

Вопросы

Author: Эрик Шелбогашев <https://t.me/erxxshll6y>

Есть ошибка? Дайте знать!

Вопрос 1.

Кривые в пространстве, параметризация кривой, длина кривой. Касательная к кривой.

кривые в пространстве

Непрерывная кривая - множество

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : x = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \quad t \in \Omega\}$$

(или же область значений некоторой вектор-функции, определенной на Ω).

параметризация кривой

Параметризация кривой - задание кривой с помощью функций $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ и параметр-переменной t .

длина кривой

Пусть Γ есть параметризованная кривая в \mathbb{R}^n с параметризацией $\Phi(t)$, $t \in [a, b] = \Omega$, и пусть на отрезке $[a, b]$ задано разбиение τ — т.е. задана система точек $\{t_i\}_{i=0}^m$ такая, что $t_0 = a$, $t_m = b$, $t_{i-1} < t_i$, $i = 1, \dots, m$. Положим

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^m |\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})|.$$

Очевидно, что σ_τ есть длина ломаной с вершинами в точках $\Phi(a), \Phi(t_1), \dots, \Phi(t_{m-1}), \Phi(b)$.

Определим величину S_Γ как точную верхнюю грань сумм σ_τ , предполагая, что \sup берется по всевозможным разбиениям τ отрезка $[a, b]$:

$$S_\Gamma = \sup_{\tau} \sigma_\tau.$$

Величина S_Γ называется длиной кривой Γ ; если $S_\Gamma < +\infty$, то кривая Γ называется спрямляемой.

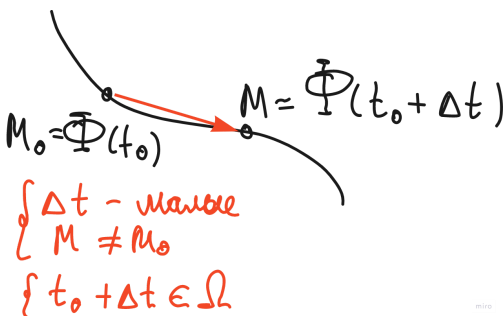
касательная к кривой

Касательная к кривой

Прямая в точке M_0 кривой Γ параллельная вектору

$\vec{l}_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{l}(\Delta t)$. Является предельным положением секущей

(через точки M_0, M).



Вопрос 2. #доделать

Криволинейные интегралы 1-го рода, их свойства.

криволинейные интегралы 1-го рода

свойства

Вопрос 3. #доделать

Криволинейные интегралы 2-го рода, их свойства.

криволинейные интегралы 2-го рода

свойства

Вопрос 5.

Формула Грина

Устанавливает связь между криволинейным интегралом по замкнутому контуру C и двойным интегралом по односвязной области D , ограниченной этим контуром.

Является частным случаем теоремы Стокса.

Формулировка

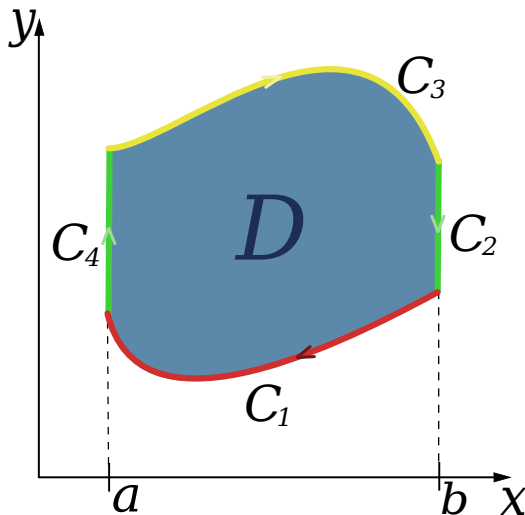
Пусть

1. C - положительно ориентированная кусочно-гладкая замкнутая кривая на плоскости.
2. D - область, ограниченная кривой C .
3. $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$ определены в области D и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Тогда выполняется

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Доказательство для простой области



Пусть

1. $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$ - элементарная относительно Oy область.

2. Кривая $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ обходится по часовой стрелке.

Тогда

$$\begin{aligned}
 \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \\
 &= \int_a^b dx [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] = \\
 &= \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx \quad (1)
 \end{aligned}$$

Оба интеграла представим как криволинейные интегралы II рода (C_1 от b до a , поэтому в (2) минусы уничтожаются)

$$(2) \quad - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx = \int_{C_1} P(x, y) dx$$

$$(3) \quad \int_a^b P(x, y_2(x)) dx = \int_{C_3} P(x, y) dx$$

Криволинейные интегралы по C_2 и C_4 равны нулю, так как $x = \text{const}$

$$(4) \quad \int_{C_2} P(x, y) dx = 0$$

$$(5) \quad \int_{C_4} P(x, y) dx = 0$$

В выражение (1) произведем замену (2) и (3), а также прибавим (4) и (5) (т.к. они равны нулю, на значение не влияют)

