

TD 1 ET 2 : LOGIQUE ET ENSEMBLES

1. Logique

Exercice 1. Construisez une table de vérité pour chacune des propositions composées suivantes :

1. $(p \wedge q) \rightarrow p$
2. $p \rightarrow (\neg q \vee r)$
3. $(p \oplus q) \vee (\neg p \oplus q)$
4. $(\neg p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow \neg p)$

Exercice 2. Relevez parmi les formules suivantes celles qui sont des tautologies, des contradictions ou des contingences.

1. $(p \rightarrow q) \rightarrow p$
2. $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$
3. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
4. $(p \leftrightarrow (r \vee q)) \rightarrow (\neg q \rightarrow p \vee r)$
5. $(p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg q)$
6. $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

Exercice 3. Ecrivez la réciproque et la contraposée de chacune des implications suivantes :

- a. Si $2 * 3 = 7$, alors je suis joueur du Canadiens de Montréal.
- b. S'il fait beau et si je ne suis pas fatigué, alors je vais à la plage.
- c. Si je deviens chevalier Jedi, alors je vais sur la Lune ou je me couronne empereur.

Exercice 4. Soit $P(x, y)$ l'énoncé " $x + y > 10$ ". L'univers du discours étant l'ensemble des nombres relatifs, déterminez quelles sont les valeurs de vérité des propositions suivantes :

1. $P(3, 9)$
2. $P(x, 4)$
3. $\forall y P(2, y)$
4. $\exists x P(x, 100)$
5. $\exists x \exists y P(x, y)$
6. $\forall x \exists y P(x, y)$
7. $\exists x \forall y P(x, y)$
8. $\forall y \exists x P(x, y)$
9. $\forall x \forall y P(x, y)$

Exercice 5. Montrez les équivalences qui suivantes :

1. $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$
2. $((P \vee Q) \rightarrow R) \Leftrightarrow ((P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R))$
3. $((P \wedge Q) \rightarrow R) \Leftrightarrow ((P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R))$
4. $(P \rightarrow (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R))$
5. $(P \rightarrow (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$

Exercice 6. Isabelle souhaite reconstituer l'arbre généalogique de sa famille. Mais, elle ne dispose que des données suivantes :

- son père avait deux oncles et une tante : Arthur, Bernard et Cécile ;

- Arthur, Bernard et Cécile ont eu six enfants : Urbain, Vincent, Walter, Xavier, Yvette et Zoé ;
- Bernard a eu la famille la plus nombreuse ;
- Yvette est enfant unique ;
- Walter et Xavier n'ont qu'un frère et pas de soeur ;
- Zoé est la soeur d'Urbain et est plus âgée que lui ;
- Arthur n'a pas eu de fille.

À partir de ces informations, peut-on conclure que :

- a. Cécile est la mère d'Yvette?
- b. Walter et Urbain sont frères ?
- c. Bernard a plus de fils qu'Arthur ?
- d. Zoé est l'aînée des enfants de Bernard ?

Exercice 7. On considère les propositions P, Q, R, S représentant respectivement les assertions : “*Paul est régulier au cours*”, “*Paul est régulier aux séances de TD*”, “*Paul étudie pour le cours*” et “*Paul réussit le cours*”. Énoncer des phrases simples qui traduisent chacune des propositions suivantes :

- a. $\neg P$
- b. $\neg(P \vee Q)$
- c. $\neg P \vee \neg Q$
- d. $R \rightarrow (P \vee Q)$
- e. $P \vee Q \wedge \neg R \rightarrow \neg S$
- f. $P \wedge Q \wedge R \rightarrow S$
- g. $S \rightarrow (P \leftrightarrow Q \leftrightarrow R)$

Exercice 8. Indiquer quel (s) est (sont) la (les) traduction (s) correcte (s) des énoncés suivants :

1. “*Ne pas perdre ce n'est pas obligatoirement gagner, alors que gagner c'est toujours ne pas perdre.*”
Soit p : “*Perdre*” et q : “*Gagner*”.
 - a. $q \rightarrow \neg p$
 - b. $\neg p \leftrightarrow q$
 - c. $(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (q \rightarrow \neg p)$
 - d. $\neg(\neg p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \neg p)$
 - e. $(q \rightarrow \neg p) \wedge (\neg p \rightarrow q)$
 - f. $(\neg p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow (q \leftrightarrow \neg p)$
2. “*Tous les enfants ne sont pas des anges.*”
Soit P le prédicat “*est un enfant*” et Q le prédicat “*est un ange*”.
 - a. $P \rightarrow \neg Q$
 - b. $\neg(P \leftrightarrow Q)$
 - c. $\forall x(Q(x) \rightarrow \neg P(x))$
 - d. $\neg \forall x(Q(x) \leftrightarrow P(x))$
 - e. $\neg \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
 - f. $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$
 - g. $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$
 - h. $\exists x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$

Exercice 9. On considère les propositions ci-dessous. L'univers du discours est l'ensemble des réels.

