《微积分 I》（第一层次）期末试卷 2011.1.6

一. 计算下列各题（本题满分 6 分×10=60 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}}dx$.　2. 计算积分 $\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$.　3.求 $I=\int x\arctan x dx$.

4. 计算积分 $I=\int_{-1}^{1}\frac{x^2+x^3}{1+x^2}dx$.　5. 求抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $x+y=4$ 所围图形面积 S.

6. 已知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，求 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$.　7. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^p}{n^{p+1}}(p>0)$.

8. 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长.　9. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{\int_0^{x^2}\sin^{3/2}tdt}{\int_0^x t(t-\sin t)dt}$.

10. 已知空间中有三点 $A(1,1,1),B(2,2,1),C(2,1,2)$，求向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 之间的夹角及三角形 ABC 的面积.

二. (本题满分 10 分)设 $f(x)$ 在实数域上连续. $F(x)=\int_0^x(x-2t)f(t)dt$，证明：1. 如果 $f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)$ 也是偶函数；2. 如果 $f(x)$ 是单调增函数，则 $F(x)$ 也是单调减函数.

三. （本题满分 10 分）讨论函数 $y=\frac{(x-3)^2}{4(x-1)}$ 的定义域，单调区间，极值，凹向与拐点，渐近线，并作出草图.

四. （本题满分 12 分）（1）设 $f(x),g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，试证明施瓦兹不等式:

$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx$. (2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，并且 $f(a)=0$，证明：$\int_a^b f^2(x)dx\le\frac{(b-a)^2}{2}\cdot\int_a^b[f'(x)]^2dx$.

(3) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可导，并且 $f(a)=f(b)=0$，证明：

$$\int_a^b f^2(x)dx\le\frac{(b-a)^2}{4}\cdot\int_a^b[f'(x)]^2dx$$

五. （本题满分 8 分）设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上有三阶连续导数，

证明：极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left|k[f(\frac{1}{k})-f(-\frac{1}{k})]-2f'(0)\right|$ 存在.

《微积分 I》（第一层次）期末试卷 2011. 12. 28

一、填空（本题满分 3 分×10=30 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}\right)=$ ______ ；

2. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x+a, & x<0;\\ 0, & x=0;\\ b-(1+x)^{3/x}, & x>0.\end{cases}$ 是 R 上的连续函数，$a=$ ____ ，$b=$ ____ ；

3. 已知 $f'(x_0)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{h}=$ ______ ；

4. 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x^2+x-2}=2$，则 $a=$ ____ ，$b=$ ____ ；

5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arcsin t\,dt}{x^4}=$ ______ ； 6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=$ ______ ；

7. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=$ ______ ； 8. 设 $f(x)=\int_1^{\sqrt{x}}e^{-t^2}dt$，则 $\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=$ ______ .

二、计算下列各题（本题满分 5 分×8=40 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n e^x\sin nx\,dx$； 2. 计算积分 $\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$；

3. 求 $I=\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx,(a\neq 0)$； 4. 计算积分 $\int_1^{e^2}\sqrt{x}\ln x\,dx$；

5. 计算广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}$； 6. 设 $y=(x^2+3x+1)e^{-x}$，求 $y^{(99)}$；

7. 求与直线 $2x-6y+1=0$ 垂直，并与曲线 $y=x^3-3x-5$ 相切的直线方程;

8. 计算积分 $\int_0^1\frac{dx}{(x^2-x+1)^{3/2}}dx$.

三、（本题满分 12 分）讨论函数 $y=\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ 的定义域，单调区间，极值，凹向与拐点，渐近线，并作出草图 .

四、（本题满分 6 分）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，并且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$，设 $\phi(x)=\int_0^1 f(xt)\,dt$. 求 $\phi'(x)$ 并讨论 $\phi'(x)$ 在 $x=0$ 的连续性.

五、（本题满分 6 分）已知抛物线 $y=px^2+qx$（其中 $p<0,q>0$）在第一象限内与直线 $x+y=5$ 相切. (1) 求此抛物线与 x 轴所围成的平面图形的面积 S（用 q 表示）; (2) 当 p,q 为

何值时，S 取得极大值，求出 S 的极大值.

