

(I_{11}) $1\to x=x$;

(I_{12}) $x\le y\implies z\to x\le z\to y,\ y\to z\le x\to z$;

(I_{13}) $x\le y\to z\ \Leftrightarrow\ y\le x\to z$;

(I_{14}) $(y\to z)\le(x\to y)\to(x\to z)$;

(I_{15}) $x\le CC(x)$;

(I_{16}) $CCC(x)=C(x)$.

进一步, 如果X是RFI代数, 那么

(I_{17}) $x\to y=C(y)\to C(x)$;

(I_{18}) $C(x)\to y=C(y)\to x$;

(I_{19}) $T(x,y)=T(y,x),\ S(x,y)=S(y,x)$;

(I_{20}) $T(T(x,y),z)=T(x,T(y,z)),\ S(S(x,y),z)=S(x,S(y,z))$;

(I_{21}) $x\le y\implies T(x,z)\le T(y,z),\ S(x,z)\le S(y,z)$;

(I_{22}) $T(x,1)=x,\ S(x,0)=x$;

(I_{23}) $S(x,y)=C(T(C(x),C(y))),\ T(x,y)=C(S(C(x),C(y)))$;

(I_{24}) $S(x,C(x))=1,\ T(x,C(x))=0$;

(I_{25}) $x\to(y\to z)=T(x,y)\to z$.

运算T和S分别称为由RFI代数X诱导的t-范数和t-余范数.

注意到, t-范数和t-余范数通常是定义在[0,1]上具有性质$(\mathrm{I}_{14}-\mathrm{I}_{16})$的二元运算. 但是, 为了方便起见, 文献中也将RFI代数中的算子T和S分别叫做t-范数和t-余范数. 从上下文看来, 这样做一般不会引起混淆.

不难证明, 如果X是CFI代数, 那么X必定是RFI代数[15,13]. 这表明NFI代数和CFI代数是完全相同的代数系统, 而且在NFI代数的定义中不必要求X是正则的. 有鉴于此, 今后将不再提及CFI代数.

定理2.1 在定义2.1中, 条件(I_5)是冗余的, 即这个条件可以由其余4个条件$(\mathrm{I}_1-\mathrm{I}_4)$导出.

证 首先证明这样的事实: 不使用条件(I_5), 按照(1)定义在X上的二元关系$\le$仍然是偏序关系. 事实上, 由条件(I_3)可知, $\le$是自反的, 由条件(I_4)可知, $\le$是反对称的, 由条件(I_2)可知, $\le$是传递的.

其次, 不使用条件(I_5), 证明运算$\to$满足单调性(I_{12}). 事实上, 如果$x\le y$, 即$x\to y=1$, 那么

由(I_2)可得

$$(y \to z) \to (x \to z) = 1.$$

这表明$y \to z \le x \to z$. 类似地能够证明$z \to x \le z \to y$. 这里需要条件(I_1)和(I_2).

现在, 能够方便地从$0 \to 0 = 1$和$\to$的单调性证明条件(I_5)成立.

在偏序集$(X, \le)$中, 条件(I_3)和(I_4)可以综合成模糊逻辑领域熟知的D-P条件[5]:

(I_3') $x \to y = 1 \iff x \le y$.

通过定理2.1, 可以得到以下的FI代数的等价定义.

定理2.2 假设$(X, \le)$是有界偏序集, $\to$是X上的二元运算. 那么X是FI代数的充分必要条件是(I_1), (I_2)和(I_3')对于任何$x, y, z \in X$成立.

以下命题给出了FI代数成为RFI代数的几个等价条件.

命题2.2[13] 如果X是FI代数, 那么下列条件等价:

(i) X是RFI代数, 即$CC(x) = x,\ x \in X$;

(ii) $C(x) \to C(y) = x \to y,\ x, y \in X$;

(iii) $C(x) \to y = C(y) \to x,\ x, y \in X$;

(iv) $T(x, 1) = x,\ x \in X$;

(v) $S(x, 0) = x,\ x \in X$.

