微积分II（第一层次）期中试卷$_{2017.4.22}$

一、计算下列各题（6分×8 = 48分）

1. 求极限: $I=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{1-x^2-y^2}-1}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}$.

2. 设函数 $u=x^2y+y^2z+z^2x$, 求 u 在点 $(1,1,1)$ 处沿方向 $\overrightarrow{l}=(1,2,1)$ 的方向导数.

3. 已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x-z,y-z)=0$ 确定, 其中 F 连续可微且 $F_1'+F_2'\neq 0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

4. 设 $x=e^u\cos v, y=e^u\sin v, z=uv$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial y}$.

5. 求积分 $I=\iint\limits_D e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由直线 $x=0,y=1$ 和 $x=y$ 所围成的闭区域.

6. 求 $I=\int_C(1+ye^x)\,\mathrm{d}x+(x+e^x)\,\mathrm{d}y$, 其中 C 为沿椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0)$ 由点 $A(a,0)$ 按逆时针方向到 $B(-a,0)$ 的弧线.

7. 求三重积分 $I=\iiint\limits_\Omega(x+y+z)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为区域 $\{(x,y,z)|x^2+y^2\le z\le 2$.

8. 求曲线积分 $I=\int_C xy\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为 $y^2=2x$ 上 $(0,0)$ 到 $(2,2)$ 的一段弧.

二、(8分) 求曲线 $\begin{cases} y^2-2x=1,\\ x^2+2y^2+z^2=6\end{cases}$ 在点 $P_0(0,1,2)$ 处的切线和法平面方程.

三、(10分) 求二元函数 $f(x,y)=3x^2+2\sqrt{2}xy+4y^2$ 在约束条件 $x^2+y^2=1$ 下的最大值和最小值。

四、(10分) 已知 S 是圆柱体

$$C_1=\{(x,y,z):x^2+y^2\le 1,-1\le z\le 1\},\qquad C_2=\{(x,y,z):x^2+z^2\le 1,-1\le y\le 1\},$$

的交集所在区域的表面，求曲面 S 的面积.

五、(12分) 设 $D_t=\{(x,y):t\le xy\le 2t,t\le\dfrac{y}{x}\le 2t,x>0,y>0\}\,(t>0)$.

(1) 对固定的 $t>0$, 求区域 D_t 的面积;

(2) 求常数 α,β, 使得 $\beta=\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{1}{t^2}\left(\iint\limits_{D_t}e^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\alpha t\right)$.

六、(12分) 讨论函数 $u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)\arcsin(xy^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性、可微性及连续可微性，其中 $\varphi(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续可微函数.

微积分II（第一层次）期中试卷$_{2018.5.5}$

一、计算下列各题（5分$\times 12 = 60$分）

1. 求极限: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^2y^3)}{\ln(1+x^4+y^4)}$.

2. 设 $z = f(x^2-y^2, e^{xy})$, 其中 f 具有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

3. 设由方程 $F(xy, \dfrac{z}{y}) = 0$ 确定函数 $z = z(x,y)$, 其中 $F(u,v)$ 一阶连续可微且 $F'_u \neq 0$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

4. 求曲面 $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z} = 6$ 在 $(1,1,1)$ 处的切平面.

5. 求函数 $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2$ 的所有驻点，并判断是否取得极值.

6. 函数 $f(x,y,z) = xyz + \ln(xyz)$ 在点 $(2,1,1)$ 处沿什么方向的方向导数取得最大值？

7. 交换累次积分 $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 的次序.

8. 求二重积分 $I_2 = \displaystyle\iint\limits_D (|x|+|y|)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 1$.

9. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，并设 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = A$, 求 $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$.

10. 求第一类曲线积分 $I_4 = \displaystyle\int_C (x+y)\,\mathrm{d}s$,其中 C 为双纽线 $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$ 的右半分支.

