递增进制法

中介数

$a_n\, a_{n-1} \cdots a_2$，其中 a_i 表示 i 的右边比 i 小的数字个数

中介数	排列
0000	12345
0001	21345
0010	13245
0011	23145
0100	12435

中介数转排列

从 a_n 往 a_2 填即可

e.g. 中介数是 67342221，求排列

中介数	排列
$a_9 = 6$	`..9......`
$a_8 = 7$	`8.9......`
$a_7 = 3$	`8.9..7...`
$a_6 = 4$	`8.96.7...`
$a_5 = 2$	`8.96.75..`
$a_4 = 2$	`8.96475..`
$a_3 = 2$	`8396475..`
$a_2 = 1$	`83964752.`

中介数	排列
1 没有中介数	839647521

序号

$$m=\sum_{i=2}^{n} a_i(i-1)!$$

其中 a_i 是中介数

序号转中介数

$$\begin{aligned} m &= a_2+2!a_3+3!a_4+\cdots+(n-1)!a_n \\ &= a_2+2(a_3+3(a_4+\cdots+(n-1)a_n)) \end{aligned}$$

所以我们从 $i=2$ 到 $i=n$，每次对 m 做带余除法，余数为当前的 a_i ，商进行下一次带余除法

e.g. 9 位排列，序号是 279905，求中介数

$$\begin{aligned} 279905 \div 2 &= 139952 \cdots 1 \\ 139952 \div 3 &= 46650 \cdots 2 \\ 46650 \div 4 &= 11662 \cdots 2 \\ 11662 \div 5 &= 2332 \cdots 2 \\ 2332 \div 6 &= 388 \cdots 4 \\ 388 \div 7 &= 55 \cdots 3 \\ 55 \div 8 &= 6 \cdots 7 \\ 6 \div 9 &= 0 \cdots 6 \end{aligned}$$

所以中介数就是 67342221

下一个排列

e.g. 求 839647521 的下一个排列

找到最长的逆序对，839647521，交换 3 与 4 并把 1~3 按顺序填好，得到下一个排列是 849617523

递减进制法

中介数

$a_2\, a_3 \cdots a_n$，其中 a_i 仍表示 i 的右边比 i 小的数字个数

中介数	排列
0004	51234
0010	12435
0134	54132
0200	31245

中介数转排列

跟递增进制法一样，从 a_n 往 a_2 填即可，此处略

序号

$$\begin{aligned} m &= a_n + a_{n-1} \cdot n + a_{n-2} \cdot n(n-1) + \cdots + a_2 \frac{n!}{2} \\ &= n! \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{i!} \end{aligned}$$

序号转中介数

$$\begin{aligned} m &= a_n + a_{n-1} \cdot n + a_{n-2} \cdot n(n-1) + \cdots + a_2 \frac{n!}{2} \\ &= a_n + n(a_{n-1} + (n-1)(a_{n-2} + \cdots + (3a_2)) \end{aligned}$$

类似于递增进制法，但是从 $i = n$ 到 $i = 2$ 进行带余除法

e.g. 9 位排列，序号是 340989，求中介数

$$
\begin{aligned}
340989 \div 9 &= 37887 \cdots 6 \\
37887 \div 8 &= 4735 \cdots 7 \\
4735 \div 7 &= 676 \cdots 3 \\
676 \div 6 &= 112 \cdots 4 \\
112 \div 5 &= 22 \cdots 2 \\
22 \div 4 &= 5 \cdots 2 \\
5 \div 3 &= 1 \cdots 2 \\
1 \div 2 &= 0 \cdots 1
\end{aligned}
$$

所以中介数就是 12224376

下一个排列

设 k 是能往左移的最大的数，将 k 往左移一位， $k+1$ 到 n 按顺序回到最后

e.g.