定理2.3 设$(X, \le, 0, 1)$是有界格, $\to$是X上的二元运算, 则$(X, \to, 0)$ 构成RFI格的充分必要条件是以下等式成立:

(I_1) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$;

(I_2') $(x \to y) \wedge ((y \to z) \to (x \to z)) = x \to y$;

(I_6) $CC(x) = (x \to 0) \to 0 = x$;

(I_8) $x \to y \vee z = (x \to y) \vee (x \to z)$;

(I_{10}) $x \to (y \to x) = 1$;

(I_{11}) $1 \to x = x$.

因此, 由所有RFI格组成的代数类是一个代数簇, 即等式代数类, 从而这个代数类关于子代数, 同态像, 以及乘积封闭.

证 必要性明显成立. 为了证明充分性, 只需证明以下条件成立:

(I_3') $x \to y = 1 \iff x \le y$.

首先注意到, 根据已知条件可以得到:

(I_{17}) $x \to y = C(y) \to C(x)$.

事实上, 由条件(I_2)可以得到,

$$x \to y \le C(y) \to C(x).$$

反之有

$$C(y) \to C(x) \le CC(x) \to CC(y) = x \to y.$$

其次, 由(I_{11})知, $C(1) = 1 \to 0 = 0$.

现在能够从条件(I_{17})证明条件(I_3').

"$\Longrightarrow$". 如果$x \to y = 1$, 那么

$$\begin{aligned} x &= 1 \to x = C(x) \to 0 \\ &\leq (C(y) \to C(x)) \to (C(y) \to 0) = (x \to y) \to y \\ &= 1 \to y = y. \end{aligned}$$

"$\Longleftarrow$". 由已证的必要性可知条件(I_3)成立. 事实上, 从$1 \to (x \to x) = x \to (1 \to x) = 1$ 及已证的必要性可得, $x \to x = 1$.

假设$x \leq y$, 有$x \to y = x \to x \vee y = (x \to x) \vee (x \to y) = 1$.

值得考虑的问题是: 所有FI格是否也构成代数簇? 所有FI代数是否构成代数簇? 这两个问题目前仍然没有解决.

人们自然要问: 作为偏序集, FI代数何时成为格? 以下定理给出了RFI代数成为格的几个充分条件.

命题2.3[13] 如果X是RFI代数, T和S分别时是由X诱导的t-范数和t-余范数, 则当条件(I_7)或者以下条件之一成立时, $(X, \leq)$构成格:

(i) $(X, \leq)$是并半格;

(ii) $(X, \leq)$是交半格;

(iii) $T(x, S(y, z)) = S(T(x, y), T(x, z))$, $\forall x, y, z \in X$;

(iv) $S(x, T(y, z)) = T(S(x, y), S(x, z))$, $\forall x, y, z \in X$.

进一步, T和S分别是下确界和上确界算子, 并且$(X, T, S, 0, 1)$构成有界分配格.

由以上命题可以看出, RFI代数不必是格, 更不要说一般的FI代数了. 然而, 格结构是模糊逻辑中最基本的代数结构. 这正是强调FI格的主要原因.

Heyting型FI代数, 简称为HFI代数, 是重要的FI代数. 这类代数与直觉主义逻辑关系密切.

定义2.2[12]**.** 一个(2,0)-型代数$(X, \to, 0)$叫做HFI代数, 如果以下条件对任何$x, y, z \in X$成立:

(I_{10}) $x \to (y \to x) = 1$;

(I_{26}) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) = 1$;

(I_{27}) 如果$1 \to x = 1$, 那么$x = 1$;

(I_4) 如果$x \to y = y \to x = 1$, 那么$x = y$;

(I_5) $0 \to x = 1$,

其中$1 = 0 \to 0$.

命题2.4[12] 假设X是一个HFI代数. 那么条件(I_1), (I_2), (I_3)及以下条件成立:

(I_{28}) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$;

(I_{29}) $x \to y = x \to (x \to y)$;

(I_{30}) $(x \to y) \to ((y \to x) \to x) = (y \to x) \to ((x \to y) \to y)$;

(I_{31}) $CC(x) = C(x) \to x$, 这里$C(x) = x \to 0$.

由以上命题可知, 任何HFI代数必是FI代数. 反之, 一个FI代数X是HFI代数当且仅当条件(I_{28})或者(I_{29})成立.