11. 求第二类曲线积分 $I_5 = \displaystyle\int_C (y-z)\,\mathrm{d}x + (z-x)\,\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$, 其中 C 为球面 $x^2+y^2+z^2 = 1$ 与平面 $y = x\tan\beta$ $(0 < \beta < \dfrac{\pi}{2})$ 的交线，从 x 轴正向看去是逆时针方向.

12. 证明：$(2x\cos y + y^2\cos x)\,\mathrm{d}x + (2y\sin x - x^2\sin y)\,\mathrm{d}y$ 在整个 xOy 平面上是某个函数的全微分，并求出它的一个原函数.

二、（8分）讨论函数 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)\ln(1+xy)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性、以及可微性，

三、（8分） 在椭圆抛物面 $z = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$ $(a>0, b>0)$ 及平面 $z = 1$ 所围成的区域内嵌入一个长方体，且有一面在 $z = 1$ 上，求此长方体体积的最大值.

四、（8分）计算积分 $I_6 = \displaystyle\iiint\limits_\Omega (y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2 \leq 2x$.

五、（8分）求曲面 $(2x+3y)^2 + (2y+3z)^2 + (2z+3x)^2 = 1$ 所围立体体积.

六、（8分）设 D 为两条直线 $y = x, y = 4x$ 和两条双曲线 $xy = 1, xy = 4$ 所围成的闭区域，$F(u)$ 是连续可微函数，C 是闭区域 D 的边界，取正向. 记 $f(u) = F'(u)$, 证明：$I_7 = \displaystyle\int_C \dfrac{F(xy)}{y}\mathrm{d}y = \ln 2\int_1^4 f(u)\mathrm{d}u$.

微积分 II (第一层次)期中试卷 2019.4.27

一、计算下列各题（每题6分，共48分）

1. 计算极限 $I_1=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2+y^3}-\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{y^3}+1}{\tan(x^4+y^4)}$.

2. 设函数 $z=f\big(xy,\ yg(x)\big)$, 函数 f 具有二阶连续偏导数, 函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$. 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{(x,y)=(1,1)}$.

3. 求函数 $u=x^2+\mathrm{e}^{yz}+\sin(z-x)$ 在点 $(1,-2,1)$ 处沿 $\vec{l}=(2,1,1)$ 的方向导数.

4. 设 $f(x,y)$ 是连续函数，交换 $I_2=\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x,y)\mathrm{d}x$ 的积分顺序.

5. 计算曲线积分 $I_3=\displaystyle\oint_C(\mathrm{e}^x\sin y+\arcsin\frac{(x-1)^2}{2})\mathrm{d}x+(x+\mathrm{e}^x\cos y+\ln(y^4+2))\mathrm{d}y$, 其中 C 为圆周 $x^2+y^2=2x$, 逆时针方向.

6. 设区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0\}$, 计算二重积分 $I_4=\displaystyle\iint_D\frac{2+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

7. 计算圆柱面 $x^2+y^2=2x$ 被圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 所截下的部分曲面的面积 S.

8. 求 $f(x,y)=4x^2+6xy+y^3$ 在开区域 $D=\{(x,y)|4x^2+9y^2<36\}$ 内的极值.

二、(12分) 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\tan(x+y)}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性、可偏导性及可微性.

三、(10分) 求上半椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1\ (z\ge 0)$ 内接标准长方体的最大体积, 其中 $a,b,c>0$. (注：这里的标准长方体是指各面平行于某坐标平面的长方体)

四、(10分) 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1\}$, 计算三重积分 $I_5=\displaystyle\iiint_\Omega x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

五、(10分) 已知空间曲线 C 为 $\begin{cases}x^2+y^2=z^2\\ (x^2+y^2)^2=x^2-y^2\end{cases}$ $(z\ge 0)$, 求曲线积分 $I_6=\displaystyle\int_C z^3\,\mathrm{d}s$.

六、(10分) 1. 证明: $I_7=\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}$.

2. 证明: $I_8=\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$.

3. 对于上面两个积分值不相等，给出你自己的看法.

