# 微积分I（第一层次）期中试题参考答案　2015.11.14

**一. (8 分×2=16分)** 用极限定义证明下列极限：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{3n^2+1}=\dfrac{1}{3}$　($\varepsilon-N$语言);
2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3$　($\varepsilon-\delta$语言).

**二. (8 分)** 设$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n-x^{-n-1}}$, 讨论函数$f(x)$的连续性，并指明间断点的类型。

**三. (8 分)** 设$x$为基准无穷小，试求出无穷小$\arcsin x-x$关于$x$的阶和无穷小主部。

**四. (8 分×5=40分)** 计算下列各题：

1. 设函数$f(x)$在$x=0$的某个邻域内可导，且$f(0)=1$, $f'(0)=-1$, 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left[n(e^{\frac{1}{n}}-1)\right]^{\frac{1}{1-f(\frac{1}{n})}}$.
2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(xe^{-3x})-\cos(xe^{3x})}{x^3}$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\ln\dfrac{x+1}{x-1}-2x^2\right)$.
4. 设$y=x\cdot\sqrt[7]{\dfrac{x^5}{x^3+8}}+(5+\sin x)^{\cos x}$, 求$y'$以及$\mathrm{d}y$.
5. 设$y=\cos^4x-\sin^4x$, 求$y^{(n)}$.

**五. (8 分)** 设$a_1,a_2,a_3$为正数，$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$为实数，满足$\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$. 证明：方程$\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}=0$在区间$(\lambda_1,\lambda_2)$, $(\lambda_2,\lambda_3)$内各有一个根。

**六. (10 分)** 设$x_1=1$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}$ $(n=1,2,\cdots)$, 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求之。

**七. (10 分)** 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=1$, $f(1)=0$. 设常数$a>0$, $b>0$. 证明：

(1) 存在$\xi\in(0,1)$, 使得$f(\xi)=\dfrac{a}{a+b}$;

(2) 存在$\eta,\zeta\in(0,1),\eta\neq\zeta$, 使得$a\left(\dfrac{1}{f'(\eta)}+1\right)+b\left(\dfrac{1}{f'(\zeta)}+1\right)=0$.

## 微积分 I（第一层次）期中试卷(16.11.12)

一、用极限定义证明下列极限：(6分×2 = 12 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{n^2+1}=0.$　　　2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}}=2.$

二、(8分) 讨论函数 $f(x)=|x(x^2-1)|\sin x$ 的可导性.

三、(8分) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f(0)=f'(0)=1$. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}$.

四、计算下列各题：(8分×5 = 40分)

1. 已知函数 $y=y(x)$ 由 $e^y-e^{-x}+xy=0$ 确定，求曲线 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程.
2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right)$.
3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.
4. 设 $y=\ln(\sin x)+x^{x^a}+\dfrac{5^{3x}}{2^x}$, 求 $y'$ 以及 $\mathrm{d}y$.
5. 设 $f(x)=\ln\left(e^{\sin 2x}(x-1)\right)$, 求 $f^{(n)}(x)$.

五、(12分) 已知 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$,

1. 证明：$\dfrac{k}{n+k}<\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)<\dfrac{k}{n}$, 其中 $k$ 为正整数.
2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)\left(1+\dfrac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n}{n^2}\right)$.

六、(12分) 设 $f(x)=x-(ax+b\sin x)\cos x$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^5}$ 存在且不为零, 求常数 $a,b$ 及此极限值.

七、(8分) 设 $f(x)$ 是以 1 为周期的连续函数，$a$ 是一个实数，试证明存在 $\xi\in[0,1]$, 使得 $f(\xi+a)=f(\xi)$.

## 微积分 I（第一层次）期中试卷(17.11.18)

一、用极限定义证明下列极限：(6分×2 = 12 分)

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}+1}{2n-5}=0.$　　　2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-1}=\dfrac{3}{2}.$

二、计算下列极限：(6分×3 = 18 分)

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}}$;　　2. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\pi-2\arctan x)$;　　3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-x^2\sin\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$.

三、(10分) 设 $f(x)=\begin{cases} e^{\sin ax}-1, & x\ge 0\\ b\ln(1+x), & x<0\end{cases}$, 其中参数 $a,b$ 都不为0. 如果 $f''(0)$ 存在，求 $a,b$.

四、(10分) 当 $x\to 0$ 时，以 $x$ 为基准无穷小，求 $(\cos x-1)\ln(1+x)$ 的无穷小主部.

五、(10分) 求方程 $x^3+y^3-3axy=0\ (a>0)$ 所确定的隐函数 $y(x)$ 的二阶导数 $y''$.

六、(10分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0, f(1)=1, f'(0)=1$, 证明：$\exists\eta\in(0,1)$, 使得 $f'(\eta)=\dfrac{f(\eta)}{\eta}$.

七、(10分) 求参数方程 $\begin{cases} x=4\cos\theta \\ y=1+\sin\theta \end{cases}$ $(0\le\theta<\pi)$ 所确定的曲线在 $x=2$ 处的切线和法线方程.

八、(10分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，$f'(x)=-xf(x), f(0)=1$, 证明：对任意的正整数 $k$,

$$\lim_{x\to+\infty} x^k f(x)=0.$$

九、(10分) 设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, 其中 $a,b,c,d$ 为常数且 $a\neq 0$. 证明方程 $f(x)=0$ 有三个不相等的实数根的必要条件是 $b^2-3ac>0$.

## 微积分 I（第一层次）期中试卷(18.11.17)

一、简答题：(5分×8 = 40 分)

1. 用极限的定义证明：$\lim\limits_{x\to2}\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}$.
2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^4+4^n}$.
3. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{2}{x}}$.
4. 设 $y=x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x$, 求 $\mathrm{d}y$.
5. 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}n\Big((1+\dfrac{1}{n})^n-e\Big)$.
6. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x\arcsin x}$.
7. 求极限：$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\Big((1+\ln(1+x))^{2x}-1\Big)$.
8. 设 $x$ 为基准无穷小，求 $\ln(1+x)-\arctan x$ 的主部.

二、(7分) 设 $f(x)=\dfrac{5x-1}{2x^2+x-1}$, 求 $f^{(n)}(x)$.

三、(7分) 证明方程 $\cos x-\dfrac{1}{x}=0$ 有无穷多个正根.

四、(7分) 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=\arctan t, \\ 2y-ty^2+e^t=5a \end{cases}$ 所确定(其中 $a$ 为常数)，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

五、(8分) 设 $f(x)=\arctan x-\arctan\dfrac{x-1}{x+1}$, 其中 $x>-1$.

(1) 证明：$f(x)$ 是常数函数；　(2) 求 $\arctan(2-\sqrt{3})$ 的值.

六、(8分) 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+\ln(1+x^2), & x>0; \\ ax\sin x, & x\le 0, \end{cases}$ 且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导. 试求 $a$ 的值以及 $f''(0)$.

