《微积分 I》（第一层次）期末试卷 2014. 1. 2

一、计算下列各题（本题满分 6 分×8=48 分）：

1. 计算 $I=\int x\sqrt{1+x^2}dx$.　2. 计算广义积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{1-x}{1+x^3}dx$.

3. 计算 $I=\int_0^{\pi/2}\sin^3 xdx$.　4. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\tan x^2}\int_{x/2}^{x}\frac{e^{xt}-1}{t}dt$.

5. 求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}$.

6. 求连续函数 $f(x)$，使得 $f(x)=x\arctan x+\frac{1}{1+x^2}\int_0^1 f(x)dx$.

7. 求曲线 $\rho=\sqrt{\sin\theta}\,(0\le\theta\le\pi)$ 所围图形的面积.

8. 已知向量 $\overrightarrow{AB}=(3,4,0),\overrightarrow{AC}=(5,2,-14)$，求等分 $\angle BAC$ 的单位向量.

二、（本题满分 10 分）1. 证明：$f(x)=\frac{x}{\sin x}$ 为 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上的单调增加函数；

2. 证明不等式 $\frac{\pi^2}{9}<\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{x}{\sin x}dx<\frac{\pi^2}{6}$.

三、（本题满分 10 分）求旋轮线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t).\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$ 与 x 轴所围曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

四、（本题满分 10 分）设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上连续单调增加的函数，求证：

$$\int_a^b xf(x)dx\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx .$$

五、（本题满分 14 分）讨论函数 $y=x^{-2}e^{-\frac{1}{x}}$ 的定义域，单调区间，极值，凹向与拐点，渐近线，并作出草图.

六、（本题为非商学院同学做，满分 8 分）已知函数 $f(x)$ 为 R 上的一阶连续可微的周期函数，最小正周期为 2π，且 $|f'(x)|\le 1$，证明：

1. 对任意的连续函数 $g(x)$，有 $\left|\int_0^1 g(x)f'(2\pi x)dx\right|\le\max\limits_{x\in[0,1]}g(x)-\min\limits_{x\in[0,1]}g(x)$；

2. 若 $g(x)$ 满足对任意的 $x_1,x_2\in[0,1]$，有 $|g(x_1)-g(x_2)|\le|x_1-x_2|^{1/2}$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g(x)f'(nx)dx=0$$

七、（本题为商学院同学做，满分 8 分）设 $f(x)$ 为 R 上二阶连续可微函数，且 $f''(x)\ge 0$，

证明：1. 对任意的 $x,p\in R$，有 $f(x)\ge f(p)+f'(p)(x-p)$；

2. $\exp\left(\int_0^1 (1+f^2(x))dx\right) \le \int_0^1 \exp(1+f^2(x))dx$.

《微积分 I》（第一层次）期末试卷 2015.1.7

一、填空（本题满分 7×3=21 分）

1. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} t\arctan(at)dt}{x^6}=2$ ，则 $a=$ ________ ；

2. 设 $f(x)=\int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2}dt$ ，则 $\int_0^1 \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=$ ________ ；

3. $\int \dfrac{x\cos x}{\sin^3 x}dx=$ ________________________________ ；

4. 设一平面过原点及 $M(6,-3,2)$ 且与 $4x-y+2z=8$ 垂直，则该平面的方程为_______ ；

5. 已知三点 $A(1,0,2),B(2,1,-1),C(0,2,1)$ ，则三角形 ABC 的面积 $S_{\Delta ABC}=$ ________ ；

6. $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-7x+5})=$ ________ ；

7. 已知广义积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln^k x}$ 收敛，则 k 的最大取值范围为________ .