微积分II（第一层次）期中试卷参考答案2017.4.22

一、 1. -1； 2. $2\sqrt{6}$; 3. 1; 4. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^{-u}(v\cos v-u\sin v)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{-2u}(\cos(2v)-v\sin(2v)-u\cos(2v))$; 5. $\dfrac{1}{2}(1-e^{-1})$; 6. $\dfrac{\pi ab}{2}-2a$; 7. $\dfrac{16\pi}{3}$; 8. $\dfrac{5\sqrt{5}}{3}+\dfrac{1}{15}$.

二、切线方程为$x=y-1=-(z-2)$, 法平面方程为$x+y-z+1=0$.

三、$f_{max}=f\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3},\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)=5; f_{min}=f\left(\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3},\mp\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=2.$

四、16； 五、(1) $\dfrac{\ln 2}{2}t$; (2) $\alpha=\dfrac{\ln 2}{2},\beta=\dfrac{1}{2}$;

六、当$\varphi(0)=0$时，$u(x,y)$在点$(0,0)$处连续、可偏导、可微、连续可微；当$\varphi(0)\neq 0$时，$u(x,y)$在点$(0,0)$处连续、可偏导、不可微、不连续可微；

微积分II（第一层次）期中试卷参考答案2018.5.5

一、 1. 0； 2. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+ye^{xy}f_2'$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2yf_1'+xe^{xy}f_2'$; 3. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-y^2\dfrac{F_1'}{F_2'}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y}-xy\dfrac{F_1'}{F_2'}$;
4. $x+2y+3z-6=0$; 5. 驻点$(1,1)$和$(-1,-1)$处取最小值，驻点$(0,0)$处不取得极值；
6. 沿$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$方向； 7. $I_1=\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$; 8. $\dfrac{8}{3}$;
9. $\dfrac{A^2}{2}$; 10. $2\sqrt{2}$; 11. $2\pi(\cos\beta-\sin\beta)$; 12. $y^2\sin x+x^2\cos y$.

二、连续、可偏导、不可微. 三、边长为$a,b,\dfrac{1}{2}$, 体积为$\dfrac{1}{2}ab$. 四、$\dfrac{8\pi}{15}$; 五、$\dfrac{4}{105}\pi$.

六、令$u=xy, v=\dfrac{y}{x}$, 则$D'=\{(u,v)|1\le u\le 4, 1\le v\le 4$, $J(u,v)=\dfrac{1}{2v}$, 于是由格林公式

$$\oint_C\frac{F(xy)}{y}\mathrm{d}y=\iint_D F'(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}F'(u)\cdot\frac{1}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_1^4 f(u)\mathrm{d}u\int_1^4\frac{1}{2v}\mathrm{d}v=\ln 2\int_1^4 f(u)\mathrm{d}u.$$

微积分 II (第一层次)期中试卷参考答案 2019.4.27

一、 1. 解：$I_1=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(\mathrm{e}^{x^2}-1)(\mathrm{e}^{y^3}-1)}{\tan(x^4+y^4)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}\cdot y=0$. (无穷小与有界函数的积是无穷小)

2. 解：$g(x)$在$x=1$处可导且取得极值，从而$g'(1)=0$. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+yf_2'g'(x)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'+y(f_{11}''x+f_{12}''g(x))+f_2'g'(x)+y(f_{21}''x+f_{22}''g(x))g'(x),$$

于是 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1).$

3. 解：$u'_x=2x-\cos(z-x), u'_y=ze^{yz}, u'_z=ye^{yz}+\cos(z-x)$, $\vec{l}$的方向余弦为$\Big(\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\Big)$,

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}\Big|_{(1,-2,1)}=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,-2,1)}\cdot\frac{2}{\sqrt{6}}+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,-2,1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(1,-2,1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\big(3-e^{-2}\big)$$

4. 解：$I_2=\int_{-1}^{0}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy+\int_0^1dx\int_0^{1-x}f(x,y)dy.$

