

# ACM 模板

黄佳瑞，钱智煊，林乐逍

2025 年 8 月 30 日

## 目录

<b>1 做题指导</b>	<b>3</b>	<b>7 数论</b>	<b>13</b>
1.1 上机前你应该注意什么	3	7.1 中国剩余定理	13
1.2 机上你应该注意什么	3	7.2 扩展中国剩余定理	13
1.3 交题前你应该注意什么	3	7.3 BSGS	13
1.4 如果你的代码挂了	3	7.4 扩展 BSGS	13
1.5 另外一些注意事项	3	7.5 Lucas 定理	13
		7.6 扩展 Lucas 定理	13
		7.7 杜教筛	13
		7.8 Min-25 筛	14
<b>2 图论</b>	<b>4</b>	<b>8 计算几何</b>	<b>14</b>
2.1 Tarjan 边双、点双（圆方树）	4	8.1 声明与宏	14
2.2 O(1) LCA	4	8.2 点与向量	14
2.3 2-SAT	4	8.3 线	14
2.4 Dinic 网络流、费用流	4	8.4 圆	15
2.4.1 无源汇有上下界可行流	5	8.5 凸包	15
2.4.2 有源汇有上下界最大流	6	8.6 三角形	16
2.4.3 网络流总结	6	8.7 多边形	16
2.5 欧拉路径	7	8.8 半平面交	17
<b>3 数据结构</b>	<b>7</b>	<b>9 杂项</b>	<b>17</b>
3.1 平衡树	7	9.1 生成树计数	17
3.1.1 无旋 Treap	7	9.2 类欧几里得	17
3.1.2 平衡树合并	7		
3.1.3 Splay	7	<b>10 其它工具</b>	<b>18</b>
3.2 动态树	7	10.1 编译命令	18
3.3 珂朵莉树	7	10.2 快读	18
3.4 李超线段树	7	10.3 Python Hints	18
3.4.1 修改与询问	7	10.4 对拍器	18
3.4.2 合并	7	10.5 常数表	18
3.5 二维树状数组	7	10.6 试机赛	18
3.6 虚树	7	10.7 阴间错误集锦	18
3.7 左偏树	7		
3.8 吉司机线段树	8		
3.9 树分治	8		
<b>4 字符串</b>	<b>8</b>		
4.1 Hash 类	8		
4.2 后缀数组 (llx)	8		
4.3 后缀数组与后缀树 (旧)	8		
4.4 AC 自动机	9		
4.5 回文自动机	9		
4.6 Manacher 算法	9		
4.7 KMP 算法与 border 理论	9		
4.8 Z 函数	9		
4.9 后缀自动机	9		
4.10 后缀自动机 (map 版)	10		
4.11 最小表示法	10		
<b>5 线性代数</b>	<b>10</b>		
5.1 高斯消元	10		
5.2 线性基	10		
5.3 行列式	10		
5.4 矩阵树定理	11		
5.5 单纯形法	11		
5.6 全幺模矩阵	11		
5.7 对偶原理	11		
<b>6 多项式</b>	<b>11</b>		
6.1 FFT	11		
6.2 NTT	12		
6.3 集合幂级数	12		
6.3.1 并卷积、交卷积与子集卷积	12		
6.3.2 对称差卷积	12		
6.4 多项式全家桶	12		

## 1 做题指导

### 1.1 上机前你应该注意什么

1. 预估你需要多少机时，以及写出来以后预计要调试多久，并在纸上记下。
2. 先想好再上机，不要一边写一边想。
3. 如果有好写的题，务必先写好写的。
4. 把题目交给擅长的人来写，而不是空闲的人。

### 1.2 机上你应该注意什么

1. 如果你遇到了问题（做法假了、需要分讨等），先下机并通知队友。不要占着机时想。
2. 建议使用整块时间写题，尽量不要断断续续的写。

### 1.3 交题前你应该注意什么

1. `long long` 开了没有。
2. 数组开够没有。
3. 多测清了没有。
4. 边界数据 (`corner case`) 考虑了没有
5. 调试输出删了没有

编译命令：

```
1 g++ X.cpp -Wall -O2 -fsanitize=undefined -fsanitize=address X
2 # -fsanitize=undefined: 检测未定义行为
3 # -fsanitize=address: 检测内存溢出
```

### 1.4 如果你的代码挂了

按照优先级列出：

1. 先 P 再下机。（P 还没有送来就分屏调。）
2. 看 `long long` 开了没有，数组开够没有，多测清了没有。
3. 检查 `typo`，你有没有打错一些难蚌的地方。
4. 看看你题读错没有。
5. 检查你的代码逻辑，即你的代码实现是否与做法一致。同时让另一个人重新读题。
6. 怀疑做法假了。拉一个人一起看代码。

### 1.5 另外一些注意事项

- 千万注意节奏，不要让任何一个人在一道题上卡得太久。必要的时候可以换题。
- 如果你想要写题，请想好再上机。诸如分类讨论一类的题目，更要想好再上。
- 后期的时候可以讨论，没必要一个人挂题。

## 2 图论

### 2.1 Tarjan 边双、点双（圆方树）

记录上一个访问的边时要记录边的编号，不能记录上一个过来的节点（因为会有重边）!!!

（如果选择在加边的时候特判，注意编号问题：用输入顺序来对应数组中位置的时候，重边跳过，但是需要  $\text{tot} += 2$ 。）

圆方树示意图：

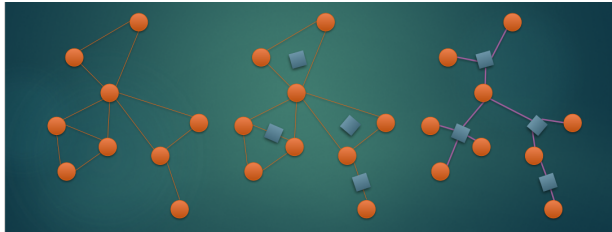


图 1: 圆方树示意图

```
1 /** 缩点 ***/
2 // 找出强联通分量后，对每一条边查看是否在同一个 scc 中，如果不在就加
   ↳ 边
3 void tarjan(int x)
4 {
5     dfn[x]=low[x]=++Time, sta[++tp]=x, ins[x]=true;
6     for(int i=hea[x]; i; i=nex[i])
7     {
8         if(!dfn[ver[i]])
9             ↳ tarjan(ver[i]), low[x]=min(low[x], low[ver[i]]);
10        else if(ins[ver[i]]) low[x]=min(low[x], dfn[ver[i]]);
11    }
12    if(dfn[x]==low[x])
13    {
14        scc++;
15        do { x=sta[tp], tp--, ins[x]=false, bel[x]=scc; }
16        while (dfn[x]!=low[x]);
17    }
18 /** 割点 ***/
19 void tarjan(int x, int Last)
20 // Last 是边的编号，tot 初始值为 1，i 与 i1
21 {
22     dfn[x]=low[x]=++Time;
23     for(int i=hea[x]; i; i=nex[i])
24     {
25         if(!dfn[ver[i]])
26         {
27             tarjan(ver[i], i), low[x]=min(low[x], low[ver[i]]);
28             if(low[ver[i]]>dfn[x]) edg[i]=edg[i1]=true;
29         }
30         else if(dfn[ver[i]]<dfn[x])
31             i!=(Last1)?low[x]=min(low[x], dfn[ver[i]]):;
32     }
33 /** 圆方树、点双 ***/
34 // G 表示原图，T 是新建的圆方树
35 // 一条边也是点双
36 // 圆方树只存在圆 - 方边!!!
37 int Time, dfn[N], low[N], sta[N], siz[N];
38 vector<int> G[N], T[N<<1]; // 不要忘记给数组开两倍
39 void tarjan(int u)
40 {
41     dfn[u]=low[u]=++Time, sta[++tp]=u;
42     for(int v:G[u])
43     {
44         if(!dfn[v])
45         {
46             tarjan(v), low[u]=min(low[u], low[v]);
47             // 这里对 low[v]>=dfn[u] 进行计数，根节点需要 2 个，其
48             ↳ 他节点需要 1 个，那么就是割点。
49             if(low[v]==dfn[u])
50             {
51                 int hav=0; ++All;
52                 for(int x=0; x!=v; tp--)
53                     ↳ x=sta[tp], T[x].pb(All), T[All].pb(x), hav++;
54                 T[u].pb(All), T[All].pb(u);
55                 siz[All]++;
56             }
57             else low[u]=min(low[u], dfn[v]);
58         }
59     }
60 }
```

### 2.2 O(1) LCA

按照顺序遍历子树，并查集更新。

```
1 int qhea[Maxq], qver[Maxq], qnex[Maxq], qid[Maxq];
2 inline void addq(int x, int y, int d)
3 {
4     ↳ qver[++qtot]=y, qnex[qtot]=qhea[x], qhea[x]=qtot, qid[qtot]=d;
5     ↳ }
6 void dfs(int x, int Lastn node)
7 {
8     vis[x]=true;
9     for(int i=hea[x]; i; i=nex[i])
10        if(ver[i]!=Lastn node)
11            dfs(ver[i], x), fa[ver[i]]=x;
12    for(int i=qhea[x]; i; i=qnex[i])
13        if(vis[qver[i]])
14            ans[qid[i]]=Find(qver[i]);
15 }
16 for(int i=1; i<=n; i++) fa[i]=i;
17 for(int i=1, x, y; i<=n; i++) x=rd(), y=rd(), add(x, y), add(y, x);
18 for(int i=1, x, y; i<=m; i++) x=rd(), y=rd(), addq(x, y, i), addq(y, x, i);
19 dfs(rt, rt);
20 for(int i=1; i<=m; i++) printf("%d\n", ans[i]);
```

### 2.3 2-SAT

2-sat 至多支持对两个变量之间关系进行限制。

$n$  个点中恰好只有一个点为 'true' 怎么办？这是  $K - \text{sat}$ !! 至多有 1 个是可行的（前缀优化建图），但“恰好有 1 个”是不行的。

构造方案：Tarjan 对强联通分量的拓扑排序时逆序的，序号小的不可能到达序号大的。如果  $\text{bel}_i < \text{bel}_{i+n}$ ，则  $i$  所在的强联通分量不会推出  $i+n$ ，因此不产生矛盾，选择  $i$ ；反之，则选择  $i+n$ 。

**DFS 求解 2-sat** 有些题目要求某些条件优先满足，比如第  $i$  位优先选择 0/1 之类，可以采用 DFS 的方式求解。相当于二分图染色，如果染过了就不染，如果自己的反面染过了就返回失败。这样最坏复杂度是  $O(nm)$  的，但是能够解决优先的问题。

### 2.4 Dinic 网络流、费用流

```
1 /** Dinic 最大流 ***/
2 struct Dinic
3 {
4     #define Maxn 点数
5     #define Maxm 边数
6     int tot=1;
7     int hea[Maxn], nex[Maxm<<1], ver[Maxm<<1];
8     int tmphea[Maxn], dep[Maxn];
9     ll edg[Maxm<<1], sum;
10    inline void init()
11    { tot=1, memset(hea, 0, sizeof(hea)); }
12    inline void addedge(int x, int y, ll d)
13    {
14        ver[++tot]=y, nex[tot]=hea[x], hea[x]=tot, edg[tot]=d;
15        ver[++tot]=x, nex[tot]=hea[y], hea[y]=tot, edg[tot]=0;
16    }
17    inline bool bfs(int s, int t)
18    {
19        memset(dep, 0, sizeof(dep)), dep[s]=1;
20        memcpy(tmphea, hea, sizeof(hea));
21        queue<int> q; q.push(s);
22        while(!q.empty())
23        {
24            int cur=q.front(); q.pop();
25            if(cur==t) return true;
26            for(int i=hea[cur]; i; i=nex[i]) if(edg[i]>0)
27                ↳ !dep[ver[i]]) dep[ver[i]]=dep[cur]+1, q.push(ver[i]);
28        }
29        return false;
30    }
31    ll dfs(int x, ll flow, int t)
32    {
33        if(x==t || !flow) return flow;
34        ll rest=flow, tmp;
35        for(int i=tmphea[x]; i; i=nex[i])
36        {
37            tmphea[x]=i;
```

```

38     if(dep[ver[i]]==dep[x]+1  edg[i]>0)
39     {
40         if(!(tmp = dfs(ver[i],min(edg[i],rest),t)))
41             ↪ dep[ver[i]]=0;
42         edg[i]-=tmp,edg[i1]+ = tmp,rest- = tmp;
43     }
44     return flow-rest;
45 }
46 inline ll solve(int s,int t)
47 {
48     sum=0;
49     while(bfs(s,t)) sum+=dfs(s,inf,t);
50     return sum;
51 }
52 #undef Maxn
53 #undef Maxm
54 }G;