1. Donner la négation de chacune des propositions.
2. Écrire chacune des propositions à l'aide de quantificateurs et de connecteurs logiques.

Propositions :

- a. Le carré de tout réel est positif.
- b. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
- c. Aucun réel n'est supérieur à tous les autres.
- d. Étant donné trois réels non nuls, il y en a au moins deux de même signe.
- e. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.

Exercice 10. Comparer les différentes phrases. Quelles sont celles qui sont équivalentes ? Quelles sont celles qui sont contraires ? Quelles sont celles qui impliquent les autres ?

1. $\forall x, \exists y, x = y$
2. $\exists x, \forall y, y < x$
3. $\exists x, \exists y, x \leq y$
4. $\forall x, \exists y, x \leq y$
5. $\exists x, \exists y, y < x$
6. $\exists x, \forall y, x \leq y$
7. $\forall x, \forall y, x \leq y$

2. Ensembles

Exercice 11. Soient les ensembles $A = \{ 3, 4, 5, 6, 9 \}$, $B = \{ 0, 1, 5, 6, 7, 9 \}$ et $C = \{ 1, 2, 3, 6, 8 \}$. Déterminez les ensembles suivants :

- $A \cup B$
- $B - C$
- $(C - B) - A$
- $A \cap (B \cup C)$
- $B - (A \cap B \cap C)$

Exercice 12. Les 124 étudiantes et étudiants d'une école secondaire peuvent choisir d'étudier l'anglais, l'espagnol ou le mandarin. On sait que :

- 65 étudient l'anglais
 - 33 étudient l'espagnol
 - 25 n'étudient que le mandarin
 - 9 étudient les trois langues
 - 15 n'étudient aucune langue
 - 22 étudient au moins deux langues
 - 7 n'étudient que le mandarin et l'espagnol
1. Combien de personnes étudient-elles l'anglais ou l'espagnol ?
 2. Combien de personnes étudient-elles l'anglais et l'espagnol ?
 3. Combien de personnes n'étudient que l'espagnol ?
 4. Combien de personnes étudient-elles le mandarin et l'anglais mais pas l'espagnol ?
 5. Combien de personnes n'étudient que l'anglais ?

Exercice 13. Soit E et F deux ensembles. Si $A \subset E$ et $B \subset F$ montrer que : $A \times B \subset E \times F$.

Exercice 14. Soit E, F et G trois ensembles. Montrer que $(E \times G) \cup (F \times G) = (E \cup F) \times G$.

Exercice 15. Soit E un ensemble, A et B des sous-ensembles de E . On suppose que : $A \cap B \neq \phi$, $A \cup B \neq E$, $A \not\subseteq B$ et $B \not\subseteq A$. Montrer que :

1. $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $B \cap \overline{A}$, $\overline{A \cup B}$ sont non vides.
2. $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $B \cap \overline{A}$, $\overline{A \cup B}$ sont deux à deux disjoints.
3. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \cup (\overline{A \cup B}) = E$

Exercice 16. Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E . On appelle *différence symétrique* de A et B , notée $A \Delta B$, le sous ensemble de E :

$$A \Delta B = \{x \in A \cup B; x \notin A \cap B\}$$

1. Montrer que $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$
2. Démontrer que $A \Delta B = B$ si et seulement si $A = \phi$
3. Calculer $A \Delta A$, $A \Delta \overline{A}$, $A \Delta E$, $A \Delta \phi$

4. Démontrer que pour tous A, B, C sous-ensembles de E , on a :

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$$

$$(A \Delta B) \cap \overline{C} = (A \cap \overline{C}) \Delta (B \cap \overline{C})$$

Exercice 17. Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E . Notons $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$, la *différence symétrique* de A et B

1. Vérifier que : $A \Delta B = B \Delta A$
2. Montrer que $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
3. Montrer que $A \Delta B = \overline{A \cap B}$
4. Démontrer que $A \Delta B = A \Delta C \rightarrow B = C$

3. Exercices supplémentaires (livre de Rosen)

Exercices numéros : 2 et 4 (Page 9) ; 7, 9 (Page 10) ; 13 (Page 11) ; 8 (Page 30) ; 10, 15 (Page 31) ; 29 (Page 32) ; 6, 10, 19 (Page 51) ; 31, 32 (Page 52).