ANOVA 多因素方差分析

- Model Introduction
  - 交互效应
    - **例1：不存在交互效应**
    - **例2：存在交互效应**
  - 关注的参数:
- SST 分解及估计量的性质
  - 总平方和（SST）的分解 $SST = S_e + S_{AB}$
  - 自由度
    - S_e 的分布
  - 误差均方（MSE）
- Hypothesis Testing (H_0)
  - $SSAB$ 的表达式展开
    - 投影算子的性质
  - 重要经典定理：正交变换下随机矩阵的同分布性
    - proof
  - 双因素试验交互效应的F检验
- 交互效应不显著时的主效应检验（H_0^*）
  - 总平方和（SST）的分解（交互效应为0）
  - 主效应的检验逻辑
  - SSA's distribution under H_0^*
    - SS_A的表达式（$H_0 : a_i = 0$下）
    - $\boxed{\bar{\varepsilon}_{i\cdot\cdot} - \bar{\varepsilon}_{\cdot\cdot\cdot}}$的矩阵投影表示
  - Se 's distribution under H_0^*
    - 投影算子$\boxed{I - P_1 - P_2 + P_3}$的性质
    - $\boxed{S_e}$的分布

- 误差均方$\boxed{MSE}$的分布
- $\boxed{SS_A}$与$\boxed{S_e}$的独立性验证
- 最终的F统计量
- 双因素试验的ANOVA表（分交互效应是否显著两种情况）
  - 一、交互效应显著（$\boxed{r_{ij} \neq 0}$）的ANOVA表
  - 二、交互效应不显著（$\boxed{r_{ij} = 0}$）的ANOVA表
  - remark

- CI
  - $\boxed{\bar{\mu}_{i\cdot}}$
  - 当$\boxed{r_{ij} = 0}$时，$\boxed{\bar{\mu}_{i\cdot} - \bar{\mu}_{j\cdot}}$的t分布（效应差的区间估计）
  - 一般线性组合$\boxed{\sum_{i=1}^{a} C_i \bar{\mu}_{i\cdot}}$的估计
  - 当$\boxed{r_{ij} \neq 0}$时，$\boxed{\bar{\mu}_{i\cdot} - \bar{\mu}_{j\cdot}}$的t分布

Model Introduction

现假设有两个因素

Factors：A、B

- 因素A的水平：$A_1, A_2, \ldots, A_a$（共a个水平）
- 因素B的水平：$B_1, B_2, \ldots, B_b$（共b个水平）

treatment：$A_i + B_j$（因素A第i水平与因素B第j水平的组合）

- 总体均值表格（μ_{ij}为$A_i \times B_j$组合下的总体均值）：

$A \setminus B$	B_1	...	B_j	...	B_b
A_1	μ_{11}	...	μ_{1j}	...	μ_{1b}
...	...	...	...	...	...
A_i	μ_{i1}	...	μ_{ij}	...	μ_{ib}
...	...	...	...	...	...
A_a	μ_{a1}	...	μ_{aj}	...	μ_{ab}

因素A第i水平下的均值：$\bar{\mu}_{i\cdot} = \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} \mu_{ij}$（表示因素水平$A_i$下的均值）

因素B第j水平下的均值：$\bar{\mu}_{.j}=\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a}\mu_{ij}$

总均值：$\bar{\mu}_{..}=\frac{1}{ab}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\mu_{ij}$

交互效应

- **处理效应(treatment effect)**：$\mu_{ij}-\bar{\mu}_{..}$
- 因素A_i的主效应(main effect)：$\alpha_i=\bar{\mu}_{i.}-\bar{\mu}_{..}$
- 因素B_j的主效应(main effect)：$\beta_j=\bar{\mu}_{.j}-\bar{\mu}_{..}$
- 交互效应：

$$\gamma_{ij}=\mu_{ij}-\bar{\mu}_{..}-\alpha_i-\beta_j=\mu_{ij}+\bar{\mu}_{..}-\bar{\mu}_{i.}-\bar{\mu}_{.j}$$

- 若$\gamma_{ij}=0$：不存在交互效应 $\iff$ α_i、β_j可加
- 若$\gamma_{ij}\neq 0$：存在交互效应 $\iff$ α_i、β_j不可加

例1：不存在交互效应

- 因素A（Gender）：M（A_1）、F（A_2）
- 因素B（Age）：Young（B_1）、Middle（B_2）、Old（B_3）

$\text{Gender}(A)\setminus\text{Age}(B)$	**Young** (B_1)	**Middle** (B_2)	**Old** (B_3)	**因素A水平均值** $\bar{m}_{i.}$	**因素A主效应** a
M (A_1)	$m_{11}=11$	$m_{12}=13$	$m_{13}=18$	$\bar{m}_{1.}=14$	$a_1=2$
F (A_2)	$m_{21}=7$	$m_{22}=9$	$m_{23}=14$	$\bar{m}_{2.}=10$	$a_2=-2$
因素B水平均值 $\bar{m}_{.j}$	$\bar{m}_{.1}=9$	$\bar{m}_{.2}=11$	$\bar{m}_{.3}=16$	总均值 $\bar{m}_{..}=12$	-
因素B主效应 b_j	$b_1=-3$	$b_2=-1$	$b_3=4$	-	-

此时计算 γ_{ij} 均为0，故此例子中交互效应为 0

例2：存在交互效应

- 因素A（Gender）：M（A_1）、F（A_2）
- 因素B（Age）：Young（B_1）、Middle（B_2）、Old（B_3）

$\text{Gender}(A)\setminus\text{Age}(B)$	**Young** (B_1)	**Middle** (B_2)	**Old** (B_3)	**因素A水平均值** $\bar{m}_{i.}$	**因素A主效应** a
M (A_1)	$m_{11}=9$	$m_{12}=12$	$m_{13}=18$	$\bar{m}_{1.}=13$	$a_1=1$
F (A_2)	$m_{21}=9$	$m_{22}=10$	$m_{23}=14$	$\bar{m}_{2.}=11$	$a_2=-1$
因素B水平均值 $\bar{m}_{.j}$	$\bar{m}_{.1}=9$	$\bar{m}_{.2}=11$	$\bar{m}_{.3}=16$	总均值 $\bar{m}_{..}=12$	-