推论2.1 假设$(X, \leq)$是有界偏序集, $\to$是X上的二元运算. 那么X是HFI代数当且仅当条件(I_1), (I_2), (I_3')和(I_{28})(或者(I_{29}))成立.

§3 FI格类的若干子类

在经典的二值逻辑中, 命题公式集合$F(S)$是由命题变元集合$S=\{p_1,p_2,\ldots\}$通过命题联结词$\neg$(否定), $\wedge$(合取), $\vee$(析取), $\to$(蕴涵)和$\leftrightarrow$(等价)按照熟知的规则组合而成, 然后通过引入适当的公理与推理规则, 形成了逻辑的语法结构. 为了研究所建立的语法结构的逻辑性质, 必须建立相应的语义理论. 在经典逻辑中, 选用真值集合$\{0,1\}$, 并且在这个集合上定义相应的五个运算, 通过代数同态在公式集合与真值集合之间建立联系, 进而形成了相应的语义理论. 对于一个逻辑体系, 语构关于对应语义的和谐性(即可靠性与完备性)是至关重要的. 在经典逻辑理论中, Boole代数发挥了核心的作用.

定义3.1[5] 一个$(2,2,1,0,0)$-型代数$(B,\wedge,\vee,',0,1)$称为Boole代数, 如果$(B,\wedge,\vee,0,1)$是有界分配格, 并且运算$'$满足:

(i)(De Morgan对偶律) $(a\wedge b)'=a'\vee b'$, $(a\vee b)'=a'\wedge b'$;

(ii)(互补律) $a\wedge a'=0$, $a\vee a'=1$.

由于经典逻辑的简洁性与严密性, 使之成为众多自然科学学科和社会科学学科共同的逻辑基础; 又由于开关电路与真值集合之间的对应性, 经典逻辑演算在计算机中得到成功的实现, 这为理论计算机科学的发展提供了强大的推动力, 同时也极大地促进了人工智能理论与技术的快速发展.

不过, 经典逻辑是有局限性的, 尤其是当人们面临使用计算机去模拟人类智能的时候. 人类智能的最重要的特征之一就是它可以十分流畅地处理模糊信息. 为了使计算机具有类似的处理模糊信息的能力, 作为经典逻辑的自然延伸, 模糊逻辑就应运而生了.

在模糊逻辑中, 命题公式集合$F(S)$仍由命题变元集合$S=\{p_1,p_2,\ldots\}$通过若干个命题联结词按照熟知的规则组合而成, 这些联结词包括$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$, 还可能有另外的联结词, 然后通过引入适当的公理与推理规则, 形成了逻辑的语法结构. 在模糊逻辑中, 选用真值集合$[0,1]$, 并且在这个集合上定义相应的运算, 也可通过代数同态在公式集合与真值集合之间建立联系, 进而形成相应的语义理论, 并且讨论语构关于对应语义的和谐性. 在模糊逻辑理论中, 相应的模糊逻辑代数也发挥着重要的作用.

当代模糊逻辑理论中占主导地位的是基于t-范数[1-2]的模糊逻辑(t-norm based fuzzy logics). 在这类逻辑中, 人们使用一个t-范数T作为某种合取联结词的语义解释, 并由此解释其他命题联结词, 比如, 蕴涵联结词解释为由t-范数T诱导的剩余型蕴涵算子$R:\ [0,1]^2\to[0,1]$, 否定联结词解释为模糊否定算子$n:\ [0,1]\to[0,1]$, 而析取联结词解释为与T关于算子n对偶的t-余范数S, 它们分别定义为:

$$R(a,b)=\sup\{c\in[0,1]|T(a,c)\le b\};\quad n(a)=R(a,0);\quad S(a,b)=n(T(n(a),n(b)))$$

因此, 这样的逻辑理论可以通过一个t-范数给出确定的解释, 这也是人们称这类逻辑理论为基于t-范数的模糊逻辑的原因. 这样定义的逻辑理论具有许多优良的逻辑性质, 基本反映了人类日常思维与推理中的许多逻辑特征, 并且已经在模糊推理和人工智能研究中获得了广泛的应用.