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx \stackrel{2,3,4,5}{=} \\ &= \int_{C_3} P(x, y) dx + \int_{C_1} P(x, y) dx + \int_{C_2} P(x, y) dx + \int_{C_4} P(x, y) dx. \end{aligned}$$

Обход по замкнутой кривой C был в отрицательном направлении (по часовой стрелке)

$$(6) \quad \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \oint_C P(x, y) dx$$

Аналогично доказывается и по Q (если D элементарная по Ox).

$$(7) \quad \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_C Q(x, y) dy$$

Сложим (6) и (7)

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Теорема доказана

Вопрос 6. #доделать

Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

Вопрос 7. #доделать

Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования - трехмерный случай.

Вопрос 8. #доделать

Поверхности в \mathbb{R}^n . Касательная плоскость и нормаль. Ориентация поверхности. Кусочно-гладкие поверхности. Первая квадратичная форма поверхности.

поверхности в \mathbb{R}^n

касательная плоскость и нормаль

ориентация поверхности

кусочно-гладкие поверхности

первая квадратичная форма поверхности

Вопрос 9. #доделать

Поверхностные интегралы 1-го рода, их свойства.

поверхностные интегралы 1-го рода

свойства

Вопрос 10. #доделать

Поверхностные интегралы 2-го рода, их свойства.

поверхностные интегралы 2-го рода

свойства

Вопрос 11.

Формула Гаусса-Остроградского

Связывает поток непрерывно-дифференцируемого векторного поля через замкнутую поверхность и интеграл от дивергенции этого поля по объёму, ограниченному этой поверхностью.

Применяется для преобразования объёмного интеграла в интеграл по замкнутой поверхности и наоборот.

Формулировка

Пусть

1. Область G из R^3 разбивается кусочно-гладкими поверхностями на конечное число элементарных областей.
2. Функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ и их частные производные $P_x(x, y, z)$, $Q_y(x, y, z)$, $R_z(x, y, z)$ определены и непрерывны при $(x, y, z) \in \bar{G}$.

Тогда выполняется

$$\int_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds = \iiint_G (P_x + Q_y + R_z) dx dy dz,$$

где

$$\cos \alpha ds = dy dz,$$

$$\cos \beta ds = dz dx,$$

$$\cos \gamma ds = dx dy.$$

Доказательство

Пусть G элементарна

(в ином случае произведём доказательство для каждой из частей и объединим интегралы, учитывая взаимоуничтожение общих границ областей).

Рассмотрим интеграл

$$\iiint_G R_z(x, y, z) dx dy dz.$$

Вследствие элементарности G относительно оси Oz имеем

$$\begin{aligned} \iiint_G R_z(x, y, z) dx dy dz &= \iint_{\Omega} \left(\int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} R_z(x, y, z) dz \right) dx dy = \\ &= \iint_{\Omega} [R(x, y, \psi(x, y)) - R(x, y, \varphi(x, y))] dx dy. \end{aligned}$$

С другой стороны, учитывая представление $z = \varphi(x, y)$ и $z = \psi(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, поверхностей S_1, S_2 , вычисляя нормаль (чтобы узнать знак ориентации)

$$\vec{n}_{\psi} = (-\psi'_x, -\psi'_y, 1)$$

$$\vec{n}_{\varphi} = (-\varphi'_x, -\varphi'_y, 1)$$

Получим

$$\iint_{\Omega} R(x, y, \psi(x, y)) dx dy = \iint_{S_2^+} R(x, y, \psi(x, y)) dx dy,$$

$$\iint_{\Omega} R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy = \iint_{S_1^+} R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy.$$

Приведем их к общей внешней нормали (нижний вниз, верхний вверх)

$$\int_{S_2^+} R dx dy = \int_{S_2} R \cos \gamma ds,$$

$$\int_{S_1^+} R dx dy = - \int_{S_1} R \cos \gamma ds.$$

Учитывая равенство "площадь под стенками цилиндра (боковые стенки) есть ноль"

$$\int_{S_0} R \cos \gamma dS = 0$$

получаем

$$\begin{aligned} \iiint_G R_z(x, y, z) dx dy dz &= \int_{S_1} R \cos \gamma ds - \\ &- \left(- \int_{S_2} R \cos \gamma ds. \right) + \int_{S_0} R \cos \gamma ds = \int_S R \cos \gamma ds. \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что имеют место формулы

$$\iiint_G P_x(x, y, z) dx dy dz = \int_S P \cos \alpha ds,$$

$$\iiint_G Q_y(x, y, z) dx dy dz = \int_S P \cos \beta ds.$$

Суммируя последние три формулы получим требуемое равенство.

Формула будет работать и для составных элементарных областей

$$G = G_1 \cup G_2 \cup S^*,$$

где S^* - разделяющая эти множества кусочно-гладкая поверхность (стенка).