$\text{Gender}(A) \setminus \text{Age}(B)$	**Young** (B_1)	**Middle** (B_2)	**Old** (B_3)	**因素A水平均值** $\bar{m}_{i.}$	**因素A主效应** a
因素B主效应 b_j	$b_1 = -3$	$b_2 = -1$	$b_3 = 4$	-	-

此时计算 γ_{ij} 非 0，故此例子中存在交互效应

关注的参数：

总体参数：

- $a_i \triangleq \bar{\mu}_{i\cdot} - \bar{\mu}_{\cdot\cdot}$，满足 $\sum_{i=1}^{a} a_i = 0$
- $b_j \triangleq \bar{\mu}_{\cdot j} - \bar{\mu}_{\cdot\cdot}$，满足 $\sum_{j=1}^{b} b_j = 0$
- $r_{ij} = \mu_{ij} - \bar{\mu}_{i\cdot} - \bar{\mu}_{\cdot j} + \bar{\mu}_{\cdot\cdot}$
    - $\sum_{i=1}^{a} r_{ij} = a\bar{\mu}_{\cdot j} - a\bar{\mu}_{\cdot\cdot} - a\bar{\mu}_{\cdot j} + a\bar{\mu}_{\cdot\cdot} = 0$
    - $\sum_{j=1}^{b} r_{ij} = b\bar{\mu}_{i\cdot} - b\bar{\mu}_{i\cdot} - b\bar{\mu}_{\cdot\cdot} + b\bar{\mu}_{\cdot\cdot} = 0$

参数对应的估计

如果每个单元（A_i, B_j 组合）有 n 个观测（即**有重复的双因素试验**），表格结构如下：

$\boxed{A \setminus B}$	$\boxed{B_1}$	$\boxed{B_j}$	$\boxed{B_b}$
A_1	$y_{111}, y_{112}, \ldots, y_{11n}$	$y_{1j1}, y_{1j2}, \ldots, y_{1jn}$	$y_{1b1}, y_{1b2}, \ldots, y_{1bn}$
A_i	$y_{i11}, y_{i12}, \ldots, y_{i1n}$	$y_{ij1}, y_{ij2}, \ldots, y_{ijn}$（共$n$个观测）	$y_{ib1}, y_{ib2}, \ldots, y_{ibn}$
A_a	$y_{a11}, y_{a12}, \ldots, y_{a1n}$	$y_{aj1}, y_{aj2}, \ldots, y_{ajn}$	$y_{ab1}, y_{ab2}, \ldots, y_{abn}$

每个单元格内包含该水平组合下的 n 个重复观测值 y_{ijk}（$k = 1, 2, \ldots, n$）。

模型为：

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

其中：

- $i = 1, 2, \ldots, a$，$j = 1, 2, \ldots, b$，$k = 1, 2, \ldots, n$
- $\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$（独立同分布的随机误差）

1. **单元格均值 μ_{ij} 的估计**：

$$\hat{\mu}_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_{ijk}}{n} = \bar{y}_{ij\cdot}$$

且 $\hat{\mu}_{ij}$ 是 μ_{ij} 的 **BLUE（最佳线性无偏估计）、MLE（极大似然估计）、LSE（最小二乘估计）。**

2. **因素 A 的主效应 a_i 的估计**:

$$\hat{a}_i = \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdots}$$

（$\bar{y}_{i\cdot\cdot}$：A_i 水平下的总均值；$\bar{y}_{\cdots}$：全体观测的总均值）

3. **因素 B 的主效应 b_j 的估计**:

$$\hat{b}_j = \bar{y}_{\cdot j\cdot} - \bar{y}_{\cdots}$$

（$\bar{y}_{\cdot j\cdot}$：B_j 水平下的总均值）

4. **交互效应 r_{ij} 的估计**:

$$\hat{r}_{ij} = \bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\cdots}$$

同时这些参数的估计量仍然满足以下条件

- $\sum_{i=1}^{a} \hat{a}_i = 0$
- $\sum_{j=1}^{b} \hat{b}_j = 0$
- $\sum_{i=1}^{a} \hat{r}_{ij} = 0$，$\sum_{j=1}^{b} \hat{r}_{ij} = 0$

SST 分解及估计量的性质

总平方和（SST）的分解 $SST = S_e + S_{AB}$

总平方和定义为全体观测值与总均值的偏差平方和:

$$\begin{aligned} SST &= \sum_{i,j,k} (y_{ijk} - \bar{y}_{\cdots})^2 \\ &= \sum_{i,j,k} \left[(y_{ijk} - \bar{y}_{ij\cdot}) + (\bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{\cdots})\right]^2 \\ &= \sum_{i,j,k} (y_{ijk} - \bar{y}_{ij\cdot})^2 + \sum_{i,j,k} (\bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{\cdots})^2 \end{aligned}$$

（交叉项为0，因 $\sum_{i,j,k} (y_{ijk} - \bar{y}_{ij\cdot})(\bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{\cdots}) = 0$）

由观测值模型 $y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk}$，得:

$$\bar{y}_{ij\cdot} = \mu_{ij} + \bar{\varepsilon}_{ij\cdot} \implies y_{ijk} - \bar{y}_{ij\cdot} = \varepsilon_{ijk} - \bar{\varepsilon}_{ij\cdot}$$

因此 $\sum_{i,j,k} (y_{ijk} - \bar{y}_{ij\cdot})^2 = S_e$（**误差平方和**，仅与随机误差有关）。

由 $\hat{a}_i + \hat{b}_j + \hat{r}_{ij} = \bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{\dots}$，得：

$$\sum_{i,j,k} (\bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{\dots})^2 = \sum_{i,j,k} \left(\hat{a}_i + \hat{b}_j + \hat{r}_{ij}\right)^2 = S_{AB}$$