以下是在模糊逻辑的理论与应用研究中经常使用的几个模糊逻辑的语义体系:

例3.1 Łukasiewicz区间$[0,1]$

$$T_L(a,b)=0\vee(a+b-1),\quad R_L(a,b)=1\wedge(1-a+b),$$
$$\neg a=1-a,\quad a\wedge b=\min(a,b),\quad a\vee b=\max(a,b).$$

例3.2 Gödel区间$[0,1]$

$$T_G(a,b)=a\wedge b,\quad R_G(a,b)=\begin{cases}1, & a\le b,\\ b, & a>b.\end{cases}$$

$$\neg a=\begin{cases}1, & a=0,\\ 0, & a\ne 0.\end{cases}\quad a\wedge b=\min(a,b),\quad a\vee b=\max(a,b).$$

例3.3 积区间$[0,1]$

$$T_P(a,b)=ab,\quad R_P(a,b)=\begin{cases}1, & a\le b,\\ \frac{b}{a}, & a>b.\end{cases}$$

$$\neg a=\begin{cases}1, & a=0,\\ 0, & a\ne 0.\end{cases}\quad a\wedge b=\min(a,b),\quad a\vee b=\max(a,b).$$

例3.4 R_0区间$[0,1]$

$$T_0(a,b)=\begin{cases}0, & a+b\le 1,\\ a\wedge b, & a+b>1.\end{cases}\quad R_0(a,b)=\begin{cases}1, & a\le b,\\ (1-a)\vee b, & a>b.\end{cases}$$

$$\neg a=1-a,\quad a\wedge b=\min(a,b),\quad a\vee b=\max(a,b).$$

在以上四个例子给出的t-范数中, 前三个是连续的, 而第四个是左连续的. 模糊逻辑理论研究中, 基于连续t-范数或左连续t-范数的模糊逻辑受到特别的关注.

以上的模糊逻辑都是基于某个特定的t-范数, 那么, 能否建立一个一般的基于一类t-范数的模糊逻辑? 这方面的研究已经取得了相当丰硕的成果: Hájek建立的BL(Basic Logic)理论是基于所有连续的t-范数的模糊逻辑[3], 而Esteva 和Godo的MTL(Monoidal T-norm based Logic)理论则是基于所有的左连续t-范数的模糊逻辑[4], 这两个模糊逻辑体系所对应的模糊逻辑代数系统分别是BL代数和MTL代数, 而这两个代数系统都是特殊的剩余格[3-5,7,18].

定义3.2[3-5] 一个(2,2,2,2,0,0)-型代数系统$(X,\vee,\wedge,\otimes,\to,0,1)$称为剩余格, 如果

(i) $(X,\vee,\wedge,0,1)$是有界格;

(ii) $(X,\otimes,1)$是以1为单位元的交换半群;

(iii) $(\otimes,\to)$是X上的伴随对, 即

(I_{32}) $x\otimes y\le z \iff x\le y\to z$.

剩余格X是正则的, 如果运算$C: x\mapsto x\to 0$满足

(I_6) $CC(x)=x,\ x\in X$.

剩余格X是强的(或正规的), 如果

(I_8) $x\to y\vee z=(x\to y)\vee(x\to z)$.

剩余格X称为MTL代数, 如果

(I_{33}) $(x\to y)\vee(y\to x)=1$.

由于在剩余格中, 条件(I_8)和(I_{35})是等价的, 强剩余格和MTL代数是等价的代数系统.

MTL代数X称为BL代数, 如果

(I_{34}) $x\wedge y=x\otimes(x\to y)$.

进一步, 正则的BL代数X称为MV代数.

BL代数X称为G代数, 如果

(I_{35}) $x\otimes x=x$.

关于IMTL(involutive monoidal t-norm based logic), WNM (weak nilpotent minimum logic), NM(nilpotent minimum logic, 或者R_0), 以及积(product)代数的定义, 请参见文献[3-4, 7, 18-19].

本文作者在[10, 19-20]中给出了剩余格和正则剩余格的若干性质和一些特征刻画. 以下命题列出了其中对本文有用的一些结果.

命题3.1 如果$(L,\otimes,\to)$是剩余格, 那么(I_1)及以下条件成立:

(I_{36}) $x\le y\to x\otimes y$;

(I_{37}) $(x\to y)\otimes x\le y$;

(I_{38}) $1\otimes x=x$;

(I_{39}) $(x\vee y)\otimes z=(x\otimes z)\vee(y\otimes z)$;

(I_{40}) $x\to y\wedge z=(x\to y)\wedge(x\to z)$.

