微积分II（第一层次）期末试卷参考答案2018.7.3

一、 1. $\dfrac{xy}{x^2+y^2+z^2}f''-\dfrac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}f'$; 2. 收敛; 3. $(3-\sqrt{5},3+\sqrt{5})$;

4. $8x\sin y=3+4\sin^2 y$; 5. $\sin\dfrac{y}{x}-\cos\dfrac{x}{y}+5x-\dfrac{3}{y^2}=C$.

二、$\dfrac{29}{20}\pi a^5$. 三、$-\dfrac{9}{2}a^3$. 四、$p>\dfrac{1}{2}$时绝对收敛，$-\dfrac{1}{2}<p\le\dfrac{1}{2}$时条件收敛，$p\le-\dfrac{1}{2}$时发散.

五、$f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{n+1}{3^{n+2}}+(-1)^n\frac{2^n}{5^{n+1}}\Big)x^n,\quad x\in\Big(-\frac{5}{2},\frac{5}{2}\Big)$.

六、$f(x)\sim\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx=\begin{cases}\dfrac{x}{4}, & x\in(-\pi,\pi)\\ 0, & x=\pm\pi.\end{cases}$, $1+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}-\cdots=\dfrac{\pi}{3}$.

七、$y=C_1e^x+C_2e^{-x}-2x+\dfrac{e^{2x}}{10}(\cos x+2\sin x)$.

八、(1) $f'(x)=a(1+4f^2(x)),\quad f(x)=\dfrac{1}{2}\tan(2ax)$; (2) $f'(x)-\dfrac{1}{x}f(x)=-\dfrac{2}{x},\quad f(x)=2+Cx$.

微积分II（第一层次）期末试卷参考答案 (2019.6.17)

一、 1. 解：平面方程为$z=\dfrac{1}{8}x+\dfrac{1}{2}y-\dfrac{9}{4}$, $(x,y)\in D$, 其中$D:x^2+(y-3)^2\le 9$.

则所求面积$S=\displaystyle\iint_D\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{9}{8}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{9}{8}\cdot 9\pi=\frac{81}{8}\pi$.

2. 解：$a_n=n\arcsin\dfrac{\pi}{5^n}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot\frac{\pi}{5^{n+1}}}{n\cdot\frac{\pi}{5^n}}=\frac{1}{5}<1$, 所以级数收敛.

3. 解：$x=1$是奇点. $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}\cdot\sqrt{1-x}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^3}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}=\frac{1}{2}$, 所以广义积分收敛.

4. 解：这是伯努利方程，令$y^2=u$, 方程化为$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}u=-1$, 通积分为$y^2=Cx-x\ln|x|$.

5. 解：方程化为$(x^2-y+5)\mathrm{d}x-(x+y^2+2)\mathrm{d}y=0$, 是全微分方程，通积分为$\frac{x^3-y^3}{3}-xy+5x-2y=C$.

二、解：直线L过点$M_0(\frac{27}{8},-\frac{27}{8},0)$, 方向向量为$(10,2,-2)\times(1,1,-1)=8(0,1,1)$.

设切点为(x_0,y_0,z_0), 则法向量为$(3x_0,y_0,-z_0)$, 切平面方程为$3x_0x+y_0y-z_0z=27$.

所以$\begin{cases}3x_0\cdot\frac{27}{8}+y_0\cdot(-\frac{27}{8})=27,\\ (3x_0,y_0,z_0)\cdot(0,1,1)=0,\\ 3x_0^2+y_0^2-z_0^2=27.\end{cases}$ 解得$(x_0,y_0,z_0)=(3,1,1)$或$(-3,-17,-17)$,

所以切平面方程为$9x+y-z=27$或$9x+17y-17z=-27$.

三、解: 记$P(x,y)=(x+y+1)e^x-e^y+y$, $Q(x,y)=e^x-(x+y+1)e^y-x$, 则$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2$

$$\int_{C+\overline{AO}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\iint_D(-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\qquad\text{(其中}D\text{为旋轮线的一拱与}x\text{轴所围的区域)}$$

$$= 2\int_0^{2\pi a} y\mathrm{d}x = 2\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\mathrm{d}t = 6\pi a^2,$$

所以 $I_1 = 6\pi a^2 + \int_0^{2\pi a}((x+1)e^x - 1)\mathrm{d}x = 6\pi a^2 + 2\pi a(e^{2\pi a} - 1).$

四、方法一：设 $S_1 : z = 0,\ (x^2+y^2\le 1)$, 取下侧, 则由高斯公式

$$\iint\limits_{S+S_1} 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint\limits_{\Omega} 6(x^2+y^2+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad (\text{柱坐标})$$

$$= 6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_0^{1-\rho^2}(\rho^3+\rho z)\mathrm{d}z = 2\pi, \text{ 所以}$$

$$I_2 = 2\pi - \iint\limits_{S_1} 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi + \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}(-3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\pi.$$