七、(8分) 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{x-1}}}$, 试确定 $f(x)$ 的间断点及其类型.

八、(8分) (1) 对任意的正整数 $n$, 证明 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$;

(2) 令 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 极限存在.

九、(7分) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导，$f(0)=1, f(1)+2f(2)=3$. 试证明：$\exists\xi\in(0,2)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

# 微积分 I (第一层次)期中试卷 (2019.11.16)

一、计算下列各题（每题 6 分，共 48 分）

1. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-\sin^3 x}=1$ .

2. 用 $\varepsilon-N$ 语言证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}=1$ .

3. 求函数 $y=\sqrt{\dfrac{x+2}{x+5}\sin x}+(\arctan x)^{\tan x}$ 的一阶导数和微分。

4. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$， 其中 $a\geqslant 0$ , $b\geqslant 0$ .

5. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 讨论函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可微性.

6. 设 $x_1>0$ , $x_{n+1}=\ln(1+x_n)$ . 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

7. 设 $f(x)=x\ln(1+x)+\cos x+ax^2+bx+c=o(x^2)$ , 求 $a$ , $b$ , $c$ 的值. 若以 $x$ 为基准无穷小，求 $f(x)$ 关于 $x$ 的无穷小阶数和无穷小主部。

8. 设函数 $y(x)$ 由如下参数方程定义: $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=\operatorname{arccot} t+\ln(1+t^2).\end{cases}$ 试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

二、(10分）确定函数 $f(x)$ 的间断点，并说明是哪种类型的间断点。

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}, & x\neq 0, x\neq 1,\\ 0, & x=0,\\ \sin 1, & x=1.\end{cases}$$

三、(10分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且导函数 $f'(x)$ 严格单调递增 . 若 $f(a)=f(b)$ , 证明对一切 $x\in(a,b)$, 有 $f(x)<f(a)=f(b)$ .

四、(10分) 求由方程 $\mathrm{e}^{x+y}-xy-\mathrm{e}=0$ 确定的曲线在点 $(0,1)$ 处的切线和法线方程。

五、(12分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)\neq 0$ , 又 $f(a)=1$ , $f(b)=0$ , 证明

(1) 存在 $\xi_1\in(a,b)$ , 使得 $f(\xi_1)=\dfrac{4}{5}$;

(2) 存在 $\xi_2$ , $\xi_3\in(a,b)$ $(\xi_2\neq\xi_3)$ , 使得 $\dfrac{1}{f'(\xi_2)}+\dfrac{4}{f'(\xi_3)}=5(a-b)$ .

六、(10分) 设 $f(x)=|x|^n g(x)$ , 其中 $n$ 为奇数，$g(x)$ 有 $n$ 阶导数. 在什么条件下 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有 $n$ 阶导数？

# 微积分 I (第一层次)期中试卷(2020.11.21)

一、计算下列各题（每题6分，共48分）

1. 用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明 $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[3]{x}=1$.

2. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{2n}\right)=0$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x^{2x}\sin x, & x>0, \\ x, & x\leqslant 0.\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

4. 设 $0<x_1<1$, 且 $x_{n+1}=-x_n^2+2x_n\,(n\geqslant 1)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 存在极限并求该极限.

5. 求由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\dfrac{y}{x}=\ln 2$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数.

6. 求曲线 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^t\sin 2t \\ y=\mathrm{e}^t\cos t\end{cases}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线和法线方程.

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

8. 已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\alpha}\left(\arctan\dfrac{2020}{n-1}-\arctan\dfrac{2020}{n+1}\right)$ 是不为零的常数, 求 $\alpha$ 以及该极限值.

二、(10分）确定以下函数的间断点，并说明是哪种类型的间断点.

$$f(x)=\begin{cases} \sin\pi x, & x\text{ 为有理数}, \\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

三、(12分）当 $x\to 0$ 时，求 $1-\cos(\sin x)+a\ln(1+x^2)$ 的无穷小阶数和无穷小主部.

四、(10分）设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$, $f(2)=1$, 计算 $f'''(2)$.

五、(10分）设 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$, 求 $f(x)$ 的各阶导函数.

六、(10分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且 $f(0)=0$, $|f'(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}|f(x)|$. 证明：在 $[0,1]$ 上，$f(x)\equiv 0$.

# 微积分 I（第一层次）期中试卷 2021.11.20

一、简答题（每题 6 分，共 48 分）

1. 用定义证明：$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+2}{x-1}=4$.

2. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{1-\cos x}$.

3. 以 $x$ 为基准无穷小，当 $x\to 0$ 时，求 $5^x-1-\ln(1+x\ln 5)$ 的无穷小主部.

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\arctan x+\mathrm{e}^y+xy=0$ 给出，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

5. 设 $x_1\in\mathbb{R}$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\sin x_n$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

6. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln(1+t^2)\\ y=\arctan t\end{cases}$ 确定，求 $t=1$ 对应点处的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

7. 设 $y=(x^2+3x+1)\mathrm{e}^{-x}$，求 $y^{(99)}$.

8. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+a_3^x+a_4^x}{4}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 $a_i>0,\ i=1,2,3,4$.

二、（10分）求函数 $f(x)=\dfrac{|x-1|\tan(x+2)}{x^2+x-2}$ 的间断点，并说明间断点的类型.

三、（10分）设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x>0,\\ 1+x^2, & x\leqslant 0,\end{cases}$

(1) 讨论 $f(x)$ 的连续性； (2) 求 $f'(x)$，并讨论 $f'(x)$ 的连续性.

四、（8分）设 $y=f\left(\dfrac{2x-1}{1-3x}\right)\mathrm{e}^{f(x)}$, $f'(x)=\sin x+x$, 且 $f(0)=1$. 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

五、（8分）当 $x>0$ 时，证明不等式：$0<\mathrm{e}^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}<x(\mathrm{e}^x-1)$.

六、（8分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$|f''(x)|\leqslant M$ 且 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取得最大值.
证明：$|f'(0)|+|f'(1)|\leqslant M$.

七、（8分）证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}=\mathrm{e}$.

# 解答

**一(1).** $\forall\varepsilon>0$, 取$N=\left[\sqrt{\dfrac{2}{9\varepsilon}}\right]$, 则当$n>N$时，

$$\left|\frac{n^2+1}{3n^2+1}-\frac{1}{3}\right|=\frac{\frac{2}{3}}{3n^2+1}<\frac{2}{9n^2}<\varepsilon.$$

**(2).** 限定$|x-1|<1$, 则$|x+2|<4$. $\forall\varepsilon>0$, 取$\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{4}\right\}$, 则当$|x-1|<\delta$时，

$$\left|\frac{x^3-1}{x-1}-3\right|=\left|x^2+x-2\right|=|(x-1)(x+2)|<\varepsilon.$$

**二.**

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & |x|>1,\\ -x, & 0<|x|<1,\\ 0, & x=1.\end{cases}$$

则$f(x)$的间断点为$0,\pm1$. $f(x)$在其余点上皆连续。因为$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=1$, 因此$x=0,-1$为可去间断点；又因为$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=-1$, 因此$x=1$为跳跃间断点。

**三.**

$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x-x}{x^k}=\lim_{t\to0}\frac{t-\sin t}{t^k}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{kt^{k-1}}=\lim_{t\to0}\frac{t^2}{2kt^k}=\frac{1}{6}\ (k=3).$$

所以，$\arcsin x-x$关于$x$的阶是3，无穷小主部为$\dfrac{x^3}{6}$.

