POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 1 ET 2 : LOGIQUE ET ENSEMBLES

1. Logique

Exercice 1. Construisez une table de vérité pour chacune des propositions composées suivantes :
1. $(p \wedge q) \rightarrow p$
2. $p \rightarrow (\neg q \vee r)$
3. $(p \oplus q) \vee (\neg p \oplus q)$
4. $(\neg p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow \neg p)$

Exercice 2. Relevez parmi les formules suivantes celles qui sont des tautologies, des contradictions ou des contingences.
1. $(p \rightarrow q) \rightarrow p$
2. $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
3. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
4. $(p \leftrightarrow (r \vee q)) \rightarrow (\neg q \rightarrow p \vee r)$
5. $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg q)$
6. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

Exercice 3. Ecrivez la réciproque et la contraposée de chacune des implications suivantes :

a. Si $2 * 3 = 7$, alors je suis joueur du Canadiens de Montréal.
b. S'il fait beau et si je ne suis pas fatigué, alors je vais à la plage.
c. Si je deviens chevalier Jedi, alors je vais sur la Lune ou je me couronne empereur.

Exercice 4. Soit $P(x, y)$ l'énoncé "$x + y > 10$". L'univers du discours étant l'ensemble des nombres relatifs, déterminez quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes :
1. $P(3, 9)$
2. $P(x, 4)$
3. $\forall\, y\; P(2, y)$
4. $\exists\, x\; P(x, 100)$
5. $\exists\, x\; \exists\, y\; P(x, y)$
6. $\forall\, x\; \exists\, y\; P(x, y)$
7. $\exists\, x\; \forall\, y\; P(x, y)$
8. $\forall\, y\; \exists\, x\; P(x, y)$
9. $\forall\, x\; \forall\, y\; P(x, y)$

Exercice 5. Montrez les équivalences qui suivantes :
1. $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$
2. $((P \vee Q) \rightarrow R) \Leftrightarrow ((P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R))$
3. $((P \wedge Q) \rightarrow R) \Leftrightarrow ((P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R))$
4. $(P \rightarrow (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R))$
5. $(P \rightarrow (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$

Exercice 6. Isabelle souhaite reconstituer l'arbre généalogique de sa famille. Mais, elle ne dispose que des données suivantes :
- son père avait deux oncles et une tante : Arthur, Bernard et Cécile ;

- Arthur, Bernard et Cécile ont eu six enfants : Urbain, Vincent, Walter, Xavier, Yvette et Zoé ;
- Bernard a eu la famille la plus nombreuse ;
- Yvette est enfant unique ;
- Walter et Xavier n'ont qu'un frère et pas de soeur ;
- Zoé est la soeur d'Urbain et est plus âgée que lui ;
- Arthur n'a pas eu de fille.

À partir de ces informations, peut-on conclure que :

a. Cécile est la mère d'Yvette?
b. Walter et Urbain sont frères ?
c. Bernard a plus de fils qu'Arthur ?
d. Zoé est l'aînée des enfants de Bernard ?

Exercice 7. On considère les propositions P, Q, R, S représentant respectivement les assertions : "*Paul est régulier au cours*", "*Paul est régulier aux séances de TD*", "*Paul étudie pour le cours*" et "*Paul réussit le cours*". Énoncer des phrases simples qui traduisent chacune des propositions suivantes :

a. $\neg P$
b. $\neg(P \vee Q)$
c. $\neg P \vee \neg Q$
d. $R \to (P \vee Q)$
e. $P \vee Q \wedge \neg R \to \neg S$
f. $P \wedge Q \wedge R \to S$
g. $S \to (P \leftrightarrow Q \leftrightarrow R)$

Exercice 8. Indiquer quel (s) est (sont) la (les) traduction (s) correcte (s) des énoncés suivants :

1. "*Ne pas perdre ce n'est pas obligatoirement gagner, alors que gagner c'est toujours ne pas perdre.*" Soit p : "*Perdre*" et q : "*Gagner*".
   a. $q \to \neg p$
   b. $\neg p \leftrightarrow q$
   c. $(\neg p \to \neg q) \wedge (q \to \neg p)$
   d. $\neg(\neg p \to q) \wedge (q \to \neg p)$
   e. $(q \to \neg p) \wedge (\neg p \to q)$
   f. $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \to (q \leftrightarrow \neg p)$

2. "*Tous les enfants ne sont pas des anges.*" Soit P le prédicat "*est un enfant*" et Q le prédicat "*est un ange*".
   a. $P \to \neg Q$
   b. $\neg(P \Leftrightarrow Q)$
   c. $\forall x(Q(x) \to \neg P(x))$
   d. $\neg\ \forall x(Q(x) \Leftrightarrow P(x))$
   e. $\neg\ \forall x(P(x) \to Q(x))$
   f. $\forall x(P(x) \to \neg Q(x))$
   g. $\exists x(P(x) \wedge\ \neg Q(x))$
   h. $\exists x(P(x) \to \neg Q(x))$

Exercice 9. On considère les propositions ci-dessous. L'univers du discours est l'ensemble des réels.