Вопрос 12.

Формула Стокса

Циркуляция поля по замкнутому контуру равна потоку ротора этого поля через поверхность, ограниченную этим контуром.

Условие формулы Грина

1. C - положительно ориентированная кусочно-гладкая замкнутая кривая на плоскости.
2. D - область, ограниченная кривой C .
3. $P = P(x, y)$, $Q = Q(x, y)$ определены в области D и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$.

Формулировка

Пусть

1. $S \subset \mathbb{R}^3$ - поверхность с параметризацией $\Phi(u, v)$, где $(u, v) \in \bar{\Omega}$.
2. $\Phi(u, v)$ дважды непрерывно-дифференцируема в $\bar{\Omega}$, а S не имеет особых точек (т.е. она сама непрерывна и её частные производные непрерывны).
3. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - ограниченная область, для которой выполняется условие формулы Грина.
4. $\gamma_0 = \partial\Omega$ - замкнутая кусочно-гладкая кривая без самопересечений с положительным направлением обхода и параметризацией $(u(t), v(t))$, где $t \in [a, b]$.
5. на S определена (единичная) нормаль $\vec{\nu} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$.
6. γ - кривая в \mathbb{R}^3 с параметризацией $\Phi(u(t), v(t))$, где $t \in [a, b]$, являющаяся границей (краем) поверхности S .
7. $G \subset \mathbb{R}^3$ - область такая, что $S \subset G$ и $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ определены при $(x, y, z) \in G$. (область, ограниченная поверхностью S)

8. P, Q, R , а также все их первые частные производные существуют и непрерывны в G .

Тогда выполняется

$$\oint_{\gamma} (P dx + Q dy + R dz) = \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right) ds.$$

Доказательство

1. Перейдем от криволинейного интеграла II рода по кривой γ к криволинейному интегралу II рода по кривой γ_0 в области параметров Ω .

Пусть

$$\Phi(u, v) = (f(u, v), g(u, v), h(u, v)).$$

Тогда по определению криволинейного интеграла второго рода (и параметризации)

$$(1) \quad I = \oint_{\gamma} P(x, y, z) dx = \int_a^b P(f, g, h) \frac{\partial f}{\partial t} dt,$$

где

$$f = f(u(t), v(t))$$

$$g = g(u(t), v(t))$$

$$h = h(u(t), v(t))$$

производная сложной функции:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f'_u u'_t + f'_v v'_t.$$

Подставим в (1):

$$\begin{aligned}
 I &= \int_a^b P(f, g, h) \underbrace{[f'_u u'_t + f'_v v'_t]}_{\underbrace{f'_u u'_t}_{du} + \underbrace{f'_v v'_t}_{dv}} dt = \\
 &= \oint_{\gamma_0} P(f, g, h) [f'_u du + f'_v dv].
 \end{aligned}$$

На кривой γ_0 функции u и v зависимы лишь от t , следовательно: $du = u'(t) dt$ и $dv = v'(t) dt$.

2. Перейдем к двойному интегралу по Ω .

Пусть

$$A = P(f, g, h) f'_u du, \quad B = P(f, g, h) f'_v dv.$$

Так как (2) Φ дважды-дифференцируема (т.е. f, g, h, f'_u, f'_v), P также непрерывна и имеет непрерывные производные в G (8), используя (3, 4) воспользуемся формулой Грина:

$$I = \oint_{\gamma_0} (A du + B dv) = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \right) du dv.$$

Т.к. A, B - сложные функции. Поставим производные, используя правила производной произведения и сложной функции и учитывая $f = x, g = y, h = z$ на их областях определения из условия $(\bar{\Omega}, G)$.

$$\begin{aligned}
 I &= \iint_{\Omega} \left(\left(\cancel{\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u}}^1 + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial u} \right) \frac{\partial f}{\partial v} + P \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}}^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\cancel{\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v}}^1 + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial v} \right) \frac{\partial f}{\partial u} - P \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}}^2 \right) du dv.
 \end{aligned}$$

Сократим и перегруппируем

$$(2) \quad I = \iint_{\Omega} \left(\underbrace{\frac{\partial P}{\partial z} \left(\frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial u} \right)}_{(4)} + \underbrace{\frac{\partial P}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial u} \right)}_{(5) \text{ с минусом}} \right) d\alpha$$

3. Перейдем к поверхностному интегралу по S .

