微积分 I (第一层次)期末试卷 2018.1.10

一、计算下列各题(6分× 3=18分)

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \frac{1}{t}\ln(1+xt)\mathrm{d}t}{x^2}$.

2. 求不定积分 $I_1=\int \cos(\ln x)\mathrm{d}x$.　　3. 求不定积分 $I_2=\int \dfrac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$.

二、计算下列各题(6分× 3=18分)

1. 求定积分 $I_3=\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\ \ (a>0)$.

2. 求抛物线 $y^2=2px$ 及其在点 $\left(\dfrac{p}{2},p\right)$ 处的法线所围成的图形的面积.

3. 求曲线 $y=\ln(1-x^2)$ 上相应于 $0\le x\le \dfrac{1}{2}$ 的一段弧的弧长.

三、计算下列各题(6分× 3=18分)

1. 求广义积分 $I_4=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+9}$.

2. 设 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$, $(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$, 求向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 γ.

3. 求点 $P(1,2,3)$ 到直线 $L:\begin{cases} x-y+z+5=0, \\ 5x-8y+4z+36=0 \end{cases}$ 的距离.

四、(10分) 设 $x_0>0, x_{n+1}=\dfrac{1}{3}\left(2x_n+\dfrac{1}{x_n^2}\right)$, $n=0,1,2,\cdots$, 求证：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

五、(10分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

六、(10分) 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ 的定义域，单调区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线，并绘出草图.

七、(10分) 设直线 $L:\begin{cases} 2x-y-2z+1=0 \\ x+y+4z-2=0 \end{cases}$, 平面 Π 的方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$, a,b,c 均不等于0, 且 $b=c$, 平面 Π 过直线 L, 求平面 Π 的方程.

八、(6分，本题非商学院的学生做) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可导，$f(0)=0, f(1)=0$, 且 $\forall\, x\in(0,1)$, 有 $f(x)\neq 0$. 求证：$\int_0^1\left|\dfrac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x>4$.

九、(6分, 本题商学院的学生做) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $f''(x)>0$, 求证：

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ge(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

微积分I(第一层次)期末试卷 2019.1.2

一、计算下列各题(6分× 4=24分)

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3\ln\dfrac{x+1}{x-1}-2x^2\right)$.
2. $y=x^2\mathrm{e}^{3x}$, 求 $y^{(10)}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x\sin(xt)\mathrm{d}t}{x^3}$.
4. 求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行且过点 $(-3,2,5)$ 的直线方程.

二、计算下列各题(6分× 4=24分)

1. 求积分 $\displaystyle\int x\ln(2+x)\mathrm{d}x$.
2. 计算积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x^5+x^3+x^2+x+\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.
3. 计算广义积分 $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.
4. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\le x<1,\\ 1, & 1\le x\le 2,\end{cases}$ 设 $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t\ (0\le x\le 2)$, 求 $F(x)$.

三、(10分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\ln\frac{n+1}{n}}{n+1}+\dfrac{\ln\frac{n+2}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\ln\frac{2n}{n}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

四、(10分) 求曲线 $y=\ln x$ 的一条切线，使得这条切线与原曲线以及直线 $x=1, x=\mathrm{e}^2$ 所围成的图形面积最小.

五、(12分) 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^4}{(x+1)^3}$ 的定义域，单调区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线，并绘出草图.

六、(12分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]\ (a>0)$ 上具有二阶连续导数.

(1) 如果 $f''(x)>0\ (x\in[-a,a])$, 证明：$\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x\ge 2af(0)$;

(2) 如果 $f(0)=0$, 证明：在 $[-a,a]$ 上至少存在一点 ζ, 使得 $a^3f''(\zeta)=3\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$.

七、(8分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)\ge 0$, 满足 $f^2(x)\le 1+2\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,\ x\in[0,1]$. 证明：$f(x)\le 1+x,\ x\in[0,1]$.

微积分(I)期末试卷 2019.12.30

一、求下列不定积分(6分× 3=18分)

1. $I_1 = \int \sqrt{1+3\cos^2 x}\cdot\sin(2x)\mathrm{d}x.$

2. $I_2 = \int (\arcsin x)^2 \mathrm{d}x.$

3. $I_3 = \int \dfrac{x^2}{(x\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x.$

二、计算下列各题(6分× 3=18分)

1. 求定积分 $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \dfrac{1+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x.$

2. 求由 $y^2 = -4(x-1)$ 与 $y^2 = -2(x-2)$ 所围平面图形的面积.

3. 求心脏线 $\rho = a(1-\sin\theta)\ (a>0)$ 的全长 s.