**四(1).** 利用函数的极限求解。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{1-f(x)}} &= \exp\left(\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1-f(x)}\ln\frac{e^x-1}{x}\right)\\ &= \exp\left(\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1-x}{x(1-f(x))}\right)=\exp\left(\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1-x}{x^2}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{x}{1-f(x)}\right)\\ &= \exp\left(-\frac{1}{2f'(0)}\right)=e^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

取$x=\dfrac{1}{n}$即得。

**(2).** 解法一：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\cos(xe^{-3x})-\cos(xe^{3x})}{x^3} &= \lim_{x\to0}\frac{1-\cos(xe^{3x})}{x^3}-\frac{1-\cos(xe^{-3x})}{x^3}\\ &= \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(xe^{3x})^2-\frac{1}{2}(xe^{-3x})^2}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{e^{6x}-e^{-6x}}{x}=6.\end{aligned}$$

解法二：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\cos(xe^{-3x})-\cos(xe^{3x})}{x^3} &= \lim_{x\to0}-2\frac{\sin\frac{xe^{-3x}+xe^{3x}}{2}\sin\frac{xe^{-3x}-xe^{3x}}{2}}{x^3}\\ &= -2\lim_{x\to0}\frac{x^2(e^{-3x}+e^{3x})(e^{-3x}-e^{3x})}{4x^3}=6.\end{aligned}$$

**(3).** 令$x=\dfrac{1}{t}$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(x^3\ln\frac{x+1}{x-1}-2x^2\right) &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t^3}\ln\frac{1+t}{1-t}-\frac{2}{t^2}\right)\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-\ln(1-t)-2t}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}+\frac{1}{1-t}-2}{3t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{2t^2}{3t^2(1-t^2)}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

**(4).** 令$y_1=x\cdot\sqrt[7]{\dfrac{x^5}{x^3+8}}=x^{\frac{12}{7}}(x^3+8)^{-\frac{1}{7}}$, $y_2=(5+\sin x)^{\cos x}$. 则

$$y_1'=\frac{12}{7}x^{\frac{5}{7}}(x^3+8)^{-\frac{1}{7}}-\frac{3}{7}x^{\frac{26}{7}}(x^3+8)^{-\frac{8}{7}},$$

$$y_2'=y_2\cdot[\cos x\ln(5+\sin x)]'=y_2\cdot\left(-\sin x\ln(5+\sin x)+\frac{\cos^2 x}{5+\sin x}\right),$$

$y'=y_1'+y_2'$.

**(5).** $y=\cos 2x$, 于是$y^{(n)}=2^n\cos\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

**五.** 解法一：令$f(x)=\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}$, 可知

$$f(\lambda_1+)=+\infty, f(\lambda_2-)=-\infty, \tag{1}$$

由于$f(x)$在$(\lambda_1,\lambda_2)$内连续，由(1)易知在$(\lambda_1,\lambda_2)$内$f(x)$有一根。同理由

$$f(\lambda_2+)=+\infty, f(\lambda_3-)=-\infty, \tag{2}$$

可知在$(\lambda_2,\lambda_3)$内$f(x)$有一根。

解法二：令

$$\begin{aligned}g(x) &= f(x)\cdot(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)\\ &= a_1(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)+a_2(x-\lambda_1)(x-\lambda_3)+a_3(x-\lambda_1)(x-\lambda_2).\end{aligned}$$

由$g(x)$的连续性以及

$$\begin{aligned}g(\lambda_1) &= a_1(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)>0,\\ g(\lambda_2) &= a_2(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)<0,\\ g(\lambda_3) &= a_3(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)>0.\end{aligned}$$

根据介值定理，$f(x)$在区间$(\lambda_1,\lambda_2)$, $(\lambda_2,\lambda_3)$内各有一个根。

**六.** $x_1=1$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}$. 若极限存在，在递推式两边取极限得极限值$a$满足$a=\dfrac{1}{1+a}$, 即$a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$。再验证$x_n$确以$a$为极限。事实上，

$$|x_{n+1}-a|=\left|\frac{1}{1+x_n}-\frac{1}{1+a}\right|=\frac{|x_n-a|}{(1+a)(1+x_n)}\leq\frac{1}{1+a}|x_n-a|=a|x_n-a|.$$

由于$0<a<1$, 由$|x_{n+1}-a|\leq a^n|x_1-a|$及夹逼准则可知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

**七.** (1)利用连续函数的零点定理，令$\phi(x)=f(x)-\dfrac{a}{a+b}$, 有$\phi(0)>0$，$\phi(1)<0$, 可知存在$\xi\in(0,1)$使得$f(\xi)=\dfrac{a}{a+b}$;

(2)在区间$[0,\xi]$与$[\xi,1]$上，对$f(x)$分别用Lagrange中值定理，得存在$\zeta\in(0,\xi),\eta\in(\xi,1)$, 使

$$f'(\zeta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0},f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(1)}{\xi-1}.$$

再代入$f(\xi)=\dfrac{a}{a+b}$, $f(0)=1$, $f(1)=0$, 得到

$$\frac{a}{f'(\eta)}+\frac{b}{f'(\zeta)}=\frac{a(\xi-1)}{f(\xi)}+\frac{b\xi}{f(\xi)-1}=-(a+b).$$

微积分I（第一层次）期中试卷参考答案16.11.12

一、 证明：1. $\left|\frac{2n+1}{n^2+1}-0\right|=\frac{2n+1}{n^2+1}<\frac{4n}{n^2}=\frac{4}{n}$,

$\forall\varepsilon>0$, 取$N=\left[\frac{4}{\varepsilon}\right]+1$, 则当$n>N$ 时，总有$\left|\frac{2n+1}{n^2+1}-0\right|<\varepsilon.$

2. $\left|\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}-2\right|=|\sqrt{x}-1|=\frac{|x-1|}{\sqrt{x}+1}\le|x-1|$ （设$0<|x-1|<1$）

$\forall\varepsilon>0$, 取$\delta=\min\{1,\varepsilon\}$, 则当$0<|x-1|<\delta$时，总有$\left|\frac{1-x}{1-\sqrt{x}}-2\right|<\varepsilon.$

二、 解：$f(x)=\begin{cases} x(x^2-1)\sin x, & x\ge 1 \text{ 或 } -1<x\le 0;\\ x(1-x^2)\sin x, & 0<x<1 \text{ 或 } x\le -1.\end{cases}$