Определение

$$\iint_S \xi \, ds = \iint_{\Omega} \xi \sqrt{EG - F^2} \, dx \, dy,$$

$$E = (\Phi'_u, \Phi'_u) = f_u^2 + g_u^2 + h_u^2,$$

$$F = (\Phi'_u, \Phi'_v) = f_u f_v + g_u g_v + h_u h_v,$$

$$G = (\Phi'_v, \Phi'_v) = f_v^2 + g_v^2 + h_v^2.$$

Тогда (здесь A, B уже другие)

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= f_u^2 f_v^2 + f_u^2 g_v^2 + f_u^2 h_v^2 + g_u^2 f_v^2 + g_u^2 g_v^2 + g_u^2 h_v^2 + h_u^2 f_v^2 + h_u^2 g_v^2 + h_u^2 h_v^2 - \\ &\quad - f_u^2 f_v^2 - g_u^2 g_v^2 - h_u^2 h_v^2 - 2f_u f_v g_u g_v - 2f_u f_v h_u h_v - 2g_u g_v h_u h_v = \\ &= f_u^2 g_v^2 - 2f_u f_v g_u g_v + g_u^2 f_v^2 + \\ &\quad + f_u^2 h_v^2 - 2f_u f_v h_u h_v + h_u^2 f_v^2 + \\ &\quad + g_u^2 h_v^2 - 2g_u g_v h_u h_v + h_u^2 g_v^2 = \\ &= (f_u g_v - g_u f_v)^2 + (f_u h_v - h_u f_v)^2 + (g_u h_v - h_u g_v)^2 = \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_u & g_u & h_u \\ f_v & g_v & h_v \end{vmatrix}^2 = \\ &= |[\Phi'_u, \Phi'_v]|^2 = \\ &= |\vec{n}|^2 = \\ &= A^2 + B^2 + C^2, \end{aligned}$$

где $\vec{n} = (A, B, C)$ - вектор нормали, вычисляемый по формуле (векторное произведение частных производных):

$$(3) \quad A = \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial h}{\partial u}$$

$$(4) \quad B = \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial h}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial v}$$

$$(5) \quad C = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial u}$$

Заметим, что

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \stackrel{(5)}{=} \vec{\nu} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} (A, B, C)$$

Значит

$$\cos \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Произведем в (2) замену (4, 5):

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial z} B - \frac{\partial P}{\partial y} C \right) du dv = \\ &= \iint_S \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left(\frac{\partial P}{\partial z} B - \frac{\partial P}{\partial y} C \right) ds = \\ &= \iint_S \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \left(\frac{\partial P}{\partial z} B - \frac{\partial P}{\partial y} C \right) ds = \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right) ds = \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) ds. \end{aligned}$$

Получили поверхностный интеграл

$$(6) \quad I = \oint_{\gamma} P(x, y, z) dx = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) ds.$$

Аналогично получаются и

$$(7) \quad \int_{\gamma} Q dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos \gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \alpha \right) ds.$$

$$(8) \quad \int_{\gamma} R dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos \beta \right) ds.$$

Суммируем (6), (7), (8) и получим требуемое равенство.
Теорема доказана.

Вопрос 13. #доделать

Градиент, дивергенция, ротор, циркуляция и поток векторного поля.

градиент

дивергенция

ротор

циркуляция

поток

Вопрос 14. #доделать

Потенциальное и соленоидальное векторные поля.

потенциальное векторное поле

соленоидальное векторное поле

Вопрос 15. #доделать

Вычисление некоторых физических характеристик с помощью криволинейных и поверхностных интегралов

(нахождение массы, координат центра тяжести, моментов).

Вопрос 16. #доделать

Метрические, линейные, нормированные и банаховы пространства. Множества в них

метрические пространства

линейные пространства

нормированные пространства

банаховы пространства

Вопрос 17. #доделать

Непрерывность нормы. Эквивалентность всех норм в конечномерном пространстве.

непрерывность нормы

эквивалентность всех норм в конечномерном пространстве

Вопрос 18. #доделать

Пространства. Сепарабельность пространств. Несепарабельность пространства.

пространства

сепарабельность пространств

несепарабельность пространства

Вопрос 21. #доделать

Фактор-пространство. Нормируемость фактор-пространства

фактор-пространство

нормируемость фактор-пространства

Вопрос 22.

Гильбертовы пространства. Задача о наилучшем приближении. Разложение элемента гильбертова пространства по подпространству.

Унитарное пространство - пространство X , для которого выполняются следующие условия:

1. X - векторное пространство.
2. На X определена операция умножения на комплексные числа.
3. Каждой паре $x, y \in X$ поставлено в соответствие комплексное число (x, y) - скалярное произведение x на y .
4. Для скалярного произведения выполняются следующие условия:

1. $(x, x) \geq 0, \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \Theta.$
2. $(x, y) = \overline{(y, x)}.$
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y).$
4. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z).$

Здесь x, y, z - произвольные элементы из X , λ - произвольное комплексное число.