展开平方后，交叉项均为0：

1. $\sum_{i,j,k} \hat{a}_i \hat{b}_j = n \sum_i \hat{a}_i \sum_j \hat{b}_j = 0$（因 $\sum_i \hat{a}_i = 0, \sum_j \hat{b}_j = 0$）
2. $\sum_{i,j,k} \hat{a}_i \hat{r}_{ij} = n \sum_i \hat{a}_i \sum_j \hat{r}_{ij} = 0$（因 $\sum_j \hat{r}_{ij} = 0$）
3. $\sum_{i,j,k} \hat{b}_j \hat{r}_{ij} = 0$（因 $\sum_i \hat{r}_{ij} = 0$）

因此 S_{AB} 可分解为：

$$\begin{aligned} S_{AB} &= \sum_{i,j,k} \left(\hat{a}_i^2 + \hat{b}_j^2 + \hat{r}_{ij}^2\right) \\ &= \underbrace{\sum_{i,j,k} \hat{a}_i^2}_{SSA} + \underbrace{\sum_{i,j,k} \hat{b}_j^2}_{SSB} + \underbrace{\sum_{i,j,k} \hat{r}_{ij}^2}_{SSAB} \end{aligned}$$

其中：

- SSA：**因素A的主效应平方和**
- SSB：**因素B的主效应平方和**
- $SSAB$：**交互效应平方和**

最终可得：

$$SST = S_e + SSA + SSB + SSAB = S_e + S_{AB}$$

自由度

总平方和的自由度：

$$df_{SST} = abn - 1$$

因素A的主效应平方和（SSA）

$$\sum_{i=1}^{a} \hat{a}_i = 0，自由度：df_{SSA} = a - 1$$

因素B的主效应平方和（SSB）

$$\sum_{j=1}^{b} \hat{b}_j = 0，自由度：df_{SSB} = b - 1$$

交互效应平方和（$SSAB$）

$\hat{r}_{ij}$ 关于任意一个下标求和为0（$\sum_i \hat{r}_{ij} = 0, \sum_j \hat{r}_{ij} = 0$），自由度：$df_{SSAB} = ab - a - b + 1$

组合效应平方和（S_{AB}）

$$自由度：df_{S_{AB}} = ab - 1（满足\ df_{S_{AB}} = df_{SSA} + df_{SSB} + df_{SSAB}）$$

S_e 的分布

1. **S_e 的表达式**

$$\begin{aligned} S_e &= \sum_{i,j,k} (y_{ijk} - \bar{y}_{ij\cdot})^2 \\ &= \sum_{i,j,k} (\varepsilon_{ijk} - \bar{\varepsilon}_{ij\cdot})^2 \quad (由\ y_{ijk} - \bar{y}_{ij\cdot} = \varepsilon_{ijk} - \bar{\varepsilon}_{ij\cdot}) \\ &= \sum_{i,j} (n-1) \cdot \frac{\sum_{k=1}^{n} (\varepsilon_{ijk} - \bar{\varepsilon}_{ij\cdot})^2}{n-1} \\ &= \sum_{i,j} (n-1) s_{ij}^2 \end{aligned}$$

其中 s_{ij}^2 是单元格 (i,j) 内误差的样本方差。

2. **S_e 的分布**
   由 $\varepsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2)$，得 $\frac{\sum_{k=1}^{n} (\varepsilon_{ijk} - \bar{\varepsilon}_{ij\cdot})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，因此：

$$S_e \sim \sigma^2 \chi^2 (ab(n-1))$$

3. **S_e 的自由度**
   自由度：$df_{S_e} = ab(n-1)$

所以总体自由度满足

$$df_{SST} = df_{S_e} + df_{S_{AB}}$$

即 $abn - 1 = ab(n-1) + (ab-1)$（等式成立）。

误差均方（MSE）

其实后面也会讲到这里的误差均方是在第一个假设检验（即未能明确是否存在交互效应的时候）的一个估计

定义误差均方：

$$MSE \triangleq \frac{S_e}{ab(n-1)}$$

其期望为：

$$E(MSE) = \sigma^2$$

Hypothesis Testing (H_0)

检验交互效应的原假设为：

$$H_0 : r_{ij} = 0 \quad \text{for all } i = 1, ..., a,\ j = 1, ..., b$$

检验逻辑：若 $SSAB$ 过大（超过临界值 L），则拒绝 H_0，即

$$SSAB > L \implies \text{Reject } H_0$$

$SSAB$ 的表达式展开

交互效应平方和 $SSAB = n\sum_{i,j}\hat{r}_{ij}^2$，结合 $\hat{r}_{ij} = \bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\cdots}$，代入观测值模型 $y_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk}$（对应 $\bar{y}_{ij\cdot} = \mu_{ij} + \bar{\varepsilon}_{ij\cdot}$），得：

$$\begin{aligned} SSAB &= n\sum_{i,j}\hat{r}_{ij}^2 \\ &= n\sum_{i,j}\left(\bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\cdots}\right)^2 \\ &= n\sum_{i,j}\left(r_{ij} + \bar{\varepsilon}_{ij\cdot} - \bar{\varepsilon}_{i\cdot\cdot} - \bar{\varepsilon}_{\cdot j\cdot} + \bar{\varepsilon}_{\cdots}\right)^2 \end{aligned}$$

（注：$r_{ij} = \mu_{ij} - \bar{\mu}_{i\cdot} - \bar{\mu}_{\cdot j} + \bar{\mu}_{\cdot\cdot}$ 是理论交互效应）

当 $H_0 : r_{ij} = 0$ 成立时，$SSAB$ 简化为：

$$SSAB = n\sum_{i,j}\left(\bar{\varepsilon}_{ij\cdot} - \bar{\varepsilon}_{i\cdot\cdot} - \bar{\varepsilon}_{\cdot j\cdot} + \bar{\varepsilon}_{\cdots}\right)^2$$