```

```

1  /** Dinic 最小费最大流 **/
2  struct Diniccost
3  {
4      #define Maxn 点数
5      #define Maxm 边数
6      int tot=1;
7      int tmphea[Maxn],hea[Maxn],nex[Maxm<<1],ver[Maxm<<1];
8      ll sumflow,sumcost,edg[Maxm<<1],Cost[Maxm<<1];
9      bool inq[Maxn];
10     ll dis[Maxn];
11     inline void init() { tot=1,memset(hea,0,sizeof(hea)); }
12     inline void addedge(intx,inty,lld,llc)
13     {
14         ↪ ver[++tot]=y,nex[tot]=hea[x],hea[x]=tot,edg[tot]=d,Cost[tot]=c;
15         ↪ ver[++tot]=x,nex[tot]=hea[y],hea[y]=tot,edg[tot]=0,Cost[tot]=-c;
16     }
17     inline bool spfa(int s,int t)
18     {
19         memset(dis,0x3f,sizeof(dis)),dis[s]=0;
20         memcpy(tmphea,hea,sizeof(hea));
21         queue<int> q; q.push(s);
22         while(!q.empty())
23         {
24             int cur=q.front(); q.pop(),inq[cur]=false;
25             for(int i=hea[cur];i;i=nex[i])
26                 if(edg[i] dis[ver[i]]>dis[cur]+Cost[i])
27                 {
28                     dis[ver[i]]=dis[cur]+Cost[i];
29                     if(!inq[ver[i]])
30                         ↪ q.push(ver[i]),inq[ver[i]]=true;
31                 }
32         }
33         return dis[t]!=infll;
34     }
35     ll dfs(int x,ll flow,int t)
36     {
37         if(x==t || !flow) return flow;
38         ll rest=flow,tmp;
39         inq[x]=true;
40         for(int i=tmphea[x];i rest;i=nex[i])
41         {
42             tmphea[x]=i;
43             if(!inq[ver[i]] edg[i]
44                 ↪ dis[ver[i]]==dis[x]+Cost[i])
45             {
46                 if(!(tmp = dfs(ver[i],min(edg[i],rest),t)))
47                     dis[ver[i]]=infll;
48                 sumcost+=Cost[i]*tmp,edg[i]-=tmp,edg[i1]+ =
49                     tmp,rest- = tmp;
50             }
51         }
52         inq[x]=false;
53         return flow-rest;
54     }
55     inline pll solve(int s,int t)
56     {
57         sumflow=sumcost=0;
58         while(spfa(s,t)) sumflow+=dfs(s,infll,t);
59         return pll(sumflow,sumcost);
60     }
61 #undef Maxn
62 #undef Maxm
63 }G;

```

```

1  #include <bits/stdc++.h>
2  using namespace std;
3  #define infll 0x3f3f3f3f3f3f3f3f
4  #define inf 0x3f3f3f3f
5  #define pb pushback
6  #define eb emplaceback
7  #define pa pair<int, int>
8  #define fi first
9  #define se second
10 typedef long long ll;
11 inline int rd() {
12     int x = 0;
13     char ch, t = 0;
14     while (!isdigit(ch = getchar())) t |= ch == '-';
15     while (isdigit(ch)) x = x * 10 + (ch - '0'), ch = getchar();
16     return t ? -x : x;
17 }
18 struct Dini {
19     #define Maxn 505
20     #define Maxm 20005
21     int tot = 1;
22     int hea[Maxn], tmphea[Maxn], dep[Maxn];
23     int nex[Maxm << 1], ver[Maxm << 1], num[Maxm << 1];
24     ll edg[Maxm << 1];
25     inline void addedge(int x, int y, int d, int n){
26         ver[++tot] = y, nex[tot] = hea[x], hea[x] = tot,
27         ↪ edg[tot] = d, num[tot] = -1;
28         ver[++tot] = x, nex[tot] = hea[y], hea[y] = tot,
29         ↪ edg[tot] = 0, num[tot] = n;
30     }
31     inline bool bfs(int s, int t) {
32         memcpy(tmphea, hea, sizeof(hea));
33         memset(dep, 0, sizeof(dep)), dep[s] = 1;
34         queue<int> q;
35         q.push(s);
36         while (!q.empty()) {
37             int cur = q.front();
38             q.pop();
39             if (cur == t) return true;
40             for (int i = hea[cur]; i; i = nex[i])
41                 if (edg[i] > 0 !dep[ver[i]])
42                     dep[ver[i]] = dep[cur] + 1, q.push(ver[i]);
43         }
44         return false;
45     }
46     ll dfs(int x, int t, ll flow) {
47         if (!flow || x == t) return flow;
48         ll rest = flow, tmp;
49         for (int i = tmphea[x]; i rest; i = nex[i]) {
50             tmphea[x] = i;
51             if (dep[ver[i]] == dep[x] + 1 edg[i] > 0) {
52                 if (!(tmp = dfs(ver[i], t, min(rest, edg[i]))))
53                     ↪ dep[ver[i]] = 0;
54                 edg[i] -= tmp, edg[i1] += tmp, rest -= tmp;
55             }
56         }
57         return flow - rest;
58     }
59     inline ll solve(int s, int t) {
60         ll sum = 0;
61         while (bfs(s, t))
62             sum += dfs(s, t, infll);
63         return sum;
64     }
65 #undef Maxn
66 #undef Maxm
67 } G;
68 #define Maxn 205
69 #define Maxm 10205
70 int n, m, ss, tt;
71 int ans[Maxm];
72 ll needin, needout;
73 ll Ind[Maxn], Outd[Maxn];
74 int main() {
75     n = rd(), m = rd(), ss = n + 1, tt = n + 2;
76     for (int i = 1, x, y, Inf, Sup; i <= m; i++) {
77         x = rd(), y = rd(), Inf = rd(), Sup = rd();
78         G.addedge(x, y, Sup - Inf, i);
79         Outd[x] += Inf;
80         Ind[y] += Inf;
81         ans[i] = Inf;
82     }
83     for (int i = 1; i <= n; i++) {
84         if (Ind[i] > Outd[i])
85             G.addedge(ss, i, Ind[i] - Outd[i], -1), needin +=
86                 ↪ Ind[i] - Outd[i];
87         if (Ind[i] < Outd[i])
88             G.addedge(i, tt, Outd[i] - Ind[i], -1), needout +=
89                 ↪ Outd[i] - Ind[i];
90     }

```

### 2.4.1 无源汇有上下界可行流

给定无源汇流量网络  $G$ ，询问是否存在一种标定每条边流量的方式，使得每条边流量满足上下界同时每一个点流量平衡。

```

85     }
86     ll tmp = G.solve(ss, tt);
87     if (needin != needout || needin != tmp) printf("NO\n");
88     else {
89         for (int i = 2; i <= G.tot; i++)
90             if (G.num[i] != -1) ans[G.num[i]] += G.edg[i];
91         printf("YES\n");
92         for (int i = 1; i <= m; i++) printf("%d\n", ans[i]);
93     }
94     return 0;
95 }

```

### 2.4.2 有源汇有上下界最大流

给定有源汇流量网络  $G$ ，询问是否存在一种标定每条边流量的方式，使得每条边流量满足上下界同时除了源点和汇点每一个点流量平衡。

假设源点为  $S$ ，汇点为  $T$ ，则我们可以加入一条  $T$  到  $S$  的上界为  $\infty$  0

若有解，则  $S$  到  $T$  的可行流量等于  $T$  到  $S$  的附加边的流量。

```

1 #include <bits/stdc++.h>
2 using namespace std;
3 #define infll 0x3f3f3f3f3f3f3f3f
4 #define inf 0x3f3f3f3f
5 #define pb push_back
6 #define eb emplace_back
7 #define pa pair<int, int>
8 #define fi first
9 #define se second
10 typedef long long ll;
11 inline int rd() {
12     int x = 0;
13     char ch, t = 0;
14     while (!isdigit(ch = getchar())) t |= ch == '-';
15     while (isdigit(ch)) x = x * 10 + (ch - '0'), ch = getchar();
16     return t ? -x : x;
17 }
18 struct Dinic {
19     #define Maxn 505
20     #define Maxm 20005
21     int tot = 1;
22     int hea[Maxn], tmphea[Maxn], dep[Maxn];
23     int nex[Maxm << 1], ver[Maxm << 1], num[Maxm << 1];
24     ll edg[Maxm << 1];
25     inline int addedge(int x, int y, ll d, int n) {
26         ver[++tot] = y, nex[tot] = hea[x], hea[x] = tot,
27         edg[tot] = d, num[tot] = -1;
28         ver[++tot] = x, nex[tot] = hea[y], hea[y] = tot,
29         edg[tot] = 0, num[tot] = n;
30         return tot;
31     }
32     inline bool bfs(int s, int t) {
33         memcpy(tmphea, hea, sizeof(hea));
34         memset(dep, 0, sizeof(dep)), dep[s] = 1;
35         queue<int> q;
36         q.push(s);
37         while (!q.empty()) {
38             int cur = q.front();
39             q.pop();
40             if (cur == t) return true;
41             for (int i = hea[cur]; i; i = nex[i])
42                 if (edg[i] > 0 && !dep[ver[i]])
43                     dep[ver[i]] = dep[cur] + 1, q.push(ver[i]);
44         }
45         return false;
46     }
47     ll dfs(int x, int t, ll flow) {
48         if (!flow || x == t) return flow;
49         ll rest = flow, tmp;
50         for (int i = tmphea[x]; i; i = nex[i]) {
51             tmphea[x] = i;
52             if (dep[ver[i]] == dep[x] + 1 && edg[i] > 0) {
53                 if (!(tmp = dfs(ver[i], t, min(rest, edg[i]))))
54                     dep[ver[i]] = 0;
55                 edg[i] -= tmp, edg[i ^ 1] += tmp, rest -= tmp;
56             }
57         }
58         return flow - rest;
59     }
60     inline ll solve(int s, int t) {
61         ll sum = 0;
62         while (bfs(s, t))
63             sum += dfs(s, t, infll);
64         return sum;
65     }
66 } G;

```

```

67 #define Maxn 505
68 #define Maxm 20005
69 int n, m, ss, tt, s, t;
70 int ans[Maxm];
71 ll needin, needout;
72 ll Ind[Maxn], Outd[Maxn];
73 int main() {
74     n = rd(), m = rd(), s = rd(), t = rd(), ss = n + 1, tt = n +
75     2;
76     for (int i = 1, x, y, Inf, Sup; i <= m; i++) {
77         x = rd(), y = rd(), Inf = rd(), Sup = rd();
78         G.addedge(x, y, Sup - Inf, i);
79         Outd[x] += Inf;
80         Ind[y] += Inf;
81         ans[i] = Inf;
82     }
83     for (int i = 1; i <= n; i++) {
84         if (Ind[i] > Outd[i])
85             G.addedge(ss, i, Ind[i] - Outd[i], -1), needin +=
86             Ind[i] - Outd[i];
87         if (Ind[i] < Outd[i])
88             G.addedge(i, tt, Outd[i] - Ind[i], -1), needout +=
89             Outd[i] - Ind[i];
90     }
91     G.addedge(t, s, infll, -1);
92     ll tmp = G.solve(ss, tt);
93     if (needin != needout || needin != tmp) printf("please go
94     home to sleep\n");
95     else {
96         tmp = G.edg[G.tot];
97         G.edg[G.tot] = G.edg[G.tot - 1] = 0;
98         tmp += G.solve(s, t);
99         printf("%lld\n", tmp);
100     }
101     return 0;
102 }

```

### 2.4.3 网络流总结

#### 最小割集，最小割必须边以及可行边

**最小割集** 从  $S$  出发，在残余网络中 BFS 所有权值非 0 的边（包括反向边），得到点集  $\{S\}$ ，另一集为  $\{V\} - \{S\}$ 。

**最小割集必须点** 残余网络中  $S$  直接连向的点必在  $S$  的割集中，直接连向  $T$  的点必在  $T$  的割集中；若这些点的并集为全集，则最小割方案唯一。

**最小割可行边** 在残余网络中求强联通分量，将强联通分量缩点后，剩余的边即为最小割可行边，同时这些边也必然满流。

**最小割必须边** 在残余网络中求强联通分量，若  $S$  出发可到  $u$ ， $T$  出发可到  $v$ ，等价于  $scc_S = scc_u$  且  $scc_T = scc_v$ ，则该边为必须边。

#### 常见问题

**最大权闭合子图** 点权，限制条件形如：选择  $A$  则必须选择  $B$ ，选择  $B$  则必须选择  $C, D$ 。建图方式： $B$  向  $A$  连边， $CD$  向  $B$  连边。求解： $S$  向正权点连边，负权点向  $T$  连边，其余边容量  $\infty$ ，求最小割，答案为  $S$  所在最小割集。

**二次布尔型（文理分科）**  $n$  个点分为两类， $i$  号点有  $l_i$  或  $r_i$  的代价， $i, j$  同属一侧分别获得  $l_{ij}$  或  $r_{ij}$  的代价，问最小代价。 $L \rightarrow i : (l_i + 1/2 \sum_j l_{ij})$ ， $i \rightarrow R : (r_i + 1/2 \sum_j r_{ij})$ ， $i \leftrightarrow j : 1/2(l_{ij} + r_{ij})$ 。实现时边权乘 2 为整数，求解后答案除 2 为整数。图拆点可以看作二分图。如果是二元限制是分类不同时有一个代价  $d_{ij}$ ，建图可以简化为  $L \rightarrow i : l_i$ ， $i \rightarrow R : r_i$ ， $i \leftrightarrow j : d_{ij}$ 。经典例子：xor 最小值，按位拆开建图。

**混合图欧拉回路** 把无向边随便定向，计算每个点的入度和出度，如果有某个点出入度之差  $\deg_i = in_i - out_i$  为奇数，肯定不存在欧拉回路。对于  $\deg_i > 0$  的点，连接边  $(i, T, \deg_i/2)$ ；对于  $\deg_i < 0$  的点，连接边  $(S, i, -\deg_i/2)$ 。最后检查是否满流即可。

**二物流** 水源  $S_1$ ，水汇  $T_1$ ，油源  $S_2$ ，油汇  $T_2$ ，每根管道流量共用。求流量和最大。建超级源  $SS_1$  汇  $TT_1$ ，连边  $SS_1 \rightarrow S_1, SS_1 \rightarrow S_2, T_1 \rightarrow TT_1, T_2 \rightarrow TT_1$ ，设最大流为  $x_1$ 。建超级源  $SS_2$  汇  $TT_2$ ，连边  $SS_2 \rightarrow S_1, SS_2 \rightarrow S_2, T_1 \rightarrow TT_2, T_2 \rightarrow TT_2$ ，设最大流为  $x_2$ 。则最大流中水流量  $\frac{x_1+x_2}{2}$ ，油流量  $\frac{x_1-x_2}{2}$ 。