方法二：$S : z = 1 - x^2 - y^2,\ (x,y)\in D,\quad D : x^2+y^2\le 1$, 则

$$I_2 = \iint\limits_D \Big(2x^3(-z'_x) + 2y^3(-z'_y) + 3\big((1-x^2-y^2)^2 - 1\big)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint\limits_D (7x^4 + 7y^4 - 6x^2 - 6y^2 + 6x^2y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (\text{极坐标})$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\Big(7\rho^5\cos^4\theta + 7\rho^5\sin^4\theta - 6\rho^3 + 6\rho^5\cos^2\theta\sin^2\theta\Big)\mathrm{d}\rho = -\pi.$$

五、解：$x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x)$, 令 $x = \dfrac{1}{k}$, 则 $\dfrac{1}{k+1} < \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$, 取 $k = 1,2,\cdots,n-1$,

再将各式相加可得 $a_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} < \ln n + 1 < 2\ln n\ (n\ge 3)$, 所以 $\dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)} < \dfrac{2\ln n}{n^2}$.

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\ln n}{n^2}\cdot n^{\frac{3}{2}} = 0$, 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2\ln n}{n^2}$ 收敛. 由比较判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{(n+1)(n+2)}$ 收敛.

$$S_n = \sum_{k=1}^n\frac{a_k}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n a_k\Big(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\Big) = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2-a_1}{3} + \cdots + \frac{a_n - a_{n-1}}{n+1} - \frac{a_n}{n+2}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{a_n}{n+2}, \text{ 所以} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty}S_n = 1.$$

六、解：令 $t = x^2$, 对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}t^{n-1}$, $a_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)\cdot 2^n}{(2n-1)2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}$,

所以 $R = 2$. $t = 2$ 时，级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2}$ 发散; 所以 $0\le x^2 < 2$, 收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

设 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$, 则 $\int_0^x S(x)\mathrm{d}x = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}x^{2n-1} = \dfrac{1}{x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\Big(\dfrac{x^2}{2}\Big)^n = \dfrac{\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}}{1-\frac{x^2}{2}} = \dfrac{x}{2-x^2}$,

所以 $S(x) = \Big(\dfrac{x}{2-x^2}\Big)' = \dfrac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$, $\quad x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. $\qquad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n} = S(1) = 3.$

七、解：$f(x)$ 是偶函数，所以 $b_n=0,\ n=1,2,\cdots$.

$a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\mathrm{d}x=\dfrac{4\pi^2}{3},\quad a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\cos nx\mathrm{d}x=\dfrac{4(-1)^{n+1}}{n^2},\ n=1,2,\cdots,$

所以 $\pi^2-x^2=\dfrac{2}{3}\pi^2+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx,\quad x\in[-\pi,\pi].$

代入 $x=0$ 得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12},\quad$ 代入 $x=\pi$ 得 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6},$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{(2n-1)^2}=\dfrac{\pi^2}{6}+\dfrac{\pi^2}{12}=\dfrac{\pi^2}{4}$, 所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}=\dfrac{\pi^2}{8}.$

八、解：$y_1-y_3=e^{-x}$ 是对应的齐次方程的一个解，则 $y_4=y_2-e^{-x}=xe^x$ 是非齐次方程的一个解，$y_1-y_4=e^{2x}$ 是对应的齐次方程的另一个解。所以 $-1,2$ 是特征根。

二阶线性非齐次微分方程为 $y''-y'-2y=f(x)$, 将 $y_4=xe^x$ 带入方程可得 $f(x)=(1-2x)e^x$.

所以微分方程为 $y''-y'-2y=(1-2x)e^x$, 通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+xe^x$.

微积分 II（第一层次）期末试卷参考答案 (2020.8.18)

一、 解：$\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0=f(0,0)$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续.

$f_x'(0,0)=\displaystyle\lim_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\ f_y'(0,0)=\lim_{y\to0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0,$

所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可偏导.

$\omega=f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)x-f_y'(0,0)y=f(x,y)=xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$

$\displaystyle\lim_{\rho\to0^+}\dfrac{\omega}{\rho}=\lim_{\rho\to0^+}\rho\cos\theta\sin\theta\sin\dfrac{1}{\rho}=0$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时, $f_x'(x,y)=y\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\dfrac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$

$\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f_x'(x,y)=\lim_{\rho\to0^+}(\rho\sin\theta\sin\dfrac{1}{\rho}-\cos^2\theta\sin\theta\cos\dfrac{1}{r})$ 不存在，故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续可微.

二、1. $9x+y-z=27$ 或 $9x+17y-17z+27=0$.