三、计算下列各题(6分× 3=18分)

1. 求广义积分 $I_5 = \int_0^{+\infty} \dfrac{1-x^2}{x^4+1}\mathrm{d}x.$

2. 已知三个向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 满足 $|\boldsymbol{a}| = 2, |\boldsymbol{b}| = 3, |\boldsymbol{c}| = 4$, 且 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

3. 设有两条直线 $L_1: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1}$, $L_2: \dfrac{x+2}{0} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{-2}$, 证明它们是异面直线.

四、(10分) 设 $f(x)$ 是连续函数，又 $g(x) = \int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = A$ (A 为常数)，求 $g'(x)$, 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

五、(10分) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)}}{n}$.

六、(10分) 讨论函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ 的定义域，单调区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线，并作出图像.

七、(10分) 求一条直线 L, 使得 L 过点 $P(2,3,4)$, 且与平面 $\Pi: 2x+y-2z+7=0$ 平行，又与直线 $L_1: \dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-5}{-1}$ 相交.

八、(6分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数，求证：$\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$$

微积分 I (第一层次)期末试卷参考答案2018.1.10

一、 1. 1; 2. $I_1 = \frac{x}{2}(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) + C$. 3. $I_2 = \arctan(x+1) + \frac{1}{x^2+2x+2} + C$.

二、 1. $\frac{\pi a^4}{16}$. 2. $\frac{16}{3}p^2$. 3. $\ln 3 - \frac{1}{2}$. 三、 1. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. 2. $\frac{\pi}{3}$. 3. $\sqrt{\frac{223}{13}}$. 四、1. 五、$\frac{2}{\pi}$.

六、定义域 $x \neq 1$; 单调减区间$(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$, 单调增区间$(-1,1)$; 极小值$f(-1) = -\frac{1}{4}$, 下凹区间$(-\infty,-2)$, 上凹区间$(-2,1),(1,+\infty)$; 拐点$(-2,-\frac{2}{9})$; $x=1$是铅直渐近线; $y=0$是水平渐近线.

七、$7x-2y-2z+1=0$.

八、证明：因为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，且 $f(x)\neq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内不变号，不妨设 $f(x)>0$. $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，由最值定理，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有最大值 M. 设 $f(x_0)=M>0, x_0\in(0,1)$.
由拉格朗日中值定理，$\exists\,\alpha\in(0,x_0),\beta\in(x_0,1)$, 使得

$f(1)-f(x_0)=f'(\beta)(1-x_0)$, 即 $f'(\beta)=-\frac{M}{1-x_0}$; $f(x_0)-f(0)=f'(\alpha)(x_0-0)$, 即 $f'(\alpha)=\frac{M}{x_0}$

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x > \frac{1}{M}\int_0^1|f''(x)|\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{M}\int_\alpha^\beta|f''(x)|\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{M}\left|\int_\alpha^\beta f''(x)\,\mathrm{d}x\right| = \frac{1}{M}|f'(\beta)-f'(\alpha)|$$
$$= \frac{1}{M}\left|-\frac{M}{1-x_0}-\frac{M}{x_0}\right| = \frac{1}{x_0(1-x_0)} = \frac{1}{\frac{1}{4}-(\frac{1}{2}-x_0)^2} \geq 4.$$

九、证明：函数 $f(x)$ 在 $\frac{a+b}{2}$ 展开成泰勒公式

$$f(x)=f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{1}{2}f''(\xi)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2 > f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big),$$

两边积分得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > \int_a^b\Big(f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)\Big)\mathrm{d}x = f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)(b-a)$.

微积分I（第一层次）期末试卷参考答案2019.1.2

一、 1. $\frac{2}{3}$; 2. $y^{(10)}=3^8\mathrm{e}^{3x}(9x^2+60x+90)$; 3. $\frac{1}{2}$; 4. $\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}$.

二、1. $\frac{1}{2}x^2\ln(2+x)-\frac{1}{4}x^2+x-2\ln(x+2)+C$; 2. $2-\frac{\pi}{2}$; 3. $\frac{\ln 2}{4}$; 4. $F(x)=\begin{cases}\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}, & 0\leq x<1;\\ x-1, & 1\leq x\leq 2.\end{cases}$

三、$2\ln 2-1$. 四、切线方程为 $y-\ln\frac{1+e^2}{2}=\frac{2}{1+e^2}x-1$.

五、单调增区间 $(-\infty,-4),(0,+\infty)$, 单调减区间 $(-4,-1),(-1,0)$; 极大值 $f(-4)=-\frac{256}{27}$, 极小值 $f(0)=0$; 下凹区间 $(-\infty,-1)$, 上凹区间 $(-1,+\infty)$; 没有拐点; 铅直渐近线 $x=-1$; 斜渐近线 $y=x-3$.

