POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 8 : DÉNOMBREMENTS
CORRIGÉ DE QUELQUES EXERCICES

Exercice 1. Résoudre les relations de récurrence suivantes :

1. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$; $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$
   Réponse : $a_n = 3 \times 2^n - 2 \times 3^n$
2. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$
   Réponse : $a_n = (\frac{-1+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$
3. $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$; $a_0 = 1$ et $a_1 = 3$
4. $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + 6a_{n-3}$; $a_0 = 1$, $a_1 = -4$ et $a_2 = -4$
5. $a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3}$; $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$
   Réponse : $a_n = (2 + \frac{3n}{2}) \times 2^n - 2 \times 3^n$

Exercice 2. Donner un ordre de grandeur asymptotique pour $T(n)$.

1. $T(n) = 4T(n/2) + n^3$. Réponse : $\mathrm{O}(n^3)$
2. $T(n) = 8T(n/2) + n^2$. Réponse : $\mathrm{O}(n^3)$
3. $T(n) = 2T(n/4) + n^2$.

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on note : $\sum_n^p$ le nombre de n-uplets $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$.

1. Déterminer $\sum_n^0$, $\sum_n^1$, $\sum_n^2$, $\sum_1^p$, $\sum_2^p$.

   - $\sum_n^0 = 1$. Le seul n-uplet dont la somme des termes est zéro est : (0).
   - $\sum_n^1 = n$. Les n-uplets contiennent $n-1$ fois le chiffre 0 et seul chiffre 1. Il y a n façons de positionner le chiffre 1 dans un n-uplet.
   - $\sum_n^2 = \frac{n(n+1)}{2}$. Les n-uplets contiennent un seul chiffre 2 et $n-1$ zéros ou deux fois le chiffre 1 et $n-2$ zéros. Il y a n façons de positionner le chiffre 2 dans un n-uplet et il y a $C(n,2) = \frac{n(n-1)}{2}$ façons de positionner deux fois le chiffre 1 dans un n-uplet. Le nombre recherché est donc $n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$
   - $\sum_1^p = 1$. On a (x_1) tel que $x_1 = p$. Le seul n-uplet possible est (p).
   - $\sum_2^p = p+1$. On a (x_1, x_2) tel que $x_1 + x_2 = p$. Soit $x_2 = p - x_1$ et $(x_1, x_2) = (x_1, p - x_1)$. Il y a $p+1$ façons de choisir x_1, soit $x_1 \in \{0, \dots, p\}$
   .

2. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{n+1}^p = \sum_n^0 + \sum_n^1 + \cdots + \sum_n^p$
   - Par définition, $\sum_{n+1}^p$ est le nombre de $(n+1)$-uplets tels que $x_1 + x_2 + ... + x_n + x_{n+1} = p$. C'est donc le nombre de n-uplets tels $x_1 + x_2 + ... + x_n = p - x_{n+1}$, soit $\sum_n^{p-x_{n+1}}$ (par définition).
     On a $x_{n+1} \in \{0, \dots, p\}$, donc $p+1$ choix possibles de x_{n+1}.
     Par suite, $\sum_{n+1}^p = \sum_n^{p-0} + \sum_n^{p-1} + \cdots + \sum_n^{p-(p-1)} + \sum_n^{p-p}$. D'où la relation.

   - Il est également possible de démontrer la relation par récurrence en montrant le cas de base comme suit :
     $\sum_1^0 + \sum_1^1 + \cdots + \sum_1^p = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{(p+1) fois} = p+1$ car $\sum_1^k = 1$ avec comme seul uplet (k). De

plus on a $\sum_2^p = p+1$ (question 1). Donc $\sum_2^p = \sum_1^0 + \sum_1^1 + \cdots + \sum_1^p$.