2. 解：$S=\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le2a^2}\Big(\dfrac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2-x^2-y^2}}+\dfrac{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}{a}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$\displaystyle=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}a}\Big(\dfrac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a^2-\rho^2}}+\dfrac{\sqrt{a^2+\rho^2}}{a}\Big)\rho\mathrm{d}\rho=\dfrac{16}{3}\pi a^2.$

3. $I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{+\infty}\dfrac{1}{x^4+y^2}\mathrm{d}y=\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\arctan\dfrac{y}{x^2}\Big|_{y=x^2}^{y\to+\infty}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{4}.$

三、1. 曲线的参数方程为 $x=\cos\theta,y=\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}},z=\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{2}},\theta$ 从 0 到 $\dfrac{\pi}{2}$, 则

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\cos\theta\sin\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{2}\pi}{8}-\frac{1}{2}.$$

2. 记 $S: x+y=R$ 后侧, $I=\iint\limits_S (y+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{R}{\sqrt{2}}\iint\limits_S \mathrm{d}S=-\frac{\sqrt{2}\pi R^3}{4}.$

3. 设 $S_1: z=0,((x,y)\in D)$ 取下侧, 其中 $D: x^2+y^2\le a^2$. Ω 是 S 与 S_1 所围立体,

$P=x^3+az^2, Q=y^3+ax^2, R=z^3+ay^2$, 则

$$\iint\limits_{S+S_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}3(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{6\pi a^5}{5},$$

$$\iint\limits_{S_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_D ay^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\rho^3\sin^2\theta\mathrm{d}\rho=-\frac{\pi a^5}{4},$$

所以 $I=\frac{6\pi a^5}{5}+\frac{\pi a^5}{4}=\frac{29}{20}\pi a^5$

四、1. 解：$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)$, $a_n=\frac{1}{n}-\arctan\frac{1}{n}=\frac{1}{n}-\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{3n^3}+o(\frac{1}{n^4})\Big)\sim\frac{1}{3n^3}$,

所以级数收敛.

2. 解：$a_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, a_n 单调减，$\frac{1}{2n}<a_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, 由夹逼准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，所以由莱布尼茨判别法可知原级数收敛；由 $a_n>\frac{1}{2n}$ 可知原级数非绝对收敛, 故原级数条件收敛.

3. 解：设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$, 两边积分得

$$\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\Big)'=x\Big(\frac{x}{1-x}\Big)'=\frac{x}{(1-x)^2},(|x|<1)$$

两边求导 $S(x)=\Big(\frac{x}{(1-x)^2}\Big)'=\frac{x+1}{(1-x)^3},(-1<x<1)$. 令 $x=-\frac{1}{3}$ 得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)^2\frac{1}{3^n}=\frac{9}{32}$.

4. $x^2=\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}\cos n\pi x, x\in(-\infty,+\infty)$, 取 $x=0$ 即得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

五、1. $\tan(1+x+y)-\sec(1+x+y)=x-1$.

2. 原方程可以写成 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{2x}{y}=-2\frac{x^2}{y^3}$, 这是一个关于 x 的伯努利方程，通积分为 $y^2=C\mathrm{e}^{\frac{y^2}{x}}$.

六、$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{6}x^3\mathrm{e}^{-x}$.

微积分 II（第一层次）期末试卷参考答案 (2021.6.22)

一、 1. 法平面方程为 $x-2y+z=0$, 切线方程为 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$.

2. 解：柱面在第一卦限部分记为 S_1, 则 $S_1: x=\sqrt{ay-y^2},(y,z)\in D$, $D=\{(y,z)|0\le z\le\sqrt{a^2-ay},0\le y\le a\}$.

$$S=4S_1=\iint\limits_D\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_D\frac{a}{2\sqrt{ay-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{a^2-ay}}\frac{a}{\sqrt{ay-y^2}}\mathrm{d}x=4a^2.$$

3. 解：$P=\cos(x+y^2), Q=2y\cos(x+y^2)-\sqrt{1+y^4}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=-2y\sin(x+y^2)$, 所以积分与路径无关. 取直线段$\overline{OA}: y=0, x:0\to 2\pi a$, 则 $I_1=\displaystyle\int_{\overline{OA}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi a}\cos x\mathrm{d}x=\sin(2\pi a)$.

4. 解：S关于$y=0$对称，$xy+yz$关于y是奇函数，则

$$I_2=\iint\limits_S zx\mathrm{d}S=\iint\limits_D x\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{(1+z'_x)^2+(z'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\rho^3\cos\theta\mathrm{d}\rho=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4.$$

5. 解：$\displaystyle\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$

对于$I_1=\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$, (1) $p\geq 1$时是定积分，收敛; (2) $p<1$时，0是奇点，$\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x^{p-1}e^{-x}\cdot x^{1-p}=1$, 由柯西判别法, 当$0<1-p<1$即$0<p<1$时收敛, 当$1-p\geq 1$即$p\leq 0$时发散. 由(1)(2)可知，$I_1$仅当$p>0$时收敛.