明显地, 定义3.2中给出的剩余格的条件并不是独立的. 以下命题给出了剩余格的特征刻画.

命题3.2 $(L,\otimes,\to)$是剩余格当且仅当以下条件对于任何$x,y,z\in L$成立:

(I_{32}) $x\otimes y\le z\iff x\le y\to z$;

(I_{38}) $1\otimes x=x$;

(I_1) $x\to(y\to z)=y\to(x\to z)$,

并且这三个条件是相互独立的.

命题3.3 设L是有界格, $\otimes$和$\to$是L上的二元运算, 则$(L,\otimes,\to)$ 为剩余格的充分必要条件是(I_1)和$(\mathrm{I}_{36})-(I_{40})$对于任何$x,y,z\in L$成立.

显然, 不等式(I_{36})和(I_{37})可以转化为等式. 因此, 所有剩余格构成代数簇, 即等式代数类. 进一步, 所有正则剩余格和强剩余格也都构成代数簇.

我们知道, 对于任何左连续的t-范数T, 以及对应的剩余型蕴涵$\to_T$:

$$a\to_T b=\bigvee\{x\in[0,1]\mid T(x,a)\le b\},$$

二元组$(T,\to_T)$构成[0,1]上的伴随对, 从而$([0,1],T,\to_T)$成为强剩余链.

基于以上结果, 能够澄清FI格和一些重要的模糊逻辑代数的关系, 这些代数包括剩余格, MTL代数, BL代数和MV代数等.

一般说来, 剩余格不必是FI格, 反之亦然. 但是很明显地, 任何MTL(特别地, WNM, NM (R_0))代数都是FI格. 自然地, 任何BL(特别地, MV, G或积)代数是FI格. 进一步, 任何IMTL(特别地, MV或NM(R_0))代数都是RFI格, MV代数还是NFI格.

对于NFI代数和MV代数的关系, 以下的结果是相当深刻的:

定理3.1[14] 若$(X,\vee,\wedge,*,\to,0,1)$是MV代数, 那么$(X,\to,0)$是NFI代数. 反之若$(X,\to,0)$是NFI代数, 那么$(X,\vee,\wedge,\times,\to,0,1)$是MV代数, 其中

$$x\vee y=(x\times y^*)+y,\ x\wedge y=(x+y^*)\times y,\ x\times y=(x\to y^*)^*,$$
$$x^*=x\to 0,\ x+y=x^*\to y,\quad x,y\in X.$$

进一步, NFI代数, MV代数和格蕴涵代数[21]都是等价的代数系统[6,14].

定理3.2[22] 如果X是RFI代数, 那么

(i) 对于任何$x,y\in X$, 集合

$$A(x,y)=\{z\in X\mid x\le y\to z\}$$

总有最小元, 记做$x\otimes y$, 并且

$$x\otimes y=\min\ A(x,y)=C(x\to C(y)).$$

进一步, $(\otimes,\to)$构成X上的伴随对, 从而$(X,\otimes,\to)$构成剩余格.

(ii) 对于由(i)确定的算子$\otimes$及任何$x,y\in X$, 集合

$$B(x,y)=\{z\in X\mid x\otimes z\le y\}$$

总有最大元, 并且

$$x\to y=\max\ B(x,y)=C(x\otimes C(y)).$$

这个定理表明所有RFI格组成的簇是剩余格簇的子簇. 进一步, 知道MTL代数是FI格. 从而, IMTL代数簇和MV代数簇都是RFI格簇的子簇.

推论3.1 如果$(X,\to,0)$是RFI格, 那么$(X,T,\to)$是IMTL代数, 其中运算T是由X诱导的t-范数. 反之, 如果$(X,\otimes,\to)$是IMTL代数, 那么$(X,\to,0)$是RFI代数.

这个推论表明, IMTL代数和RFI格是等价的代数系统.

定理3.3 如果$(X,\to,0)$是FI格, 并且X存在满足以下性质:

$$x\to y\le x\otimes z\to y\otimes z \tag{4}$$

的二元运算$\otimes$与蕴涵运算$\to$组成伴随对, 那么$(X,\otimes,\to)$是剩余格.