3. En déduire que $\sum_n^p = C(n+p-1,p)$
   Preuve par induction :
   $\sum_1^p = 1 = C(p,p) = C(1-1+p,p)$. La relation est vraie pour $n=1$.
   Supposons que $\sum_n^p = C(n+p-1,p)$ pour n quelconque ($n \geq 1$).
   $\sum_{n+1}^p = \sum_n^0 + \sum_n^1 + \sum_n^2 + \cdots + \sum_n^p$ (d'après la question 2)
   $\sum_{n+1}^p = C(n+0-1,0) + C(n+1-1,1) + C(n+2-1,2) + \cdots + C(n+p-1,p)$
   $\sum_{n+1}^p = C(n-1,0) + C(n,1) + C(n+1,2) + \cdots + C(n+p-1,p)$
   C(n-1,0)=C(n,0) donc $\sum_{n+1}^p = (C(n,0) + C(n,1)) + C(n+1,2) + \cdots + C(n+p-1,p)$
   $\sum_{n+1}^p = (C(n+1,1) + C(n+1,2)) + \cdots + C(n+p-1,p)$ car C(n,0) + C(n,1)=C(n+1,1)
   $\sum_{n+1}^p = C(n+2,2) + \cdots + C(n+p-1,p)$
   De proche en proche on a $\sum_{n+1}^p = C(n+p-2,p-1) + C(n+p-1,p)$
   d'où $\sum_{n+1}^p = C(n+p,p)$
   On peut donc conclure que $\sum_n^p = C(n+p-1,p)$.

Exercice 4. Soit A une partie d'un ensemble E à n éléments. On pose $p = Card\ A$.

1. Combien y-a-t-il de parties X de E contenant A ?
   - Premier raisonnement combinatoire
     Chaque partie X de E contenant A peut avoir $p, p+1, p+2, \ldots, n$ éléments. Ainsi, si X contient A et a $(p+k)$ éléments avec $k \in \{0,1,\ldots,n-p\}$, les k éléments qui s'ajoutent à ceux de A seront choisis parmi les $(n-p)$ éléments de $E-A$. Le nombre de choix possible de k éléments parmi les (n-p) éléments est $C(n-p,k)$.
     Le nombre de parties X de E contenant A est alors :
     $\sum_{k=0}^{n-p} C(n-p,k) = \sum_{k=0}^{n-p} C(n-p,k) \times 1^k \times 1^{n-p-k} = (1+1)^{n-p} = 2^{n-p}$

   - Deuxième raisonnement combinatoire
     Chaque partie X de E contenant A est obtenue par la réunion de A et d'un sous-ensemble de $E-A$. Les sous-ensemble de $E-A$ constitutent son ensemble des parties $\mathcal{P}(E-A)$. Le nombre de sous ensembles de $E-A$ est donc 2^{n-p}, avec $Card(E-A) = n-p$. Donc la réponse cherchée est : 2^{n-p}.

2. Combien y-a-t-il de parties X de E à m éléments contenant A, $m \in \{p,\ldots,n\}$?
   On a $m = p+k$ avec $k \in \{0,1,\ldots,n-p\}$. Les k éléments qui s'ajoutent à ceux de A seront choisis parmi les $(n-p)$ éléments de $E-A$. Le nombre de choix possible de k éléments parmi les (n-p) éléments est $C(n-p,k)$.
   D'où le nombre de parties X de E à m éléments contenant A est alors : $C(n-p,m-p)$

3. Combien y-a-t-il de couples (X,Y) de parties de E tels que $X \cap Y = A$?
   Les éléments de $E-A$ qui s'ajoutent à A pour former X sont distincts de ceux qui s'ajoutent à A pour former Y car $X \cap Y = A$. Si X contient m éléments incluant ceux de A ($C(n-p,m-p)$ possibilités), alors Y peut contenir jusqu'à $(n-m)$ éléments en plus de ceux de A. On a donc $\sum_{i=0}^{n-m} C(n-m,i) = \sum_{k=0}^{n-m} C(n-m,k)1^i1^{n-m-i} = (1+1)^{n-m} = 2^{n-m}$ possibilités de constitution de Y connaissant les m éléments de X.
   Le nombre de couples (X,Y) de parties de E tels que $X \cap Y = A$ est alors :
   $\sum_{m=p}^{n} C(n-p,m-p) \times 2^{n-m} = \sum_{k=0}^{n-p} C(n-p,k) \times 2^{n-(k+p)} = \sum_{k=0}^{n-p} C(n-p,k) \times 2^{(n-p)-k} = \sum_{k=0}^{n-p} C(n-p,k) \times 2^{(n-p)-k} \times 1^k = (2+1)^{n-p} = 3^{n-p}$

