《微积分 I》（第一层次）期末试卷 2016. 1. 5

一. 计算下列各题（本题满分 10 分×5=50 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x^2}+\cos\dfrac{1}{x^2}\right)^{3x^2}$.　　2. 计算积分 $\int x^2(\ln x)^2 dx$.

3. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{x^2}^{x}\dfrac{\sin xt}{t}dt}{x^2}$.　　4. 计算积分 $\int_0^1 \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$.

5. 求过原点且经过两平面 $\begin{cases}2x-y+3z=8;\\ x+5y-z=2\end{cases}$ 的交线的平面方程 .

6. 计算广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\arctan x}{(1+x^2)^{3/2}}dx$.　　7. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n+k}$.

8. 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长 .　　9. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x-8}$，求 $f^{(n)}(x)$.

10. 已知 $|\vec{a}|=4,|\vec{b}|=1,<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{\pi}{3}$. 求 $\vec{A}=2\vec{a}+\vec{b},\vec{B}=-\vec{a}+3\vec{b}$ 的夹角 .

二、设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，计算 $\int f(x)dx$. （10 分）

三、（本题满分 10 分）已知当 $x\to 0$ 时，$e^x-\dfrac{1+ax}{1+bx}$ 是关于 x 的 3 阶无穷小，求常数 a,b 之值.

四、（本题满分 14 分）讨论函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ 的定义域，单调区间，极值，凹向与拐点，并作出草图.

五、（本题满分 10 分）设 $S(x)=\int_0^x|\cos t|dt$，

1. 当 n 为正整数，且 $n\pi\le x\le(n+1)\pi$ 时证明不等式 $2n\le S(x)\le 2(n+1)$；

2. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

六、（本题满分 6 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，并且存在 $M>0$ 使得 $|f'(x)|\le M$. 设 n 是正整数，证明：$\left|\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{f(k/n)}{n}-\int_0^1 f(x)dx\right|\le\dfrac{M}{2n}$.

《微积分 I》（第一层次）期末试卷 2016. 12. 28

一、填空（每小题 3 分，共 8 题，计 24 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})=$______________；

2. 设参数方程为$\begin{cases} x=te^t, \\ y=2t+t^2; \end{cases}$ 则$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=$____________；

3. 函数$f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)$的单调增加区间为____________；

4. 设当$x\to 0$时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$较$x\cdot\sin x^n$为高阶无穷小，而$x\cdot\sin x^n$较$e^{x^2}-1$为高阶无穷小，则正整数$n=$___________；

5. 已知曲线$y=f(x)$与$y=\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}dt$在点$(0,\ 0)$处的切线相同，则$y=f(x)$在点$(0,\ 0)$处的法线方程为____________；

6. 设函数$f(x)=\frac{1}{e^{\frac{x+2}{x-3}}-1}$，则$x=3$是$f(x)$的____________间断点；

7. 设向量$\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=7\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}$,则向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的夹角$\theta=$_____；

8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2(e^x-1)}=$__________.

二、计算下列各题（每小题 6 分，共 6 题，计 36 分）

1. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{4n^2-i^2}}$.　　2. 求$I=\int_0^{\pi}x\cos^6 x\sin x dx$

3. 求过点$M(1,2,-1)$且与直线$\begin{cases} x=-t+2 \\ y=3t-4 \\ z=t-1 \end{cases}$垂直的平面方程.

4. 计算$\int\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}\mathrm{d}x$.　　5. 计算$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{e^{x+1}+e^{3-x}}$.

6. 计算$\int_0^1 x^2 f(x)dx$，其中$f(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt$.

三、（本题 10 分）设$f(x)$连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$（$A$为常数），求$\varphi'(x)$并讨论$\varphi'(x)$在$x=0$处的连续性.

四、（本题 12 分）讨论函数$y=x^2+\frac{1}{x}$的定义域，单调增减区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线，并作出函数的图像.

五、（本题 10 分）设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数且 $f''(x)<0$，直线 L_t 是曲线 $y=f(x)$ 上任一点 $\left(t,f(t)\right)$ 处的切线（$t\in[0,1]$）. 记直线 L_t 与曲线 $y=f(x)$ 以及直线 $x=0,x=1$ 所围成的图形的面积为 $A(t)$. 证明：$A(t)$ 的最小值 $\min\limits_{0\le t\le 1}A(t)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)-\int_0^1 f(x)dx$.

六、(本题非商学院的学生做,满分 8 分)设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且非负,(1)试证存在 $x_0\in(0,1)$，使得 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积,等于 $[x_0,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的曲边梯形面积;(2)又设 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导， 且 $f'(x)>-\dfrac{2f(x)}{x}$，证明(1)中的 x_0 是唯一的.