证 为了证明X是剩余格, 只需证明运算$\otimes$是以1为单位元的交换半群.

事实上, 运算$\otimes$满足交换律等价于蕴涵运算$\to$满足条件(I_{13}), 运算$\otimes$满足单位元律等价于蕴涵运算$\to$满足条件(I_3'), 运算$\otimes$满足结合律等价于蕴涵运算$\to$满足条件(I_{14})和不等式(4). 而蕴涵$\to$需要满足的条件(I_{13}), (I_{14}), (I_3')在FI代数中都是已知的(见命题2.1).

在前面已经谈及, 许多重要的模糊逻辑代数都是剩余格. 这里还要特别指出, 有界的Heyting代数是剩余格. 格$(X,\le,\wedge,\vee)$是Heyting代数, 如果X上存在二元运算"$\to$"使得以下条件成立对于任何$a,b,c\in X$成立:

$$a\wedge b\le c\iff a\le b\to c.$$

不难看出, 所有的有界Heyting代数构成代数簇.

定理3.4 如果$(X,\to,0)$是有界的Heyting代数, 那么$(X,\to,0)$是FI格, 并且满足以下条件:

(i) $x\wedge(x\to y)\le y$, $x,y\in X$;

(ii) $(x\to z)\wedge(x\to z)\le x\to y\wedge z$, $x,y,z\in X$.

反之, 如果X是FI格, 并且满足条件(i)和(ii), 那么X是Heyting代数.

证 Johnstone在文献[8]中证明了: 如果$\to$是一个有界格H上的二元运算, 那么$(X,\to)$是Heyting代数当且仅当$\to$满足以下条件:

(J_1) $x\to x=1$; (J_2) $x\wedge(x\to y)=x\wedge y$;

(J_3) $y\wedge(x\to y)=y$; (J_4) $x\to(y\wedge z)=(x\to y)\wedge(x\to z)$.

如果X是Heyting代数, 那么$(X,\wedge,\to)$是剩余格. 自然地, X是FI代数, 并且条件(i)和(ii)成立.

反之, 如果X是FI格, 并且满足条件(i)和(ii), 那么(J_1)由(I_3)可得; (J_2)可由(i)以下不等式导出

$$y\le x\to y,\quad x\wedge y\le x\wedge(x\to y);$$

(J_3)明显成立; 对于(J_4), "左边$\le$右边"是显然的, 而"右边$\le$左边"已经由条件(ii)给出.

容易看出, 在有界的Heyting代数$(X,\to,0)$中, 条件(I_{28})成立:

$$x\to(x\to y)=x\wedge x\to y=x\to y.$$

因此得到以下结论:

定理3.5 如果$(X,\to,0)$是有界的Heyting代数, 那么$(X,\to,0)$是HFI格.

进一步可以得到:

推论3.2 如果$(X,\to,0)$是HFI格, 并且满足条件(I_{33})和定理3.4的(i),(ii), 那么$(X,\vee,\wedge,\wedge,\to,0,1)$是G代数.

[12]证明了一个HFI代数X是正则的, 即$CC(x)=x$, $x\in X$, 那么$(X,T,S,C,0,1)$是Boole代数, 其中算子T,S,C由(2)定义. 反过来也是正确的:

定理3.6 如果$(B,\wedge,\vee,',0,1)$是Boole代数, 那么$(B,\to,0)$是RHFI代数, 这里蕴涵运算定义为:

$$x\to y=x'\vee y. \tag{5}$$

证 我们知道Boole代数B按照(5)定义的蕴涵构成剩余格[5], 而且正则性(I_6)显然成立. 因此, 为了证明本定理, 只需证明条件(I_{26})和(I_{27})成立即可.

对于(I_{26}), 有

$$x\to(y\to z)=x'\vee(y'\vee z)=x'\vee y'\vee z.$$

而

$$(x\to y)\to(x\to z)=(x'\vee y)'\vee(x'\vee z)=x'\vee y'\vee z.$$

对于(I_{27}), 由$1\to x=1$可得, $0\vee x=1$, 即$x=1$.

综合定理3.5和文献[12]中的结论可知, RHFI代数和Boole代数可以看成是相同的代数系统.