显然$f(x)$在$(-\infty,-1),(-1,0),(0,1),(1,+\infty)$内可导；

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x(x^2-1)\sin x}{x-1}=2\sin 1;$

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x(1-x^2)\sin x}{x-1}=-2\sin 1;$

同理， $f'_+(-1)=-2\sin 1,\ f'_-(-1)=2\sin 1;$ $f'_+(0)=0,\ f'_-(0)=0;$

$f'_+(1)\ne f'_-(1),\ f'_+(-1)\ne f'_-(-1), f'_+(0)=f'_-(0)=0$, 故$f(x)$在$x=\pm1$处不可导，在$x=0$处可导；

综上，$f(x)$在$x=\pm1$处不可导，在其他点可导。

三、原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(\sin x)-f(0)}{\sin x-0}\cdot\frac{\sin x}{\ln(1+f(x)-1)}=f'(0)\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{f(x)-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-0}{f(x)-f(0)}=\frac{1}{f'(0)}=1.$

四、1. 解：把$y$看成$x$的函数，方程$e^y-e^{-x}+xy=0$两边对$x$求导得$e^yy'+e^{-x}+y+xy'=0$, 即$y'=\frac{-y-e^{-x}}{e^y+x}$, $x=0$时$y=0$, 代入上式得$y'(0)=-1$, 所以切线方程为$y=-x.$

2. 解：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}+\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$

3. $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x\cdot\frac{x}{2}(1+\sqrt{\cos x})}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{x^2}{2}}{x\cdot\frac{x}{2}(1+\sqrt{\cos x})}=\frac{1}{2}.$

4. 解: $y'=\frac{\cos x}{\sin x}+x^{x^a}(x^a\ln x)'+\frac{3\cdot5^{3x}\ln5\cdot2^x-5^{3x}\cdot2^x\ln2}{2^{2x}}=\cot x+x^{x^a}x^{a-1}(a\ln x+1)+\frac{5^{3x}(3\ln5-\ln2)}{2^x};$

$\mathrm{d}y=\left(\cot x+x^{x^a}x^{a-1}(a\ln x+1)+\frac{5^{3x}(3\ln5-\ln2)}{2^x}\right)\mathrm{d}x.$

5. 解：$f(x)=\sin 2x+\ln(x-1),\ f'(x)=2\cos 2x+\frac{1}{x-1},\ f^{(n)}(x)=2^n\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)+(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(x-1)^n}.$

五、 1. 证明：设$f(x)=\ln(1+x)$, 则$f'(x)=\frac{1}{1+x}$, 当$x>0$时，由拉格朗日中指定理 $f(x)-f(0)=f'(\xi)x$, 即$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi}$ $(0<\xi<x)$, 而$\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x$, 所以$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$, $(x>0)$. 取$x=\frac{k}{n}$即得$\frac{k}{n+k}<\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)<\frac{k}{n}.$

2. $a_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)=\exp\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right)$

所以 $a_n < \exp\Big(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\Big) < \exp\Big(\frac{n(n+1)}{2n^2}\Big)$;

$a_n > \exp\Big(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\Big) > \exp\Big(\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)}\Big)$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\exp\Big(\frac{n(n+1)}{2n^2}\Big) = \lim\limits_{n\to\infty}\exp\Big(\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)}\Big) = e^{\frac{1}{2}}$, 由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{\frac{1}{2}}$.

六、解：$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$,代入 $f(x)$ 的表达式得

$f(x) = x - \Big(ax + bx - \frac{bx^3}{3!} + \frac{bx^5}{5!} + o(x^5)\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\Big) = (1-a-b)x + \Big(\frac{a}{2}+\frac{2b}{3}\Big)x^3 - \Big(\frac{a}{24}+\frac{2b}{15}\Big)x^5 + o(x^5)$,

所以 $1-a-b=0, \frac{a}{2}+\frac{2b}{3}=0$, 解得$a=4, b=-3$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^5} = -\Big(\frac{a}{24}+\frac{2b}{15}\Big) = \frac{7}{30}$.

七、证明：$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以在 $[0,1]$ 上有最大值和最小值。设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值为$f(c_1)=M$，最小值为 $f(c_2)=m$, 则由周期性可知，$M$和$m$分别是$f(x)$的最大值和最小值，即 $f(c_2)\le f(x)\le f(c_1), \forall x\in(-\infty,+\infty)$. 设 $F(x)=f(x+a)-f(x)$, 则$F(x)$在 $[0,1]$ 上连续，且$F(c_1)=f(c_1+a)-f(c_1)\le 0, F(c_2)=f(c_2+a)-f(c_2)\ge 0$, 由零点定理，存在 $\xi\in[0,1]$, 使得 $F(\xi)=0$, 即 $f(\xi+a)=f(\xi)$.

## 微积分I（第一层次）期中试卷参考答案17.11.18

一、 证明：1. $\Big|\frac{\sqrt{n}+1}{2n-5}-0\Big| = \frac{\sqrt{n}+1}{2n-5} < \frac{2\sqrt{n}}{n} = \frac{2}{\sqrt{n}}$ $(n>5)$, $\forall\varepsilon>0$, 要使$\Big|\frac{\sqrt{n}+1}{2n-5}-0\Big|<\varepsilon$, 只需要$\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$, 即 $n>\frac{4}{\varepsilon^2}$, 取$N=\max\{\Big[\frac{4}{\varepsilon^2}\Big]+1,5\}$, 则当$n>N$ 时，总有$\Big|\frac{2n+1}{n^2+1}-0\Big|<\varepsilon$.

2. $\Big|\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}-\frac{3}{2}\Big| = \frac{|x-1|}{2(x+1)} \le |x-1|$ （设$0<|x-1|<1$）

$\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\Big\{1,\varepsilon\Big\}$, 则当$0<|x-1|<\delta$时，总有$\Big|\frac{x^2-x-1}{x^2-1}-\frac{3}{2}\Big|<\varepsilon$.

二、 1. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}} = e$;

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\pi-2\arctan x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\pi-2\arctan x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{1+x^2} = 2$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-x^2\sin\frac{1}{x}}{\ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2x-x^2\sin\frac{1}{x}}{x} = 2-\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x} = 2$.

三、解：$f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{\sin ax}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin ax}{x} = a$;

$f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{b\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{bx}{x} = b$; 所以 $a=b$；

$$f'(x) = \begin{cases} a\cos(ax)e^{\sin ax}, & x>0; \\ a, & x=0; \\ \frac{a}{1+x}; & x<0. \end{cases}$$

$f''_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{a\cos ax e^{\sin ax}-a}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-a^2\sin(ax)e^{\sin ax}+a^2\cos^2(ax)e^{\sin ax}}{1} = a^2$;

$f''_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{a}{1+x}-a}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{-b}{(1+x)^2} = -a$; 所以 $a^2=-a$, 解得 $a=b=-1$.

四、解：$(\cos x-1)\ln(1+x)\sim-\frac{x^2}{2}\cdot x=-\frac{x^3}{2}$，所以无穷小主部是$-\frac{x^3}{2}$.