六、(1) $f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2\geq f(0)+f'(0)x \Longrightarrow \int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x\geq\int_{-a}^a(f(0)+f'(0)x)\mathrm{d}x=2af(0)$.

(2) $f(x)=f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2}x^2 \Longrightarrow \int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^a f'(0)x\mathrm{d}x+\int_{-a}^a\frac{f''(\xi)}{2}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-a}^a f''(\xi)x^2\mathrm{d}x$,

设 $M=\max\limits_{x\in[-a,a]}f''(x)$, $m=\min\limits_{x\in[-a,a]}f''(x)$, 则 $m\leq\frac{3}{a^3}\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x\leq M$. 对 $f''(x)$ 用介值定理即得.

七、证明：设 $u(x)=1+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $u(0)=1, u'(x)=2f(x)\leq 2\sqrt{u(x)}$, 而 $\sqrt{u(x)}-1=$

$\int_0^x \frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}}\mathrm{d}t \le \int_0^x \mathrm{d}t = x$, 所以 $f(x) \le \sqrt{u(x)} \le 1 + x$.

微积分I（第一层次）期末试卷参考答案2019.12.30

一、 1. $I_1 = -\frac{2}{9}(1+3\cos^2 x)^{\frac{3}{2}} + C$; 2. $I_2 = x(\arctan x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$;

$$3.\ I_3 = -\int \frac{x}{\cos x}\mathrm{d}\frac{1}{x\sin x+\cos x} = -\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)} + \int \frac{1}{x\sin x+\cos x}\mathrm{d}\frac{x}{\cos x}$$
$$= -\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)} + \int \frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = -\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)} + \tan x + C$$

二、 1. $\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$; 2. $\frac{8}{3}$; 3. $8a$. 三、 1. 0； 2. $-\frac{29}{2}$.

四、$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ $g'(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u, & x \neq 0, \\ \frac{A}{2}, & x = 0. \end{cases}$ $g'(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

五、原式 $= \exp\Big(\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\ln(1+\frac{i}{n})\frac{1}{n}\Big) = \exp\Big(\int_0^1 \ln(1+x)\mathrm{d}x\Big) = \frac{4}{\mathrm{e}}$.

六、定义域 $(0,+\infty)$; 单调增区间$(0,\mathrm{e})$, 单调减区间$(\mathrm{e},+\infty)$; 极大值$f(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$, 下凹区间$(0,\mathrm{e}^{\frac{3}{2}})$, 上凹区间$(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}},+\infty)$; 拐点$\Big(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\Big)$; $x = 0$是铅直渐近线;$y = 0$ 是水平渐近线.

七、 $\frac{x-2}{15} = \frac{y-3}{-14} = \frac{z-4}{8}$.

八、 证明：令 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F'(x) = f(x)$, $F''(x) = f'(x)$, $F'''(x) = f''(x)$, 且 $F(a) = 0$.

$F(x)$ 在 $x = \frac{a+b}{2}$ 处的2阶泰勒公式为

$$F(x) = F\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big) + \frac{1}{2}f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^2 + \frac{1}{6}f''(\xi_1)\Big(x-\frac{a+b}{2}\Big)^3 \quad (1)$$

其中 ξ 在 x 与 $\frac{a+b}{2}$ 之间. 在 (1) 中分别令 $x = a$ 和 $x = b$, 得

$$0 = F\Big(\frac{a+b}{2}\Big) - f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\frac{b-a}{2} + \frac{1}{2}f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\frac{(b-a)^2}{4} - \frac{1}{6}f''(\xi_2)\frac{(b-a)^3}{8}, \quad a < \xi_2 < \frac{a+b}{2} \quad (2)$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\frac{b-a}{2} + \frac{1}{2}f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\frac{(b-a)^2}{4} + \frac{1}{6}f''(\xi_3)\frac{(b-a)^3}{8}, \quad \frac{a+b}{2} < \xi_3 < b \quad (3)$$

(3) − (2) 得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)(b-a) + \frac{(b-a)^3}{48}\Big(f''(\xi_2) + f''(\xi_3)\Big)$$

由 $f''(x)$ 的连续性可知 $f''(x)$ 在 $[\xi_2, \xi_3]$ 上有最大值 M 和最小值 m, 再由介值定理，$\exists \xi \in [\xi_2, \xi_3] \subset (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = \frac{1}{2}(f''(\xi_2) + f''(\xi_3))$, 所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\frac{b-a}{2}) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$$