- $83\textcolor{red}{9}647521$ 的下一个排列是 $8\textcolor{red}{9}3647521$
- $\textcolor{blue}{987}5423\textcolor{red}{6}1$ 的下一个排列是 $542\textcolor{red}{6}31\textcolor{blue}{789}$

字典序法

中介数

$k_1\ k_2 \cdots k_{n-1}$，其中 k_i 表示 p_i 的右边比 p_i 小的数字个数

中介数转排列

从 k_1 往 k_n 填

e.g. 中介数是 72642321，求排列

中介数	剩余数字	前缀
$k_1=7$	$1234567\textcolor{red}{8}9$	8
$k_2=2$	$12\textcolor{red}{3}45679$	83

中介数	剩余数字	前缀
$k_3 = 6$	1245679	839
$k_4 = 4$	124567	8396
$k_5 = 2$	12457	83964
$k_6 = 3$	1257	839647
$k_7 = 2$	125	8396475
$k_8 = 1$	12	83964752
	1	839647521

序号

$$m = \sum_{i=1}^{n-1} k_i(n-i)!$$

序号转中介数

$$\begin{aligned} m &= (n-1)!k_1 + (n-2)!k_2 + \cdots + 2!k_{n-2} + k_{n-1} \\ &= k_{n-1} + 2(k_{n-2} + 3(k_{n-3} + \cdots + (n-1)k_1)) \end{aligned}$$

看式子就知道跟递增进制法基本一致，从 $i = 2$ 到 $i = n$，每次对 m 做带余除法，余数为 k_{n-i+1} ，商进行下一次带余除法

e.g. 序号是 297191

$$\begin{aligned} 297191 \div 2 &= 148595 \cdots 1 \\ 148595 \div 3 &= 49531 \cdots 2 \\ 49531 \div 4 &= 12382 \cdots 3 \\ 12382 \div 5 &= 2476 \cdots 2 \\ 2476 \div 6 &= 412 \cdots 4 \\ 412 \div 7 &= 58 \cdots 6 \\ 58 \div 8 &= 7 \cdots 2 \\ 7 \div 9 &= 0 \cdots 7 \end{aligned}$$

所以中介数是 72642321

下一个排列

从后往前找到第一个 $a_i < a_{i+1}$ 的位置，在 $[i+1:n]$ 的后缀中从后往前找到第一个比 a_i 大的位置 j，交换 a_i 与 a_j 并把交换后的后缀按顺序写

e.g. 求 839647521 的下一个排列，后缀中第一个比 4 大的是 5，交换 4 与 5，按顺序写下 1247，即下一个排列是 839651247

邻位交换法

这个有点神秘，其类似于递减进制法，但是 S 型移动数字

中介数

我们令**奇排列**指逆序对数为奇数的排列，**偶排列**为逆序对数为偶数的排列。

我们给数字 k 上定义一个箭头，其方向由 $[1, k-1]$ 的排列决定，偶左奇右，偶$\leftarrow$ 奇$\rightarrow$

规定 1 的箭头指向左

中介数 $b_2\, b_3 \cdots b_n$，其中 b_i 表示 i 的箭头**反方向**比 i 小的数字个数

序号

类似递减进制法

$$
\begin{aligned}
m &= b_n + b_{n-1}\cdot n + b_{n-2}\cdot n(n-1) + \cdots + b_2\frac{n!}{2} \\
&= n!\sum_{i=2}^{n}\frac{b_i}{i!}
\end{aligned}
$$

序号转中介数

就跟递减进制法非常类似啦，见下一小节

中介数转排列

难点在于，我们不知道当前数的箭头，所以不知道应该从哪边数格子填。

我们先根据中介数计算出序号，然后进行**序号转中介数**的操作，根据每次带余除法的**商的奇偶性**，得出当前数的箭头方向。

以 9 位排列，中介数 10121372 为例。

$$m = 1 * \frac{9!}{2!} + 0 * \frac{9!}{3!} + 1 * \frac{9!}{4!} + 2 * \frac{9!}{5!} + 1 * \frac{9!}{6!} + 3 * \frac{9!}{7!} + 7 * \frac{9!}{8!} + 2 * \frac{9!}{9!} \\ = 203393$$

$$\begin{aligned} 203393 \div 9 &= 22599 \cdots 2 \\ 22599 \div 8 &= 2824 \cdots 7 \\ 2824 \div 7 &= 403 \cdots 3 \\ 403 \div 6 &= 67 \cdots 1 \\ 67 \div 5 &= 13 \cdots 2 \\ 13 \div 4 &= 3 \cdots 1 \\ 3 \div 3 &= 1 \cdots 0 \\ 1 \div 2 &= 0 \cdots 1 \end{aligned}$$