七、（本题商学院的学生做，满分 8 分）设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,\ 1]$ 上可导，且 $f(0)=0,\ \ f(1)=1$，试证：（1）存在 $\xi\in(0,\ 1)$，使 $f(\xi)=1-\xi$；（2）存在两个不同的点 $\eta_1,\eta_2\in(0,\ 1)$，使 $f'(\eta_1)\cdot f'(\eta_2)=1$.

《微积分 I》（第一层次）期末试卷 2018. 1. 10

一、计算下列各题（每小题 6 分，共 3 题，计 18 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \frac{1}{t}\ln(1+xt)dt}{x^2}$.　　2. 求不定积分 $I_1=\int\cos(\ln x)dx.$

3. 求不定积分 $I_2=\int\dfrac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}dx.$

二、计算下列各题（每小题 6 分，共 3 题，计 18 分）

1. 求定积分 $I_3=\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx\ (a>0)$.

2. 求抛物线 $y^2=2px$ 及其在点 $\left(\dfrac{p}{2},p\right)$ 处的法线所围成的图形的面积.

3. 求曲线 $y=\ln(1-x^2)$ 上相应于 $0\le x\le\dfrac{1}{2}$ 的一段弧的弧长.

三、计算下列各题（每小题 6 分，共 3 题，计 18 分）

1. 求广义积分 $I_4=\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2+4x+9}$.

2. 设 $(\vec{a}+3\vec{b})\perp(7\vec{a}-5\vec{b})$，$(\vec{a}-4\vec{b})\perp(7\vec{a}-2\vec{b})$，求向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角 r.

3. 求点 $P(1,2,3)$ 到直线 $L:\begin{cases}x-y+z+5=0\\5x-8y+4z+36=0\end{cases}$ 的距离.

四、(本题 10 分) 设 $x_0>0,\ x_{n+1}=\dfrac{1}{3}(2x_n+\dfrac{1}{x_n^2}),\ n=0,1,2,\cdots$, 求证：数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

五、(本题 10 分) 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

六、(本题 10 分) 讨论函数 $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ 的定义域，单调增减区间，极值，凹凸区间，拐点，渐近线，并作出函数的图像.

七、(本题 10 分) 设直线 $L:\begin{cases}2x-y-2z+1=0\\x+y+4z-2=0\end{cases}$，平面 π 的方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1, a,b,c$ 均为非零的数，且 $b=c$，平面 π 过直线 L，求平面 π 的方程.

八、(本题非商学院的学生做，满分 6 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶连续可导，$f(0)=0,\ f(1)=0$，且 $\forall x\in(0,1)$ 有 $f(x)\neq 0$, 求证：$\int_0^1\left|\dfrac{f''(x)}{f(x)}\right|dx>4.$

八、(本题商学院的学生做，满分 6 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f''(x)>0$，试证：$\int_a^b f(x)dx\geq(b-a)f(\dfrac{a+b}{2}).$

参考答案:

15 级：

一、$1.e^3;2.\dfrac{1}{3}x^3\ln^2x-\dfrac{2}{9}x^3\ln x+\dfrac{2}{27}x^3+C;3.1;4.\ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}+1;$

$5.2x+21y-7z=0;6.\dfrac{\pi}{2}-1;7.\pi\ln 2;8.8a;9.(-1)^n\dfrac{n!}{6}(\dfrac{1}{(x-4)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+2)^{n+1}});$

$10.\arccos\dfrac{-19}{\sqrt{73\times 13}}$. 二、$x-(1+e^{-x})\ln(1+e^x)+C$; 三、$a=0.5, b=-0.5$

四、定义域 $x\neq 1$, 单调增区间为 $(-\infty,1),(3,+\infty)$, 减区间为 $(1,3)$, 极小值 $f(3)=27/4$;
凹区间为 $(0,1),(1,+\infty)$, 凸区间为 $(-\infty,0)$, 拐点 $(0,0)$, 渐近线 $x=1$, $y=x+2$. 图略

五、(1) $\because |\cos t|\geq 0, \int_0^{n\pi}|\cos t|dt \leq \int_0^{x}|\cos t|dt \leq \int_0^{(n+1)\pi}|\cos t|dt,$

而 $\int_0^{n\pi}|\cos t|dt=n\int_0^{\pi}|\cos t|dt=2n.$

(2)由夹逼定理得，$2/\pi.$

六、$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(k/n)}{n}-\int_0^1 f(x)dx\right|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{f(k/n)}{n}-\int_{k/n}^{(k+1)/n}f(x)dx\right)\right|$

$\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}|f(\frac{k}{n})-f(x)|dx \leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}|f'(\xi_n)(x-\frac{k}{n})|dx$

$\leq M\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n}(x-\frac{k}{n})dx=\frac{M}{2n}.$

16 级:

一、1.1；2. 2；3. $(0,\frac{2}{5})$；4. 2；5. $y=-x$；6.第一类跳跃；7. $\pi/2$；8. $1/2$.