五、解：把$y$看作$x$的函数，方程两边对$x$求导得 $3x^2+3y^2\cdot y'-3ay-3ax\cdot y'=0$ (1)，可得$y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}$.

(1) 式化简得 $x^2+y^2y'-ay-axy'=0$，两边继续对$x$求导得 $2x+2y(y')^2+y^2y''-2ay'-axy''=0$，

解得 $y''=\frac{2ay'-2y(y')^2-2x}{y^2-ax}=\frac{2a(ay-x^2)(y^2-ax)-2y(ay-x^2)^2-2x(y^2-ax)^2}{(y^2-ax)^3}$.

六、 证明：设$F(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & 0<x\le 1,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ $F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，$\lim\limits_{x\to0}F(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=1=F(0)$，故$F(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，$F(0)=F(1)=1$，由洛尔定理可得，$\exists\eta\in(0,1)$，使得 $F'(\eta)=\frac{\eta f'(\eta)-f(\eta)}{\eta^2}=0$，即 $f'(\eta)=\frac{f(\eta)}{\eta}$.

七、解：$x=2$时$\theta=\frac{\pi}{3}$，$y=1+\frac{\sqrt{3}}{2}$. 切线的斜率$k=\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=\left.\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=\left.\frac{\cos\theta}{-4\sin\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{12}$，

切线方程为$y=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{12}(x-2)$， 法线方程为$y=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+4\sqrt{3}(x-2)$.

八、证明：设$F(x)=e^{\frac{x^2}{2}}f(x)$，则$F'(x)=xe^{\frac{x^2}{2}}f(x)+e^{\frac{x^2}{2}}f'(x)=e^{\frac{x^2}{2}}(f'(x)+xf(x))=0$，故$F(x)=C=F(0)=1$，即$e^{\frac{x^2}{2}}f(x)=1$，所以$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$. 所以$\lim\limits_{x\to+\infty}x^kf(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^k}{e^{\frac{x^2}{2}}}=0$.

九、证明：方程$f(x)=0$有三个不相等的实数根，设为$x_1,x_2,x_3$，不妨设$x_1<x_2<x_3$.

$f(x)$在$[x_1,x_2]$上连续，在$(x_1,x_2)$内可导，$f(x_1)=f(x_2)=0$，由洛尔定理，$\exists\xi_1\in(x_1,x_2)$，使得$f'(\xi_1)=0$；同理，$\exists\xi_2\in(x_2,x_3)$，使得$f'(\xi_2)=0$；即$f'(x)=3ax^2+2bx+c=0$有两个不相等的实数根，故$\Delta=4b^2-12ac>0$，即$b^2-3ac>0$.

## 微积分 I（第一层次）期中试卷参考答案18.11.17

一、 1. 证明：$\left|\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}\right|=\frac{|(x-2)(x+2)|}{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{3}}\le5|x-2|$ （设$0<|x-2|<1$）

$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{5}\right\}$，则当$0<|x-2|<\delta$时，总有$\left|\sqrt{x^2-1}-\sqrt{3}\right|<\varepsilon$.

2. 解：$4\le\sqrt[n]{n^4+4^n}\le\sqrt[n]{n^4\cdot4^n}=4(\sqrt[n]{n})^4$，$\lim\limits_{n\to\infty}4=\lim\limits_{n\to\infty}4(\sqrt[n]{n})^4=4$，由夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^4+4^n}=4$.

3. $\lim\limits_{x\to0}(1+2x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^4=\mathrm{e}^4$.

4. $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left((1+\frac{1}{x})^x-\mathrm{e}\right)\xlongequal{\frac{1}{x}=t}\lim\limits_{t\to0^+}\frac{(1+t)^{\frac{1}{t}}-\mathrm{e}}{t}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\mathrm{e}\left[\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+t)}{t}-1}-1\right]}{t}=\mathrm{e}\cdot\lim\limits_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}=-\frac{\mathrm{e}}{2}$，

所以原式$=-\frac{\mathrm{e}}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x\arcsin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}\Big((1+\ln(1+x))^{2x}-1\Big)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x\ln(1+\ln(1+x))}-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\ln(1+\ln(1+x))}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\ln(1+x)}{x}=2$.

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-\arctan x}{cx^k}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+x^2}}{ckx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x-1)}{(1+x)(1+x^2)ckx^{k-1}}\overset{k=2}{=\!=\!=}-\dfrac{1}{2c}=1$,

所以 $k=2, c=-\dfrac{1}{2}$, 无穷小主部为 $-\dfrac{x^2}{2}$.

二、$f(x)=\dfrac{5x-1}{(x+1)(2x-1)}=\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$, 所以 $f^n(x)=(-1)^n n!\Big(\dfrac{2}{(1+x)^{n+1}}+\dfrac{1}{2(x-\frac{1}{2})^{n+1}}\Big)$.

三、证明：令 $f(x)=\cos x-\dfrac{1}{x}$, $n\in N^*$, $f(2n\pi)=1-\dfrac{1}{2n\pi}>0$, $f((2n+1)\pi)=-1-\dfrac{1}{(2n+1)\pi}<0$, 由零点定理可知，存在 $\xi\in(2n\pi,(2n+1)\pi)$, 使得 $f(\xi)=0$. $n$ 取所有正整数，所以 $f(x)=0$ 有无穷多个正根.

四、 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(y^2-e^t)(1+t^2)}{2(1-ty)}$.

五、(1) $f'(x)\equiv0$, 所以 $f(x)$ 是常值函数 $(x>-1)$. 令 $x=1$ 得 $f(1)=\dfrac{\pi}{4}$, 所以 $\arctan x-\arctan\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{\pi}{4}$.

(2) 由 (1) 知 $\arctan(2-\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{4}+\arctan\dfrac{2-\sqrt{3}-1}{2-\sqrt{3}+1}=\dfrac{\pi}{4}-\arctan\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\pi}{12}$.

六、解 $f'(x)=\begin{cases}2x+\frac{2x}{1+x^2}, & x>0;\\ 0, & x=0;\\ a\sin x+ax\cos x, & x<0,\end{cases}$

$f''_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{2x+\frac{2x}{1+x^2}}{x}=4$;

$f''_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{a\sin x+ax\cos x}{x}=2a$;

所以 $a=2$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处二阶可导，$f''(0)=4$.

七、0 是第二类间断点（无穷间断点），1 是第一类间断点（跳跃间断点）.

八、 提示：(1) 用函数的单调性证明当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$, 取 $x=\dfrac{1}{n}$ 即得；

(2) 由(1)可得 $a_n-a_{n-1}<0$, 所以数列 $\{a_n\}$ 单调减；　又由(1)可得

$\ln(1+\dfrac{1}{1})=\ln2-\ln1<1,\quad \ln(1+\dfrac{1}{2})=\ln3-\ln2<\dfrac{1}{2},\quad\cdots,\quad \ln(1+\dfrac{1}{n-1})=\ln n-\ln(n-1)<\dfrac{1}{n-1}$,

各式相加得 $\ln n<1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}<1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n}$, 即 $a_n>0$. 数列 $\{a_n\}$ 单调减有下界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 极限存在.