每一次带余除法中，余数对应的就是中介数，商是**奇数**则$\rightarrow$，是**偶数**则$\leftarrow$。

中介数	箭头方向	排列
$b_9 = 2$	$\rightarrow$	`..9......`
$b_8 = 7$	$\leftarrow$	`8.9......`
$b_7 = 3$	$\rightarrow$	`8.9..7...`
$b_6 = 1$	$\rightarrow$	`8.96.7...`
$b_5 = 2$	$\rightarrow$	`8.96.75..`
$b_4 = 1$	$\rightarrow$	`8.96475..`
$b_3 = 0$	$\rightarrow$	`8396475..`
$b_2 = 1$	$\leftarrow$	`83964752.`

中介数	箭头方向	排列
1 没有中介数	不关心	839647521

下一个排列

首先，我们在确定当前排列每个数的箭头方向时，只需要知道逆序对的奇偶性即可，设已经算完了 $[1, i-1]$ 的排列，对于当前数 i ，如果其使排列增加了奇数个逆序对，那我们就在这个数上标一个点，$\dot{i}$

判断是奇排列还是偶排列时，根据点的奇偶性判断即可。

以排列 839647521 为例。

排列	逆序增加数	奇偶性
1		偶
21	奇	奇
321	偶	奇
3421	偶	奇
34521	偶	奇
364521	偶	奇
3647521	奇	偶
83647521	奇	奇
839647521	偶	奇

所以 $\dot{8}3964\dot{7}5\dot{2}1$， $\overleftarrow{8}\ \overrightarrow{3}\ \overrightarrow{9}\ \overrightarrow{6}\ \overrightarrow{4}\ \overrightarrow{7}\ \overrightarrow{5}\ \overleftarrow{2}\ \overleftarrow{1}$ ，最大的能按箭头方向移动的数是 9，所以下一个排列是 836947521

例题

序号 202487，9 位排列，求其在四种排列生成算法下的排列，中介数和下一个排列

	递增进制法	递减进制法	字典序法	邻位交换法
中介数	50111321	10115525	50111321	10115525
排列	432956718	672914853	613459872	635 $\overleftarrow{9}$ 42871
下一个排列	512936748	679214853	613472589	63 $\overleftarrow{9}$ 542871

递增进制法、字典序法的中介数计算过程如下:

$$
\begin{aligned}
202487 \div 2 &= 101243 \cdots 1 \\
101243 \div 3 &= 33747 \cdots 2 \\
33747 \div 4 &= 8436 \cdots 3 \\
8436 \div 5 &= 1687 \cdots 1 \\
1687 \div 6 &= 281 \cdots 1 \\
281 \div 7 &= 40 \cdots 1 \\
40 \div 8 &= 5 \cdots 0 \\
5 \div 9 &= 0 \cdots 5
\end{aligned}
$$

递减进制法、邻位交换法的中介数计算过程如下:

$$
\begin{aligned}
202487 \div 9 &= 22498 \cdots 5 \\
22498 \div 8 &= 2812 \cdots 2 \\
2812 \div 7 &= 401 \cdots 5 \\
401 \div 6 &= 66 \cdots 5 \\
66 \div 5 &= 13 \cdots 1 \\
13 \div 4 &= 3 \cdots 1 \\
3 \div 3 &= 1 \cdots 0 \\
1 \div 2 &= 0 \cdots 1
\end{aligned}
$$