Евклидово пространство - пространство X такое, что выполняются следующие условия:

1. X - линейное пространство над \mathbb{R} .
2. Определено отображение $X \times X \rightarrow \mathbb{R}$. (требуется для скалярного произведения)
3. Выполняются условия: (здесь $\lambda \in \mathbb{R}$)
1. $(x, x) \geq 0, \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \Theta.$

2. $(x, y) = \overline{(y, x)}$.
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.
4. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

Норма евклидова или унитарного пространства

В евклидовом или унитарном пространстве X функция $f(x)$, определенная при $x \in X$ равенством $f(x) = (x, x)^{\frac{1}{2}}$, обладает всеми свойствами нормы:

1. $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

гильбертовы пространства

Гильбертово пространство H - унитарное или евклидово пространство, полное по норме, порожденной имеющимся в этом пространстве скалярным произведением.

задача о наилучшем приближении

Последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ метрического пространства (X, ρ) называется **фундаментальной**, если она удовлетворяет **критерию Коши**:

Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N ,
что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ для всех $n, m > N$.

Утверждение 2.5.2. В евклидовом или унитарном пространстве для любых двух элементов x и y выполняется равенство

$$(x + y, x + y) + (x - y, x - y) = 2[(x, x) + (y, y)].$$

Теорема

Пусть

1. H - гильбертово пространство.
2. L - подпространство H .
3. Фиксированный $x \in H \setminus L$.

Тогда

1. В L имеется z , являющийся элементом наилучшего приближения для x .
2. z единственный.

План доказательства

Существование

1. Составляем неравенство (1) из определения точной нижней грани и расстояния до подпространства.
2. Через фундаментальность показываем, что последовательность z_n имеет конечный предел при $n \rightarrow \infty$. (сама же она достигается путем метрических преобразований)

Единственность

1. Используя утверждение 2.5.2 сводим к противоречию.

Доказательство

Существование

Доказательство. Обозначим $d = \rho(x, L)$. Согласно определению расстояния от x до подпространства L и согласно определению точной нижней грани, для любого натурального числа n найдется элемент z_n , принадлежащий L и такой, что выполняются неравенства

$$d \leq \|x - z_n\| < d + \frac{1}{n}.$$

Покажем, что последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет фундаментальной.

Используя утверждение 2.5.2 для элементов $z_n - x$ и $z_m - x$, получим

$$\|z_n - z_m\|^2 = \|z_n - x + x - z_m\|^2 = 2\|x - z_n\|^2 + 2\|x - z_m\|^2 - \|2x - z_n - z_m\|^2.$$

Имеем

$$\|2x - z_n - z_m\|^2 = 4 \underbrace{\left\| x - \frac{z_n + z_m}{2} \right\|^2}_{\geq d^2} \geq 4d^2$$

Поскольку элемент $\frac{z_n + z_m}{2}$ принадлежит L , то выполняется

$$\|2x - z_n - z_m\|^2 \geq 4d^2.$$

Далее, имеют место неравенства

$$\|x - z_n\|^2 < \left(d + \frac{1}{n}\right)^2, \quad \|x - z_m\|^2 < \left(d + \frac{1}{m}\right)^2.$$

$$\begin{aligned} \|z_n - z_m\|^2 &= \underbrace{2\|z_n - x\|^2}_{< 2\left(d + \frac{1}{n}\right)^2} + \underbrace{2\|z_m - x\|^2}_{< 2\left(d + \frac{1}{m}\right)^2} - \underbrace{4\left\|x - \frac{z_n + z_m}{2}\right\|^2}_{\geq 4d^2} < \\ &< \cancel{2d^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{4d}{n} + \cancel{2d^2} + \frac{2}{m^2} + \frac{4d}{m} - \cancel{4d^2} \end{aligned}$$

Из последнего неравенства и следует, что последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет фундаментальной.

Поскольку последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, и подпространство L замкнуто, то при $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость

$$z_n \rightarrow x \in L.$$

$$z_n \rightarrow x \in L.$$

Переходя теперь к пределу в неравенствах

$$d \leq \|x - z_n\| < d + \frac{1}{n},$$

получим

$$\|x - z\| = d.$$

А это и означает существование элемента наилучшего приближения.

Единственность

Покажем, что элемент наилучшего приближения существует ровно один.

Предположим, что элементов наилучшего приближения два — z и z^* .
Имеем

$$4d^2 = 2(\|x - z\|^2 + \|x - z^*\|^2) = \|z - z^*\|^2 + 4\left\|x - \frac{z + z^*}{2}\right\|^2 \geq \|z - z^*\|^2 + 4d^2.$$

Отсюда

$$\|z - z^*\| \leq 0,$$

что и дает $z = z^*$.

Теорема доказана.

разложение элемента гильбертова пространства по подпространству

Теорема (об ортогональном проектировании)

Пусть

1. H - гильбертово пространство
2. L - подпространство H .

Тогда

Для любого элемента $x \in H$ существует единственный элемент $z \in L$ и единственный элемент $w \in L^\perp$ такие, что справедливо разложение $x = z + w$.

План доказательства

Существование

1. Если элемент не из подпространства, тогда существует элемент наилучшего приближения z . Нужно показать, что $z - th \in L$.

