POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 5 : CROISSANCE ASYMPTOTIQUE DES FONCTIONS - RECURSIVITÉ - FERMETURE DES RELATIONS

1. Croissance asymptotique

Exercice 1. Trouver le plus petit entier n pour lequel $f(x) \in \mathcal{O}(x^n)$ pour chacune des fonctions suivantes, en déterminant les constantes c et k les plus petites possibles.

a. $f(x) = 5x^2 + 2x^3 + 7$
b. $f(x) = \frac{x^4+8x}{x^2+3}$
c. $f(x) = 3x^2 - x\ log(x)$
d. $f(x) = 2x^4 - 4\ log^3(x)$

Exercice 2. Sur une échelle croissante, classer les fonctions suivantes selon leur comportement asymptotique.

a. $f_1(n) = \sqrt{n}$
b. $f_2(n) = \frac{n^4}{16}$
c. $f_3(x) = e^n$
d. $f_4(n) = \sqrt{log(n)}$
e. $f_5(x) = 2^{log_2(n)}$

2. Récursivité

Exercice 3. Donnez une définition récursive de l'ensemble des entiers positifs congrus à 3 modulo 7 ou congrus à 5 modulo 7.

Exercice 4. Donnez une définition récursive de l'ensemble des entiers positifs congrus à 3 modulo 5 et congrus à 4 modulo 7.

Exercice 5. Donnez une définition récursive de la suite a_n.

1. $a_n = 2n + 1$
2. $a_n = 3 - 2^n$
3. $a_n = 2^{2^n}$
4. $a_n = \frac{n^2-n+2}{2}$

Exercice 6. La fonction d'Ackermann est une fonction récursive à deux paramètres entiers définie par :

$$f(n,m) = \begin{cases} m+1 & Si\ n = 0 \\ f(n-1,1) & Si\ n \geq 1\ et\ m = 0 \\ f(n-1, f(n, m-1)) & Si\ n \geq 1\ et\ m \geq 1 \end{cases}$$

1. Calculer $f(1,0), f(2,0), f(3,0)$
2. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, f(1,k) = k + 2$
3. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, f(2,k) = 2k + 3$
4. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, f(3,k) = 2^{k+3} - 3$

Exercice 7. Pour tout réel x et pour tout entier positif non nul n on a :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$$

En utilisant la notion d'itération, donner l'algorithme d'une fonction qui calcule $S_n(x)$.

3. Fermeture des relations

Exercice 8. Soit la relation $\mathcal{R}$ définie sur l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ par : $\{(1, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 5)\}$.

1. Dessiner le graphe de la relation $\mathcal{R}$.
2. Donner la matrice de la relation $\mathcal{R}$.
3. Donner la fermeture réflexive de $\mathcal{R}$.
4. Donner la fermeture symétrique de $\mathcal{R}$.
5. Donner la fermeture transitive de $\mathcal{R}$.

Exercice 9. On considère les trois ensembles $A = \{2, 3, 4, 6\}$, $B = \{a, b, c, d\}$, $C = \{0, 3, 5\}$ et deux relations $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ et $\mathcal{S} \subseteq B \times C$ définies par : $\mathcal{R} = \{(4, a), (6, a), (6, b), (4, c), (6, c)\}$ et $\mathcal{S} = \{(a, 0), (b, 5), (c, 5), (d, 3)\}$

1. Donner la matrice de la relation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$.
2. Donner la relation $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ sous forme d'un ensemble de couples.

Exercice 10. Soit la relation $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par : $\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, a \times b \leq a + b\}$.

1. Donner la relation $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ sous forme d'un ensemble de couples.
2. En déduire que $\mathcal{R} \circ (\mathcal{R} \circ \mathcal{R}) = \mathcal{R} \circ \mathcal{R}$.

4. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 26 et 27 (pages 83); 2, 4, 5, 8 (page 197) ; 35 (page 198) ; 18, 21 (page 205) ; 29 (page 214) ; 40 (page 215)