对于$I_2=\displaystyle\int_1^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$, $+\infty$是奇点，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^{p-1}e^{-x}\cdot x^2=0$，所以$I_2$收敛.

综上，原式仅当$p>0$时收敛；

二、1. 解：$0<u_n=\dfrac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}<\dfrac{n^{n-1}}{(n^2)^{\frac{n+1}{2}}}=\dfrac{1}{n^2}$, 而级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以原级数收敛.

2. 解：因为数列$\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right\}$单调减少趋于零,

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{6}\right|=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left|\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{k\pi}{6}\sin\frac{\pi}{12}\right|=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{(2k-1)\pi}{12}-\cos\frac{(2k+1)\pi}{12}\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{12}}\left|\cos\frac{\pi}{12}-\cos\frac{(2n+1)\pi}{12}\right|\leq\frac{1}{\sin\frac{\pi}{12}},$$

故级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{6}$的部分和有界. 由狄利克莱判别法知级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}}$收敛.

又$\left|\dfrac{\sin\frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}}\right|\geq\dfrac{\sin^2\frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2\sqrt{n}}-\dfrac{\cos\frac{n\pi}{3}}{2\sqrt{n}}$. 与上面的证明类似, 可以知道级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{2\sqrt{n}}$收敛, 而级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$发散. 一个发散级数与一个收敛级数逐项相减所得的级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}}$必发散, 由比较判别法可知级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}}\right|$发散. 综上所述，原级数条件收敛.

3. 解：注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n=\ln(1+x),\ x\in(-1,1]$, 所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\Big(1-\frac{1}{3^n}\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{1}{3^n}=\ln(1+1)-\ln(1+\frac{1}{3})=\ln\frac{3}{2}.$$

4. 解：原方程化为 $(3x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy)\mathrm{d}y=0$, 这是全微分方程，通积分为 $x^3+x^2y-xy^2=C$.

5. 解：原方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\frac{1}{x}y=x^3\cdot y^{-2}$, 这是伯努利方程，令 $y^3=u$, 则原方程化为 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\frac{3}{x}\cdot u=3x^2$, 解得 $u=\mathrm{e}^{\int\frac{3}{x}\mathrm{d}x}\Big(C+\int 3x^3\mathrm{e}^{-\int\frac{3}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\Big)=x^3(C+3x)$, 故所求通积分为 $y^3=x^3(C+3x)$.

三、解：设 S 是平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限的部分的上侧，则由斯托克斯公式，

$$I_3=-2\iint_S z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S(x+y+z)\mathrm{d}S=\frac{2}{\sqrt{3}}\sigma(S)=-1.$$

四、解：曲面 S 的方程为 $z=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}$, 其中 $(x,y)\in D, D=\{(x,y)|x^2+y^2\le a^2\}$. 设 $S_1: z=\mathrm{e}^a, (x,y)\in D$, 取上侧. $P=4xz, Q=-2yz, R=1-z^2$, 则由高斯公式 $\iint_{S+S_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，所以 $I_4=-\iint_{S_1}(1-\mathrm{e}^{2a})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\mathrm{e}^{2a}-1)\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\mathrm{e}^{2a}-1)\pi a^2$

五、解：$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}$, $f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}=xs(x)$,

$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}$, 两边积分得

$$\begin{aligned}\int_0^x s(x)\mathrm{d}x&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n-2)!!}{(2n-1)!!}x^{2n-1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}\\&=x\Big(4x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(2n)!!}{(2n+1)!!}x^{2n+1}\Big)=x(4x+f'(x))=4x^2+xf'(x),\end{aligned}$$

所以 $s(x)=8x+f'(x)+xf''(x)$, 故 $f''(x)=xs(x)=8x^2+xf'(x)+x^2f''(x)$，

所以 $f(x)$ 满足的微分方程为 $f''(x)-\frac{x}{1-x^2}f'(x)=\frac{8x^2}{1-x^2}$,

这是关于 $f'(x)$ 的一阶线性微分方程，解得

$$\begin{aligned}f'(x)&=\mathrm{e}^{\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x}\Big(C_1+\int\frac{8x^2}{1-x^2}\mathrm{e}^{-\int\frac{x}{1-x^2}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x\Big)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big(C_1+8\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\Big)\\&=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big(C_1+4\arcsin x-4x\sqrt{1-x^2}\Big)\end{aligned}$$

由 $f'(0)=0$ 得 $C_1=0$, 所以 $f'(x)=4\Big(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}-x\Big)$, 两边再积分得 $f(x)=2(\arcsin x)^2-2x^2+C_2$,

由 $f(0)=0$ 得 $C_2=0$, 所以 $f(x)=2(\arcsin x)^2-2x^2$