通过以上讨论我们已经看到, 许多重要的模糊逻辑代数类都是FI格类的子类. 在图1中给出了若干模糊逻辑代数类的关系图. 图1中有关符号的含义如下: $\mathcal{C}_{FI}$-FI代数类, $\mathcal{V}_L$-格簇, $\mathcal{C}_{FIL}$-FI格类, $\mathcal{C}_{HFIL}$-HFI格类, $\mathcal{V}_H$-有界Heyting代数簇, $\mathcal{V}_{RL}$-剩余格簇, $\mathcal{V}_{MT}$-MTL代数簇, $\mathcal{V}_{BL}$-BL代数簇, $\mathcal{V}_{WNM}$-WNM代数簇, $\mathcal{V}_{IMTL}$-IMTL代数簇, $\mathcal{V}_0$-RFI格簇, $\mathcal{V}_1$-R_0代数簇, $\mathcal{V}_{NM}$-NM代数簇, $\mathcal{V}_{MV}$-MV代数簇, $\mathcal{V}_2$-NFI代数簇, $\mathcal{V}_{\Pi}$-积代数簇, $\mathcal{V}_G$-G代数簇, $\mathcal{V}_B$-Boole代数簇, $\mathcal{V}_3$-RHFI代数簇.

§4 结束语

本文对有关FI代数的已有研究做了简要的综述, 并且表述了两个基本的事实. 其一是: FI代数是一类十分有趣的模糊逻辑代数, 这类代数具有许多有趣的性质, 它已经被应用于模糊逻辑的理论研究, 我们相信它也将在模糊推理中发挥重要的作用; 其二是: FI代数与几类重要的模糊逻辑代数具有十分密切的联系, 这些代数包括MV代数, R_0代数, BL代数, MTL代数, Heyting代数和剩余格.

尽管FI代数的理论早在1990年就被建立, 但是这个方向的发展在上个世纪并不快, 至今仍然存在一些有趣的问题值得做更深入的研究. 例如, 由所有FI代数组成的代数类是否代数簇? FI代数的形式化研究还是很不够的; FI代数中关于滤子, 同余关系, 商代数, 以及同态和同构的代数性质需要仔细的讨论; FI代数的范畴性质也还是不清楚的; 特别地, 尚未见到FI代数在模糊系统与专家系统等领域的应用研究成果.

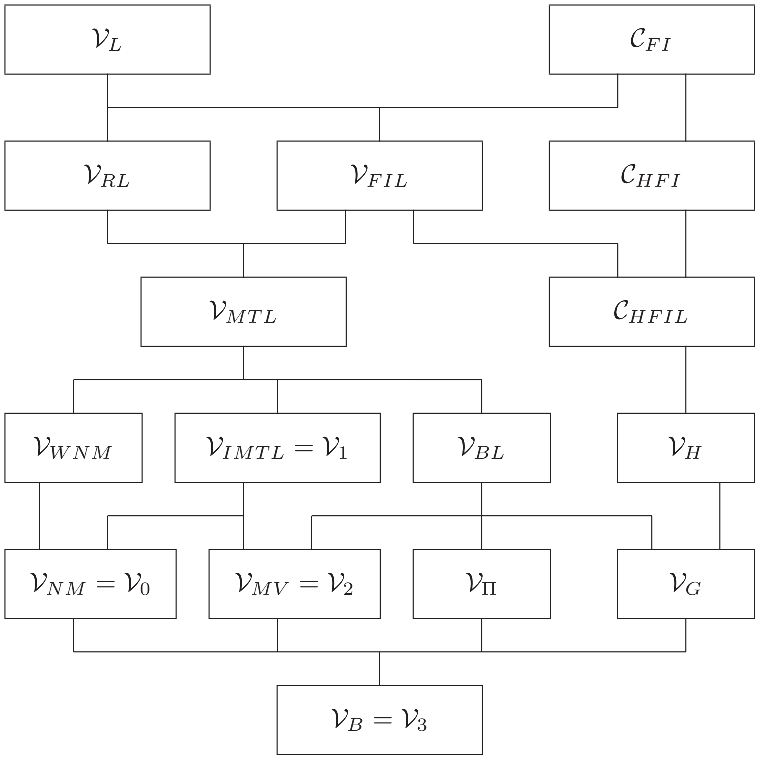

图1 若干模糊逻辑代数类的关系图

参考文献:

[1] Menger K, Statistical metrics[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences(USA), 1942, 8: 535-537.