二、计算下列各题（本题满分 8×5=40 分）

1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdot\cdots\cdot(2n-1)}$ ；

2. 设直线 L 的方程为： $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{5}$，平面 Π 的方程为: $3x+y+2z+20=0$，求直线 L 与平面 Π 的夹角和交点 M；

3. 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x+x^2\int_0^1 f(x)dx+x^3\int_0^2 f(x)dx$ ，求 $f(x)$；

4. 计算积分 $\int_0^1 \dfrac{xe^x}{(1+x)^2}dx$； 5. 求曲线 $y=x(1-x^2)$ 与 x 轴所围平面图形的面积;

6. 设 $y=\dfrac{x}{1-x}$，求 $y^{(n)}$；

7. 设 $\vec a,\vec b$ 为非零向量，$|\vec b|=1,<\vec a,\vec b>=\pi/3$ ，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\vec a+x\vec b|-|\vec a|}{x}$；

8. 计算积分 $\int\dfrac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx$.

三、（本题满分 15 分）讨论函数 $f(x)=\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$ 的定义域，单调区间，极值，凹向与拐点，渐近线，并作出草图.

四、（本题满分 10 分）求曲线 $y=\ln x$ 的一条切线，使得这条切线与原曲线以及直线 $x=1, x=e^2$ 所围成的图形面积最小.

五、（本题满分 8 分）设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶的连续导数，并且 $f(0)=f(1)=0$，当 $x\in[0,1]$ 时，$|f''(x)|\le M$. 证明：当 $x\in[0,1]$ 时，有 $|f'(x)|\le M/2$.

六、（本题满分 6 分）设函数 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的可微函数，并且满足 $f(1)=1$，

$f'(x)=\dfrac{1}{x^2+[f(x)]^2}$. 证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在并且满足 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\le 1+\dfrac{\pi}{4}$.

《微积分 I》（第一层次）期末试卷 2016. 1. 5

一. 计算下列各题（本题满分 10 分×5=50 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x^2}+\cos\dfrac{1}{x^2}\right)^{3x^2}$.　　2. 计算积分 $\int x^2(\ln x)^2 dx$.

3. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{x^2}^{x}\frac{\sin xt}{t}dt}{x^2}$.　　4. 计算积分 $\int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$.

5. 求过原点且经过两平面 $\begin{cases}2x-y+3z=8;\\ x+5y-z=2\end{cases}$ 的交线的平面方程 .

6. 计算广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}dx$.　　7. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n+k}$.

8. 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长 .　　9. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-8}$，求 $f^{(n)}(x)$.

10. 已知 $|\vec a|=4, |\vec b|=1, <\vec a,\vec b>=\dfrac{\pi}{3}$. 求 $\vec A=2\vec a+\vec b, \vec B=-\vec a+3\vec b$ 的夹角 .

二、设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，计算 $\int f(x)dx$.（10 分）

三、(本题满分 10 分)已知当 $x\to 0$ 时, $e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$ 是关于 x 的 3 阶无穷小，求常数 a,b 之值.

四、（本题满分 14 分）讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ 的定义域，单调区间，极值，凹向与拐点，并作出草图.

五、（本题满分 10 分）设 $S(x)=\int_0^x|\cos t|dt$，

1. 当 n 为正整数，且 $n\pi\le x\le(n+1)\pi$ 时证明不等式 $2n\le S(x)\le 2(n+1)$；

2. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

六、（本题满分 6 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，并且存在 $M>0$ 使得 $|f'(x)|\le M$. 设 n 是正整数，证明：$\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{f(k/n)}{n}-\int_0^1 f(x)dx\right|\le\dfrac{M}{2n}$.

13 级：一、1. $\dfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2}+C$； 2. 0； 3. $2/3$； 4. $1/2$； 5. $2/e$；

6. $x\arctan x+\dfrac{\pi-2}{4-\pi}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}$； 7. 1； 8. $\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$.

