
TD 2 : RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE - RELATIONS

1. RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

Exercice 1. On considère le raisonnement suivant.

a. S'il fait beau, je vais nager.
b. Si la piscine est fermée, je ne peux pas nager.
c. Lorsque l'équipe d'entretien travaille, la piscine est fermée.
d. l'équipe d'entretien travaille et il fait est beau.

---

e. Je ne vais pas nager.

Traduire ce raisonnement dans la logique des propositions. Le raisonnement est-il valide ?

Exercice 2. On considère le raisonnement suivant.

a. L'antilope est un animal herbivore.
b. Le lion est un animal féroce.
c. Un animal féroce est carnivore.
d. Un carnivore peut manger un herbivore.
e. Un animal chasse ce qu'il mange.

---

f. Le lion chasse l'antilope.

Le raisonnement est-il valide ?

Exercice 3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

1. $n^3 - n$ est divisible par 6
2. $n^5 - n$ est divisible par 30
3. $n^7 - n$ est divisible par 42

Exercice 4. Soient $n, m \in \mathbb{Z}$. Montrer que :

- Soit $n \times m$ est pair
- Soit $n^2 - m^2$ est multiple de 8.

Exercice 5. Démontrer pour tout entier naturel n, on a $n^2 + 3n$ qui est un entier pair.

Exercice 6. En utilisant le raisonnement par l'absurde, montrer qu'aucun entier $(6n+m)(n+6m)$, avec $n, m \in \mathbb{N}$, n'est une puissance de 2.

Exercice 7. En utilisant le raisonnement par contraposée (preuve indirecte) démontrer que :
Soit a un réel. Si a^2 n'est pas un multiple entier de 16, alors $a/2$ n'est pas un entier pair.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant le raisonnement par l'absurde démontrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas entier.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$. Montrer que si $2^n - 1$ est un nombre premier, alors n est un nombre premier.

2. Relations

Exercice 10. Soit $E = \{1, 2, 3, 4\}$. On définit sur l'ensemble produit $E \times E$ la relation $\mathcal{R}$:

$$(a, b)\ \mathcal{R}\ (c, d)\ \textit{si}\ (a - c)\ \textit{est pair et}\ (b - d)\ \textit{est divisible par}\ 3$$

1. Donner le cardinal de $E \times E$.
2. Donner la matrice de $\mathcal{R}$.
3. Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
4. Donner le nombre total et la liste des différentes classes d'équivalentes. On désigne par $\overline{(a, b)}$, la classe d'équivalence de (a, b).
5. Calculer le nombre d'éléments des classes suivantes : $\overline{(1, 1)}$, $\overline{(1, 2)}$, $\overline{(1, 3)}$.
6. Soit $b \in E$. Montrer que si $(x, y) \in \overline{(1, b)}$, alors $(x + 1, y) \in \overline{(2, b)}$.

Exercice 11. Soit l'ensemble $\mathcal{A}$ dont les éléments sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On définit la relation $\mathcal{R}$ suivante : $X\,\mathcal{R}Y \Leftrightarrow det(X) = det(Y)$, avec $det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{A}$.
2. Donner la partition de $\mathcal{A}$ définie par $\mathcal{R}$.

Exercice 12. Parmi les relations suivantes de l'ensemble de tous les habitants de la planète Terre,

1. Lesquelles sont-elles des relations d'équivalence ?
2. Pour celles qui ne sont pas des relations d'equivalence, indiquer et justifier les propriétés qui manquent.
3. Pour celles qui sont des relations d'equivalence, indiquer les classes d'équivalence respectives.

- $\{(a, b),\ \textit{a et b ont le même âge}\}$
- $\{(a, b),\ \textit{a et b ont les mêmes parents}\}$
- $\{(a, b),\ \textit{a et b ont un parent en commun}\}$
- $\{(a, b),\ \textit{a et b parlent une même langue}\}$

3. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros : 10 (pages 10) ; 11 à 19 (pages 17) ; 28, 41, 44, 45, 46, 47(pages 171).