5. 解：设$P(x,y)=e^x\sin y+\arcsin\frac{(x-1)^2}{2}, Q(x,y)=x+e^x\cos y+\ln(y^4+2)$, 由格林公式

$$I_3=\iint\limits_D\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)dxdy=\iint\limits_D dxdy=\sigma(D)=\pi.$$

6. 解：注意到D关于$y=0$对称，$\frac{xy}{1+x^2+y^2}$关于y是奇函数，则$\iint\limits_D\frac{xy}{1+x^2+y^2}dxdy=0.$

$$I_4=\iint\limits_D\frac{2}{1+x^2+y^2}dxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{2\rho}{1+\rho^2}d\rho=\pi\ln 2.$$

7. 解：设S_1是所求曲面在第一卦限部分的面积. 由对称性，$S=4S_1$.

将S_1投影到zOx坐标面，投影区域为$D_1=\{(z,x)|0\le z\le\sqrt{2x}, 0\le x\le 2\}$,

$$S=4\iint\limits_{D_1}\sqrt{1+(y'_x)^2+(y'_z)^2}dzdx=4\iint\limits_{D_1}\sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{2x-x^2}}dzdx=4\int_0^2dx\int_0^{\sqrt{2x}}\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dz=16.$$

8. 解：由$\begin{cases}f'_x=8x+6y=0,\\ f'_y=6x+3y^2=0\end{cases}$ 解得两个驻点$(0,0)$和$\big(-\frac{9}{8},\frac{3}{2}\big)$, 这两个驻点都在开区域$D$内.

$f''_{xx}=8,\ f''_{xy}=6,\ f''_{yy}=6y,$

对于$(0,0)$, 有$A=8,\ B=6,\ C=0,\ B^2-AC>0$, 所以$(0,0)$不是极值点.

对于$\big(-\frac{9}{8},\frac{3}{2}\big)$, 有$A=8,\ B=6,\ C=9,\ B^2-AC<0, A>0$, 故$f\big(-\frac{9}{8},\frac{3}{2}\big)=-\frac{27}{16}$是极小值.

二、解: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy\tan(x+y)}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy(x+y)}{x^2+y^2}\quad(x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta)$

$$=\lim_{\rho\to0^+}\rho\cos\theta\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)=0=f(0,0),$$ 所以$f(x,y)$在$(0,0)$处连续；

$f'_x(0,0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{0-0}{x}=0$, 同理$f'_y(0,0)=0$. 故$f(x,y)$在$(0,0)$处可偏导；

$\omega=f(x,y)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y=f(x,y),\quad \rho=\sqrt{x^2+y^2},\quad$ 则

$\lim\limits_{\rho\to0^+}\frac{\omega}{\rho}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy(x+y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\lim\limits_{\rho\to0^+}\frac{\rho^3\cos\theta\sin\theta(\cos\theta+\sin\theta)}{\rho^3}$, 此式极限不存在，故$f(x,y)$在$(0,0)$处不可微.

三、解: 设内接标准长方体在第一卦限的顶点坐标为 (x,y,z), 则长方体的体积 $V=4xyz$, 其中 $x,y,z>0$ 且满足 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

构造拉格朗日函数 $F(x,y,z,\lambda)=4xyz+\lambda\big(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1\big)$,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}\equiv 4yz+\dfrac{2x}{a^2}\lambda=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}\equiv 4zx+\dfrac{2y}{b^2}\lambda=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}\equiv 4xy+\dfrac{2z}{c^2}\lambda=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}\equiv \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0,\end{cases}$$

解得唯一的驻点 $\big(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a,\dfrac{\sqrt{3}}{3}b,\dfrac{\sqrt{3}}{3}c\big)$. 由问题的几何意义知体积的最大值一定存在, 从而最大体积在此驻点取得，$V_{max}=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}abc$.