定义 $A_{ij} \triangleq \bar{\varepsilon}_{ij\cdot}$，则 $\bar{\varepsilon}_{ij\cdot} - \bar{\varepsilon}_{i\cdot\cdot} - \bar{\varepsilon}_{\cdot j\cdot} + \bar{\varepsilon}_{\cdots}$ 可表示为**投影算子作用于 A 的结果**：

$$\bar{\varepsilon}_{ij\cdot} - \bar{\varepsilon}_{i\cdot\cdot} - \bar{\varepsilon}_{\cdot j\cdot} + \bar{\varepsilon}_{\cdots} = P_aAP_b\left[i,j\right]$$

其中投影算子为：

- $P_a = I_a - \frac{1}{a}\mathbf{1}_a\mathbf{1}_a^T$（作用于因素 A 的水平，I_a 是 a 阶单位矩阵，$\mathbf{1}_a$ 是 a 维全1向量）
- $P_b = I_b - \frac{1}{b}\mathbf{1}_b\mathbf{1}_b^T$（作用于因素 B 的水平，I_b 是 b 阶单位矩阵，$\mathbf{1}_b$ 是 b 维全1向量）

投影结果 P_aAP_b 是一个 $a \times b$ 矩阵，其 (i,j) 位置的元素对应上述误差组合项。

说明：投影结果满足要求

对于 $a \times b$ 矩阵 A（元素为 $A_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij\cdot}$），投影 P_aAP_b 可展开为：

$$P_aAP_b = A - \frac{1}{a}\mathbf{1}_a\mathbf{1}_a^TA - \frac{1}{b}A\mathbf{1}_b\mathbf{1}_b^T + \frac{1}{ab}\mathbf{1}_a\mathbf{1}_a^TA\mathbf{1}_b\mathbf{1}_b^T$$

以下分析展开式中每一项在 (i,j) 位置的元素：

1. **第一项：A 的 (i,j) 元素**
   即 $A_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij\cdot}$。
2. **第二项：$\frac{1}{a}\mathbf{1}_a\mathbf{1}_a^TA$ 的 (i,j) 元素**

$$\left[\frac{1}{a}\mathbf{1}_a\mathbf{1}_a^TA\right]_{i,j} = \frac{1}{a}\mathbf{1}_a^TA_{\cdot,j} = \frac{1}{a}\sum_{i'=1}^{a}\bar{\varepsilon}_{i'j\cdot} = \bar{\varepsilon}_{\cdot j\cdot}$$

   ($A_{\cdot,j}$ 是 A 的第 j 列，$\mathbf{1}_a^TA_{\cdot,j}$ 是第 j 列元素之和)
3. **第三项：$\frac{1}{b}A\mathbf{1}_b\mathbf{1}_b^T$ 的 (i,j) 元素**

$$\left[\frac{1}{b}A\mathbf{1}_b\mathbf{1}_b^T\right]_{i,j} = \frac{1}{b}A_{i,\cdot}\mathbf{1}_b = \frac{1}{b}\sum_{j'=1}^{b}\bar{\varepsilon}_{ij'\cdot} = \bar{\varepsilon}_{i\cdot\cdot}$$

   ($A_{i,\cdot}$ 是 A 的第 i 行，$A_{i,\cdot}\mathbf{1}_b$ 是第 i 行元素之和)
4. **第四项：$\frac{1}{ab}\mathbf{1}_a\mathbf{1}_a^TA\mathbf{1}_b\mathbf{1}_b^T$ 的 (i,j) 元素**

$$\left[\frac{1}{ab}\mathbf{1}_a\mathbf{1}_a^T A\mathbf{1}_b\mathbf{1}_b^T\right]_{i,j} = \frac{1}{ab}\left(\mathbf{1}_a^T A\mathbf{1}_b\right) = \frac{1}{ab}\sum_{i'=1}^{a}\sum_{j'=1}^{b}\bar{\varepsilon}_{i'j'\cdot} = \bar{\varepsilon}_{\cdots}$$

结合以上结果，投影 P_aAP_b 在 (i,j) 位置的元素为：

$$[P_aAP_b]_{i,j} = \bar{\varepsilon}_{ij\cdot} - \bar{\varepsilon}_{\cdot j\cdot} - \bar{\varepsilon}_{i\cdot\cdot} + \bar{\varepsilon}_{\cdots}$$

与之前的误差组合项完全一致，验证了展开式的正确性。

由前文，$SSAB = n\sum_{i,j}[P_aAP_b]_{i,j}^2$，可表示为矩阵的Frobenius范数平方：

$$SSAB = n\cdot\|P_aAP_b\|_F^2$$

其中Frobenius范数 $\|M\|_F^2 = \mathrm{tr}(MM^T)$（tr 为迹），因此：

$$SSAB = n\cdot\mathrm{tr}\left(P_aAP_bP_b^TA^TP_a^T\right)$$

由于投影算子 P_a, P_b 是**幂等矩阵**（$P^2 = P$）且对称（$P^T = P$），故 $P_bP_b^T = P_b$，化简得：

$$SSAB = n\cdot\mathrm{tr}\left(P_aAP_bA^TP_a\right) = n\cdot\mathrm{tr}\left(P_aP_bA^TP_aA\right)$$

投影算子的性质

1. **迹的性质**：
   - $\mathrm{tr}(P_a) = a-1$（P_a 的秩，对应因素 A 主效应的自由度）
   - $\mathrm{tr}(P_b) = b-1$（P_b 的秩，对应因素 B 主效应的自由度）
2. **谱分解**：
   - $P_a = UDU^T$，其中 U 是正交矩阵，D 是对角矩阵（对角元为 $a-1$ 个1和1个0）
   - $P_b = V\Lambda V^T$，其中 V 是正交矩阵，Λ 是对角矩阵（对角元为 $b-1$ 个1和1个0）