2. Метрическими преобразованиями получаем, что

можно положить $t = -\frac{(x - z, h)}{\|h\|^2}$ и получить $(x - z, h) = 0$, что и

доказывает принадлежность к дополнению L .

Единственность

1. Предполагаем, что существует еще один элемент, $z^* + w^*$, рассмотрев $z - z^* = w^* - w$ получим, что элементы совпадают (скалярно домножим на $w^* - w$).

Доказательство

Если $x \in L$, то в качестве z можно взять сам элемент x , в качестве w - нулевой элемент пространства H . Тогда $x = x + 0$.

Пусть $x \notin L$ и пусть z - элемент наилучшего приближения для x из L . Покажем, что $x - z \in L^\perp$.

Пусть y - произвольный элемент L , t - произвольное действительное число. Поскольку z есть элемент наилучшего приближения, $z - th \in L$, выполняется:

$\|x - z + th\|^2 \geq \|x - z\|^2$ (т.к. у элем.наил.приб. наименьшая

норма, ведь это расстояние)

Отсюда:

$$(x - z + th, x - z + th) \geq (x - z, x - z)$$

$$((x - z) + (th), (x - z) + (th)) - (x - z, x - z) \geq 0$$

$$\cancel{(x - z, x - z)} + (x - z, th) + (th, x - z) + (th, th) - \cancel{(x - z, x - z)} =$$
$$= 2t(x - z, h) + t^2(h, h) \geq 0$$

Положим $t = -\frac{(x - z, h)}{\|h\|^2}$.

$$= -\frac{(x - z, h)}{\|h\|^2} 2(x - z, h) + \frac{(x - z, h)}{\|h\|^2} \frac{(x - z, h)}{\|h\|^2} (h, h) =$$
$$= \frac{|(x - z, h)|^2}{\|h\|^4} \|h\|^2 (1 - 2) = -\frac{|(x - z, h)|^2}{\|h\|^2} \geq 0$$

Такое возможно лишь в том случае, если $(x - z, h) = 0$, что и означает $x - z \in L^\perp$.

Показываем, что можно найти такой параметр t , что скалярное произведение будет равно 0, поэтому и $x - z + th$ будет лежать в L^\perp .

Единственность. Пусть есть два элемента $z^* \in L$ и $w^* \in L^\perp$ такие, что $x = z + w = z^* + w^*$. Справедливо равенство $z - z^* = w^* - w$

Умножим левую и правую части равенства скалярно на $w^* - w$:

$$(z - z^*, w^* - w) = (w^* - w, w^* - w)$$

$$(z - z^*, w^* - w) = \|w^* - w\|^2$$

т.к. элементы левой части из ортогональных друг другу пространств $\Rightarrow \|w^* - w\|^2 = 0 \Rightarrow \|w^* - w\| = 0$.

Т.е. $w^* = w$. Второе аналогично. Теорема доказана

Вопрос 23. #доделать

Ортонормированные системы. Многочлены Фурье и ряд Фурье. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя.

ортонормированные системы

многочлены Фурье и ряд Фурье
минимальное свойство коэффициентов Фурье
неравенство Бесселя

Вопрос 24. #доделать

Ряды Фурье в гильбертовом пространстве. Полные и замкнутые системы.

ряды Фурье в гильбертовом пространстве
полные и замкнутые системы

Вопрос 25. #доделать

Гильбертов базис.

гильбертов базис

Вопрос 26. #доделать

Линейные операторы в нормированных пространствах.
Операторная норма. Пространство ограниченных операторов.

линейные операторы в нормированных
пространствах

операторная норма

пространство ограниченных операторов

Вопрос 27. #доделать

Обратные операторы. Обратимость операторов.

обратные операторы

обратимость операторов

Вопрос 28. #доделать

Продолжение линейного оператора с всюду плотного подпространства.

Вопрос 29. #доделать

Вполне непрерывные операторы. Пространство линейных вполне непрерывных операторов.

вполне непрерывные операторы

пространство линейных вполне непрерывных операторов

Вопрос 30. #доделать

Линейные функционалы. Теорема Рисса.

Неравенство Коши-Буняковского (НКБ)

$$|(x, y)| \leq (x, x)^{\frac{1}{2}} \cdot (y, y)^{\frac{1}{2}}$$

Теорема 2.10.2

Пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ нормируемо, функция $M_0(A)$ является нормой в нем:

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \inf\{M : \|A(x)\|_Y \leq M\|x\|_X \quad \forall x \in X\}.$$

Следствие 2.10.2

Для нормы в пространстве $\mathcal{L}(X, Y)$ имеют место:
неравенство:

$$\|A(x)\|_Y \leq \|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \cdot \|x\|_X$$

равенства:

$$\|A\| = \sup_{x: \|x\|_X \leq 1} \|A(x)\|_Y = \sup_{x: \|x\|_X = 1} \|A(x)\|_Y$$

Теорема 2.5.2 (об ортогональном проектировании)

Пусть H - гильбертово пространство, L - его подпространство. Тогда для любого элемента $x \in H$ существует единственный элемент $z \in L$ и единственный элемент $w \in L^\perp$ такие, что справедливо разложение $x = z + w$.