六、（本题为非商学院的学生做，满分 6 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微并且 $f(1)=k\int_0^{1/k} xe^{1-x}f(x)dx,(k>1)$

证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=(1-\frac{1}{\xi})f(\xi)$.

七、（本题为商学院的学生做，满分 6 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得下面的等式成立 $\int_0^1 f(x)x^2dx=\frac{1}{3}f(\xi)$.

《微积分 I》（第一层次）期末试卷 2013. 1. 9

一、填空（本题满分 3 分×10=30 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{x^2}^{x}\sin(xt)dt}{x^3}$=______ . 2. 设 $f(x)=x-\int_0^2 f(x)dx$，则 $\int_0^2 f(x)dx$=______ .

3. $\int_{-1}^{1}\dfrac{x^2+x\cos x}{1+x^2}dx$=______ . 4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}\right)$=______ .

5. 过点 $A(1,0,4)$ 且与平面 $\Pi: x-2y+2z=5$ 平行的平面方程为 =______________ .

6. $\int x\ln x dx$=______ . 7. $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}dx$=___ . 8. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$=______ .

9. 函数 $y=\dfrac{(x-3)^2}{4(x-1)}$ 的单调上升区间为 _______ . 10. $y=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$，则 dy=_______ .

二、计算下列各题（本题满分 5 分×8=40 分）

1.求曲线 $y=\ln(1+e^x)$ 的所有渐近线. 2.计算积分 $\int\dfrac{1}{1+3\sin^2 x}dx$.

3.求不定积分 $\int\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$. 4.计算积分 $\int_0^1\dfrac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$.

5.设 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\int_{-\infty}^{c}te^{2t}dt$，求 c 的值. 6. 设 $y=x\ln x$，求 $y^{(n)}$.

7. 设空间中的四个点为 $A(1,2,1),B(-1,3,4),C(-1,-2,-3),D(0,-1,3)$，求由以此四点为顶点的四面体的体积.

8. 设直线 L 的方程为：$\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{5}$，平面 Π 的方程为：$3x+y+2z+20=0$，求直线 L 与平面 Π 的夹角和交点 M.

三、（本题满分 10 分）

(1). 设 $f(x), g(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，$g(x)$ 是偶函数，$f(x)+f(-x)\equiv A$（A 为常数），证明：$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)dx = A\int_{0}^{a} g(x)dx$；

(2). 求 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \arctan(e^x)dx$.

四、(本题满分 8 分) 设抛物线 $y = ax^2+bx+c$ 满足下面两个条件：(1)通过 $A(0,0)$ 和 $B(1,2)$ 两点，并且 $a<0$；(2)与抛物线 $y=-x^2+2x$ 围成的图形面积最小.求出该抛物线的方程.

五、(本题满分 8 分) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\int_{0}^{x}|\sin((t-[t])\pi)|dt$，这里 $[t]$ 是不超过 t 的最大整数.

六、(本题非商学院的考生做，满分 6 分) 设函数 $f(x)$ 的定义域和值域都是区间 $[0,1]$.并且函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数，$f'(x)$ 是单调减函数，$f(0)=f(1)=0$. 证明：由方程 $y=f(x), (0\le x\le 1)$ 所确定的曲线弧的长度不超过 3.

七、(本题商学院的考生做，满分 6 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上连续，在区间 $(0,2)$ 内可导. 并且 $f(2)=\dfrac{1}{4}\int_{0}^{1}x^2 f(x)dx$.证明：存在一点 $\xi\in(0,2)$，使得 $2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

参考答案:

10 级： 一、1. 0； 2. $x-\tan x+\sec x+C$； 3. $\dfrac{x^2+1}{2}\arctan x-\dfrac{x}{2}+C$； 4. $2-\frac{\pi}{2}$；

5. 18； 6. $\frac{\pi}{2}$； 7. $\frac{1}{p+1}$； 8. $8a$； 9. 12； 10. $\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}$.