代入 P_a, P_b 的谱分解，令 $B = U^TAV$，则：

$$\begin{aligned}SSAB &= n\cdot\mathrm{tr}\left(UDU^TAV\Lambda V^TA^TUDU^T\right)\\ &= n\cdot\mathrm{tr}\left(DU^TAV\Lambda V^TA^TUD\right)\\ &= n\cdot\mathrm{tr}\left(DB\Lambda B^T\right)\end{aligned}$$

由于 D, Λ 是对角矩阵，迹的结果等价于非零对角元对应的元素平方和：

$$SSAB = n\sum_{i=1}^{a-1}\sum_{j=1}^{b-1}B_{ij}^2$$

由 $A_{ij}=\bar{\varepsilon}_{ij\cdot}\sim N(0,\sigma^2/n)$（独立同分布），且 U,V 是正交变换，得 $B_{ij}\overset{d}{=}A_{ij}$，因此 $\sqrt{n}B_{ij}\sim N(0,\sigma^2)$。

故 H_0 成立时：

$$SSAB = \sum_{i=1}^{a-1}\sum_{j=1}^{b-1}(\sqrt{n}B_{ij})^2\sim\sigma^2\chi^2\left((a-1)(b-1)\right)$$

（自由度为 $(a-1)(b-1)$，对应交互效应的自由度）

重要经典定理：正交变换下随机矩阵的同分布性

若 U 是正交矩阵，则对任意由随机向量构成的矩阵 X，有：

$$XU\overset{d}{=}X$$

（即"随机向量构成的矩阵左/右乘正交矩阵后，分布保持不变"）

proof

设矩阵 X 由 n 个独立同分布的 m 维随机向量组成：

$$X=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1^T\\ \boldsymbol{x}_2^T\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_n^T\end{bmatrix}$$

其中每个行向量 $\boldsymbol{x}_i\overset{iid}{\sim}N(\boldsymbol{0},\sigma^2I_m)$（$I_m$ 为 m 阶单位矩阵）。

取正交矩阵 U（满足 $UU^T=I_m$），计算 XU 的行向量：

$$XU=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1^TU\\ \boldsymbol{x}_2^TU\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}_n^TU\end{bmatrix}$$

对任意行向量 $\boldsymbol{x}_i^T U$，分析其分布：

- **均值**：$E(\boldsymbol{x}_i^T U) = E(\boldsymbol{x}_i^T)U = \mathbf{0}^T U = \mathbf{0}^T$
- **协方差**：$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{x}_i^T U) = U^T \mathrm{Cov}(\boldsymbol{x}_i) U = U^T(\sigma^2 I_m)U = \sigma^2(U^T U) = \sigma^2 I_m$

因此 $\boldsymbol{x}_i^T U \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 I_m)$，且各 $\boldsymbol{x}_i^T U$ 相互独立（因 $\boldsymbol{x}_i$ 独立）。

由于 XU 的行向量与 X 的行向量**独立同分布**，故：

$$\boldsymbol{x}_i^T U \overset{d}{=} \boldsymbol{x}_i^T \implies XU \overset{d}{=} X$$

双因素试验交互效应的F检验

误差均方 MSE 的期望

$$MSE = \frac{S_e}{ab(n-1)}, \quad E(MSE) = \sigma^2$$

交互效应平方和 $SSAB$ 的分布（H_0 成立时） $SSAB \overset{H_0}{\sim} \sigma^2 \chi^2\left((a-1)(b-1)\right)$

交互效应均方 $MSAB$ 的定义 $MSAB = \frac{SSAB}{(a-1)(b-1)}$

F检验统计量（H_0 下的分布）（独立性源于方差和均值独立）

$$F = \frac{MSAB}{MSE} \overset{H_0}{\sim} F\left((a-1)(b-1),\, ab(n-1)\right)$$

检验决策规则

$$F > F_{1-\alpha}\left((a-1)(b-1),\, ab(n-1)\right) \implies \text{Reject } H_0$$

后续H_0 如果被拒绝，可以单独看 A、B 的影响

交互效应不显著时的主效应检验（H_0^*）

检验因素 A、B 主效应是否显著的原假设：

$$H_0^*: \; a_i = 0\,(\forall i = 1, ..., a) \quad \text{或} \quad b_j = 0\,(\forall j = 1, ..., b)$$

总平方和（SST）的分解（交互效应为0）

总平方和可分解为**主效应平方和** + **合并误差平方和**：

$$
\begin{aligned}
SST &= \sum_{i,j,k} (y_{ijk} - \bar{y}_{\cdots})^2 \\
&= \sum_{i,j,k} \left[(\bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdots}) + (\bar{y}_{\cdot j\cdot} - \bar{y}_{\cdots}) + (y_{ijk} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\cdots}) \right]^2
\end{aligned}
$$

（交互效应 $r_{ij} = 0$，故分解中无交互项）

以其中一项交叉项为例：

$$
\sum_{i,j,k} (\bar{y}_{\cdot j\cdot} - \bar{y}_{\cdots}) (y_{ijk} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\cdots}) = 0
$$

推导：

$$
\sum_{i,j,k} (\bar{y}_{\cdot j\cdot} - \bar{y}_{\cdots}) (y_{ijk} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\cdots}) = \sum_{j} (\bar{y}_{\cdot j\cdot} - \bar{y}_{\cdots}) \cdot \sum_{i,k} (y_{ijk} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\cdots})
$$

而 $\sum_{i,k} (y_{ijk} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\cdots}) = an (\bar{y}_{\cdot j\cdot} - \bar{y}_{\cdots} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\cdots}) = 0$，故交叉项为0。
同理，其他交叉项均为0。