Exercice 5. Soit la relation : $k \times C(n,k) = n \times C(n-1,k-1)$

1. Démontrez la relation.
   $C(n,k) = \frac{n!}{(n-k)! \times k!} = \frac{n(n-1)!}{(n-k)! \times k(k-1)!}$.
   En multipliant les deux membres par k puis en simplifiant le membre de gauche par k on a:
   $k \times C(n,k) = \frac{n(n-1)!}{(n-k)! \times (k-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-k-1+1)! \times (k-1)!} = \frac{n(n-1)!}{[(n-1)-(k-1)]! \times (k-1)!} = n \times C(n-1,k-1)$

2. En déduire pour tout entier positif n, la somme :
   $$C(n,1) + 2 \times C(n,2) + \cdots + k \times C(n,k) + \cdots + n \times C(n,n)$$
   $C(n,1) + 2 \times C(n,2) + \cdots + k \times C(n,k) + \cdots + n \times C(n,n)$
   $= n \times C(n-1,1-1) + n \times C(n-1,2-1) + \cdots + n \times C(n,k-1) + \cdots + n \times C(n-1,n-1)$
   $= n(C(n-1,0) + C(n-1,1) + \cdots + C(n,k-1) + \cdots + C(n-1,n-1))$
   $= n \times \sum_{i=0}^{n-1} C(n-1,i)$
   $= n \times \sum_{i=0}^{n-1} C(n-1,i) \times 1^i \times 1^{n-1-i}$
   $= n \times (1+1)^{n-1}$
   $= n \times 2^{n-1}$

3. En déduire pour tout entier positif non nul n, la somme :
   $$C(n,2) + \cdots + (k-1) \times C(n,k) + \cdots + (n-1) \times C(n,n)$$
   $C(n,2) + \cdots + (k-1) \times C(n,k) + \cdots + (n-1) \times C(n,n)$
   $= (2 \times C(n,2) + \cdots + k \times C(n,k) + \cdots + n \times C(n,n)) - (C(n,2) + \cdots + C(n,k) + \cdots + C(n,n))$
   Or $2 \times C(n,2) + \cdots + k \times C(n,k) + \cdots + n \times C(n,n) = n \times 2^{n-1} - C(n,1)$,
   donc $C(n,2) + \cdots + (k-1) \times C(n,k) + \cdots + (n-1) \times C(n,n)$
   $= n \times 2^{n-1} - C(n,1) - (C(n,2) + \cdots + C(n,k) + \cdots + C(n,n))$
   $= n \times 2^{n-1} - (C(n,1) + C(n,2) + \cdots + C(n,k) + \cdots + C(n,n))$
   $= n \times 2^{n-1} + C(n,0) - (C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + \cdots + C(n,k) + \cdots + C(n,n))$
   $= n \times 2^{n-1} + 1 - 2^n$
   $= 1 + (n-2) \times 2^{n-1}$

Exercice 6. Combien y a-t-il d'entiers entre 1 et 600 qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5 ?
$600 - \lfloor \frac{600}{2} \rfloor - \lfloor \frac{600}{3} \rfloor - \lfloor \frac{600}{5} \rfloor + \left\lfloor \frac{600}{2 \times 3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{600}{2 \times 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{600}{3 \times 5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{600}{2 \times 3 \times 5} \right\rfloor = 160$

Exercice 7. A l'aide des chiffres : 2, 3, 5, 7, 9 :

1. combien de nombres de trois chiffres peut-on former ? Réponse : 5^3
2. combien de ces nombres sont inférieurs à 500 ? Réponse : 2×5^2
3. combien de ces nombres sont supérieurs à 700 ? Réponse : 2×5^2
4. combien de ces nombres sont pairs ? Réponse : $5^2 \times 1$
5. combien de ces nombres sont impairs ? Réponse : $5^2 \times 4$ ou encore $5^3 - 5^2 \times 1$
6. combien de ces nombres sont des multiples de sept ? Réponse : 18.
   Ces nombres sont : 252, 259, 273, 322, 329, 357, 392, 399, 525, 532, 539, 553, 595, 735, 777, 952, 959, 973.