四、解：令 $u=\dfrac{x}{a},v=\dfrac{y}{b},w=\dfrac{z}{c}$, 则 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=abc\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$, 新的积分区域为

$$\Omega'=\{(u,v,w)\mid u^2+v^2+w^2\le 1\}.\quad 于是\quad I_5=a^3bc\iiint\limits_{\Omega'}u^2\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,$$

注意到 $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega'}u^2\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\iiint\limits_{\Omega'}v^2\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\iiint\limits_{\Omega'}w^2\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$, 则有

$$I_5=\frac{a^3bc}{3}\iiint\limits_{\Omega'}\big(u^2+v^2+w^2\big)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\frac{a^3bc}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{15}a^3bc.$$

方法2: 设 Ω_1 是 Ω 中 $x\ge 0$ 的部分，$D(x):\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1-\dfrac{x^2}{a^2}$, 由对称性，

$$I_5=2\iiint\limits_{\Omega_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^a x^2\mathrm{d}x\iint\limits_{D(x)}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^a\pi bcx^2\big(1-\frac{x^2}{a^2}\big)\mathrm{d}x=\frac{4\pi}{15}a^3bc.$$

五、解: 设 C_1 是 C 在第一卦限的部分，由对称性，有 $I_6=4\displaystyle\int_{C_1}z^3\,ds$. 设 $x=z\cos\theta,\ y=z\sin\theta$, 得到曲线 C_1 的参数方程 $x=\sqrt{\cos(2\theta)}\,\cos\theta, y=\sqrt{\cos(2\theta)}\,\sin\theta, z=\sqrt{\cos(2\theta)}, (0\le\theta\le\dfrac{\pi}{4})$, 计算得 $(x'(\theta))^2+(y'(\theta))^2+(z'(\theta))^2=\dfrac{1+\sin^2(2\theta)}{\cos(2\theta)}$. 于是

$$I_6=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos^3(2\theta)}\cdot\sqrt{\frac{1+\sin^2(2\theta)}{\cos(2\theta)}}\,\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\beta\sqrt{1+\sin^2\beta}\,\mathrm{d}\beta\quad(其中\ \beta=2\theta,\sin\beta=u)$$

$$=2\int_0^1\sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u=\big(u\sqrt{1+u^2}+\ln(u+\sqrt{u^2+1})\big)\Big|_0^1=\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}).$$

六、解：1. 注意到 $\dfrac{x-y}{(x+y)^3}=\dfrac{(x+y)-2y}{(x+y)^3}=\dfrac{1}{(x+y)^2}-\dfrac{2y}{(x+y)^3}$,

则 $\displaystyle\int\frac{x-y}{(x+y)^3}\mathrm{d}x=\int_0^1\Big(\frac{1}{(x+y)^2}-\frac{2y}{(x+y)^3}\Big)\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{x+y}+\frac{y}{(x+y)^2}=\frac{-x}{(x+y)^2}$,

$$I_7=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{-x}{(x+y)^2}\bigg|_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}y=-\int_0^1\frac{1}{(1+y)^2}\,\mathrm{d}y=-\frac{1}{2},$$

上面的式子出现极限，是因为 $\left.\dfrac{-x}{(x+y)^2}\right|_{x=0}$ 在 $y=0$ 无定义(无界).

2. 注意到 $\dfrac{x-y}{(x+y)^3}=\dfrac{(-x-y)+2x}{(x+y)^3}=-\dfrac{1}{(x+y)^2}+\dfrac{2x}{(x+y)^3}$,

则 $\displaystyle\int\frac{x-y}{(x+y)^3}\,\mathrm{d}y=\int\Big(-\frac{1}{(x+y)^2}+\frac{2x}{(x+y)^3}\Big)\mathrm{d}y=\frac{1}{x+y}-\frac{x}{(x+y)^2}=\frac{y}{(x+y)^2}$,

$$I_8=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{y}{(x+y)^2}\bigg|_{y=0}^{y=1}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

上面的式子出现极限，是因为 $\left.\dfrac{y}{(x+y)^2}\right|_{y=0}$ 在 $x=0$ 无定义(无界).