- **因素 A 的主效应平方和（SSA）**

  表达式：$SSA = \sum_{i,j,k} \hat{a}_i^2$

  自由度：$df_{SSA} = a - 1$

- **因素 B 的主效应平方和（SSB）**

  表达式：$SSB = \sum_{i,j,k} \hat{b}_j^2$

  自由度：$df_{SSB} = b - 1$

- **合并误差平方和（S_e）**（将原交互效应平方和与误差平方和合并）

  表达式：$S_e = \sum_{i,j,k} (y_{ijk} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\cdots})^2$

  自由度：$df_{S_e} = abn - a - b + 1$

- **总平方和的自由度**
  $df_{SST} = abn - 1$（满足 $df_{SST} = df_{SSA} + df_{SSB} + df_{S_e}$）

主效应的检验逻辑

- 若 $SSA > L$（L 为临界值），则拒绝 H_0^* 中“$a_i = 0$”的假设；
- 需进一步推导 SSA 在 H_0^* 成立时的分布：

SSA's distribution under H_0^*

SS_A的表达式（$H_0: a_i = 0$下）

由$\hat{a}_i = \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot\cdot\cdot} = \bar{\varepsilon}_{i\cdot\cdot} - \bar{\varepsilon}_{\cdot\cdot\cdot}$（$H_0$下$a_i = 0$），得：

$$SS_A = \sum_{i,j,k} (a_i + \bar{\varepsilon}_{i\cdot\cdot} - \bar{\varepsilon}_{\cdot\cdot\cdot})^2 \overset{H_0}{=} bn \sum_i (\bar{\varepsilon}_{i\cdot\cdot} - \bar{\varepsilon}_{\cdot\cdot\cdot})^2$$

因素A第i水平下的误差均值：

$$\bar{\varepsilon}_{i\cdot\cdot} = \frac{1}{bn} \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{bn}\right)$$

标准化后：

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{i\cdot\cdot}\sqrt{bn}}{\sigma} \overset{iid}{\sim} N(0,1)$$

全体误差的总均值：

$$\bar{\varepsilon}_{\cdot\cdot\cdot} = \frac{1}{a} \sum_i \bar{\varepsilon}_{i\cdot\cdot}$$

$\boxed{\bar{\varepsilon}_{i\cdot\cdot} - \bar{\varepsilon}_{\cdot\cdot\cdot}}$的矩阵投影表示

将$\bar{\varepsilon}_{i\cdot\cdot}$表示为向量$\boldsymbol{\xi}_a = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{1\cdot\cdot} \\ \vdots \\ \bar{\varepsilon}_{a\cdot\cdot} \end{bmatrix}$，则：

$$\begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{1\cdot\cdot} - \bar{\varepsilon}_{\cdot\cdot\cdot} \\ \vdots \\ \bar{\varepsilon}_{a\cdot\cdot} - \bar{\varepsilon}_{\cdot\cdot\cdot} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\xi}_a - \mathbf{1}_a \cdot \frac{1}{a}\mathbf{1}_a^T \boldsymbol{\xi}_a = \left(I_a - \frac{1}{a}\mathbf{1}_a \mathbf{1}_a^T\right) \boldsymbol{\xi}_a$$

其中：

- I_a：a阶单位矩阵；
- $\mathbf{1}_a$：a维全1向量。

代入投影表示，SS_A可写为：

$$SS_A = bn \cdot \boldsymbol{\xi}_a^T \left(I_a - \frac{1}{a}\mathbf{1}_a\mathbf{1}_a^T \right) \boldsymbol{\xi}_a$$

投影算子的性质：

$I_a - \frac{1}{a}\mathbf{1}_a\mathbf{1}_a^T$是**幂等对称矩阵**（满足$P^2 = P$），且秩为$a-1$。

误差向量的标准化：

令$\boldsymbol{\xi}_a \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{bn} I_a\right)$，定义$\boldsymbol{\varepsilon}_A = \sqrt{bn}\boldsymbol{\xi}_a \sim N(0, \sigma^2 I_a)$，则：

$$SS_A = \boldsymbol{\varepsilon}_A^T \left(I_a - \frac{1}{a}\mathbf{1}_a\mathbf{1}_a^T \right) \boldsymbol{\varepsilon}_A$$

由幂等矩阵的二次型分布性质，得：

$$SS_A \sim \sigma^2 \chi^2(a-1)$$

Se 's distribution under H_0^*

当交互效应$r_{ij} = 0$，合并误差平方和为：

$$S_e = \sum_{i,j,k} (y_{ijk} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\cdots})^2$$

将全体观测值排列为向量$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{112} \\ \vdots \\ y_{abn} \end{bmatrix}$，定义以下投影算子：

P_1：对应**因素A主效应**的投影算子（将$\boldsymbol{Y}$投影到“因素A各水平均值”空间），形式为$P_1\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{1\cdot\cdot}\mathbf{1}_{bn} \\ \bar{y}_{2\cdot\cdot}\mathbf{1}_{bn} \\ \vdots \\ \bar{y}_{a\cdot\cdot}\mathbf{1}_{bn} \end{bmatrix}$（$\mathbf{1}_k$为$k$维全1向量）；

P_2：对应**因素B主效应**的投影算子，形式为$P_2\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{\cdot 1 \cdot}\mathbf{1}_n \\ \bar{y}_{\cdot 2 \cdot}\mathbf{1}_n \\ \vdots \\ \bar{y}_{\cdot b \cdot}\mathbf{1}_n \end{bmatrix}$（按$B$的水平重复）；

P_3：对应**总均值**的投影算子，形式为$P_3\boldsymbol{Y} = \bar{y}_{\cdots}\mathbf{1}_{abn}$。

此时，$y_{ijk} - \bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{\cdot j\cdot} + \bar{y}_{\cdots}$可表示为**投影算子的组合**：

$$\boldsymbol{Y} - P_1\boldsymbol{Y} - P_2\boldsymbol{Y} + P_3\boldsymbol{Y} = (I - P_1 - P_2 + P_3)\boldsymbol{Y}$$