**无源汇有上下界可行流** 每条边  $(u, v)$  有一个上界容量  $C_{u,v}$  和下界容量  $B_{u,v}$ ，我们让下界变为 0，上界变为  $C_{u,v} - B_{u,v}$ ，但这样做流量不守恒。建立超级源点  $SS$  和超级汇点  $TT$ ，用  $du_i$  来记录每个节点的流量情况， $du_i = \sum B_{j,i} - \sum B_{i,j}$ ，添加一些附加弧。当  $du_i > 0$  时，连边  $(SS, i, du_i)$ ；当  $du_i < 0$  时，连边  $(i, TT, -du_i)$ 。最后对  $(SS, TT)$  求一次最大流即可，当所有附加边全部满流时（即  $\maxflow == du_i > 0$ ）时有可行解。

**有源汇有上下界最大可行流** 建立超级源点  $SS$  和超级汇点  $TT$ ，首先判断是否存在可行流，用无源汇有上下界可行流的方法判断。增设一条从  $T$  到  $S$  没有下界容量为无穷的边，那么原图就变成了一个无源汇有上下界可行流问题。同样地建图后，对  $(SS, TT)$  进行一次最大流，判断是否有可行解。如果有可行解，删除超级源点  $SS$  和超级汇点  $TT$ ，并删去  $T$  到  $S$  的这条边，再对  $(S, T)$  进行一次最大流，此时得到的  $\maxflow$  即为有源汇有上下界最大可行流。

**有源汇有上下界最小可行流** 建立超级源点  $SS$  和超级汇点  $TT$ ，和无源汇有上下界可行流一样新增一些边，然后从  $SS$  到  $TT$  跑最大流。接着加上边  $(T, S, \infty)$ ，再从  $SS$  到  $TT$  跑一遍最大流。如果所有新增边都是满的，则存在可行流，此时  $T$  到  $S$  这条边的流量即为最小可行流。

**有上下界费用流** 如果求无源汇有上下界最小费用可行流或有源汇有上下界最小费用最大可行流，用 1.6.3.1/1.6.3.2 的构图方法，给边加上费用即可。求有源汇有上下界最小费用最小可行流，要先用 1.6.3.3 的方法建图，先求出一个保证必要边满流情况下的最小费用。如果费用全部非负，那么这时的费用就是答案。如果费用有负数，那么流多了可能更好，继续做从  $S$  到  $T$  的流量任意的最小费用流，加上原来的费用就是答案。

**费用流消负环** 新建超级源  $SS$  汇  $TT$ ，对于所有流量非空的负权边  $e$ ，先流满 ( $ans += e.f * e.c$ ,  $e.rev.f += e.f$ ,  $e.f = 0$ )，再连边  $SS \rightarrow e.to$ ,  $e.from \rightarrow TT$ ，流量均为  $e.f (> 0)$ ，费用均为 0。再连边  $T \rightarrow S$  流量  $\infty$  费用 0。此时没有负环了。做一遍  $SS$  到  $TT$  的最小费用最大流，将费用累加  $ans$ ，拆掉  $T \rightarrow S$  的那条边（此边的流量为残量网络中  $S \rightarrow T$  的流量）。此时负环已消，再继续跑最小费用最大流。

## 二分图最小点覆盖和最大独立集

最小点覆盖：求出一个最大匹配，从左部开始每次寻找一个未匹配点，从该点出发可以得到“未匹配-匹配-未匹配...”形式的交错树，标记所有这些点。则最小点覆盖方案为右部未标记点与左部标记点的并集。显然最小点覆盖集合大小 = 最大匹配。  
最大独立集 = 全集 - 最小点覆盖。

## 整数线性规划转费用流

首先将约束关系转化为所有变量下界为 0，上界没有要求，并满足一些等式，每个变量在均在等式左边且出现恰好两次，系数为 +1 和 -1，优化目标为  $\max \sum v_i x_i$  的形式。将等式看做点，等式  $i$  右边的值  $b_i$  若为正，则  $S$  向  $i$  连边  $(b_i, 0)$ ，否则  $i$  向  $T$  连边  $(-b_i, 0)$ 。将变量看做边，记变量  $x_i$  的上界为  $m_i$  (无上界则  $m_i = \infty$ )，将  $x_i$  系数为 +1 的那个等式  $u$  向系数为 -1 的等式  $v$  连边  $(m_i, v_i)$ 。

## 2.5 欧拉路径

欧拉图的判定：考虑起点、终点与中间点的必要条件即可。可以证明必要条件也是充分的。以下给出已确定起点的无向图欧拉路径（回路）的构造算法。

```
1 int s[N], top, head[N], now[N], used[M << 1], cnt;
2 struct edge {
3     int a, b, next;
4 } e[M << 1];
5 void add(int a, int b) {
6     e[++cnt] = {a, b, head[a]};
7     head[a] = cnt;
8 } // cnt 的初值为 1, head[] 的初值为 0。即从 2 开始编号，以保证异
   ↳ 或 1 得到反向边。
9 void dfs(int x) {
10     while (now[x]) { // now[] 的初值为 head[]。
11         int i = now[x];
12         now[x] = e[now[x]].next;
13         if (!used[i]) {
14             used[i] = used[i ^ 1] = 1;
15             dfs(e[i].b);
16         }
17     }
```

```
18     s[++top] = x;
19 } // s[] 存储了反向的欧拉路。
```

## 3 数据结构

### 3.1 平衡树

#### 3.1.1 无旋 Treap

```
structure/fhq.cpp
```

#### 3.1.2 平衡树合并

注意这里的合并是指合并两个值域相交的集合，并且这个操作应该只有 treap 支持。代码如下：

```
structure/treap-merge.cpp
```

可以证明，以上操作的总时间复杂度为  $O(n \log n \log V)$ ，其中  $n$  为元素总个数， $V$  为值域。而在特定的场景下，时间复杂度会更优。（例如若只支持合并与分裂操作，则时间复杂度为  $O(n \log n)$ 。）

#### 3.1.3 Splay

```
structure/splay.cpp
```

### 3.2 动态树

```
structure/LCT.cpp
```

### 3.3 珂朵莉树

```
structure/ODT.cpp
```

### 3.4 李超线段树

#### 3.4.1 修改与询问

```
structure/lichao.cpp
```

#### 3.4.2 合并

```
structure/lichao-merge.cpp
```

### 3.5 二维树状数组

```
structure/2D-BIT.cpp
```

### 3.6 虚树

```
structure/virtual-tree.cpp
```

### 3.7 左偏树

structure/heap.cpp 特别的，若要求给定节点所在左偏树的根，须使用并查集。对于每个节点维护  $rt[]$  值，查找根时使用函数：

```
1 int find(int x) { return rt[x] == x ? x : rt[x] = find(rt[x]); }
```

在合并节点时，加入：

```
1 rt[x] = rt[y] = merge(x, y);
```

在弹出最小值时加入：

```
1 rt[ls(x)] = rt[rs(x)] = rt[x] = merge(ls(x), rs(x));
```

另外，删除过的点是不能复用的，因为这些点可能作为并查集的中转节点。

### 3.8 吉司机线段树

- 区间取 min 操作：通过维护区间次小值实现，即将区间取 min 转化为对区间最大值的加法，当要取 min 的值  $v$  大于次小值时停止递归。时间复杂度通过标记回收证明，即将区间最值视作标记，这样每次多余的递归等价于标记回收，总时间复杂度为  $O(m \log n)$ 。
- 区间历史最大值：通过维护加法标记的历史最大值实现。应该可以通过  $\max+$  矩乘维护。
- 区间历史版本和：使用矩阵乘法维护。由于矩乘具备结合律，历史版本和可以简单实现。

总而言之，主要的手段是标记回收和矩乘合并标记。

```
structure/seg-beats.cpp
```

### 3.9 树分治

熟知序列分治的过程是选取恰当的分治点并考虑所有跨过分治点的区间。而树分治的过程也是类似的，以点分治为例，每一次选择当前联通块的重心作为分治点，然后考虑所有跨过分治点的路径，并对分割出的联通块递归。若要处理树上邻域问题，可以考虑建出点分树。处理点  $x$  的询问时，只需考虑  $x$  在点分树上到根的路径，每一次加上除开  $x$  所在子树的答案即可。

```
structure/tree-divide.cpp
```

## 4 字符串

### 4.1 Hash 类

```
1 const ll P = (1ll)1e18+9;
2 static constexpr u128 inv = [](){
3     u128 ret = P;
4     for(int i=0;i<6;i++)ret*=2-ret*P;
5     return ret;
6 }();
7 constexpr u128 chk = u128(-1) / P;
8 bool check(u128 a,u128 b){
9     if(a<b)swap(a,b);
10    return (a-b)*inv<=chk;
11 }
```

### 4.2 后缀数组 (llx)

```
1 // 0-下标, h[i] 表示后缀 sa[i] 和 sa[i+1] 的 LCP 长度
2 struct SuffixArray {
3     int n;
4     vector<int> sa, rk, h;
5     SuffixArray(const string s) {
6         n = s.length();
7         sa.resize(n);
8         h.resize(n - 1);
9         rk.resize(n);
10        iota(sa.begin(), sa.end(), 0);
11        sort(sa.begin(), sa.end(), [](int a, int b) {return s[a]
12            < s[b];});
13        rk[sa[0]] = 0;
14        for (int i=1;i<n;++i)
15            rk[sa[i]]=rk[sa[i-1]]+(s[sa[i]]!=s[sa[i-1]]);
16        int k = 1;
17        vector<int> tmp, cnt(n);
18        tmp.reserve(n);
19        while (rk[sa[n - 1]] < n - 1) {
20            tmp.clear();
21            for (int i=0;i<n;i++)tmp.push_back((n - k + i));
22            for (auto i:sa)if(i>=k) tmp.push_back(i - k);
23            fill(cnt.begin(), cnt.end(), 0);
24            for (int i=0;i<n;i++)cnt[rk[i]]++;
25            for (int i=1;i<n;i++)cnt[i]+=cnt[i-1];
26            for (int i=n-1;i>=0;i--)sa[--cnt[rk[tmp[i]]]]=tmp[i];
27            swap(rk, tmp);
28            rk[sa[0]] = 0;
```

```
27     for (int i=1;i<n;i++){
28         rk[sa[i]]=rk[sa[i-1]];
29         if (tmp[sa[i-1]]<tmp[sa[i]] || sa[i-1]+k==n ||
30             tmp[sa[i-1]+k]<tmp[sa[i]+k]) rk[sa[i]]++;
31     }
32     k *= 2;
33 }
34 for(int i=0,j=0;i<n;i++){
35     if(rk[i]==0) j=0;
36     else{
37         if(j)--;
38         while(i+j<n sa[rk[i]-1]+j<n
39             tmp[sa[i+j]]==s[sa[rk[i]-1]+j])++j;
40         h[rk[i]-1] = j;
41     }
42 }
```

### 4.3 后缀数组与后缀树 (旧)

```
1 const int N = 1e6 + 5;
2
3 char s[N];
4 int sa[N], rk[N], n, h[N];
5 // 后缀数组。h[i] = lcp(sa[i], sa[i - 1])
6 int rt, ls[N], rs[N], fa[N], val[N];
7 // 后缀树。实际上就是 height 数组的笛卡尔树。
8 // val[x] : x 与 fa[x] 对应的子串等价类的大小之差，也就是 x 贡献的
9     ↳ 本质不同子串数。
10 struct suffix {
11     int k1[N], k2[N << 1], cnt[N], mx, stk[N], top;
12     void radix_sort(){
13         for (int i = 1; i <= mx; i++) cnt[i] = 0;
14         for (int i = 1; i <= n; i++) cnt[k1[i]]++;
15         for (int i = 1; i <= mx; i++) cnt[i] += cnt[i - 1];
16         for (int i = n; i >= 1; i--) sa[cnt[k1[k2[i]]]--] =
17             k2[i];
18     } // 基数排序
19     void sort() {
20         mx = 'z';
21         for (int i = 1; i <= n; i++) k1[i] = s[i], k2[i] = i;
22         radix_sort();
23         for (int j = 1; j <= n; j <= 1) {
24             int num = 0;
25             for (int i = n - j + 1; i <= n; i++) k2[++num] = i;
26             for (int i = 1; i <= n; i++) if (sa[i] > j)
27                 k2[++num] = sa[i] - j;
28             radix_sort();
29             for (int i = 1; i <= n; i++) k2[i] = k1[i];
30             k1[sa[1]] = mx = 1;
31             for (int i = 2; i <= n; i++) k1[sa[i]] = k2[sa[i]]
32                 ↳ == k2[sa[i - 1]] k2[sa[i] + j] == k2[sa[i - 1]
33                 ↳ + j] ? mx : ++mx;
34         }
35     } // 后缀排序
36     void height() {
37         for (int i = 1; i <= n; i++) rk[sa[i]] = i;
38         int k = 0;
39         for (int i = 1; i <= n; i++) {
40             if (k) k--;
41             if (rk[i] == 1) continue;
42             int j = sa[rk[i] - 1];
43             while (i + k <= n j + k <= n s[i + k] == s[j + k])
44                 k++;
45             h[rk[i]] = k;
46         }
47     } // 计算 height 数组
48     void build() {
49         if (n == 1) return rt = 1, void();
50         ls[2] = n + 1, rs[2] = n + 2, fa[ls[2]] = fa[rs[2]] = rt
51             ↳ = stk[++top] = 2;
52         for (int i = 3; i <= n; i++) {
53             while (top h[stk[top]] > h[i]) top--;
54             int p = stk[top];
55             if (top) ls[i] = rs[p], fa[rs[p]] = i, rs[p] = i,
56                 ↳ fa[i] = p;
57             else ls[i] = rt, fa[rt] = i, rt = i;
58             rs[i] = n + i, fa[rs[i]] = i, stk[++top] = i;
59         }
60         for (int i = 2; i <= n + n; i++) val[i] = (i > n ? n -
61             ↳ sa[i - n] + 1 : h[i]) - h[fa[i]];
62     } // 构建后缀树
63 } SA;
```