Ограниченный линейный оператор - линейный оператор $A : X \rightarrow Y$ (где X, Y - нормированные пространства) такой, что существует неотрицательное число M для которого выполняется: $\forall x \in X : \|A(x)\|_Y \leq M\|x\|_X$.

линейные функционалы

Функционал над множеством (произвольной структуры) M - отображение из M во множество скаляров ($M \rightarrow \mathbb{C}$, $M \rightarrow \mathbb{R}$).

теорема Рисса

Об общем виде линейных ограниченных функционалов над гильбертовым пространством

Позволяет установить взаимно-однозначное соответствие, сохраняющее норму, причем это соответствие будет линейным, между пространствами H и H^* (другими словами, гильбертово пространство изоморфно и изометрично своему сопряженному).

Норма линейного ограниченного оператора

$$\|A\| = \inf\{M : \|A(x)\|_Y \leq M\|x\|_X \quad \forall x \in X\}.$$

Теорема

Пусть

1. H есть гильбертово пространство.
2. f есть линейный ограниченный функционал над H .

Тогда

В H найдется **единственный** элемент y такой, что для всех $x \in H$ выполняется

$$f(x) = (x, y),$$

где $(\ , \)$ - скалярное произведение в H ;
и справедливо равенство

$$\|f\|_{X^*} = \|y\|_H.$$

План доказательства

Существование

1. Если $f \equiv 0$, тогда просто берём скалярное произведение с Θ .
2. Пусть $f \not\equiv 0$, тогда разложим ненулевой элемент $x^* \in H \setminus N$ (по ортогональному разложению) $x^* = z + w$ и положим $y = \frac{f(w)}{\|w\|_H^2} w$.

3. Осталось показать, что скалярное произведение с этим элементом равняется 0, перебрав все случаи (элемент из N , перпендикулярный N , произвольный).

Единственность

4. Предполагаем существование второго элемента. Скалярные произведения с произвольным x совпадут. Но тогда норма будет 0, что из 1-ой аксиомы нормы говорит о равенстве.

Эквивалентность норм

5. По определению нормы оператора и используя $\forall x \in H : f(x) = (x, y)$ получаем, что для каждого x было найдено (x, y) .

Это соответствие $f \rightarrow (\ , \)$ ограничено сверху $\|y\|_{H^*}$ (раскрыть по НКБ).

С другой стороны, $(y, y) \rightarrow f(y)$ ограничено сверху $\|f\|_{H^*}$ (а (y, y) считается самым "большим" элементом по предыдущей оценке). Следовательно, отображения друг друга ограничивают по норме \sim имеют одинаковую норму.

Доказательство

1. Пусть N - ядро функционала f :

$$N = \{x \in H : f(x) = 0\}.$$

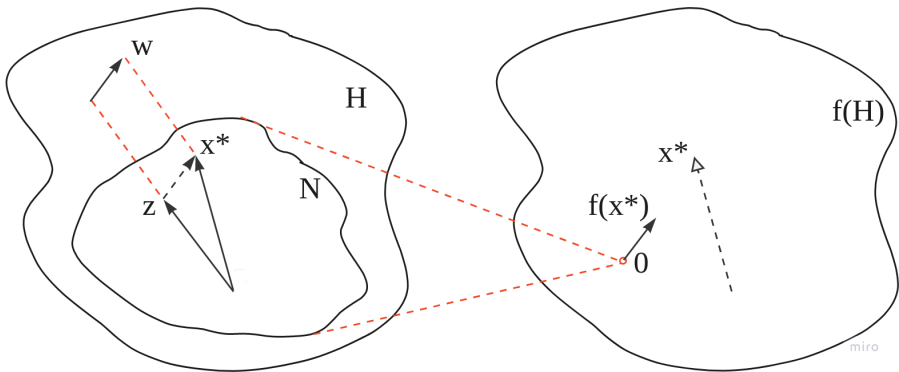
Если $N = H$, то в качестве элемента y можно взять нулевой элемент пространства H .

2. Пусть $N \neq H$ и $x^* \in H \setminus N$ (возьмем x^* такой, что его образ не является нулём).

Поскольку N есть подпространство H , то согласно теореме об ортогональном разложении, найдутся элементы $z \in H$ и $w \in N^\perp$ такие, что $x^* = z + w$.

Положим

$$y = \frac{f(w)}{\|w\|_H^2} w.$$



⚡ Пояснение к у

Положили $y = \frac{f(w)}{\|w\|_H^2} w = \frac{f(w)}{(w, w)^{\frac{1}{2}}} \frac{w}{(w, w)^{\frac{1}{2}}}$, где

$f(w)$ - "длина" образа w ,

$\frac{f(w)}{(w, w)^{\frac{1}{2}}}$ - отношение "длины" образа к "длине" w .