Exercice 8. Combien de chaînes binaires de longueur 10 :

1. commencent par 11 et finissent par '000'. Réponse : 2^5
2. contiennent quatre 0 et six 1. Réponse : $C(10,4) = C(10,6)$
3. contiennent au moins deux 0. $2^{10} - C(10,0) - C(10,1) = 2^{10} - 11$
4. contiennent au moins deux 0 et au moins deux 1.C'est l'ensemble des possibilités de chaînes binaires moins le nombre de chaînes contenant respectivement : aucun 0, un seul 0, neuf 0 et dix 0. Soit $2^{10} - C(10,10) - C(10,9) - C(10,1) - C(10,0) = 2^{10} - 22$.
   On peut aussi l'obtenir en dénombrant directement ceux qui contiennent exactement deux fois zéro, trois fois zéro, ..., dix fois zéro. Soit : $C(10,2) + C(10,3) + \cdots + C(10,9) + C(10,10)$

5. contiennent soit quatre 1 consécutifs, soit quatre 0 consécutifs.
   Faire le dénombrement au cas par cas et ne pas oublier d'exclure les doublons.

Exercice 9. Soit E un ensemble à n éléments. On appelle dérangement de E toute permutation de E ne laissant aucun élément invariant. On notera D_n le nombre de dérangements de E. On pose $D_0 = 1$.

1. Si E comporte un seul élément, y-a-t-il des dérangements de E ? En déduire D_1.
   Réponse : Pas de dérangement. $D_1 = 0$.
2. Si E comporte deux éléments, combien y-a-t-il de dérangements de E ? En déduire D_2.
   Réponse : 1 dérangement. $D_2 = 1$.
3. On suppose n quelconque, et on ecrit $E = \{a_1, ..., a_n\}$. Soit f une permutation de E. On suppose qu'elle laisse k éléments invariants. Combien y-a-t-il de telles permutations ? En déduire la formule suivante :
$$n! = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_k$$
   Réponse : Une permutation qui laisse k éléments invariants contient $(n-k)$ dérangements, soit D_{n-k}.
   Il y a $C(n,k)$ façons d'avoir k éléments invariants.
   Le nombre de permutations est donc $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_{n-k}$.
   Déduction : Le nombre de permutations de E est $n!$. On peut donc établir que $n! = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_{n-k}$.
   $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_{n-k} = C(n,0) \times D_n + C(n,1) \times D_{n-1} + \cdots + C(n,n-1) \times D_1 + C(n,n) \times D_0$
   En considérant que $C(n,k) = C(n,n-k)$, on a :
   $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_{n-k} = C(n,n) \times D_n + C(n,n-1) \times D_{n-1} + \cdots + C(n,1) \times D_1 + C(n,0) \times D_0$
   D'où $n! = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_k$.
4. En déduire D_3, D_4, D_5.
   Réponse : $D_3 = 2$ car $3! = \sum_{k=0}^{3} C(3,k) \times D_k$. En faisant une démarche analogue on obtient $D_4 = 9$, $D_5 = 44$.
5. Cinq couples de danseurs se rendent à un bal masqué. À l'arrivée, on sépare les hommes et les femmes. On numérote les femmes de 1 a 5 , et les hommes de 1 a 5. On les fait ensuite s'élancer sur une piste, chaque homme choississant au hasard une femme pour partenaire.
   5.1. A chaque numéro de femme, on associe le numéro de l'homme avec lequel elle danse. Combien y a t-il d'associations possibles ?
   Réponse : Une telle association correspond à une permutation de $\{1, ..., 5\}$. Il y a $5! = 120$ possibilités.
   5.2. De combien de manières peut-on composer cinq couples de danseurs pour qu'aucun couple légitime ne soit reconstitué ?
   Réponse : Si aucun couple légitime n'est reconstitué, c'est qu'il y a un dérangement. Il y a $D_5 = 44$ possibilités.
   5.3. De combien de manières peut-on composer cinq couples de danseurs pour qu'un seul couple légitime soit reconstitué ?
   Réponse : Si un seul couple légitime est reconstitué, il y a 5 choix pour ce couple. Pour le reste, il faut un dérangement : il y a donc $5 \times D_4 = 45$ possibilités.
   5.4. De combien de manières peut-on composer cinq couples de danseurs pour qu'il y ait plus de couples illégitimes sur la piste de danse que de couples légitimes ?
   Réponse :
   - On peut avoir trois (03) couples illégitimes et deux (02) couples légitimes. Or il y a $C(5,3) = 10$ choix de 2 couples légitimes parmi 5. Pour les 3 autres, il faut une association qui soit un dérangement D_3. On a donc : $10 \times D_3 = 20$ possibilités.
   - On peut avoir quatre (04) couples illégitimes et un (01) couple légitime. Ce cas est traité dans la question précédente (question 5.3.). On a donc : $5 \times D_4 = 45$ possibilités.
   - On peut avoir cinq (05) couples illégitimes et zéro (0) couple légitime. Ce cas est traité dans la question 5.2. On a donc : $D_5 = 44$ possibilités.