## 4.4 AC 自动机

```

1 struct ACAM {
2     int ch[N][26], cnt, fail[N], vis[N];
3     queue<int> q;
4     void insert(char *s, int n, int id) {
5         int x = 0;
6         for (int i = 1; i <= n; i++) {
7             int nw = s[i] - 'a';
8             if (!ch[x][nw]) ch[x][nw] = ++cnt;
9             x = ch[x][nw];
10        }
11        vis[x]++;
12    }
13    void build() {
14        for (int i = 0; i < 26; i++) {
15            if (ch[0][i]) q.push(ch[0][i]);
16        }
17        while (!q.empty()) {
18            int x = q.front(); q.pop();
19            for (int i = 0; i < 26; i++) {
20                if (ch[x][i]) {
21                    fail[ch[x][i]] = ch[fail[x]][i];
22                    q.push(ch[x][i]);
23                } else ch[x][i] = ch[fail[x]][i];
24            }
25        }
26    }
27    void match(char *s, int n) {
28        int x = 0;
29        for (int i = 1; i <= n; i++) {
30            int nw = s[i] - 'a';
31            x = ch[x][nw];
32        }
33    }
34 } AC;

```

## 4.5 回文自动机

```

1 struct PAM {
2     int fail[N], ch[N][26], len[N], s[N], tot, cnt, lst;
3     // fail : 当前节点的最长回文后缀。
4     // ch : 在当前节点的前后添加字符, 得到的回文串。
5     PAM() {
6         len[0] = 0, len[1] = -1, fail[0] = 1;
7         tot = lst = 0, cnt = 1, s[0] = -1;
8     }
9     int get_fail(int x) {
10        while (s[tot - 1 - len[x]] != s[tot]) x = fail[x];
11        return x;
12    }
13    void insert(char c) {
14        s[++tot] = c - 'a';
15        int p = get_fail(lst);
16        if (!ch[p][s[tot]]) {
17            len[++cnt] = len[p] + 2;
18            int t = get_fail(fail[p]);
19            fail[cnt] = ch[t][s[tot]];
20            ch[p][s[tot]] = cnt;
21        }
22        lst = ch[p][s[tot]];
23    }
24 } pam;

```

## 4.6 Manacher 算法

```

1 char s[N], t[N];
2 // s[] : 原串, t[] : 加入分割字符的串, 这样就只需考虑奇回文串了。
3 int mxp, cen, r[N], n;
4 // mxp : 最右回文串的右侧, cen : 最右回文串的中心, r[i] :
5 // 以位置 i 为中心的回文串半径, 即回文串的长度一半向上取整。
6
7 void manacher() {
8     t[0] = '~', t[1] = '#';
9     // 在 t[0] 填入特殊字符, 防止越界。
10    int m = 1;
11    for (int i = 1; i <= n; i++) {
12        t[++m] = s[i], t[++m] = '#';
13    }
14    for (int i = 1; i <= m; i++) {
15        r[i] = mxp > i ? min(r[2 * cen - i], mxp - i) : 1;
16        // 若 i (cen, mxp), 则由对称性 r[i] 至少取 min(r[2 * cen
17        // - i], mxp - i)。否则直接暴力扩展。
18        while (t[i + r[i]] == t[i - r[i]]) r[i]++;
19        if (i + r[i] > mxp) mxp = i + r[i], cen = i;
20    }
21 }

```

## 4.7 KMP 算法与 border 理论

```

1 char s[N], t[N];
2 int nex[N], n, m;
3
4 void kmp() {
5     int j = 0;
6     for (int i = 2; i <= n; i++) {
7         while (j & s[j + 1] != s[i]) j = nex[j];
8         if (s[j + 1] == s[i]) j++;
9         nex[i] = j;
10    }
11 }
12
13 void match() {
14     int j = 0;
15     for (int i = 1; i <= m; i++) {
16         while (j & s[j + 1] != t[i]) j = nex[j];
17         if (s[j + 1] == t[i]) j++;
18         if (j == n) {
19             // match.
20             j = nex[j];
21         }
22     }
23 }

```

字符串的 border 理论: 以下记字符串  $S$  的长度为  $n$ 。

- 若串  $S$  具备长度为  $m$  的 border, 则其必然具备长度为  $n - m$  的周期, 反之亦然。
- 弱周期性引理: 若串  $S$  存在周期  $p, q$ , 且  $p + q \leq n$ , 则  $S$  必然存在周期  $\gcd(p, q)$ 。
- 引理 1: 若串  $S$  存在长度为  $m$  的 border  $T$ , 且  $T$  具备周期  $p$ , 满足  $2m - n \geq p$ , 则  $S$  同样具备周期  $p$ 。
- 周期性引理: 若串  $S$  存在周期  $p, q$ , 满足  $p + q - \gcd(p, q) \leq n$ , 则串  $S$  必然存在周期  $\gcd(p, q)$ 。
- 引理 2: 串  $S$  的所有 border 的长度构成了  $O(\log n)$  个不交的等差数列。更具体的, 记串  $S$  的最小周期为  $p$ , 则其所有长度包含于区间  $[n \bmod p + p, n]$  的 border 构成了一个等差数列。
- 引理 3: 若存在串  $S, T$ , 使得  $2|T| \geq n$ , 则  $T$  在  $S$  中的所有匹配位置构成了一个等差数列。
- 引理 4: PAM 的失配链可以被划分为  $O(\log n)$  个等差数列。

## 4.8 Z 函数

Z 函数用于求解字符串的每一个后缀与其本身的 lcp。其思路和 manacher 算法基本一致, 都是维护一个扩展过的最右端点对应的起点, 而当前点要么暴力扩展使最右端点右移, 要么处在记录的起点和终点间, 从而可以利用已有的信息快速转移。

```

1 char s[N];
2 int z[N];
3
4 void zfunc() {
5     z[1] = n;
6     int j = 0;
7     for (int i = 2; i <= n; i++) {
8         if (j & j + z[j] - 1 >= i) z[i] = min(z[i - j + 1], j +
9             -> z[j] - i);
10        while (i + z[i] <= n & s[i + z[i]] == s[1 + z[i]])
11            -> z[i]++;
12        if (i + z[i] > j + z[j]) j = i;
13    }
14 }

```

## 4.9 后缀自动机

```

1 struct SAM { // 注意修改字符集! 字符集是小写字母吗?
2     int last = 1, tot = 1;
3     int ch[N<<1][26], len[N<<1], f[N<<1];
4     void ins(char c) {
5         c -= 'a';
6         int p = last, cur = last = ++tot;
7         len[cur] = len[p] + 1;
8         for (; p & ch[p][c] & p != f[p]; p = f[p]) ch[p][c] = cur;
9         if (!p) f[cur] = 1; return;
10        int q = ch[p][c];
11        if (len[q] == len[p] + 1) { f[cur] = q; return; }
12        int clone = ++tot;

```

```

13     for(int i=0;i<26;i++)ch[clone][i]=ch[q][i];
14     f[clone]=f[q],len[clone]=len[p]+1;
15     f[q]=f[cur]=clone;
16     for(;pch[p][c]==q;p=f[p])ch[p][c]=clone;
17 }
18 }sam; // 注意任何跟 SAM 有关的数组都要开两倍

```

## 4.10 后缀自动机 (map 版)

```

1 struct SAM{ // 注意修改字符集! 字符集是小写字母吗?
2     int last = 1, tot = 1;
3     map<int,int> ch[N<<1];
4     int len[N<<1], f[N<<1];
5     vector<int> G[N<<1];
6     void ins(char c){
7         c -= 'a';
8         int p = last, cur = last = ++tot;
9         len[cur]=len[p]+1;
10        for(;!ch[p].count(c);p=f[p])ch[p][c]=cur;
11        if(!p){f[cur]=1;return;}
12        int q=ch[p][c];
13        if(len[q]==len[p]+1){f[cur]=q;return;}
14        int clone=++tot;
15        ch[clone]=ch[q];
16        f[clone]=f[q],len[clone]=len[p]+1;
17        f[q]=f[cur]=clone;
18        for(;pch[p].count(c)ch[p][c]==q;p=f[p]) ch[p][c]=clone;
19    }
20 }sam; // 注意任何跟 SAM 有关的数组都要开两倍

```

## 4.11 最小表示法

```

1 // 0-下标的!
2 int minpos(const string s){
3     int n = s.size();
4     int k = 0, i = 0, j = 1;
5     while (k < n & i < n & j < n) {
6         if (s[(i+k)%n]==s[(j+k)%n])++k;
7         else{
8             if(s[(i+k)%n]>s[(j+k)%n])i+=k+1;
9             else j+=k+1;
10            k = 0;
11            if(i==j)i++;
12        }
13    }
14    return min(i,j);
15 }

```

# 5 线性代数

## 5.1 高斯消元

```

1 scanf("%d", n);
2 for (int i = 1; i <= n; i++)
3     for (int j = 1; j <= n + 1; j++)
4         scanf("%lf", a[i][j]);
5 for (int i = 1, Max = 1; i <= n; Max = ++i) {
6     for (int s = i + 1; s <= n; s++)
7         if (fabs(a[s][i]) > fabs(a[Max][i]))
8             Max = s; // 找出绝对值最大的
9     for (int j = 1; j <= n + 1; j++)
10        swap(a[i][j], a[Max][j]);
11    if (a[i][i] < 10e-8 & a[i][i] > -10e-8) {
12        p = false;
13        break;
14    } // 记得 double 的精度问题
15    for (int s = 1; s <= n; s++)
16        if (s != i) // 这样省去了第二步处理的麻烦
17            {
18                double tmp = 0 - (a[s][i] / a[i][i]);
19                a[s][i] = 0;
20                for (int j = i + 1; j <= n + 1; j++)
21                    a[s][j] += tmp * a[i][j];
22            }
23 }
24 if (p)
25     for (int i = 1; i <= n; i++)
26         printf("%.2lf\n", a[i][n + 1] / a[i][i]);
27 else
28     printf("No Solution\n");

```

## 5.2 线性基

```

1 void Insert(ll x) // 加入一个数
2 {
3     for (int i = 62; i >= 0; i--)
4         if ((x >> i) & 1) {
5             if (!p[i]) {
6                 p[i] = x;
7                 break;
8             }
9             x ^= p[i]; // [0, i - 1]
10        }
11 }
12 bool exist(ll x) // 查询一个元素是否可以被异或出来
13 {
14     for (int i = 62; i >= 0; i--)
15         if ((x >> i) & 1) x ^= p[i];
16     return x == 0;
17 }
18 ll query_max()//
19 {
20     ll ret = 0;
21     for (int i = 62; i >= 0; i--)
22         if ((ans ^ p[i]) > ans)ans ^= p[i];
23     return ans;
24 }
25 ll query_min()//
26 {
27     for (int i = 0; i <= 62; i++)
28         if (p[i]) return p[i];
29     return 0;
30 }
31 ll kth(ll k) // 查询异或第 k 小
32 {
33     // 重建 d 数组, 求出哪些位可以被异或为 1
34     // d[i] 中任意两个数在任意一个二进制位上不可能同时为 1
35     for (int i = 62; i >= 1; i--) // 从高到低防止后效性
36         for (int j = i - 1; j >= 0; j--)
37             if ((p[i] >> j) & 1) p[i] ^= p[j];
38     for (int i = 0; i <= 62; i++)
39         if (p[i]) d[cnt++] = p[i];
40
41     if (!k) return 0; // 特判 0
42     if (k >= (1ll << (ll)cnt)) return -1; // k 大于可以表示出的
43     // 数的个数
44     ll ret = 0;
45     for (int i = 62; i >= 0; i--)
46         if ((k >> i) & 1) ret ^= d[i];
47     return ret;
48 }
49 ll Rank(ll k) {
50     ll Now = 1, ret = 0;
51     for (int i = 0; i <= 62; i++)
52         if (p[i]) // 记得保证 k 可以被异或出来
53             {
54                 if ((k >> i) & 1) ret += Now;
55                 Now <<= 1;
56             }
57     return ret;
58 }

```

## 5.3 行列式

容易证明转置后行列式相等, 积的行列式等于行列式的积。但是这样的性质并不对和成立, 而每次只能拆一行或一列。

以下是任意模数求行列式的算法:

```

1 // 解法 1: 类似辗转相除
2 n = rd(), mod = rd();
3 for (int i = 1; i <= n; i++)
4     for (int j = 1; j <= n; j++)
5         a[i][j] = rd() % mod;
6 for (int i = 1; i <= n; i++) {
7     for (int j = i + 1; j <= n; j++) {
8         while (a[j][i]) {
9             ll tmp = a[i][i] / a[j][i];
10            for (int k = i; k <= n; k++)
11                a[i][k] = (a[i][k] - tmp * a[j][k] % mod + mod)
12                // % mod;
13            swap(a[i], a[j]), w = -w; // ?
14        }
15    }
16 }
17 for (int i = 1; i <= n; i++)
18     ans = ans * a[i][i] % mod;
19 printf("%lld\n", (mod + w * ans) % mod);

```

## 5.4 矩阵树定理

以下叙述允许重边，不允许自环。

对于无向图  $G$ ，定义度数矩阵  $D$  为：

$$D_{ij} = \deg(i)[i = j]$$

设  $\#e(i, j)$  为连接点  $i$  和  $j$  的边数，定义邻接矩阵  $A$  为：

$$A_{ij} = \#e(i, j)$$

显然  $A_{ii} = 0$ 。定义 Laplace 矩阵  $L$  为  $D - A$ ，记  $G$  的生成树个数为  $t(G)$ ，则其恰为  $L$  的任意一个  $n - 1$  阶主子式的值。

对于有向图  $G$ ，分别定义出度矩阵  $D^{out}$  和入度矩阵  $D^{in}$  为：

$$D_{ij}^{out} = \deg^{out}(i)[i = j]$$

$$D_{ij}^{in} = \deg^{in}(i)[i = j]$$

设  $\#e(i, j)$  为从点  $i$  到  $j$  的边数，定义邻接矩阵  $A$  为：

$$A_{ij} = \#e(i, j)$$

显然  $A_{ii} = 0$ 。再分别定义出度 Laplace 矩阵  $L^{out}$  和入度 Laplace 矩阵  $L^{in}$  为：

$$L^{out} = D^{out} - A$$

$$L^{in} = D^{in} - A$$

分别记  $G$  的以  $k$  为根的根向树形图个数为  $t^{root}(k)$ ，以及以  $k$  为根的叶向树形图个数为  $t^{leaf}(k)$ 。则  $t^{root}(k)$  恰为  $L^{out}$  的删去  $k$  行  $k$  列的  $n - 1$  阶主子式的值； $t^{leaf}(k)$  恰为  $L^{in}$  的删去  $k$  行  $k$  列的  $n - 1$  阶主子式的值。

