微积分II(第一层次)期末试卷 (2018.7.3)

一、计算下列各题(6分 × 5=30分)

1. 设 $u=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$, 其中 $f(v)$ 具有二阶连续导数，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

2. 讨论广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt[n]{1+x}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

3. 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{n5^n}$ 的收敛域.

4. 求微分方程 $(x-\sin y)\mathrm{d}y+\tan y\mathrm{d}x=0$ 满足初始条件 $y(1)=\dfrac{\pi}{6}$ 的特解.

5. 求微分方程 $\left(\dfrac{1}{y}\sin\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}+5\right)\mathrm{d}x+\left(-\dfrac{x}{y^2}\sin\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x}+\dfrac{6}{y^3}\right)\mathrm{d}y=0$ 的通积分.

二、(10分)　计算 $I_1=\displaystyle\iint_S(x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为曲面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ $(a>0)$ 的上侧.

三、(10分)　计算 $I_2=\displaystyle\oint_C(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$, 其中 C 是立方体 $0\le x\le a, 0\le y\le a, 0\le z\le a$ 的表面与平面 $x+y+z=\dfrac{3a}{2}$ 的交线，若从 z 轴正向看去是逆时针方向.

四、(10分)　对常数 p, 讨论数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{n^p}$ 何时绝对收敛，何时条件收敛，何时发散.

五、(10分)　试将函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4x+14}{(x-3)^2(2x+5)}$ 展成马克劳林级数，并写出其收敛域.

六、(10分)　将函数 $f(x)=\dfrac{x}{4}$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成正弦级数，并求级数 $1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}-\cdots$ 的和.

七、(10分)　求二阶微分方程 $y''-y=2x+e^{2x}\cos x$ 的通解.

八、(10分)　(1) (非商学院学生做) 设函数 $f(x)$ 对定义域内任意两点 x,y 有等式 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-4f(x)f(y)}$, 且 $f'(0)=a$ $(a\neq 0)$, 求函数 $f(x)$.

(2) (商学院学生做) 已知 $\displaystyle\int_0^1 f(ax)\mathrm{d}a=\frac{1}{2}f(x)+1$, 求 $f(x)$ 满足的微分方程并求 $f(x)$.

微积分 II（第一层次）期末试卷 (2019.6.17)

一、计算下列各题(6分 $\times$ 5=30分)

1. 求平面 $x+4y-8z=18$ 被圆柱面 $x^2+y^2=6y$ 所截部分的面积.

2. 讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\arcsin\frac{\pi}{5^n}$ 的敛散性.

3. 讨论广义积分 $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

4. 求微分方程 $2xy\cdot y'-y^2+x=0$ 的解.

5. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x^2-y+5}{x+y^2+2}$ 的通积分.

二、(10分) 求过直线 $L:\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0\end{cases}$ 且与曲面 $S:3x^2+y^2-z^2=27$ 相切的切平面方程.

三、(10分) 设 $C: x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t),\ t:0\to 2\pi$ 为旋轮线的一拱，方向由原点到 $A(2\pi a,0)$，计算 $I_1=\displaystyle\int_C((x+y+1)e^x-e^y+y)\mathrm{d}x+(e^x-(x+y+1)e^y-x)\mathrm{d}y$.

四、(10分) 计算 $I_2=\displaystyle\iint_S 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为曲面 $z=1-x^2-y^2\ (z\geq 0)$ 的上侧.

五、(10分) 判别级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性；若收敛，求其和.

六、(10分) 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的收敛域、和函数，并由此计算 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的和.

七、(10分) 将函数 $f(x)=\pi^2-x^2$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上展开成余弦级数，并求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

八、(10分) 已知 $y_1=xe^x+e^{2x}, y_2=xe^x+e^{-x}, y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个解，求出此微分方程，写出其通解.

微积分II（第一层次）期末试卷 (2020.8.18)

一、(8分) 设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$ 讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性、可微性以及连续可微性.