   Le nombre d'associations où il y a plus de couples illégitimes que de couples légitimes est donc : $20 + 45 + 44 = 109$.

Exercice 10. Parmi les permutations de l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ (que l'on peut représenter par les mots de 6 lettres qui contiennent exactement une fois chaque lettre de E), combien y en a-t-il qui ne contiennent ni ab ni cd ni ef ?

Première méthode

- Nombre de permutations qui contiennent ab.
  Pour une position fixe de ab, il y a : 4! possibilités de placer les autres lettres. Or il y a 5 positions possibles pour ab. Donc pour ab on a : $5 \times 4! = 120$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent cd.
  Le raisonnement est analogue au cas de ab. D'où $5 \times 4! = 120$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent ef.
  Le raisonnement est analogue au cas de ab. D'où $5 \times 4! = 120$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent ab et cd
  Pour une position fixe de ab et cd, il y a : 2! possibilités de placer les autres lettres. Il y a 5 positions possibles pour ab. Une fois ab placé, il y a 3, 2, 2, 2, 3 positions respectives pour cd. Soit 10 possibilités. Donc pour ab et cd on a : $12 \times 2! = 24$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent ab et ef
  Le raisonnement est analogue au cas de ab et cd. D'où $12 \times 2! = 24$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent cd et ef
  Le raisonnement est analogue au cas de ab et cd. D'où $12 \times 2! = 24$ possibilités de permutations.
- Nombre de permutations qui contiennent ab, cd et ef
  Il y a $3! = 6$ possibilités de permutations.

Le résultat recherché est alors $3(5 \times 4!) - 3(12 \times 2!) + 3! = 294$ possibilités de permutations.

Deuxième méthode

- Pour avoir ab seul on a : $5 \times 4! - 42$ possibilités. Pareil pour cd seul ou ef seul. Au total on a : $3(5 \times 4! - 42) = 234$ possibilités.
- Pour avoir ab et cd ensemble et sans ef on a : 18 possibilités. Pareil pour cd et ef sans ab puis ab et ef sans cd. Au total on a : 54 possibilités.
- Pour avoir ab, cd et ef ensemble on a : 6 possibilités.

Le résultat recherché est alors $6! - 3(5 \times 4! - 42) - (3 \times 18) - 6 = 234 + 54 + 6 = 294$ possibilités de permutations.

Exercice 11. On considère le mot MATRICE.

1. Dénombrer les anagrammes du mot.
2. Dans chacun des cas suivants, dénombrer les anagrammes du mot :
   2.1. commençant et finissant par une voyelle ;
   2.2. commençant et finissant par une consonne ;
   2.3. commençant par une consonne et finissant par une voyelle ;
   2.4. commençant par une voyelle et finissant par une consonne.

Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 13, 20, 21, 32, 39 (Pages 300-301) ; 8, 18 (Page 308) ; 11, 17 (Page 331); 8, 9, 10, 29,30, 32 (Pages 333-335).