九、 提示：用介值定理证明 $\exists\eta\in[1,2]$, 使得 $f(\eta)=1$, 由拉格朗日中值定理可得 $\exists\xi\in(0,\eta)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

## 微积分 I（第一层次）期中试卷参考答案 19.11.16

一、 1. $\forall\varepsilon>0$, 由$|\sqrt{1-\sin^3 x}-1|=\dfrac{|\sin^3 x|}{1+\sqrt{1-\sin^3 x}}\leqslant |x|^3<\varepsilon$, 取 $\delta=\varepsilon^{1/3}$, 当 $0<|x-0|<\delta$ 时有 $|\sqrt{1-\sin^3 x}-1|<\varepsilon$.

2. $\forall\varepsilon>0$, 由$\left|\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}-1\right|=\dfrac{|\sqrt{1+n^2}-n|}{\sqrt{1+n^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}(n+\sqrt{1+n^2})}\leqslant\dfrac{1}{n}$, 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 当 $n>N$ 时，$\left|\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}-1\right|<\varepsilon$.

3. 令 $y_1=\sqrt{\dfrac{x+2}{x+5}\sin x}$, $y_2=(\arctan x)^{\tan x}$, 则 $y'=y_1'+y_2'$, $\mathrm{d}y=(y'+y')\mathrm{d}x$, 其中

$$y_1'=y_1(\ln y_1)'=\frac{y_1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+5}+\frac{\cos x}{\sin x}\right),$$

$$y_2'=y_2(\ln y_2)'=y_2\left(\sec^2 x\ln\arctan x+\frac{\tan x}{(1+x^2)\arctan x}\right).$$

4. 当$ab=0$时，易见原式为$0$. 当$ab\neq 0$时，

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\lim_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}-1\right)\right)^{\frac{1}{\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}-1}n\cdot\left(\frac{a^{1/n}+b^{1/n}}{2}-1\right)}\\&=\exp\left(\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a^{1/n}-1}{1/n}+\frac{b^{1/n}-1}{1/n}\right)\right)=\sqrt{ab}.\end{aligned}$$

5. $f_+'(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\frac{x}{1+e^{1/x}}}{x}=0$, $\quad f_-'(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{\frac{x}{1+e^{1/x}}}{x}=1$. 则 $f_-'(0)\neq f_+'(0)$, 故 $f(x)$在 $x=0$ 处不可导，从而不可微.

6. 首先由归纳法可有 $x_n>0$, 又由于 $0<x_{n+1}=\ln(1+x_n)<x_n$ ,故数列 $x_n$ 单调递减有下界，故收敛，设极限是 $A$，则 $\ln(1+A)=A$，从而有$A=0$.

7. 由 $f(x)=o(x^2)$ 可得 (1) $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$, 即 $1+c=0$, 从而 $c=-1$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, 即 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+x)+\cos x+ax^2+bx-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\ln(1+x)+\dfrac{\cos x-1}{x}+ax+b\right)=b=0$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$,即

$$\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)+\cos x+ax^2-1}{x^2}\overset{\frac00}{=}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}-\sin x+2ax}{2x}\overset{\frac00}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}-\cos x+2a}{2}=\frac12+a=0\Longrightarrow a=-\frac12.$$

(4)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^k}&=\lim_{x\to0}\frac{x\ln(1+x)+\cos x-\frac12x^2-1}{x^k}\overset{\frac00}{=}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}-\sin x-x}{kx^{k-1}}\\&\overset{\frac00}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}+\frac{1}{(1+x)^2}-\cos x-1}{k(k-1)x^{k-2}}\overset{\frac00}{=}\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{2}{(1+x)^3}+\sin x}{k(k-1)(k-2)x^{k-3}}\end{aligned}$$

从而取 $k=3$, 得到 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=-\dfrac{1}{2}$. 则 $x\to 0$ 时, $f(x)$ 的无穷小阶数为3, 无穷小主部为 $-\dfrac{1}{2}x^3$.

8. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{-\frac{1}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}}=2t-1,\qquad \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{(2t-1)'}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=2(1+t^2).$

二、函数在$x\neq 0, x\neq 1$ 的地方显然连续；由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{1-x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}\frac{1-x}{x}x\sin\frac{1}{x}=-\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x},$$

不存在，所以 $x=0$ 是第二类间断点，且为振荡间断点.

由于 $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}=\sin 1,\qquad \lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{1-\mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}}=0,$ 所以 $x=1$ 是第一类间断点，且为跳跃间断点.

三、任给 $x\in(a,b)$, 由中值定理，存在$\xi_1\in(a,x)$ , $\xi_2\in(x,b)$，$\xi_1<\xi_2$且

$$f'(\xi_1)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<f'(\xi_2)=\frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

可推出$f(x)<f(a)$ .

四、切线方程为$y=\dfrac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}x+1$, 法线方程为$y=\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}x+1$.

五、**证明：** (1) 由于$f(x)$在$[a,b]$可导，从而在$[a,b]$连续。又$f(b)=0<\dfrac{4}{5}<1=f(a)$, 由介值定理，存在 $\xi_1\in(a,b)$, 使得 $f(\xi_1)=\dfrac{4}{5}$.

(2) 由Lagrange中值定理，分别考虑区间$[a,\xi_1]$, $[\xi_1,b]$, 可得

$$f(\xi_1)-f(a)=f'(\xi_2)(\xi_1-a),\qquad f(b)-f(\xi_1)=f'(\xi_3)(b-\xi_1)$$

注意到$f(a)=1, f(b)=0, f(\xi_1)=\dfrac{4}{5}$, $f'(x)\neq 0$, 整理可得

$$-\frac{1}{5}\frac{1}{f'(\xi_2)}=\xi_1-a,\qquad -\frac{4}{5}\frac{1}{f'(\xi_3)}=b-\xi_1$$

两式相加得证。

六、解：由莱布尼兹公式可直接求出$f(x)$在$x\neq 0$处的 $k$ $(0<k\leqslant n-1)$ 阶导数为

$$f^{(k)}(x)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)x^{n-k}g(x)\mathrm{sgn}(x)+\sum_{i=0}^{k-1}F_{n-i}(x)g^{(k-i)}(x)\mathrm{sgn}(x)$$

其中 $F_{n-i}(x)$ 为 $x$ 的 $n-i$ 次单项式。由导数的定义可有对任意 $0<k\leqslant n-1$, $f(x)$ 在 $x=0$ 处的 $k$ 阶导数为零. 则 $f^{(n-1)}(x)$ 当 $g(0)=0$ 时可导，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 $n$ 阶可导.