## 5.5 单纯形法

线性规划的标准型：

$$\begin{aligned} \text{maximize :} & \quad c^T x \\ \text{constraints :} & \quad Ax \leq b \\ & \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

在标准型的基础上得到松弛型：

$$\begin{aligned} \text{maximize :} & \quad c^T x \\ \text{constraints :} & \quad \alpha = b - Ax \\ & \quad \alpha, x \geq 0 \end{aligned}$$

单纯形法以松弛型为基础。具体的，松弛型隐含了一个基本解，即  $x = 0, \alpha = b$ （这里要求  $b \geq 0$ ）。我们称  $\alpha$  中的变量为基变量，其余为非基变量。单纯性的主过程被称作 pivot 操作。一次 pivot 操作的本质就是进行基变量与非基变量之间的变换以使得带入基本解的目标函数更大。具体的，我们每一次选定一个在目标函数中系数为正的变量为换入变量，再选择对这个换入变量约束最紧的线性约束所对应的基变量，称其为换出变量。然后，我们将换入变量和换出变量分别换为基变量和非基变量，并对其余的式子做出对应的代换以使得定义满足即可。另外单纯型法的时间复杂度虽然是指数级别的，但是跑起来效果还是很好的，期望迭代次数貌似可以大致看作约束个数的平方级别。

```
1 typedef double db;
2 const db eps = 1e-8, inf = 1e9;
3 int n, m, ans;
4 db b[N], a[N][M], c[M]; // n: 约束个数. m: 变量个数.
5 bool dcmp(db x) { return fabs(x) > eps; }
6
7 db pivot(int out, int in) {
8     b[out] /= a[out][in];
9     for (int i = 1; i <= m; i++) if (i != in) a[out][i] /=
        ↪ a[out][in];
10    a[out][in] = 1; // 理论上是 1 / a[out][in]，但这个系数可以任
        ↪ 取，但也不要随便取。
11    for (int i = 1; i <= n; i++) {
12        if (i != out && dcmp(a[i][in])) {
13            b[i] -= a[i][in] * b[out];
14            for (int j = 1; j <= m; j++)
```

```
15                if (j != in) a[i][j] -= a[i][in] * a[out][j];
16                a[i][in] *= -a[out][in];
17            }
18        }
19        db res = c[in] * b[out];
20        for (int i = 1; i <= m; i++) if (i != in) c[i] -= a[out][i]
            ↪ * c[in];
21        c[in] *= -a[out][in];
22        return res;
23    }
24    void simplex() {
25        db res = 0;
26        while (1) {
27            int in = 0;
28            for (int i = 1; i <= m; i++) {
29                if (c[i] > eps) {
30                    in = i;
31                    break;
32                }
33            }
34            if (!in) break; // simplex 完成，找到最优解。
35            int out = 0;
36            db mn = inf;
37            for (int i = 1; i <= n; i++)
38                if (a[i][in] > eps && b[i] / a[i][in] < mn) mn = b[i]
                    ↪ / a[i][in], out = i;
39            if (!out) {
40                res = inf;
41                break;
42            } // 解为无穷大。
43            res += pivot(out, in);
44        }
45        ans = round(res);
46    }
```

## 5.6 全幺模矩阵

当一个矩阵的任意一个子方阵的行列式都为  $\pm 1, 0$  时，我们称这个矩阵是全幺模的。

如果单纯形矩阵是全幺模的，那么单纯形就具有整数解。

## 5.7 对偶原理

线性规划的对偶原理：原线性规划与对偶线性规划的最优解相等。即：

$$\begin{aligned} \text{minimize :} & \quad c^T x & \quad \text{maximize :} & \quad b^T y \\ \text{constraints :} & \quad Ax \geq b & \quad \text{dual constraints :} & \quad A^T y \leq c \\ & \quad x \geq 0 & & \quad y \geq 0 \end{aligned}$$

直观上看，对于一个最小化的线性规划，我们尝试构造一个最大化的线性规划，使得它们目标函数的最优解相同。具体的，为每个约束设置一个非负的新变量，代表其系数。对于每个原变量，其对应了一个新约束，要求原约束的线性组合的对应系数不大于原目标函数的系数，从而得到原目标函数的下界。而新目标函数则要求使得原约束的组合最大化，从而得到最紧的下界。而线性规划对偶性则指出，原线性规划的最优解必然与对偶线性规划的最优解相等。

对偶线性规划具备互补松弛性。即，设  $x$  和  $y$  分别为原问题与对偶问题的可行解，则  $x$  和  $y$  均为最优解，当且仅当以下两个命题同时成立：

$$\forall j \in [1, m], x_j = 0 \vee \sum_{i=1}^n a_{ij} y_i = c_j$$

$$\forall i \in [1, n], y_i = 0 \vee \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j \leq b_i$$

对偶松弛性的意义是，其指出若最优解中的变量不取 0，则对应约束在最优解中一定取等。

# 6 多项式

## 6.1 FFT

```
1 struct comp {
2     double x, y;
3     comp(double X = 0, double Y = 0) { x = X, y = Y; }
4     comp operator + (const comp rhs) const { return comp(x +
        ↪ rhs.x, y + rhs.y); }
```

```

5   comp operator - (const comp rhs) const { return comp(x -
    ↪ rhs.x, y - rhs.y); }
6   comp operator * (const comp rhs) const { return comp(x *
    ↪ rhs.x - y * rhs.y, x * rhs.y + y * rhs.x); }
7   comp operator / (const comp rhs) const {
8       double t = rhs.x * rhs.x + rhs.y * rhs.y;
9       return {(x * rhs.x + y * rhs.y) / t, (y * rhs.x - x *
    ↪ rhs.y) / t};
10  };
11  };
12  const double pi = acos(-1);
13  int lim, tr[N];
14  void adjust(int n) { // n: 多项式的次数。
15      lim = 1;
16      while (lim <= n) lim <= 1;
17      for (int i = 0; i < lim; i++) tr[i] = (tr[i >> 1] >> 1) |
    ↪ ((i & 1) ? lim >> 1 : 0);
18  } // 准备蝶形变换。
19  void fft(comp *f, int op) { // op: 1 为 dft, -1 为 idft。
20      for (int i = 0; i < lim; i++) if (tr[i] < i) swap(f[tr[i]],
    ↪ f[i]);
21      for (int l = 1; l < lim; l <= 1) {
22          comp w1(cos(2 * pi / (l <= 1)), sin(2 * pi / (l <= 1)) *
    ↪ op);
23          for (int i = 0; i < lim; i += l <= 1) {
24              comp w(1, 0);
25              for (int j = i; j < i + l; j++, w = w * w1) {
26                  comp x = f[j], y = f[j + l] * w;
27                  f[j] = x + y, f[j + l] = x - y;
28              }
29          }
30      }
31      if (op == -1) {
32          for (int i = 0; i < lim; i++) f[i].x /= lim;
33      }
34  }

```

```

1 void fmt(int *f, int op) { // op: 1 为 dft, -1 为 idft。
2     for (int l = 1; l < lim; l <= 1) {
3         for (int i = 0; i < lim; i += l <= 1) {
4             for (int j = i; j < i + l; j++) {
5                 f[j] += f[j + l] * op;
6             }
7         }
8     }
9 }

```

子集卷积则较为特殊, 为了使得产生贡献的集合没有交集, 考虑引入代表集合大小的占位符。这样只需做  $n$  次 FMT, 再枚举长度做  $n^2$  次卷积。因为 FMT 具备线性性, 所以最后只需做  $n$  次 iFMT 即可。

```

1 void multi(int *f, int *g, int *h) { // 对 f 和 g 做子集卷积, 答
    ↪ 案为 h。
2     static int a[n][lim], b[n][lim], c[n][lim]; // lim = 1 << n
3     memset(a, 0, sizeof a);
4     memset(b, 0, sizeof b);
5     memset(c, 0, sizeof c);
6     for (int i = 0; i < lim; i++) a[pcnt[i]][i] = f[i]; //
    ↪ pcnt[i] = popcount(i)
7     for (int i = 0; i < lim; i++) b[pcnt[i]][i] = g[i];
8     for (int i = 0; i <= n; i++) fmt(a[i], 1), fmt(b[i], 1);
9     for (int i = 0; i <= n; i++)
10         for (int j = 0; j <= i; j++)
11             for (int k = 0; k < lim; k++)
12                 c[i][k] += a[j][k] * b[i - j][k];
13     for (int i = 0; i <= n; i++) fmt(c[i], -1);
14     for (int i = 0; i < lim; i++) h[i] = c[pcnt[i]][i];
15 }

```

特别的, 子集卷积等价于  $n$  元保留到一次项的线性卷积。

## 6.2 NTT

```

1 const int mod = 998244353, G = 3, iG = 332748118;
2 int tr[N], lim;
3 void adjust(int n) { // n: 多项式的次数。
4     lim = 1;
5     while (lim <= n) lim <= 1;
6     for (int i = 0; i < lim; i++) tr[i] = (tr[i >> 1] >> 1) |
    ↪ ((i & 1) ? lim >> 1 : 0);
7 } // 准备蝶形变换。
8 void ntt(comp *f, int op) { // op: 1 为 dft, -1 为 idft。
9     for (int i = 0; i < lim; i++) if (tr[i] < i) swap(f[tr[i]],
    ↪ f[i]);
10    for (int l = 1; l < lim; l <= 1) {
11        int w1 = qpow(op == 1 ? G : iG, (mod - 1) / (l <= 1));
12        ↪ // qpow: 快速幂。
13        for (int i = 0; i < lim; i += l <= 1) {
14            for (int j = i, w = 1; j < i + l; j++, (w *= w1) %=
    ↪ mod) {
15                int x = f[j], y = f[j + l] * w % mod;
16                f[j] = (x + y) % mod, f[j + l] = (x - y) % mod;
17            }
18        }
19        if (op == -1) {
20            int iv = qpow(lim); // 算逆元。
21            for (int i = 0; i < lim; i++) (f[i] *= iv) %= mod;
22        }
23    }

```

## 6.3 集合幂级数

### 6.3.1 并卷积、交卷积与子集卷积

集合并等价于二进制按位或, 因此并卷积的计算实际上就是做高维前缀和以及差分, 也被称作莫比乌斯变换。

```

1 void fmt(int *f, int op) { // op: 1 为 dft, -1 为 idft。
2     for (int l = 1; l < lim; l <= 1) {
3         for (int i = 0; i < lim; i += l <= 1) {
4             for (int j = i; j < i + l; j++) {
5                 f[j + l] += f[j] * op;
6             }
7         }
8     }
9 }

```

而集合交卷积则对应后缀和。

### 6.3.2 对称差卷积

集合对称差等价于按位异或, 而异或卷积则等价于  $n$  元模 2 的循环卷积, 因此, FWT 实质上与  $n$  元 FFT 没有什么区别。

```

1 void fwt(int *f, int op) { // op: 1 为 dft, -1 为 idft。
2     for (int l = 1; l < lim; l <= 1) {
3         for (int i = 0; i < lim; i += l <= 1) {
4             for (int j = i; j < i + l; j++) {
5                 int x = f[j], y = f[j + l];
6                 f[j] = x + y, f[j + l] = x - y;
7                 if (op == -1) f[j] /= 2, f[j + l] /= 2;
8                 // 模意义下改成乘逆元。
9             }
10        }
11    }
12 }

```

## 6.4 多项式全家桶

```

1 const int N = 5000005;
2 const long long mod = 998244353;
3 #define int long long
4 namespace poly {
5     const long long G = 3, iG = 332748118;
6     int tr[N], lim;
7     int qpow(int a, int b = mod - 2) {
8         int res = 1;
9         while (b) {
10             if (b & 1) (res *= a) %= mod;
11             (a *= a) %= mod, b >>= 1;
12         }
13         return res;
14     }
15     void adjust(int n) {
16         lim = 1;
17         while (lim <= n) lim <= 1;
18         for (int i = 0; i < lim; i++) tr[i] = (tr[i >> 1] >> 1)
    ↪ | ((i & 1) ? lim >> 1 : 0);
19     } // 准备蝶形变换
20     void copy(int *f, int *g, int n) { for (int i = 0; i <= n;
    ↪ i++) f[i] = g[i]; }
21     void clear(int *f, int n) { for (int i = 0; i <= n; i++)
    ↪ f[i] = 0; }
22     void erase(int *f, int l, int r) { for (int i = l; i <= r;
    ↪ i++) f[i] = 0; }
23     void reverse(int *f, int n) { for (int i = 0; i <= n / 2;
    ↪ i++) swap(f[i], f[n - i]); }
24     void integral(int *f, int n) {