$\frac{w}{(w, w)^{\frac{1}{2}}}$ - нормированный элемент w .

Таким образом, скалярное произведение с y занулит то, что и должно быть занулено (ведь мы не включили ядро в y), а

также произведет скалирование в правильных пропорциях (т.к. есть отношение длин).

Покажем, что y есть искомый элемент.

a. Пусть x принадлежит N . Имеем $(w, x) = 0$ и

$$(x, y) = \frac{f(w)}{\|w\|_H^2} (w, x) = 0 = f(x).$$

Для элементов ядра N функционала f требуемое равенство выполняется.

b. Пусть теперь x есть элемент вида λw . Тогда

$$(x, y) = \lambda(w, y) = \frac{\lambda f(w)}{\|w\|_H^2} (w, w) = \lambda f(w) = f(\lambda w) = f(x),$$

и тем самым требуемое равенство на таких элементах x также выполняется.

c. Пусть x есть произвольный элемент из H . Положим $\lambda = \frac{f(x)}{f(w)}$ ($f(w) \neq 0$, так как w не принадлежит N). Элемент $x - \lambda w \in N$. Отсюда

$$f(x) = \underbrace{f(x - \lambda w)}_{\in N, \text{ переходит в } 0} + f(\lambda w) = (\lambda w, y) \stackrel{[b]}{=} (x, y).$$

Следовательно, требуемое равенство имеет место для всех элементов $x \in H$.

2 (от противного). Покажем, что существует только один элемент y такой, что $f(x) = (x, y)$ для всех $x \in H$.

Предположим, что таких элементов два - y и y_1 . Имеем $f(x) = (x, y) = (x, y_1)$. Отсюда $(x, y - y_1) = 0$. Положим $x = y - y_1$. Тогда

$$0 = (y - y_1, y - y_1) = \|y - y_1\|^2,$$

что и означает равенство $y = y_1$.

3. Итак, элемент y , дающий требуемое представление функционала f существует ровно один. Покажем, что для этого элемента и для функционала f имеет место равенство

$$\|y\|_H = \|f\|_{H^*}.$$

Имеем

$$|f(x)| \stackrel{C(2.10.2)}{\leq} \|f\|_{H^*} \cdot \|x\|_H, \quad |f(x)| = |(x, y)| \stackrel{\text{НКБ}}{\leq} \|x\|_H \cdot \|y\|_H.$$

Отсюда (так как $\|f\|_{H^*}$ - инфимум) $\|f\|_{H^*} \leq \|y\|_H$. Далее,

$$|f(y)| \leq \|f\|_{H^*} \cdot \|y\|_H, \quad |f(y)| = |(y, y)| = \|y\|_H^2.$$

Следовательно, выполняется $\|y\|_H \leq \|f\|_{H^*}$.

Из доказанных двух неравенств и вытекает требуемое равенство $\|f\|_{H^*} = \|y\|_H$.

Теорема полностью доказана.

Вопрос 19. #доделать

Компактные множества. Свойства компактных множеств.

КОМПАКТНЫЕ МНОЖЕСТВА

СВОЙСТВА КОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВ

Вопрос 20. #доделать

Критерии компактности (теорема Хаусдорфа, открытые покрытия).

Вопрос 31. #доделать

Неподвижные точки. Существование неподвижных точек у сжимающего оператора. Теорема Шаудера

неподвижные точки

существование неподвижных точек у
сжимающего оператора

теорема Шаудера

Вопрос 32. #доделать

Приложения функционального анализа. Разрешимость
систем нелинейных алгебраических уравнений,
разрешимость интегральных уравнений.

приложения функционального анализа

разрешимость систем нелинейных
алгебраических уравнений

разрешимость интегральных уравнений

Литература

1. <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4259346>
2. [Формула Стокса: доказательство с комментариями 2022-01-01](#) - John Smith
3. Кожанов А.И. Дополнительные главы математического анализа 2023.

Ссылки и замечания

1. <https://github.com/EricShelbogashev/ACoMA>

P.s. Miro+latex=успех.

P.P.s.

```
APP: Obsidian;  
PDF_OPTIONS: downscale_percent=62,  
margin=default, page_size=A5;  
PLUGINS: highlightr, codeMirrorOptions.
```

P.P.P.s. Разобраться самостоятельно - хорошо, разобраться вместе - лучше, разобраться и поделиться с другими - идеально.

Искренне надеюсь, что этот файл будет заполняться и дальше, выйдя за пределы "вопросов к зимней сессии ФИТ НГУ", и соберет в себе не только теоретические, но и практические материалы (разборы каверзных вопросов, задания с семинаров, примеры интересных математических объектов).

Делитесь "коками" с другими, давайте сделаем 2-ой курс менее пугающим и более полезным!