## 微积分 I (第一层次)期中试卷参考答案 2020.11.21

一、1. 不妨设 $|x-1|<1$, 即 $0<x<2$. $\forall\varepsilon>0$, 取 $\delta=\min\{1,\varepsilon\}$,

当 $0<|x-1|<\delta$ 时，有 $\left|\sqrt[3]{x}-1\right|=\dfrac{|x-1|}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}<|x-1|<\varepsilon.$

2. 解：当$n$为偶数时，

$$0<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)<\frac{1}{n}.$$

当$n$为奇数时，

$$0<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}-\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n-1}\right)-\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}.$$

由夹逼准则即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{2n}\right)=0.$

3. $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{2x}\sin x}{x}=1,\qquad f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x}{x}=1,$

所以 $f'(x)=\begin{cases}x^{2x}\left(2(1+\ln x)\sin x+\cos x\right), & x>0,\\ 1, & x\leqslant 0,\end{cases}.$

4. 首先由归纳法可得$0<x_n<1$, 又由于$x_{n+1}-x_n=x_n(1-x_n)>0$, 因此数列$x_n$单调递增有上界，故收敛. 设极限是$A$，则$A^2=A$，由$\{x_n\}$ 单调递增可知$A=1$.

5. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y}{x-y}\,(x\neq y).$ 6. 切线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x+1$, 法线方程为 $y=-2x+1$.

7. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\sqrt{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{\frac12x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1+x}}-\frac{1}{\sqrt{1-x}}}{2x}=-\dfrac{1}{2}.$

8.
$$\arctan\frac{2020}{n-1}-\arctan\frac{2020}{n+1}=\frac{1}{1+\xi^2}\left(\frac{2020}{n-1}-\frac{2020}{n+1}\right)\sim\frac{4040}{n^2},\quad \text{其中}\xi\in\left(\frac{2020}{n+1},\frac{2020}{n-1}\right),$$

故 $\alpha=2$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{2020}{n-1}-\arctan\dfrac{2020}{n+1}\right)=4040.$

二、当 $x_0=k\,(k\in\mathbb{Z})$ 时，$f(x_0)=0$, $f$ 连续.

当 $x_0\neq k\,(k\in\mathbb{Z})$ 时，取有理数序列 $\{x_{n,1}\}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n,1}=x_0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_{n,1})=\sin\pi x_0$; 取无理数序列 $\{x_{n,2}\}$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n,2}=x_0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_{n,2})=0$. 故函数在 $x=x_0$ 处不连续，且为第二类间断点.

三、解：当$a\neq-\dfrac{1}{2}$时，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(\sin x)+a\ln(1+x^2)}{x^2}\overset{\frac00}{=}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin(\sin x)\cos x+\frac{2ax}{1+x^2}}{2x}=\dfrac{1}{2}+a\neq0.$

当$a=-\dfrac{1}{2}$时，
$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos(\sin x)-\frac12\ln(1+x^2)}{x^4}\overset{\frac00}{=}\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)\cos x-\frac{x}{1+x^2}}{4x^3}$$
$$\overset{\frac00}{=}\lim_{x\to0}\frac{\cos(\sin x)\cos^2x-\sin(\sin x)\sin x+\frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}}{12x^2}$$
$$\overset{\frac00}{=}-\frac{1}{12}+\lim_{x\to0}\frac{-\sin(\sin x)\cos^3x-\cos(\sin x)\sin 2x+\frac{6x-2x^3}{(1+x^2)^3}}{24x}=\frac{1}{24}.$$

因此，$a \neq -\dfrac{1}{2}$时无穷小主部为$\left(\dfrac{1}{2}+a\right)x^2$； $a=-\dfrac{1}{2}$时无穷小主部为$\dfrac{1}{24}x^4$.

四、$f'''(2)=2e^3$.

五、$f(x)=x+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}\right)$, $f'(x)=\dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$;

$n>1$时，$f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{2}\left(\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}+\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$.

六、证明：若在$[0,1]$上，$f(x)$不恒为零，设$|f(x)|$ 在$x_0\in(0,1]$ 处达到最大值. 由中值定理，存在$\xi\in(0,x_0)\subset(0,1]$, 使得$f'(\xi)=\dfrac{f(x_0)-f(0)}{x_0}$. 从而

$$|f'(\xi)|=\frac{|f(x_0)|}{x_0}\geqslant|f(x_0)|>\frac{1}{2}|f(x_0)|\geqslant\frac{1}{2}|f(\xi)|.$$

与题目条件矛盾.

## 微积分 I（第一层次）期中试卷参考答案 2021.11.20

一、1. 不妨设$|x-2|<\dfrac{1}{2}$, 则 $\left|\dfrac{x+2}{x-1}-4\right|=\dfrac{3|x-2|}{|x-1|}<6|x-2|$,

$\forall\varepsilon>0$, $\exists\,\delta=\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{6},\dfrac{1}{2}\right\}$, 使得 $0<|x-2|<\delta$ 时, 总有$\left|\dfrac{x+2}{x-1}-4\right|<\varepsilon$, 所以$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+2}{x-1}=4$.

2. $x\to0$时，$\sqrt{1-x^2}-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2, 1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x^2}=-1$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5^x-1-\ln(1+x\ln5)}{x^k}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5^x\ln5-\frac{\ln5}{1+x\ln5}}{kx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5^x\ln^25+\frac{\ln^25}{(1+x\ln5)^2}}{k(k-1)x^{k-2}}=\ln^25$, $(k=2)$,

所以无穷小主部为$(\ln5)^2x^2$.

4. 把$y$看成$x$的函数，方程 $\arctan x+\mathrm{e}^y+xy=0$ 两边对$x$求导，得 $\dfrac{1}{1+x^2}+\mathrm{e}^y y'+y+xy'=0$, 所以$y'=-\dfrac{\frac{1}{1+x^2}+y}{x+\mathrm{e}^y}$.

5. 解：法一：$x_2=\dfrac{1}{2}\sin x_1\in[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}]$, 由 $\begin{cases}0\leqslant\sin t\leqslant t, & t\in[0,1/2],\\ t\leqslant\sin t\leqslant0, & t\in[-1/2,0]\end{cases}$ 知，

当 $x_2=\dfrac{1}{2}\sin x_1\in[0,\dfrac{1}{2}]$ 时，$0\leqslant\cdots\leqslant x_n\leqslant x_{n-1}\leqslant\cdots\leqslant x_2$， 此时数列单调下降，有下界 0，收敛；

当 $x_2=\dfrac{1}{2}\sin x_1\in[-\dfrac{1}{2},0]$ 时，$0\geqslant\cdots\geqslant x_n\geqslant x_{n-1}\geqslant\cdots\geqslant x_2$， 此时数列单调上升，有上界 0，收敛.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2}\sin x_n$ 得极限 $A=\dfrac{1}{2}\sin A$, 从而极限为 0.