```

```

25     for (int i = n + 1; i >= 1; i--) f[i] = f[i - 1] *
        ↪ qpow(i) % mod;
26     f[0] = 0;
27 } // 对 n 次多项式 f 求积分, 默认常数项为 0。
28 void dif(int *f, int n) {
29     for (int i = 0; i < n; i++) f[i] = f[i + 1] * (i + 1) %
        ↪ mod;
30     f[n] = 0;
31 } // 对 n 次多项式 f 求导。
32 void ntt(int *f, int op) { // op: 1 为 dft, -1 为 idft。
33     for (int i = 0; i < lim; i++) if (tr[i] < i)
        ↪ swap(f[tr[i]], f[i]);
34     for (int l = 1; l < lim; l <= 1) {
35         int w1 = qpow(op == 1 ? G : iG, (mod - 1) / (l <<
            ↪ 1)); // qpow: 快速幂。
36         for (int i = 0; i < lim; i += l < 1) {
37             for (int j = i, w = 1; j < i + l; j++, (w *= w1)
                ↪ %= mod) {
38                 int x = f[j], y = f[j + l] * w % mod;
39                 f[j] = (x + y) % mod, f[j + l] = (x - y) %
                    ↪ mod;
40             }
41         }
42     }
43     if (op == -1) {
44         int iv = qpow(lim); // 算逆元。
45         for (int i = 0; i < lim; i++) (f[i] *= iv) %= mod;
46     }
47 }
48 void multiply(int *h, int *f, int n, int *g, int m) {
49     static int a[N], b[N];
50     copy(a, f, n), copy(b, g, m);
51     adjust(n + m);
52     ntt(a, 1), ntt(b, 1);
53     for (int i = 0; i < lim; i++) h[i] = a[i] * b[i] % mod;
54     ntt(h, -1);
55     clear(a, lim - 1), clear(b, lim - 1);
56 } // 计算 f 与 g 的积, 存放在 h 中, f 与 g 不变。
57 void inverse(int *f, int *g, int n) {
58     static int t[N];
59     if (!n) return f[0] = qpow(g[0]), void();
60     inverse(f, g, n >> 1);
61     adjust(2 * n), copy(t, g, n);
62     ntt(t, 1), ntt(f, 1);
63     for (int i = 0; i < lim; i++) f[i] = f[i] * (2 - f[i] *
        ↪ t[i] % mod) % mod;
64     ntt(f, -1), erase(f, n + 1, lim - 1), clear(t, lim - 1);
65 } // 计算 g 的 n 次逆, 存放在 f 中, g 不变。不要让 f 和 g 为同
    ↪ 一个数组。
66 void ln(int *f, int *g, int n) {
67     static int t[N];
68     copy(t, g, n), inverse(f, g, n), dif(t, n);
69     adjust(n * 2), ntt(t, 1), ntt(f, 1);
70     for (int i = 0; i < lim; i++) (f[i] *= t[i]) %= mod;
71     ntt(f, -1), integral(f, n);
72     erase(f, n + 1, lim - 1), clear(t, lim - 1);
73 } // 要求 g[0] = 1。
74 void exp(int *f, int *g, int n) {
75     static int t[N];
76     if (!n) return f[0] = 1, void();
77     exp(f, g, n >> 1), ln(t, f, n);
78     for (int i = 0; i <= n; i++) t[i] = (g[i] - t[i]) % mod;
79     t[0]++;
80     adjust(n * 2), ntt(f, 1), ntt(t, 1);
81     for (int i = 0; i < lim; i++) (f[i] *= t[i]) %= mod;
82     ntt(f, -1), clear(t, lim - 1), erase(f, n + 1, lim - 1);
83 } // 要求 g[0] = 0。
84 void pow(int *f, int *g, int n, int k) {
85     static int t[N];
86     ln(t, g, n);
87     for (int i = 0; i <= n; i++) (t[i] *= k) % mod;
88     exp(f, t, n);
89 } // 要求 g[0] = 1。
90 void divide(int *q, int *r, int *f, int n, int *g, int m) {
91     static int a[N], b[N], c[N];
92     copy(a, f, n), copy(b, g, m);
93     reverse(a, n), reverse(b, m);
94     inverse(c, b, n - m);
95     multiply(q, a, n - m, c, n - m);
96     reverse(q, n - m);
97     multiply(a, g, m, q, n - m);
98     for (int i = 0; i < m; i++) r[i] = (f[i] - a[i] + mod) %
        ↪ mod;
99 } // 多项式带余除法, 其中 q 为商, r 为余数。
100 }
101 using namespace poly;

```

## 7 数论

### 7.1 中国剩余定理

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \\ \dots \\ x \equiv a_n \pmod{m_n} \end{cases}$$

求解  $x$ , 其中  $m_1, m_2, \dots, m_n$  互素。

$$x \equiv \sum_{i=1}^n a_i \prod_{j \neq i} m_j \times \left( \left( \prod_{j \neq i} m_j \right)^{-1} \pmod{m_i} \right) \pmod{\prod_{i=1}^n m_i}$$

### 7.2 扩展中国剩余定理

用于求解同余方程组的模数并不互素的情况。我们考虑如何合并两个同余式:

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{m_2} \end{cases}$$

显然其等价于:

$$\begin{cases} x = a_1 + k_1 \times m_1 \\ x = a_2 + k_2 \times m_2 \end{cases}$$

联立可得:

$$k_1 m_1 - k_2 m_2 = a_2 - a_1$$

我们解这个方程即可得出当前的解  $x_0$ 。且注意到我们若给  $x_0$  加上若干个  $\text{lcm}(m_1, m_2)$ , 上式仍然成立, 即当前的解是在  $\text{mod } \text{lcm}(m_1, m_2)$  意义下的。这样我们得出新的同余式:

$$x \equiv x_0 \pmod{\text{lcm}(m_1, m_2)}$$

与其它式子继续合并即可。注意在数据范围比较大的时候需要龟速加。

### 7.3 BSGS

在  $\sqrt{p}$  的时间内求解  $a^x \equiv b \pmod{p}$ , 要求  $a$  与  $p$  互质。

theory/bsgs.cpp

### 7.4 扩展 BSGS

不要求  $a, p$  互质。

theory/exbsgs.cpp

### 7.5 Lucas 定理

theory/lucas.cpp

### 7.6 扩展 Lucas 定理

theory/exlucas.cpp

### 7.7 杜教筛

实际上是利用迪利克雷卷积来构造递推式, 从而对一些积性函数快速求和的方法。

我们现在考虑求积性函数  $f$  的前缀和  $F$ 。设存在函数  $g$ ，使得  $f * g$  的前缀和可以被快速计算，那么：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n (f * g)(k) &= \sum_{k=1}^n \sum_{d|k} f\left(\frac{k}{d}\right) \times g(d) \\ &= \sum_{d=1}^n \sum_{k=1}^{\lfloor n/d \rfloor} f(k) \times g(d) \\ &= \sum_{d=1}^n g(d) \times F\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right) \\ &= \sum_{d=2}^n g(d) \times F\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right) + g(1) \times F(n)\end{aligned}$$

则：

$$F(n) = \left( \sum_{k=1}^n (f * g)(k) - \sum_{d=2}^n g(d) \times F\left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor\right) \right) / g(1)$$

若  $f * g$  的前缀和可以被快速计算，我们就可以使用整除分块，从而把  $F(n)$  划分为若干个子问题。使用时使用线性筛来预处理  $F$  的前  $n^{\frac{2}{3}}$  项，这样杜教筛的时间复杂度为  $O(n^{\frac{2}{3}})$ 。

## 7.8 Min-25 筛

Min-25 筛本质上是 对埃氏筛进行了扩展，用于求解积性函数的前缀和，要求其在质数与质数的次幂处的取值可以被快速计算。

下面对 Min-25 筛的运行过程做一个简要的推导：

记  $\mathbb{P}$  中的数为  $p$ ， $p_k$  为  $\mathbb{P}$  中第  $k$  小的数， $\text{lpf}(n)$  (lowest prime factor) 为  $n$  的最小素因子， $F(n) = \sum_{p \leq n} f(p)$ ， $F_k(n) = \sum_{i=2}^n [p_k \leq \text{lpf}(i)] f(i)$ ，不难发现答案即为  $F_1(n) + 1$ 。

考虑在  $F_k$  与  $F$  之间建立递推关系，从素因子的角度出发，并应用积性函数的性质，我们有：

$$\begin{aligned}F_k(n) &= \sum_{i=1}^n [\text{lpf}(i) \geq k] f(i) \\ &= \sum_{i \geq k, p_i^2 \leq n} \sum_{c \geq 1, p_i^c \leq n} f(p_i^c) \times ([c > 1] + F_{k+1}(n/p_i^c)) + F(n) - F(B_k)\end{aligned}$$

现在的问题在于如何快速求取  $F$ 。首先可以注意到只有  $O(\sqrt{n})$  处的  $F_k$  和  $F$  的取值对我们来说是有用的，这一点保障了我们的计算复杂度。现在 we 只关注  $f$  在质数处的取值，在具体的问题中，这一部分往往可以被表示为一个低次多项式，因此我们可以考虑分别计算每一项的贡献，最后再把它加起来。也就是说现在我们只需要求  $g(n) = n^s$  在只考虑素数处的取值的情况下的前缀和。注意到  $g$  具有非常优美的性质，其是一个完全积性函数，因此我们考虑构造  $G_k(n) = \sum_{i=2}^n [\text{lpf}(i) > p_k \vee i \in \mathbb{P}] g(i)$ ，即埃氏筛第  $k$  轮以后剩下的数处的  $g$  的取值之和。从埃氏筛的过程入手，我们考虑如何递推求解  $G_k(n)$ ，即：

1. 对于  $p_k^2 > n$ ，显然，所有满足的条件的数都会是素数，因此  $G_k(n) = G_{k-1}(n)$ 。2. 否则我们希望去除掉所有  $\text{lpf}$  为  $p_k$  的合数处的取值，即减去  $g(p_k)G_{k-1}(n/p_k)$ 。3. 在第 2 步中会多减一部分，这部分均仅含一个小于  $p_k$  的素因子，因此我们加上  $g(p_k)G_{k-1}(p_{k-1})$ 。

概括一下，我们有：

$$G_k(n) = G_{k-1}(n) - [p_k^2 \leq n] g(p_k) (G_{k-1}(n/p_k) - G_{k-1}(p_{k-1}))$$

以下是洛谷 P5325 求积性函数  $f(p^k) = p^k(p^k - 1)$ ， $p \in \mathbb{P}$  的前缀和的代码：

theory/min25.cpp

## 8 计算几何

### 8.1 声明与宏

```
1 #define cp const P
2 #define cl const L
3 #define cc const C
4 #define vp vector<P>
5 #define cvp const vector<P>
6 #define D double
```

```
7 #define LD long double
8 std::mt19937 rnd(time(0));
9 const LD eps = 1e-12;
10 const LD pi = std::numbers::pi;
11 const LD INF = 1e9;
12 int sgn(LD x) {
13     return x > eps ? 1 : (x < -eps ? -1 : 0);
14 }
```

### 8.2 点与向量

```
1 struct P {
2     LD x, y;
3
4     P(const LD x = 0, const LD y = 0) : x(x), y(y) {}
5     P(cp a) : x(a.x), y(a.y) {}
6
7     P operator=(cp a) {
8         x = a.x, y = a.y;
9         return *this;
10    }
11
12    P rot(LD t) const {
13        LD c = cos(t), s = sin(t);
14        return P(x * c - y * s, x * s + y * c);
15    } // counterclockwise
16
17    P rot90() const { return P(-y, x); } // counterclockwise
18    P rot90() const { return P(y, -x); } // clockwise
19    LD len() const { return sqrt(x * x + y * y); }
20    LD len2() const { return x * x + y * y; }
21    P unit() const {
22        LD d = len();
23        return P(x / d, y / d);
24    }
25
26    void read() { scanf("%Lf%Lf", x, y); }
27    void print() const { printf("%.9Lf, %.9Lf", x, y); }
28 };
29
30 bool operator<(cp a, cp b) { return a.x == b.x ? a.y < b.y : a.x < b.x; }
31 bool operator>(cp a, cp b) { return a.x == b.x ? a.y > b.y : a.x > b.x; }
32 bool operator==(cp a, cp b) { return !sgn(a.x - b.x) && !sgn(a.y - b.y); }
33 P operator+(cp a, cp b) { return P(a.x + b.x, a.y + b.y); }
34 P operator-(cp a, cp b) { return P(a.x - b.x, a.y - b.y); }
35 P operator*(const LD a, cp b) { return P(a * b.x, a * b.y); }
36 P operator*(cp b, const LD a) { return P(a * b.x, a * b.y); }
37 P operator/(cp b, const LD a) { return P(b.x / a, b.y / a); }
38 LD operator*(cp a, cp b) { return a.x * b.x + a.y * b.y; }
39     // 点积
40 LD operator^(cp a, cp b) { return a.x * b.y - a.y * b.x; } //
41 LD rad(cp a, cp b) { return acos(1 - (a.x == 0 && a.y == 0 || b.x == 0 && b.y == 0) ? 0 : (a * b / a.len() / b.len())); } // 夹角
42 bool left(cp a, cp b) { return sgn(a ^ b) > 0; } //
```

### 8.3 线

```
1 struct L {
2     P s, t;
3
4     L(cp a, cp b) : s(a), t(b) {}
5     L(cl l) : s(l.s), t(l.t) {}
6     void read() { s.read(), t.read(); }
7 };
8
9 bool point_on_line(cp a, cl l) { return sgn((a - l.s) ^ (l.t - l.s)) == 0; }
10 bool point_on_segment(cp a, cl l) { return sgn((a - l.s) ^ (l.t - l.s)) == 0 && sgn((a - l.s) * (a - l.t)) <= 0; }
11 bool two_side(cp a, cp b, cl l) { return sgn((a - l.s) ^ (a - l.t)) * sgn((b - l.s) ^ (b - l.t)) < 0; }
12 bool
13     intersection_judge_strict(cl a, cl b) { return two_side(a.s, a.t, b) && two_side(b.s, b.t, a); }
14 bool
15     intersection_judge(cl a, cl b) { return point_on_segment(a.s, b) || point_on_segment(b.s, a); }
16 P ll_intersection(cl a, cl b) {
17     LD s1 = (a.t - a.s) ^ (b.s - a.s), s2 = (a.t - a.s) ^ (b.t - a.s);
18     return (s2 * b.s - s1 * b.t) / (s2 - s1);
19 }
20 bool point_on_ray(cp a, cl b) { return sgn((a - b.s) ^ (b.t - b.s)) == 0 && sgn((a - b.s) * (b.t - b.s)) >= 0; }
21 bool ray_intersection_judge(cl a, cl b) {
22     P p(ll_intersection(a, b));
23     return sgn((p - a.s) * (a.t - a.s)) >= 0 && sgn((p - b.s) * (b.t - b.s)) >= 0;
24 } // 似乎有更快的做法，但是看不懂
```

```

23 LD pointoline(cpa, clb){return fabs((b.t - b.s) * (a - b.s)) / (b.t -
    b.s).len();} //
24 P projectoline(cpa, clb){return b.s + (a - b.s) * (b.t - b.s) / (b.t -
    b.s).len2() * (b.t - b.s);} //
25 LD pointosegment(cpa, clb){
26     if (b.s == b.t) return (a - b.s).len();
27     if (sgn((a - b.s) * (b.t - b.s)) * sgn((a - b.t) * (b.t -
        ↪ b.s)) <= 0)
28         return fabs((b.t - b.s) * (a - b.s)) / (b.t - b.s).len();
29     return min((a - b.s).len(), (a - b.t).len());
30 }