因此S_e的矩阵形式为：

$$S_e = \|(I - P_1 - P_2 + P_3)\boldsymbol{Y}\|^2 = \boldsymbol{Y}^T(I - P_1 - P_2 + P_3)\boldsymbol{Y}$$

投影算子$\boxed{I - P_1 - P_2 + P_3}$的性质

幂等性：

需验证$(I - P_1 - P_2 + P_3)^2 = I - P_1 - P_2 + P_3$。
展开左边：

$$(I - P_1 - P_2 + P_3)^2 = I^2 - IP_1 - IP_2 + IP_3 - P_1I + P_1^2 + P_1P_2 - P_1P_3 - P_2I + P_2P_1 + P_2^2 - P_2P_3 + P_3I - P_3P_1 - P_3P_2 + P_3^2$$

由于投影算子满足$P_1^2 = P_1, P_2^2 = P_2, P_3^2 = P_3$，且$P_1P_3 = P_3, P_2P_3 = P_3, P_3P_1 = P_3, P_3P_2 = P_3$（总均值投影包含在主效应投影中），代入后可化简得：

$$(I - P_1 - P_2 + P_3)^2 = I - P_1 - P_2 + P_3$$

即该算子是**幂等矩阵。**

秩（自由度）的计算：
投影算子的秩等于其迹（$\mathrm{tr}(P) = \mathrm{rank}(P)$），因此：

$$\mathrm{tr}(I - P_1 - P_2 + P_3) = \mathrm{tr}(I) - \mathrm{tr}(P_1) - \mathrm{tr}(P_2) + \mathrm{tr}(P_3)$$

其中：

- $\mathrm{tr}(I) = abn$（I是abn阶单位矩阵）；
- $\mathrm{tr}(P_1) = a$（P_1将$\boldsymbol{Y}$投影到a维空间）；
- $\mathrm{tr}(P_2) = b$（P_2将$\boldsymbol{Y}$投影到b维空间）；

- $\text{tr}(P_3) = 1$（P_3将$\boldsymbol{Y}$投影到1维空间）。

代入得:

$$\text{tr}(I - P_1 - P_2 + P_3) = abn - a - b + 1$$

即$I - P_1 - P_2 + P_3$的秩为$abn - a - b + 1$。

S_e 的分布

由观测值模型$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}$（$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 I_{abn})$），当$r_{ij} = 0$时，$\boldsymbol{\mu}$位于$P_1 + P_2 - P_3$的列空间内，因此$(I - P_1 - P_2 + P_3)\boldsymbol{\mu} = 0$，进而:

$$S_e = \boldsymbol{\varepsilon}^T (I - P_1 - P_2 + P_3)\boldsymbol{\varepsilon}$$

由于$I - P_1 - P_2 + P_3$是**幂等对称矩阵**（秩为$abn - a - b + 1$），且$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 I_{abn})$，根据“正态向量的幂等二次型分布”结论:

$$S_e \sim \sigma^2 \chi^2(abn - a - b + 1)$$

误差均方 MSE 的分布

误差均方定义为:

$$MSE = \frac{S_e}{abn - a - b + 1}$$

由$S_e \sim \sigma^2 \chi^2(abn - a - b + 1)$，得:

$$MSE = \frac{\sigma^2 \cdot \chi^2(abn - a - b + 1)}{abn - a - b + 1}$$

其期望为:

$$E(MSE) = \sigma^2$$

SS_A 与 S_e 的独立性验证

需验证$(P_1 - P_3)(I - P_1 - P_2 + P_3) = 0$:
展开左边:

$$(P_1 - P_3)(I - P_1 - P_2 + P_3) = P_1 - P_1^2 - P_1P_2 + P_1P_3 - P_3 + P_3P_1 + P_3P_2 - P_3^2$$

代入$P_1^2 = P_1, P_3^2 = P_3, P_1P_3 = P_3, P_3P_1 = P_3, P_3P_2 = P_3$，化简得：

$$P_1 - P_1 - P_1P_2 + P_3 - P_3 + P_3 + P_3 - P_3 = -P_1P_2 + P_3$$

当$r_{ij} = 0$时，$P_1P_2 = P_3$（主效应投影的交为总均值投影），因此：

$$(P_1 - P_3)(I - P_1 - P_2 + P_3) = 0$$

即$SS_A = \boldsymbol{Y}^T(P_1 - P_3)\boldsymbol{Y}$与$S_e = \boldsymbol{Y}^T(I - P_1 - P_2 + P_3)\boldsymbol{Y}$独立。

MSE的分布为：

$$MSE \sim \frac{\sigma^2}{abn - a - b + 1}\chi^2(abn - a - b + 1)$$

最终的F统计量

结合$SS_A \sim \sigma^2\chi^2(a-1)$，F检验统计量：

$$\frac{MS_A}{MSE} = \frac{\frac{SS_A}{a-1}}{\frac{S_e}{abn-a-b+1}} \sim F(a-1, abn-a-b+1)$$

双因素试验的ANOVA表（分交互效应是否显著两种情况）

一、交互效应显著（$\boxed{r_{ij} \neq 0}$）的ANOVA表

变异来源	平方和（SS）	自由度（df）	均方（MS）	平方和定义	F检验统计
总变异（SST）	$SST = \sum_{i,j,k}(y_{ijk} - \bar{y}_{\cdots})^2$	$abn - 1$	MST	全体观测与总均值的偏差平方和	-
组合效应（SAB）	$SAB = \sum_{i,j,k}(\bar{y}_{ij\cdot} - \bar{y}_{\cdots})^2$	$ab - 1$	$MSAB$	单元格均值与总均值的偏差平方和	-
因素A主效应（SSA）	$SSA = \sum_{i,j,k}\hat{a}_i^2$	$a - 1$	MSA	因素A主效应的平方和	-
因素B主效应（SSB）	$SSB = \sum_{i,j,k}\hat{b}_j^2$	$b - 1$	MSB	因素B主效应的平方和	-
交互效应（SSAB）	$SSAB = \sum_{i,j,k}\hat{r}_{ij}^2$	$(a-1)(b-1)$	$MSAB$	交互效应的平方和	$F = \frac{MSA}{MSE}$
误差（Se）	$Se = \sum_{i,j,k}(y_{ijk} - \bar{y}_{ij\cdot})^2$	$abn - ab$	MSE	单元格内观测与单元格均值的偏差平方和	-