1. Donner la négation de chacune des propositions.
2. Écrire chacune des propositions à l'aide de quantificateurs et de connecteurs logiques.

***Propositions* :**

a. Le carré de tout réel est positif.
b. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
c. Aucun réel n'est supérieur à tous les autres.
d. Étant donné trois réels non nuls, il y en a au moins deux de même signe.
e. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.

Exercice 10. Comparer les différentes phrases. Quelles sont celles qui sont équivalentes ? Quelles sont celles qui sont contraires ? Quelles sont celles qui impliquent les autres ?

1. $\forall x, \exists y, x = y$
2. $\exists x, \forall y, y < x$
3. $\exists x, \exists y, x \leq y$
4. $\forall x, \exists y, x \leq y$
5. $\exists x, \exists y, y < x$
6. $\exists x, \forall y, x \leq y$
7. $\forall x, \forall y, x \leq y$

2. Ensembles

Exercice 11. Soient les ensembles A = { 3, 4, 5, 6, 9 }, B = { 0, 1, 5, 6, 7, 9 } et C = { 1, 2, 3, 6, 8 }. Déterminez les ensembles suivants :

- $A \cup B$
- $B - C$
- $(C - B) - A$
- $A \cap (B \cup C)$
- $B - (A \cap B \cap C)$

Exercice 12. Les 124 étudiantes et étudiants d'une école secondaire peuvent choisir d'étudier l'anglais, l'espagnol ou le mandarin. On sait que :

- 65 étudient l'anglais
- 33 étudient l'espagnol
- 25 n'étudient que le mandarin
- 9 étudient les trois langues
- 15 n'étudient aucune langue
- 22 étudient au moins deux langues
- 7 n'étudient que le mandarin et l'espagnol

1. Combien de personnes étudient-elles l'anglais ou l'espagnol ?
2. Combien de personnes étudient-elles l'anglais et l'espagnol ?
3. Combien de personnes n'étudient que l'espagnol ?
4. Combien de personnes étudient-elles le mandarin et l'anglais mais pas l'espagnol ?
5. Combien de personnes n'étudient que l'anglais ?

Exercice 13. Soit E et F deux ensembles. Si $A \subset E$ et $B \subset F$ montrer que : $A \times B \subset E \times F$.

Exercice 14. Soit E, F et G trois ensembles. Montrer que $(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$.

Exercice 15. Soit E un ensemble, A et B des sous-ensembles de E. On suppose que : $A \cap B \neq \phi$, $A \cup B \neq E$, $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$. Montrer que :

1. $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $B \cap \overline{A}$, $\overline{A \cup B}$ sont non vides.
2. $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $B \cap \overline{A}$, $\overline{A \cup B}$ sont deux à deux disjoints.
3. $(A \cap B) \bigcup (A \cap \overline{B}) \bigcup (B \cap \overline{A}) \bigcup (\overline{A \cup B}) = E$

Exercice 16. Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On appelle *différence symétrique* de A et B, notée $A\Delta B$, le sous ensemble de E :

$$A\Delta B = \{x \in A \cup B;\ x \notin A \cap B\}$$

1. Montrer que $A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$
2. Démontrer que $A\Delta B = B$ si et seulement si $A = \phi$
3. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\overline{A}$, $A\Delta E$, $A\Delta\phi$

4. Démontrer que pour tous A, B, C sous-ensembles de E, on a :

$$(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C)$$
$$(A\Delta B) \cap \overline{C} = (A \cup C)\Delta(B \cup C)$$

Exercice 17. Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Notons $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, la *différence symétrique* de A et B

1. Vérifier que : $A\Delta B = B\Delta A$
2. Montrer que $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
3. Montrer que $A\Delta B = \overline{A}\Delta\overline{B}$
4. Démontrer que $A\Delta B = A\Delta C \rightarrow B = C$

3. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros : 2 et 4 (Page 9) ; 7, 9 (Page 10) ; 13 (Page 11) ; 8 (Page 30) ; 10, 15 (Page 31) ; 29 (Page 32) ; 6, 10, 19 (Page 51) ; 31, 32 (Page 52).