```

## 8.4 圆

```

1 struct C {
2     P c;
3     LD r;
4
5     C(cp c, const LD r = 0) : c(c), r(r) {}
6     C(cc a) : c(a.c), r(a.r) {};
7     C(cp a, cp b) {
8         c = (a + b) / 2;
9         r = (a - c).len();
10    }
11    C(cp x, cp y, cp z) {
12        P p(y - x), q(z - x);
13        P s(p * p / 2, q * q / 2);
14        LD d = pq;
15        p = P(sP(p.y, q.y), P(p.x, q.x)s) / d;
16        c = x + p, r = p.len();
17    }
18 };
19
20 bool incircle(cpa, ccb){return sgn((b.c - a).len() - b.r) <= 0;}
21 C minccircle(vpp) // O(n)
22 {
23     shuffle(p.begin(), p.end(), rnd);
24     int n = p.size(), i, j, k;
25     C ret(p[0], 0);
26     for (i = 1; i < n; ++i)
27         if (!inccircle(p[i], ret))
28             for (ret = C(p[i], p[0]), j = 1; j < i; ++j)
29                 if (!inccircle(p[j], ret))
30                     for (ret = C(p[i], p[j]), k = 0; k < j; ++k)
31                         if (!inccircle(p[k], ret))
32                             ret = C(p[i], p[j], p[k]);
33     return ret;
34 }
35
36 vp lcintersection(cll, ccc){
37     LD x = pointoline(c.c, l);
38     if (sgn(x - c.r) > 0) return vp();
39     x = sqrtl(c.r * c.r - x * x);
40     P p(projectoline(c.c, l));
41     if (sgn(x) == 0) return vp({p});
42     return vp({p + x * (l.t - l.s).unit(), p - x * (l.t -
        ↪ l.s).unit()});
43 }
44
45 LD ccintersectionarea(cca, ccb){
46     LD d = (a.c - b.c).len();
47     if (sgn(d - (a.r + b.r)) >= 0) return 0;
48     if (sgn(d - fabs(a.r - b.r)) <= 0) {
49         LD r = min(a.r, b.r);
50         return pi * r * r;
51     }
52     LD x = (d * d + a.r * a.r - b.r * b.r) / (2 * d), t1 =
        ↪ acosl(min((LD)1, max((LD)-1, x / a.r))), t2 =
        ↪ acosl(min((LD)1, max((LD)-1, (d - x) / b.r)));
53     return a.r * a.r * t1 + b.r * b.r * t2 - d * a.r * sinl(t1);
54 }
55
56 vp ccintersection(cca, ccb){
57     LD d = (a.c - b.c).len();
58     if (a.c == b.c || sgn(d - a.r - b.r) > 0 || sgn(d - fabs(a.r
        ↪ - b.r)) < 0) return vp();
59     P r = (b.c - a.c).unit();
60     LD x = (d * d + a.r * a.r - b.r * b.r) / (d * 2);
61     LD h = sqrtl(a.r * a.r - x * x);
62     if (sgn(h) == 0) return vp({a.c + r * x});
63     return vp({a.c + r * x + r.rot90() * h, a.c + r * x -
        ↪ r.rot90() * h});
64 }
65
66 vp tangent(cp a, cc b) { return
    ccintersection(b, C(a, b.c)); } //
67
68 vector<L> tangent(cc a, cc b, int f) // f = 1 extangent; f = -1
    ↪ intangent

```

```

69 {
70     D d = (b.c - a.c).len();
71     int sg = sgn(fabs((b.r - f * a.r) / d) - 1);
72     if (sg == 1)
73         return {};
74     else if (sg == 0) {
75         P p = a.c - sgn(b.r - f * a.r) * f * a.r * (b.c -
            ↪ a.c).unit();
76         return {{p, p + (b.c - a.c).rot90()}};
77     } // 内切/外切
78     D theta = asin(min((D)1, max((D)-1, f * (b.r - f * a.r) /
        ↪ d)));
79     P du = (b.c - a.c).unit(), du1 = du.rot(theta + pi / 2), du2
        ↪ du.rot(-theta - pi / 2);
80     return {{a.c + a.r * du1, b.c + f * b.r * du1}, {a.c + a.r *
        ↪ du2, b.c + f * b.r * du2}};
81 }

```

## 8.5 凸包

```

1 vp convex(vp a) {
2     if (a.size() < 2) return a;
3     sort(a.begin(), a.end());
4     int n = a.size(), cnt = 0;
5     vp con({p[0]});
6     for (int i = 0; i < n; ++i) {
7         while (cnt > 0 sgn(((p[i] - con[cnt - 1])
            ↪ (con[cnt] - con[cnt - 1])) > 0)) // >=
            --cnt, con.popback();
8         ++cnt, con.pushback(p[i]);
9     }
10    int fixed = cnt;
11    for (int i = n - 2; -i; --i) {
12        while (cnt > fixed sgn(((p[i] - con[cnt - 1])
            ↪ (con[cnt] - con[cnt - 1])) > 0)) // >=
            --cnt, con.popback();
13        ++cnt, con.pushback(p[i]);
14    }
15    con.popback();
16    return con;
17 }
18
19 vp minkowski(vp p1, vp p2) {
20     if (p1.empty() || p2.empty()) return vp();
21     int n1 = p1.size(), n2 = p2.size();
22     vp ret;
23     if (n1 == 1) {
24         for (int i = 0; i < n2; ++i)
25             ret.pushback(p1[0] + p2[i]);
26         return ret;
27     }
28     if (n2 == 1) {
29         for (int i = 0; i < n1; ++i)
30             ret.pushback(p1[i] + p2[0]);
31         return ret;
32     }
33     p1.pushback(p1[0]), p1.pushback(p1[1]), p2.pushback(p2[0]), p2.pushback(p2[1]);
34     ret.pushback(p1[0] + p2[0]);
35     int i1 = 0, i2 = 0;
36     while (i1 < n1 || i2 < n2) {
37         if ((p1[i1 + 1] - p1[i1]) (p2[i2 + 1] - p2[i2])) > 0)
38             ret.pushback(p1[+ + i1] + p2[i2]);
39         else
40             ret.pushback(p2[+ + i2] + p1[i1]);
41     } // p1.popback(), p1.popback(), p2.popback(), p2.popback();
42     ret.popback();
43     return ret;
44 }
45
46 struct Con {
47     int n;
48     vp a, upper, lower;
49
50     Con(cvp a) : a(a) {
51         n = a.size();
52         int k = 0;
53         for (int i = 1; i < n; ++i)
54             if (a[i] > a[k]) k = i;
55         for (int i = 0; i <= k; ++i)
56             lower.pushback(a[i]);
57         for (int i = k; i < n; ++i)
58             upper.pushback(a[i]);
59         upper.pushback(a[0]);
60     }
61 }
62
63 // Below is from Nemesis

```

```

67 // Convex
68 int n;
69 vector<point> a; // 可以封装成一个 struct
70 bool inside(cp u) { // 点在凸包内
71     int l = 1, r = n - 2;
72     while (l < r) {
73         int mid = (l + r + 1) / 2;
74         if (turn(a[0], a[mid], u) >= 0)
75             l = mid;
76         else
77             r = mid - 1;
78     }
79     return turn(a[0], a[l], u) >= 0 & turn(a[l], a[l + 1], u) >=
80         0 & turn(a[l + 1], a[0], u) >= 0;
81 }
82 int search(auto f) { // 凸包求极值, 需要 C++17
83     int l = 0, r = n - 1;
84     int d = f(a[r], a[l]) ? (swap(l, r), -1) : 1;
85     while (d * (r - l) > 1) {
86         int mid = (l + r) / 2;
87         if (f(a[mid], a[l]) > f(a[mid], a[mid - d]))
88             l = mid;
89         else
90             r = mid;
91     }
92     return l;
93 }
94 pair<int, int> gettan(cpu) { //
95     return // 严格在凸包外; 需要边界上时, 特判 a[n-1] -> a[0]
96         {search([](cp x, cp y) { return turn(u, y, x) > 0; }),
97          search([](cp x, cp y) { return turn(u, x, y) > 0; })};
98 }
99 point at(int i) { return a[i % n]; }
100 int inter(cp u, cp v, int l, int r) {
101     int sl = turn(u, v, at(l));
102     while (l + 1 < r) {
103         int m = (l + r) / 2;
104         if (sl == turn(u, v, at(m)))
105             l = m;
106         else
107             r = m;
108     }
109     return l % n;
110 }
111 bool getinter(cpu, cpv, inti, intj) { //
112     int p0 = search([](cp x, cp y) { return det(v - u, x - u) <
113         det(v - u, y - u); }),
114     p1 = search([](cp x, cp y) { return det(v - u, x - u) >
115         det(v - u, y - u); });
116     if (turn(u, v, a[p0]) * turn(u, v, a[p1]) < 0) {
117         if (p0 > p1) swap(p0, p1);
118         i = inter(u, v, p0, p1);
119         j = inter(u, v, p1, p0 + n);
120         return true;
121     } else
122         return false;
123 }
124 LD near(cp u, int l, int r) {
125     if (l > r) r += n;
126     int sl = sgn(dot(u - at(l), at(l + 1) - at(l)));
127     LD ret = p2s(u, {at(l), at(l + 1)});
128     while (l + 1 < r) {
129         int m = (l + r) / 2;
130         if (sl == sgn(dot(u - at(m), at(m + 1) - at(m))))
131             l = m;
132         else
133             r = m;
134     }
135     return min(ret, p2s(u, {at(l), at(l + 1)}));
136 }
137 LD getnear(cpu) { //
138     if (inside(u)) return 0;
139     auto [x, y] = gettan(u);
140     return min(near(u, x, y), near(u, y, x));
141 }
142 // Dynamic convex hull
143 struct hull { // upper hull, left to right
144     set<point> a;
145     LL tot;
146     hull() { tot = 0; }
147     LL calc(auto it) {
148         auto u = it == a.begin() ? a.end() : prev(it);
149         auto v = next(it);
150         LL ret = 0;
151         if (u != a.end()) ret += det(*u, *it);
152         if (v != a.end()) ret += det(*it, *v);
153         if (u != a.end() & v != a.end()) ret -= det(*u, *v);
154         return ret;
155     }
156     void insert(point p) {

```

```

156     if (!a.size()) {
157         a.insert(p);
158         return;
159     }
160     auto it = a.lower_bound(p);
161     bool out;
162     if (it == a.begin())
163         out = (p < *it); // special case
164     else if (it == a.end())
165         out = true;
166     else
167         out = turn(*prev(it), *it, p) > 0;
168     if (!out) return;
169     while (it != a.begin()) {
170         auto o = prev(it);
171         if (o == a.begin() || turn(*prev(o), *o, p) < 0)
172             break;
173         else
174             erase(o);
175     }
176     while (it != a.end()) {
177         auto o = next(it);
178         if (o == a.end() || turn(p, *it, *o) < 0)
179             break;
180         else
181             erase(it), it = o;
182     }
183     tot += calc(a.insert(p).first);
184 }
185 void erase(auto it) {
186     tot -= calc(it);
187     a.erase(it);
188 }
189 };

```

## 8.6 三角形

```

1 // From Nemesis
2 point incenter(cp a, cp b, cp c) { // 内心
3     double p = dis(a, b) + dis(b, c) + dis(c, a);
4     return (a * dis(b, c) + b * dis(c, a) + c * dis(a, b)) / p;
5 }
6 point circumcenter(cp a, cp b, cp c) { // 外心
7     point p = b - a, q = c - a, s(dot(p, p) / 2, dot(q, q) / 2);
8     double d = det(p, q);
9     return a + point(det(s, {p.y, q.y}), det({p.x, q.x}, s)) /
10         d;
11 }
12 point orthocenter(cp a, cp b, cp c) { // 重心
13     return a + b + c - circumcenter(a, b, c) * 2.0;
14 }
15 point fermatpoint(cpa, cpb, cpc) { //
16     if (a == b) return a;
17     if (b == c) return b;
18     if (c == a) return c;
19     double ab = dis(a, b), bc = dis(b, c), ca = dis(c, a);
20     double cosa = dot(b - a, c - a) / ab / ca;
21     double cosb = dot(a - b, c - b) / ab / bc;
22     double cosc = dot(b - c, a - c) / ca / bc;
23     double sq3 = PI / 3.0;
24     point mid;
25     if (sgn(cosa + 0.5) < 0)
26         mid = a;
27     else if (sgn(cosb + 0.5) < 0)
28         mid = b;
29     else if (sgn(cosc + 0.5) < 0)
30         mid = c;
31     else if (sgn(det(b - a, c - a)) < 0)
32         mid = lineinter({a, b + (c - b).rot(sq3)}, {b, c + (a -
33             c).rot(sq3)});
34     else
35         mid = lineinter({a, c + (b - c).rot(sq3)}, {c, b + (a -
36             b).rot(sq3)});
37     return mid;
38 } // minimize(|A-x|+|B-x|+|C-x|)