平方和分解关系：$SST = SAB + Se$，$SAB = SSA + SSB + SSAB$

二、交互效应不显著（$\boxed{r_{ij}=0}$）的ANOVA表

（将原交互效应平方和与误差平方和合并）

变异来源	平方和（SS）	自由度（df）	均方（MS）	平方和定义	F检验统计量
总变异（SST）	$SST=\sum_{i,j,k}(y_{ijk}-\bar{y}_{...})^2$	$abn-1$	-	全体观测与总均值的偏差平方和	-
因素A主效应（SSA）	$SSA=\sum_{i,j,k}\hat{a}_i^2$	$a-1$	MSA	因素A主效应的平方和	$F=\frac{MSA}{MSE}$
因素B主效应（SSB）	$SSB=\sum_{i,j,k}\hat{b}_j^2$	$b-1$	MSB	因素B主效应的平方和	$F=\frac{MSB}{MSE}$
合并误差（Se）	$Se=\sum_{i,j,k}(y_{ijk}-\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{\cdot j\cdot}+\bar{y}_{...})^2$	$abn-a-b+1$	MSE	观测与主效应+总均值的偏差平方和	-

平方和分解关系：$Se=SSAB+SSE$（原交互效应平方和与原误差平方和合并）

remark

- 若无$r_{ij}=0$的条件，则交互效应的原假设不成立，需按“交互效应显著”的ANOVA表分析；
- 后续可基于此进行μ_{ij}、$\bar{\mu}_{i\cdot}$、$\bar{\mu}_{\cdot j}$、$\bar{\mu}_{..}$的置信区间估计。

CI

$\boxed{\bar{\mu}_{i\cdot}}$

$\bar{\mu}_{i\cdot}$（因素A第i水平的总均值）的点估计为**样本均值**：

$$\hat{\bar{\mu}}_{i\cdot}=\bar{y}_{i\cdot\cdot}=\frac{1}{bn}\sum_{j,k}y_{ijk}$$

由观测值模型$y_{ijk}=\mu_{ij}+\varepsilon_{ijk}$（$\varepsilon_{ijk}\sim N(0,\sigma^2)$），得：

$$\bar{y}_{i\cdot\cdot}=\frac{1}{bn}\sum_{j,k}(\mu_{ij}+\varepsilon_{ijk})=\bar{\mu}_{i\cdot}+\frac{1}{bn}\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}$$

因此$\bar{y}_{i\cdot\cdot}$的分布为：

$$\bar{y}_{i\cdot\cdot}\sim N\left(\bar{\mu}_{i\cdot},\frac{\sigma^2}{bn}\right)$$

对应的和的分布：

$$\sum_{j,k} y_{ijk} \sim N\left(bn\bar{\mu}_{i\cdot}, bn\sigma^2\right)$$

当 $\boxed{r_{ij}=0}$ 时，$\boxed{\bar{\mu}_{i\cdot}-\bar{\mu}_{j\cdot}}$ 的t分布（效应差的区间估计）

1. **统计量的构造**
   因素A第i,j水平的效应差为$\bar{\mu}_{i\cdot}-\bar{\mu}_{j\cdot}$，其点估计为$\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{j\cdot\cdot}$。

构造t统计量：

$$\frac{\bar{y}_{i\cdot\cdot}-\bar{y}_{j\cdot\cdot}-(\bar{\mu}_{i\cdot}-\bar{\mu}_{j\cdot})}{\sqrt{\frac{2MSE_{new}}{bn}}} \sim t\left(abn-a-b+1\right)$$

其中：

- MSE_{new}**是合并误差均方**（对应$r_{ij}=0$时的MSE）；
- 自由度为$abn-a-b+1$（合并误差的自由度）。

分子与分母的独立性验证

- 分子对应$P_1\boldsymbol{Y}$（因素A主效应的投影）；
- 分母对应$(I-P_1-P_2+P_3)\boldsymbol{Y}$（合并误差的投影）。

由投影算子的性质：

$$P_1(I-P_1-P_2+P_3)=P_1-P_1^2-P_1P_2+P_1P_3=0$$

（因$P_1^2=P_1, P_1P_2=P_3, P_1P_3=P_3$），故分子与分母独立。

一般线性组合 $\boxed{\sum_{i=1}^{a} C_i\bar{\mu}_{i\cdot}}$ 的估计

对线性组合$\sum_{i=1}^{a} C_i\bar{\mu}_{i\cdot}$，其点估计为$\sum_{i=1}^{a} C_i\bar{y}_{i\cdot\cdot}$，分布为：

$$\sum_{i=1}^{a} C_i\bar{y}_{i\cdot\cdot} \sim N\left(\sum_{i=1}^{a} C_i\bar{\mu}_{i\cdot}, \frac{\sigma^2}{bn}\sum_{i=1}^{a} C_i^2\right)$$

而后中心化即可得到t分布

当$\boxed{r_{ij} \neq 0}$时，$\boxed{\bar{\mu}_{i\cdot} - \bar{\mu}_{j\cdot}}$的t分布

此时误差均方为原MSE（自由度为$ab(n-1)$），t统计量为：

$$\frac{\bar{y}_{i\cdot\cdot} - \bar{y}_{j\cdot\cdot} - (\bar{\mu}_{i\cdot} - \bar{\mu}_{j\cdot})}{\sqrt{\frac{MSE}{bn}}} \sim t\left(ab(n-1)\right)$$

（注：$\bar{y}_{i\cdot\cdot}$是$\bar{y}_{ij\cdot}$的函数，对应“sample mean”；MSE是“sample variance”，所以二者相互独立）