二、略，三、$5\pi^2$，四、略，五、定义域 $x\ne0$，单调增区间 $(-\infty,0),(0,\frac{1}{2})$，减区间 $(\frac{1}{2},+\infty)$，最大值 $f(1/2)=4e^{-2}$，凹区间 $(-\infty,0),(0,\frac{3-\sqrt{3}}{6}),(\frac{3+\sqrt{3}}{6},+\infty)$，凸区间 $(\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3+\sqrt{3}}{6})$，拐点为 $(\frac{3\pm\sqrt{3}}{6},6(2\mp\sqrt{3})e^{-(3\mp\sqrt{3})})$，渐近线 $x=0,y=0$. 图略. 六、七、略

14 级：一、1. 6；2. $e^{-1}-1$；3. $-\dfrac{1}{2}(x\csc^2x+\cot x)+C$；4. $2x+2y-3z=0$；5. $\sqrt{50}/2$；

6. -5；7. $(1,+\infty)$

二、1. $4/e$；2. $\pi/3, M(-5,3,-4)$；3. $f(x)=x+\dfrac{3}{8}x^2-x^3$；4. $\dfrac{e}{2}-1$；5. $\dfrac{1}{2}$；

6. $\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$；7. $\dfrac{1}{2}$；8. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C$. 三、略.

四、切线方程为：$y=\dfrac{2}{e^2+1}x+\ln\dfrac{e^2+1}{2}-1$.

五、设 $x_0\in[0,1]$，由泰勒公式有：$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(\varsigma)}{2}(x-x_0)^2$，其中 ς 在 x 与 x_0 之间. 将 $x=0,x=1$ 分别代人上式，得

$$0=f(0)=f(x_0)-f'(x_0)x_0+\frac{f''(\xi_1)}{2}{x_0}^2,\ \xi_1\in(0,x_0)\quad(1)$$

$$0=f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2,\ \xi_2\in(x_0,1)\quad(2)$$

(2)-(1) 得 $f'(x_0)=\dfrac{f''(\xi_1)}{2}{x_0}^2-\dfrac{f''(\xi_2)}{2}(1-x_0)^2, |f'(x_0)|\le\dfrac{M}{2}[{x_0}^2+(1-x_0)^2]\le\dfrac{M}{2}$.

六、因为 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+[f(x)]^2}>0$, 所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上为严格单调增加函数，当 $x>1$ 时，

$f(x)>f(1)=1$，所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+[f(x)]^2}<\dfrac{1}{x^2+1}$，而 $f(x)=f(1)+\int_1^x f'(t)dt$

$<1+\int_1^x \dfrac{1}{1+t^2}dt<1+\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{1+t^2}dt=1+\dfrac{\pi}{4}$. 故 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上为单调增加有界函数，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在并且满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\le 1+\dfrac{\pi}{4}$.

15 级：

一、$1.e^3; 2.\dfrac{1}{3}x^3\ln^2 x-\dfrac{2}{9}x^3\ln x+\dfrac{2}{27}x^3+C; 3.1; 4.\ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}+1;$

$5.2x+21y-7z=0; 6.\dfrac{\pi}{2}-1; 7.\pi\ln 2; 8.8a; 9.(-1)^n\dfrac{n!}{6}(\dfrac{1}{(x-4)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+2)^{n+1}});$

$10.\arccos\dfrac{-19}{\sqrt{73\times 13}}$. 二、$x-(1+e^{-x})\ln(1+e^x)+C$; 三、$a=0.5, b=0.5$

四、定义域 $x\ne 1$, 单调增区间为 $(-\infty,1),(3,+\infty)$, 减区间为（1,3），极小值 $f(3)=27/4$; 凹区间为（0,1）,(1, +∞), 凸区间为（−∞,0）, 拐点（0,0）, 渐近线 $x=1, y=x+2$. 图略

五、(1) $\because |\cos t|\ge 0, \int_0^{n\pi}|\cos t|dt\le\int_0^x|\cos t|dt\le\int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|dt,$

而 $\int_0^{n\pi}|\cos t|dt=n\int_0^{\pi}|\cos t|dt=2n.$

(2)由夹逼定理得，$2/\pi$.

六、$\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{f(k/n)}{n}-\int_0^1 f(x)dx\right|=\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{f(k/n)}{n}-\int_{k/n}^{(k+1)/n}f(x)dx\right)\right|$

$\le\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}|\dfrac{f(k/n)}{n}-f(x)|dx\le\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}|f'(\xi_n)(x-\dfrac{k}{n})|dx$

$\le M\sum\limits_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}(x-\dfrac{k}{n})dx=\dfrac{M}{2n}.$