```

## 8.7 多边形

```

1 vp Polycut(vpp, cll) // O(n)
2 {
3     if (p.empty()) return vp();
4     vp ret;
5     int n = p.size();
6     p = pushback(p[0]);
7     for (int i = 0; i < n; ++i) {
8         if ((p[i] - l.s) ^ (l.t - l.s)) <= 0)
9             ret.pushback(p[i]);

```



```

10         if (two_size(p[i], p[i + 1], l))
11             ret.push_back(ll_intersection(l, L(p[i], p[i + 1])));
12     } // p.pop_back();
13     return ret;
14 }
15
16 LD Polyarea(vpp){
17     LD ar = 0;
18     int n = p.size();
19     for (int i = 0, j = n - 1; i < n; j = i++)
20         ar += p[i] ^ p[j];
21     return fabs(ar) / 2;
22 }
23
24 // Below is from Nemesis
25
26 // 多边形与圆交
27 LD angle(cp u, cp v) {
28     return 2 * asin(dis(u.unit(), v.unit()) / 2);
29 }
30 LD area(cp s, cp t, LD r) { // 2 * area
31     LD theta = angle(s, t);
32     LD dis = p2s({0, 0}, {s, t});
33     if (sgn(dis - r) >= 0) return theta * r * r;
34     auto [u, v] = line_circle_inter({s, t}, {{0, 0}, r});
35     point lo = sgn(det(s, u)) >= 0 ? u : s;
36     point hi = sgn(det(v, t)) >= 0 ? v : t;
37     return det(lo, hi) + (theta - angle(lo, hi)) * r * r;
38 }
39 LD solve(vector<point> p, cc c) {
40     LD ret = 0;
41     for (int i = 0; i < (int)p.size(); ++i) {
42         auto u = p[i] - c.c;
43         auto v = p[(i + 1) % p.size()] - c.c;
44         int s = sgn(det(u, v));
45         if (s > 0)
46             ret += area(u, v, c.r);
47         else if (s < 0)
48             ret -= area(v, u, c.r);
49     }
50     return abs(ret) / 2;
51 } // ret 在 p 逆时针为正

```

## 8.8 半平面交

```

1 // From Nemesis
2 int half(cp a) { return a.y > 0 || (a.y == 0 & a.x > 0) ? 1 : 0;
3     ↪ }
4 bool turn_left(cla, clb, clc) {
5     return turn(a.s, a.t, line_inter(b, c)) > 0;
6 }
7 bool ispara(cla, clb) { return !sgn(det(a.t - a.s, b.t - b.s)); }
8 bool cmp(cl a, cl b) {
9     int sign = half(a.t - a.s) - half(b.t - b.s);
10    int dir = sgn(det(a.t - a.s, b.t - b.s));
11    if (!dir || !sign)
12        return turn(a.s, a.t, b.t) < 0;
13    else
14        return sign ? sign > 0 : dir > 0;
15 }
16 vector<point> hpi(vector<line> h) { // 半平面交
17     sort(h.begin(), h.end(), cmp);
18     vector<line> q(h.size());
19     int l = 0, r = -1;
20     for (auto i : h) {
21         while (l < r & !turn_left(i, q[r - 1], q[r]))
22             --r;
23         while (l < r & !turn_left(i, q[l], q[l + 1]))
24             ++l;
25         if (l <= r & ispara(i, q[r])) continue;
26         q[++r] = i;
27     }
28     while (r - l > 1 & !turn_left(q[l], q[r - 1], q[r]))
29         --r;
30     while (r - l > 1 & !turn_left(q[r], q[l], q[l + 1]))
31         ++l;
32     if (r - l < 2) return {};
33     vector<point> ret(r - l + 1);
34     for (int i = l; i <= r; ++i)
35         ret[i - l] = line_inter(q[i], q[i == r ? l : i + 1]);
36     return ret;
37 }
38 // 空集会在队列里留下一个开区间；开区间会被判定为空集。
39 // 为了保证正确性，一定要加足够大的框，尽可能避免零面积区域。
40 // 实在需要零面积区域边缘，需要仔细考虑 turn_left

```

## 9 杂项

### 9.1 生成树计数

【根据度数求方案】对于给定每个点度数为  $d_i$  的无根树，方案数为：

$$\frac{(n-2)!}{\prod_{i=1}^n (d_i - 1)!}$$

【根据连通块数量与大小求方案】一个  $n$  个点  $m$  条边的带标号无向图有  $k$  个连通块，每个连通块大小为  $s_i$ ，需要增加  $k-1$  条边使得整个图联通，方案数为：（但是当  $k=1$  时需要特判）

$$n^{k-2} \cdot \prod_{i=1}^k s_i$$

证明只需考虑 prufer 序列即可。

### 9.2 类欧几里得

$ax + by = n$  的几何意义可以想象为一条直线，那么  $[0, n]$  中可以被表示出来的整数就是  $(0, 0)$ ,  $(\frac{n}{a}, 0)$ ,  $(0, \frac{n}{b})$  为顶点的三角形在第一象限内含有的整点个数。

显然的结论就是，在  $[0, n]$  可以表示出的整数数量为：

$$\sum_{x=0}^{\lfloor \frac{n}{a} \rfloor} \left\lfloor \frac{n - ax}{b} \right\rfloor$$

类欧几里得可以在  $\mathcal{O}(\log \max(a, b))$  的时间内解决此类问题。

求  $\sum_{i=0}^n \lfloor \frac{ai+b}{c} \rfloor$ ：

```

1 ll solve(ll a, ll b, ll c, ll n) {
2     if (a == 0) return (n + 1) * (b / c) % mod;
3     if (a >= c || b >= c)
4         return (n * (n + 1) % mod * inv2 % mod * (a / c) % mod +
5             ↪ (n + 1) * (b / c) % mod + solve(a % c, b % c, c, n))
6             ↪ % mod;
7     ll m = (a * n + b) / c;
8     return (n * (m % mod) % mod - solve(c, c - b - 1, a, m - 1)
9         ↪ + mod) % mod;
10 }

```

求  $\sum_{i=0}^n \lfloor \frac{ai+b}{c} \rfloor^2$  和  $\sum_{i=0}^n i \lfloor \frac{ai+b}{c} \rfloor$ ，分别对应以下的  $g$  和  $h$ ：

```

1 struct Euclid {
2     ll f, g, h;
3 };
4 Euclid solve(ll a, ll b, ll c, ll n) {
5     Euclid ans, tmp;
6     if (a == 0) {
7         ans.f = (n + 1) * (b / c) % mod;
8         ans.g = n * (n + 1) % mod * (b / c) % mod * inv2 % mod;
9         ans.h = (n + 1) * (b / c) % mod * (b / c) % mod;
10        return ans;
11    }
12    if (a >= c || b >= c) {
13        tmp = solve(a % c, b % c, c, n);
14        ans.f = (n * (n + 1) % mod * inv2 % mod * (a / c) % mod
15            ↪ + (n + 1) * (b / c) % mod + tmp.f) % mod;
16        ans.g = (n * (n + 1) % mod * (2 * n + 1) % mod * (a / c)
17            ↪ % mod * inv6 % mod + n * (n + 1) % mod * (b / c) %
18            ↪ mod * inv2 % mod + tmp.g) % mod;
19        ans.h = ((a / c) * (a / c) % mod * n % mod * (n + 1) %
20            ↪ mod * (n * 2 + 1) % mod * inv6 % mod +
21            ↪ (b / c) * (b / c) % mod * (n + 1) % mod + (a /
22            ↪ c) * (b / c) % mod * n % mod * (n + 1) %
23            ↪ mod +
24            ↪ 2 * (b / c) % mod * tmp.f % mod + 2 * (a / c) %
25            ↪ mod * tmp.g % mod + tmp.h) % mod;
26        return ans;
27    }
28    ll m = (a * n + b) / c;
29    tmp = solve(c, c - b - 1, a, m - 1);
30    ans.f = (n * (m % mod) % mod + mod - tmp.f) % mod;
31    ans.g = (n * (m % mod) % mod * (n + 1) % mod - tmp.h -
32        ↪ tmp.f) % mod * inv2 % mod;

```

```

26     ans.h = (n * (m % mod) % mod * (m + 1) % mod - 2 * tmp.g - 2
        ↪ * tmp.f - ans.f) % mod;
27     return ans;
28 }
29
30 ans.f = (ans.f % mod + mod) % mod;
31 ans.g = (ans.g % mod + mod) % mod;
32 ans.h = (ans.h % mod + mod) % mod;

```

```

3 while True:
4     os.system("python3 data.py > in")
5     os.system("/usr/bin/time -f 'test Time=%es' ./test < in >
        ↪ out")
6     os.system("/usr/bin/time -f 'std Time=%es' ./std < in >
        ↪ ans")
7     if os.system("diff out ans >/dev/null"):
8         print("WA")
9         exit(1)
10    print("AC")

```

## 10 其它工具

### 10.1 编译命令

```

1 g++ X.cpp -Wall -O2 -fsanitize=undefined -fsanitize=address X
2 # -fsanitize=undefined: 检测未定义行为
3 # -fsanitize=address: 检测内存溢出

```

### 10.2 快读

```

1 char *p1, *p2, buf[100000];
2 #define gc() (p1 == p2 ? (p2 = (p1 = buf) + fread(buf, 1, 100000,
        ↪ stdin), p1 == p2) ? EOF : *p1++)
3 int read() {
4     int x = 0, f = 1;
5     char ch = gc();
6     while (!isdigit(ch)) { if (ch == '-') f = -1; ch = gc(); }
7     while (isdigit(ch)) x = x * 10 + ch - '0', ch = gc();
8     return x * f;
9 }

```

### 10.3 Python Hints

```

1 from itertools import * # itertools 库
2 # 笛卡尔积
3 product('ABCD', 'xy') # Ax Ay Bx By Cx Cy Dx Dy
4 product(range(2), repeat=3) # 000 001 010 011 100 101 110 111
5 # 排列
6 permutations('ABCD', 2) # AB AC AD BA BC BD CA CB CD DA DB DC
7 # 组合
8 combinations('ABCD', 2) # AB AC AD BC BD CD
9 # 有重复的组合
10 combinations_with_replacement('ABC', 2) # AAABACBBBCCC
11
12
13 from random import * # random 库
14 randint(1, r) # 在 [1, r] 内的随机整数
15 choice([1, 2, 3, 5, 8]) # 随机选择序列中一个元素
16 sample([1, 2, 3, 4, 5], k=2) # 随机抽样两个元素
17 shuffle(x) # 原地打乱序列 x
18 l, r = sorted(choices(range(1, N+1), k=2)) # 生成随机区间 [l, r]
19 binomialvariate(n, p) # 返回服从 B(n, p) 的一个变量
20 normalvariate(mu, sigma) # 返回服从 N(mu, sigma) 的一个变量
21
22 # 列表操作
23 l = sample(range(100000), 10)
24 l.sort() # 原地排序
25 l.sort(key=lambda x: x%10) # 按末尾排序
26 from functools import cmp_to_key
27 l.sort(key=cmp_to_key(lambda x, y: y - x)) #
28 sorted(l) # 非原地排序
29 l.reverse() # reversed(l)
30
31 # 复数
32 a = 1+2j
33 print(a.real, a.imag, abs(a), a.conjugate())
34
35 # 高精度小数
36 from decimal import Decimal, getcontext, FloatOperation,
    ROUND_HALF_EVEN
37 getcontext().prec = 100 # 设置有效位数
38 getcontext().rounding = getattr(ROUND_HALF_EVEN) #
39 getcontext().traps[FloatOperation] = True # 禁止 float 混合运算
40 a = Decimal("114514.1919810")
41 print(a, f"{a:.2f}")
42 a.ln() a.log10() a.sqrt() a**2

```

### 10.4 对拍器

```

1 import os
2

```

### 10.5 常数表

$n$	$\log_{10} n$	$n!$	$C(n, n/2)$	$\text{lcm}(1 \dots n)$
2	0.301030	2	2	2
3	0.477121	6	3	6
4	0.602060	24	6	12
5	0.698970	120	10	60
6	0.778151	720	20	60
7	0.845098	5040	35	420
8	0.903090	40320	70	840
9	0.954243	362880	126	2520
10	1.000000	3628800	252	2520
11	1.041393	39916800	462	27720
12	1.079181	479001600	924	27720
15	1.176091	1.31e12	6435	360360
20	1.301030	2.43e18	184756	232792560
25	1.397940	1.55e25	5200300	2.68e10
30	1.477121	2.65e32	155117520	2.33e12

$n \leq$	$10^1$	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$
$\max\{\omega(n)\}$	2	3	4	5	26	7
$\max\{d(n)\}$	4	12	32	64	128	240
$\pi(n)$	4	25	168	1229	9592	78498
$n \leq$	$10^7$	$10^8$	$10^9$	$10^{10}$	$10^{11}$	$10^{12}$
$\max\{\omega(n)\}$	8	8	9	10	10	11
$\max\{d(n)\}$	448	768	1344	2304	4032	6720
$\pi(n)$	664579	5761455	5.08e7	4.55e8	4.12e9	3.7e10
$n \leq$	$10^{13}$	$10^{14}$	$10^{15}$	$10^{16}$	$10^{17}$	$10^{18}$
$\max\{\omega(n)\}$	12	12	13	13	14	15
$\max\{d(n)\}$	10752	17280	26880	41472	64512	103680
$\pi(n)$	$\pi(x) \sim x / \ln(x)$					

### 10.6 试机赛

- 测试编译器版本。
  - #include<bits/stdc++.h>
  - pb\_ds
  - C++20: cin>>(s+1);
  - C++17: auto [x,y]=pair1,"abc";
  - C++11: auto x=1;
- 测试 \_\_int128, \_\_float128, long double
- 测试 pragma 是否 CE。
- 测试 -fsanitize=address, undefined
- 测试本地性能

### 10.7 阴间错误集锦

- 多测不清空。
- 该开 long long 的地方不开 long long。一般情况下建议直接 #define int long long。
- 注意变量名打错。例如 u 打成 v 或 a 打成 t。建议读代码的时候专门检查此类错误。