三、函数的定义域：$x\neq 1$，$f'=\dfrac{(x+1)(x-3)}{4(x-1)^2}$，驻点：$x=-1, x=3$，函数的增区间：$x<-1, x>3$，函数的减区间为：$(-1,1),(1,3)$；$f''=2/(x-1)^3$，函数的凹区间为：$x<1$，函数的凸区间为：$x>1$，函数无拐点；函数有渐近线：$x=1$，$y=x/4-5/4$.

11 级： 一、1. $\frac{1}{3}$； 2. $a=-1, b=e^3$； 3. 6； 4. $a=4, b=-5$； 5. $\frac{1}{2}$； 6. $\ln 2$； 7. $\frac{\pi}{2}$；

8. $\frac{1}{e}-1$. 二、1. 0； 2. $x-\tan x+\sec x+C$； 3. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{a^2+x^2}|+C$；

4. $\dfrac{8}{9}e^3+\dfrac{4}{9}$； 5. $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$； 6. $e^{-x}(-x^2+195x-9460)$； 7. $3x+y+5=0$； 8. $\dfrac{4}{3}$.

三、函数的定义域：$x \neq 1$，$f' = \dfrac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$，驻点：$x=-1, x=5$，函数的增区间：

$(-\infty,1),(5,+\infty)$，函数的减区间为：$(1,5)$；$f''=24(x+1)/(x-1)^4$，函数的凹区间为：$x<-1$，

函数的凸区间为：$x>-1, x\neq 1$，拐点为$(-1,0)$；函数有渐近线：$x=1$，$y=x+5$.

四、$\Phi'(x) = \dfrac{xf(x) - \int_0^x f(u)du}{x^2} (x \neq 0), \Phi'(0) = 1. \Phi'(x)$ 在 0 处连续.

五、$S = 200q^3/3(1+q)^4, q=3, p=-4/5 \text{时S取最大值} 225/32$.

12 级：一、1. $1/2$；　2. $2/3$；　3. $2-\frac{\pi}{2}$；　4. $\frac{\pi}{4}$；　5. $x-2y+2z=9$；

6. $\dfrac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C$；　7. $1/2$；　8. -1；　9. $(-\infty,-1),(3,+\infty)$；10. $\dfrac{dx}{1+x^2}$.

二、1. $y=0, y=x$.　2. $\frac{1}{2}\arctan(2\tan x)+C$.　3. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x + \ln\sqrt{1-x^2} + C$.

4. $\sqrt{2}/2$；　5. $c=5/2$；　6. $y'=\ln x+1, y''=1/x, y^{(n)} = \dfrac{(-1)^n (n-2)!}{x^{n-1}} (n>2)$　；

7. 9；　8. $\pi/3$，$(-5,3,-4)$.　三 (2)　$\pi/2$.　四、$y=-3x^2+5x\ (a=-3, b=5, c=0)$.

五、$2/\pi$　.

六、由 Rolle 定理，存在$c\in(0,1)$，使得　$f'(c)=0$，因为$f'(x)$单调减，所以，当$x\in[0,c)$

时，　$f'(x)\geq 0$，当$x\in(c,1]$时，　$f'(x)\leq 0$.

$L_{[0,c]} = \int_0^c \sqrt{1+f'^2(x)}dx \leq \int_0^c (1+f'(x))dx = c + f(c)$,

$L_{[c,1]} = \int_c^1 \sqrt{1+f'^2(x)}dx \leq \int_c^1 (1-f'(x))dx = 1-c+f(c)$,

$L_{[0,1]} = L_{[0,c]} + L_{[c,1]} \leq c + f(c) + 1 - c + f(c) = 1 + 2f(c) \leq 3$.

七、设$g(x)=x^2 f(x), g(x)$在$[0,2]$上连续，在$(0,2)$内可导. 由题意，可得

$g(2) = 4f(2) = \int_0^1 x^2 f(x)dx = \eta^2 f(\eta) = g(\eta), (0<\eta<1)$，而 $g(x)$ 在$[\eta,2]$上连续，在

$(\eta,2)$内可导.由洛尔定理，存在　$\xi\in(\eta,2)\subset(0,2)$，使得$g'(\xi)=0$，

即$2f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.