[2] Klement E P, Mesiar R, Pap E. Triangular Norms[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

[3] Hájek P. Metamathematics of Fuzzy Logic[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1998.

[4] Esteva F, Godo L. Monoidal t-norm based logic: towards a logic for left-continuous t-norms[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 124: 271-288.

[5] Wang Guojun. Non-classical Mathematical Logic and Approximate Reasoning[M]. Beijing: Science Press, 2000 (in Chinese).

[6] Wang Guojun. MV-algebras, BL-algebras, R_0-algebras, and multiple-valued logic[J]. Fuzzy Sysems and Mathematics, 2002, 16(2): 1-15 (in Chinese).

[7] Pei Daowu. On equivalent forms of fuzzy logic systems NM and IMTL[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 138(1): 187-195.

[8] Johnstone P T. Stone Spaces[M]. London: Cambridge University Press, 1982.

[9] Pei Daowu, Wang Guojun. The completeness and applications of the formal system $\mathcal{L}^*$[J]. Science in China (Series F), 2002, 45(1): 40-50.

[10] Pei Daowu. A logic system based on strong regular residuated lattices and its completeness[J]. Acta Mathematica Sinica, 2002, 45(4): 745-752 (in Chinese).
[11] Wu Wangming. Principles and Methods of Fuzzy Reasoning[M]. Guiyang: Guizhou Science and Technology Press, 1994 (in Chinese).
[12] Wu Wangming. Fuzzy implication algebras[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 1990, 4(1): 56-64 (in Chinese).
[13] Li Zhiwei, Sun Limin, Zheng Chongyou. Regula fuzzy implication algebra[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2002, 16(2): 22-26 (in Chinese).
[14] Liu Lianzhen, Wang Guojun. Fuzzy implication algebras and MV-algebra[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 1998, 12(1): 20-25 (in Chinese).
[15] Wu Da. Commutative fuzzy implication algebras[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 1999, 13(1): 27-30 (in Chinese).
[16] Zhu Yiquan. Some properties of the induced order in FI-algebras[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2006, 20(3): 54-58 (in Chinese).
[17] Zhu Yiquan. A logic system based on FI-algebras and its completeness[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2005, 19(2): 25-29 (in Chinese).
[18] Pei Daowu. The characterizations of MTL algebras[J]. Acta Mathematica Sinica, 2007, 50(6): 1201-1206 (in Chinese).
[19] Pei Daowu. Fuzzy logic algebras on residuated lattices[J]. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 2004, 28: 519-531.
[20] Pei Daowu. The characterization of residuated lattices and regular residuated lattices[J]. Acta Mathematica Sinica, 2002, 45(2): 271-278 (in Chinese).
[21] Xu Yang, Ruan Da, Qin Keyun, et al. Lattice-Valued Logic[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
[22] Zhu Yiquan. On the adjoint operators of regular FI-algebras[J]. J. Ningxia University (Nat. Sci. Ed.), 2003, 24(4): 296-299 (in Chinese).

Theory of fuzzy implication lattices

PEI Dao-wu, WANG San-min, YANG Rui
(School of Sciences, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China)

Abstract: Fuzzy implication algebras, FI algebras for short, were proposed by Professor Wu Wangming in 1990. Up to now, there have been many papers on FI algebras, and a series of results about FI algebras have been reported. This paper mainly reviews researches on FI algebras: its concepts and properties, relationships between FI algebras and several classes of important fuzzy logical algebras such as residuated lattices, MTL algebras, BL algebras and Heyting algebras. Some new results are given. Owing to the importance of lattice structures for fuzzy logic, in this paper, we specially emphasize fuzzy implication lattices, FI lattices for short, a class of interesting FI algebras. It is proved that all regular FI lattices form an algebraic variety, i.e., an equational class of algebras. Regular FI lattices will play important roles in both researches of fuzzy logic and approximate reasoning.

Keywords: fuzzy logic; FI algebra; FI lattice; residuated lattice; algebraic variety
MR Subject Classification: 03B50; 03B52