法二：$0\leqslant|x_n|=\dfrac{1}{2}|\sin x_{n-1}|\leqslant\dfrac{1}{2}|x_{n-1}|=\dfrac{1}{2^2}|\sin x_{n-2}|\leqslant\dfrac{1}{2^2}|x_{n-2}|\leqslant\cdots\leqslant\dfrac{1}{2^{n-1}}|x_1|$,

$\lim\limits_{n\to\infty}0=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}|x_1|=0$, 由夹逼准则可得 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

6. $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{2t}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\frac{-1}{2t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=-\dfrac{1+t^2}{4t^3}$. 所以在$t=1$处，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\dfrac{1}{2}$.

7. 由莱布尼兹公式, 得

$$\begin{aligned}
y^{(99)} &= (\mathrm{e}^{-x})^{(99)}(x^2+3x+1) + C_{99}^1(\mathrm{e}^{-x})^{(98)}(x^2+3x+1)' + C_{99}^2(\mathrm{e}^{-x})^{(97)}(x^2+3x+1)'' \\
&= (-1)^{99}\mathrm{e}^{-x}(x^2+3x+1) + 99\cdot(-1)^{98}\mathrm{e}^{-x}(2x+3) + \frac{99\cdot 98}{2}(-1)^{97}\mathrm{e}^{-x}\cdot 2 \\
&= \mathrm{e}^{-x}(-x^2+195x-9406).
\end{aligned}$$

8.
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\Big(\frac{a_1^x+a_2^x+a_3^x+a_4^x}{4}\Big)^{\frac{1}{x}} = \exp\Big(\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a_1^x+a_2^x+a_3^x+a_4^x)-\ln 4}{x}\Big) \\
=&\exp\Big(\lim_{x\to 0}\frac{a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+a_3^x\ln a_3+a_4^x\ln a_4}{a_1^x+a_2^x+a_3^x+a_4^x}\Big) = \exp\Big(\frac{\ln a_1+\ln a_2+\ln a_3+\ln a_4}{4}\Big) \\
=&\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4}.
\end{aligned}$$

二、解：函数在定义域$\{x\in\mathbb{R}\,|\,x\neq 1, x\neq -2, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}-2, k\in\mathbb{Z}\}$ 上都是连续的;

在 $x=1$ 处, $\displaystyle\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}\frac{\tan(x+2)}{x+2}=\frac{\tan 3}{3}$, $\displaystyle\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}-\frac{\tan(x+2)}{x+2}=-\frac{\tan 3}{3}$,

所以 $x=1$ 是第一类间断点中的跳跃间断点;

在 $x=-2$ 处, $\displaystyle\lim_{x\to -2}f(x)=\lim_{x\to -2}-\frac{\tan(x+2)}{x+2}=-1$,

所以 $x=-2$ 是第一类间断点中的可去间断点;

在 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}-2, k\in\mathbb{Z}$ 处, $\displaystyle\lim_{x\to k\pi+\frac{\pi}{2}-2}f(x)=\infty$,

所以 $x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}-2, k\in\mathbb{Z}$ 都是第二类间断点中的无穷间断点.

三、解：(1) 由初等函数的连续性，$f(x)$ 在 $x\neq 0$ 处均连续;

在 $x=0$ 处, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$, $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1+x^2)=1$,

所以 $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=1=f(0)$, 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处也连续; 进而 $f(x)$ 是定义域 $\mathbb{R}$ 上的连续函数.

(2) 当 $x>0$ 时, $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$; 当 $x<0$ 时, $f'(x)=2x$.

$\displaystyle f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x-1}{2x}=0$, $\displaystyle f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1+x^2-1}{x}=0$,

所以 $f'(0)=0$.

或者按单侧导数极限理论，

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x\sin x}{2x}=0=f'_+(0)$,

$\displaystyle\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}2x=0=f'_-(0)$, 所以 $f'(0)=0$.

因此$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ 2x, & x<0\end{cases}$ 且 $f'(x)$ 连续.

四、解：由 $f'(x)=\sin x+x$ 可得 $f'(-1)=-\sin 1-1, f'(0)=0,$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}=\left[f'\Big(\frac{2x-1}{1-3x}\Big)\cdot\frac{2(1-3x)+3(2x-1)}{(1-3x)^2}\mathrm{e}^{f(x)}+f\Big(\frac{2x-1}{1-3x}\Big)\mathrm{e}^{f(x)}f'(x)\right]_{x=0}$$

$$=f'(-1)\cdot(-1)\cdot\mathrm{e}^{f(0)}+f(-1)\cdot\mathrm{e}^{f(0)}\cdot f'(0)=(\sin 1+1)\,\mathrm{e}.$$

五、证明：令 $f(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}$，则 $f'(x)=e^x-1-x$, $f''(x)=e^x-1$.

由 $f''(x)=e^x-1>0$ 知 $f'(x)$ 单调上升，从而 $f'(x)=e^x-1-x>f'(0)=0$.

进而 $f(x)$ 单调上升，$f(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}>f(0)=0$.

令 $g(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}-x(e^x-1)$，则 $g'(x)=e^x-1-x-(e^x-1)-xe^x=-x-xe^x<0$,

从而 $g(x)$ 严格单调下降，$g(x)=e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}-x(e^x-1)<g(0)=0$.

六、证：由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，得 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在且连续.

由 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内取得最大值，得存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

对 $f'(x)$ 在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理知：

$f'(\xi)-f'(0)=f''(\eta_1)(\xi-0),\ \eta_1\in(0,\xi)$ $\qquad f'(1)-f'(\xi)=f''(\eta_2)(1-\xi),\ \eta_2\in(\xi,1)$

所以

$$\begin{aligned}|f'(0)|+|f'(1)|&=|f'(\xi)-f'(0)|+|f'(1)-f'(\xi)|=|f''(\eta_1)(\xi-0)|+|f''(\eta_2)(1-\xi)|\\&=|f''(\eta_1)|\xi+|f''(\eta_2)|(1-\xi)|\leqslant M.\end{aligned}$$

七、法一: 数列单增, 有上界 (讲基本极限 e 时证过数列小于 3), 则极限存在.

固定 $n$, 则对任意的 $m>n$, $\quad (1+\dfrac{1}{m})^m\geqslant\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{m})\cdots(1-\frac{k-1}{m})$;

由极限保号性, 令 $m\to\infty$, $\mathrm{e}\geqslant\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$, 则数列单增有上界进而收敛，且 $\mathrm{e}\geqslant\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$;

另一方面, $(1+\dfrac{1}{n})^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$; $\quad$ 令 $n\to\infty$, $\mathrm{e}\leqslant\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$;

所以 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\mathrm{e}.$

法二: 由带拉格朗日余项的泰勒公式, 有 $\mathrm{e}^x=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k+\frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\theta<1.$

则令 $x=1$ 有 $\displaystyle\Big|\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\mathrm{e}\Big|\leqslant\frac{\mathrm{e}}{(n+1)!}\leqslant\frac{\mathrm{e}}{n+1}.$ $\quad$ 由 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}}{n+1}=0$, 则 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\mathrm{e}.$