二、计算下列各题（7分×3 = 21分）

1. 求过直线 $L:\begin{cases} 10x+2y-2z=27, \\ x+y-z=0 \end{cases}$ 且与曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 相切的平面方程.

2. 求旋转抛物面 $x^2+y^2=2az\ (a>0)$ 与半球面 $z=\sqrt{3a^2-x^2-y^2}$ 所围立体的表面积.

3. 计算 $I=\iint\limits_D \dfrac{1}{x^4+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D: x\geq 1, y\geq x^2$.

三、计算下列各题（7分×3 = 21分）

1. 计算 $I=\int_C 2x\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+(x+2y-z)\mathrm{d}z$, 其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ y=z \end{cases}$ 上从点 $A(1,0,0)$ 到 $B(0,\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}})$ 的位于第一卦限的一段曲线.

2. 计算 $I=\oint_C \dfrac{y^2}{2}\mathrm{d}x-xz\mathrm{d}y+\dfrac{y^2}{2}\mathrm{d}z$, 其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y=R. \end{cases}$ 从 y 轴的正向看去是依顺时针方向.

3. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_S (x^3+az^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的外侧.

四、计算下列各题（7分×4 = 28分）

1. 考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\arctan\dfrac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

2. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$ 的敛散性.（提示：$\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$）

3. 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$ 的和函数，并求数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2\dfrac{1}{3^n}$ 的和.

4. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 它在 $[-1,1]$ 上的表达式为 $f(x)=x^2$. 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ 的和.

五、计算下列各题（7分×2 = 14分）

1. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin(1+x+y), y(0)=-1$ 的特解.　2. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^3}{2(xy^2-x^2)}$ 的通解.

六、(8分) 求微分方程 $y''+2y'+y=x\mathrm{e}^{-x}$ 的通解.

微积分II（第一层次）期末试卷 (2021.6.22)

一、计算下列各题（6分×5 = 30分）

1. 求空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=14, \\ 3x+2y+z=10 \end{cases}$ 在点 $P(1,2,3)$ 处的法平面与切线方程.

2. 求柱面 $x^2+y^2=ay\ (a>0)$ 位于球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部分曲面的面积.

3. 计算第二类曲线积分 $I_1=\int_C \cos(x+y^2)\mathrm{d}x+\big(2y\cos(x+y^2)-\sqrt{1+y^4}\ \big)\mathrm{d}y$, 其中 C 为旋轮线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t)$, 由 $O(0,0)$ 到 $A(2\pi a,0)$, 其中 $a>0$.

4. 计算第一类曲面积分 $I_2=\iint\limits_S (xy+yz+zx)\mathrm{d}S$, 其中 S 为圆锥面 $x=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax\ (a>0)$ 所截下的部分.

5. 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 的敛散性.

二、计算下列各题（8分×5 = 40分）

1. 讨论数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$ 的敛散性.

2. 讨论数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin(\frac{n\pi}{6})}{\sqrt{n}}$ 的敛散性. 如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛?

3. 求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\Big(1-\dfrac{1}{3^n}\Big)$ 的和.

4. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{3x^2+2xy-y^2}{2xy-x^2}$ 的通积分.

5. 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x^4+y^3}{xy^2}$ 的通积分.

三、（本题10分）计算 $I_3=\int_C y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$, 其中 C 是平面 $x+y+z=1$ 的第一卦限部分与三个坐标面的交线，从 z 周正向往 z 轴负向看去是逆时针方向.

四、（本题10分）计算 $I_4=\iint\limits_S 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S为曲线 $z=\mathrm{e}^y(0\le y\le a)$ 绕 z 轴旋转生成的旋转曲面，取下侧.

五、（本题10分）设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(2n)!!}{(2n+1)!!(n+1)}x^{2(n+1)}$, $x\in(-1,1)$. 求出 $f(x)$ 满足的微分方程，并求解之. 计算 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(2n+1)!!(n+1)}$.