二、1. $\pi/6$；2. $\pi/7$；3. $x-3y-z+4=0$; 4. $x-3y-z+4=0$

5. $\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{1+\ln x}+C$；6. $\pi/(4e^2)$; 7. $\frac{1}{3e}-\frac{1}{6}$. 三、略

四、定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 令 $y'=0$，得 $x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$；令 $y''=0$，得 $x=-1$，

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$\left(0,\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},+\infty\right)$
y′	−	−	−		−	0	+
y′′	+	0	−		+	+	+
y	凹、减	拐点	凸、减		凹、减	极小	凹、增

有一条垂直渐近线 $x=0$，图形无水平、斜渐近线.图形上的点 $(-1,0),\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}},\frac{3}{2}\sqrt[3]{2}\right)$. 图略.

五、略; 六、略; 七、(1) 令 $F(x)=f(x)-1+x$

(2) 提示：在 $(0,\ \xi),(\xi,\ 1)$ 使用拉格朗日公式.

17 级:

一、**1**. 1. 2. $\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)+C.$ 3. $\arctan(x+1)+\frac{1}{x^2+2x+2}+C.$

二、1. $\dfrac{\pi}{16}a^4$； 2. $\dfrac{16}{3}p^2$；3. $\ln 3-\dfrac{1}{2}$. 三、**1.** $\dfrac{\pi}{\sqrt{5}}$； 2. $\dfrac{\pi}{3}$； 3. $\sqrt{\dfrac{223}{13}}$.

四、$\{x_n\}$ 单调下降下有界，极限为 1. 五、由夹逼定理为 $2/\pi$.

六、定义域为 $x\neq 1$，驻点 $x_1=-1$. $y''=0$,得 $x_2=-2$.

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$		$-$
y''	$-$	0	$+$	$+$	$+$		$+$
y	凸、减	拐点 $(-2,\ -2/9)$	凹、减	极小值 $-1/4$	凹、增		凹、减

$y=0$ 为水平渐近线. $x=1$ 垂直渐近线. 无斜渐近线，图略.

七、$7x-2y-2z+1=0$.

八、（本题非商学院的学生做，满分 6 分）

证明：因为 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上连续，且 $f(x)\neq 0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上不变号，

不妨设 $\forall x\in(0,1)$ 有 $f(x)>0$，由最值定理 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有最大值，

设 $f(x_0)=\max\limits_{0\le x\le 1}f(x), x_0\in(0,1)$ 有 $f(x)>0$，则

$$\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx>\frac{1}{f(x_0)}\int_0^1|f''(x)|dx. \qquad (1)$$

在 $[0,x_0]$ 和 $[x_0,1]$，由上分别应用 Lagrange 中值定理，则

$\exists\alpha\in(0,x_0)$ 和 $\beta\in(x_0,1)$ 使得 $f(x_0)-f(0)=f'(\alpha)x_0$，

$f(1)-f(x_0)=f'(\beta)(1-x_0)$，即 $f'(\alpha)=\dfrac{f(x_0)}{x_0}, f'(\beta)=\dfrac{f(x_0)}{x_0-1}$,于是：

$$\int_0^1|f''(x)|dx\ge\left|\int_\alpha^\beta f''(x)dx\right|=|f'(\beta)-f'(\alpha)|=\left|\frac{f(x_0)}{x_0-1}-\frac{f(x_0)}{x_0}\right|$$

$$=\frac{f(x_0)}{x_0(1-x_0)}=\frac{f(x_0)}{\frac{1}{4}-(\frac{1}{2}-x_0)^2}\ge 4f(x_0).$$

代入(1)式得：$\displaystyle\int_0^1\left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|dx>4$.

八、（本题商学院的学生做，满分 6 分）

证明：把函数 $f(x)$ 在 $\dfrac{a+b}{2}$ 展成泰勒公式：

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a+b}{2})^2$$

其中 ξ 在 x 与 $\dfrac{a+b}{2}$ 之间.注意到 $f''(x)>0$，所以

$f(x)>f(\dfrac{a+b}{2})+f'(\dfrac{a+b}{2})(x-\dfrac{a+b}{2})$，两边关于 x 从 a 到 b 积分，得

$$\int_a^b f(x)dx>\int_a^b f(\frac{a+b}{2})dx+f'(\frac{a+b}{2})\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})dx$$

$$=f(\frac{a+b}{2})(b-a)+f'(\frac{a+b}{2})\frac{1}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2\Big|_a^b$$

$$=f(\frac{a+b}{2})(b-a).$$ 证毕.