POLYTECHNIQUE MONTRÉAL
LE GÉNIE EN PREMIÈRE CLASSE

LOG 2810
STRUCTURES DISCRETES

TD 8 ET 9 : DÉNOMBREMENTS

Exercice 1. Résoudre les relations de récurrence suivantes :
1. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$; $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$
2. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$
3. $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$; $a_0 = 1$ et $a_1 = 3$
4. $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} + 6a_{n-3}$; $a_0 = 1$, $a_1 = -4$ et $a_2 = -4$
5. $a_n = 7a_{n-1} - 16a_{n-2} + 12a_{n-3}$; $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$

Exercice 2. Donner un ordre de grandeur asymptotique pour $T(n)$.
1. $T(n) = 4T(n/2) + n^3$
2. $T(n) = 8T(n/2) + n^2$
3. $T(n) = 2T(n/4) + n^2$

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, on note : $\sum_n^p$ le nombre de n-uplets $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $x_1 + x_2 + ... + x_n = p$.
1. Déterminer $\sum_n^0$, $\sum_n^1$, $\sum_n^2$, $\sum_1^p$, $\sum_2^p$.
2. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\sum_{n+1}^p = \sum_n^0 + \sum_n^1 + \cdots + \sum_n^p$
3. En déduire que $\sum_n^p = C(n+p-1, p)$

Exercice 4. Soit A une partie d'un ensemble E à n éléments. On pose $p = Card\ A$.
1. Combien y-a-t-il de parties X de E contenant A ?
2. Combien y-a-t-il de parties X de E à m éléments contenant A, $m \in \{p, \ldots, n\}$?
3. Combien y-a-t-il de couples (X, Y) de parties de E tels que $X \cap Y = A$?

Exercice 5. Soit la relation : $k \times C(n, k) = n \times C(n-1, k-1)$
1. Démontrez la relation.
2. En déduire pour tout entier positif n, la somme :
$$C(n, 1) + 2 \times C(n, 2) + \cdots + k \times C(n, k) + \cdots + n \times C(n, n)$$
3. En déduire pour tout entier positif non nul n, la somme :
$$C(n, 2) + \cdots + (k-1) \times C(n, k) + \cdots + (n-1) \times C(n, n)$$

Exercice 6. Combien y a-t-il d'entiers entre 1 et 600 qui ne sont divisibles ni par 2, ni par 3, ni par 5 ?

Exercice 7. A l'aide des chiffres : 2, 3, 5, 7, 9 :
1. combien de nombres de trois chiffres peut-on former ?
2. combien de ces nombres sont inférieurs à 500 ?
3. combien de ces nombres sont supérieurs à 700 ?
4. combien de ces nombres sont pairs ?
5. combien de ces nombres sont impairs ?
6. combien de ces nombres sont des multiples de sept ?

Exercice 8. Combien de chaînes binaires de longueur 10 :

1. commencent par 11 et finissent par '000' ?
2. contiennent quatre 0 et six 1.
3. contiennent au moins deux 0.
4. contiennent au moins deux 0 et au moins deux 1.
5. contiennent soit quatre 1 consécutifs, soit quatre 0 consécutifs ?

Exercice 9. Soit E un ensemble à n éléments. On appelle dérangement de E toute permutation de E ne laissant aucun élément invariant. On notera D_n le nombre de dérangements de E. On pose $D_0 = 1$.

1. Si E comporte un seul élément, y-a-t-il des dérangements de E ? En déduire D_1.
2. Si E comporte deux éléments, combien y-a-t-il de dérangements de E ? En déduire D_2.
3. On suppose n quelconque, et on ecrit $E = \{a_1, ..., a_n\}$. Soit f une permutation de E. On suppose qu'elle laisse k éléments invariants. Combien y-a-t-il de telles permutations ? En déduire la formule suivante :
$$n! = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \times D_k$$
4. En déduire D_3, D_4, D_5.
5. Cinq couples de danseurs se rendent à un bal masqué. À l'arrivée, on sépare les hommes et les femmes. On numérote les femmes de 1 a 5 , et les hommes de 1 a 5. On les fait ensuite s'élancer sur une piste, chaque homme choisissant au hasard une femme pour partenaire.
   - 5.1. A chaque numéro de femme, on associe le numéro de l'homme avec lequel elle danse. Combien y a t-il d'associations possibles ?
   - 5.2. De combien de manières peut-on composer cinq couples de danseurs pour qu'aucun couple légitime ne soit reconstitué ?
   - 5.3. De combien de manières peut-on composer cinq couples de danseurs pour qu'un seul couple légitime soit reconstitué.
   - 5.4. De combien de manières peut-on composer cinq couples de danseurs pour qu'il y ait plus de couples illégitimes sur la piste de danse que de couples légitimes.

Exercice 10. Parmi les permutations de l'ensemble E = {a, b, c, d, e, f} (que l'on peut représenter par les mots de 6 lettres qui contiennent exactement une fois chaque lettre de E), combien y en a-t-il qui ne contiennent ni ab ni cd ni ef ?

Exercice 11. On considère le mot MATRICE.

1. Dénombrer les anagrammes du mot.
2. Dans chacun des cas suivants, dénombrer les anagrammes du mot :
   - 2.1. commençant et finissant par une voyelle ;
   - 2.2. commençant et finissant par une consonne ;
   - 2.3. commençant par une consonne et finissant par une voyelle ;
   - 2.4. commençant par une voyelle et finissant par une consonne.

Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros 13, 20, 21, 32, 39 (Pages 300-301) ; 8, 18 (Page 308) ; 11, 17 (Page 331); 8, 9, 10, 29,30, 32 (Pages 333-335).