Вопросы

> *Author: Эрик Шелбогашев https://t.me/erxxshll6y*
> Есть ошибка? Дайте знать!

Вопрос 1.

Кривые в пространстве, параметризация кривой, длина кривой. Касательная к кривой.

кривые в пространстве

Непрерывная кривая - множество

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad x = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)), \quad t \in \Omega\}$$

(или же область значений некоторой вектор-функции, определенной на Ω).

параметризация кривой

Параметризация кривой - задание кривой с помощью функций $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ и **параметр**-переменной t.

длина кривой

Пусть Γ есть параметризованная кривая в $\mathbb{R}^n$ с параметризацией $\Phi(t)$, $t \in [a, b] = \Omega$, и пусть на отрезке $[a, b]$ задано разбиение τ — т.е. задана система точек $\{t_i\}_{i=0}^m$ такая, что $t_0 = a$, $t_m = b$, $t_{i-1} < t_i$, $i = 1, ...m$. Положим

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^m |\Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})|.$$

Очевидно, что σ_τ есть длина ломаной с вершинами в точках $\Phi(a)$, $\Phi(t_1)$, ..., $\Phi(t_{m-1})$, $\Phi(b)$.

Определим величину S_Γ как точную верхнюю грань сумм σ_τ, предполагая, что sup берется по всевозможным разбиениям τ отрезка $[a, b]$:

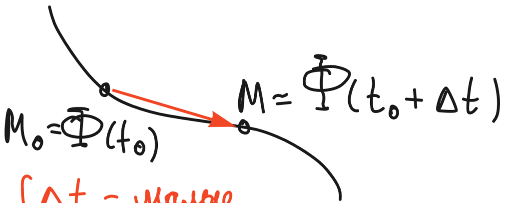
$$S_\Gamma = \sup_\tau \sigma_\tau.$$

Величина S_Γ называется длиной кривой Γ; если $S_\Gamma < +\infty$, то кривая Γ называется спрямляемой.

касательная к кривой

Касательная к кривой

Прямая в точке M_0 кривой Γ параллельная вектору $\vec{l}_0 = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \vec{l}(\Delta t)$. Является предельным положением секущей (через точки M_0, M).



$\left\{ \begin{array}{l} \Delta t \text{ - малые} \\ M \neq M_0 \end{array} \right.$

$\{ t_0 + \Delta t \in \Omega$

Вопрос 2. #доделать

Криволинейные интегралы 1-го рода, их свойства.

криволинейные интегралы 1-го рода

свойства

Вопрос 3. #доделать

Криволинейные интегралы 2-го рода, их свойства.

криволинейные интегралы 2-го рода

свойства

Вопрос 5.

Формула Грина

> Устанавливает связь между криволинейным интегралом по замкнутому контуру C и двойным интегралом по односвязной области D, ограниченной этим контуром.

> Является частным случаем теоремы Стокса.

Формулировка

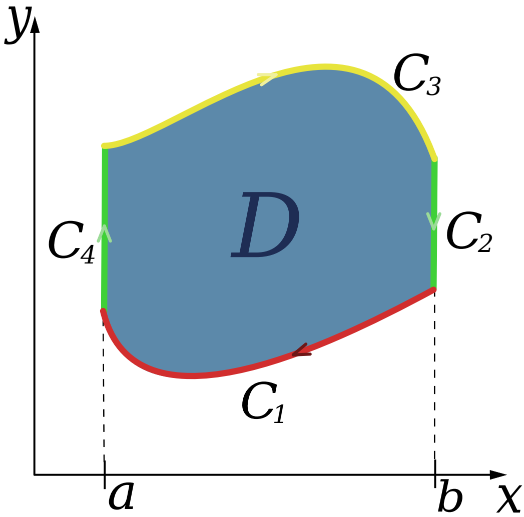
Пусть

1. C - положительно ориентированная кусочно-гладкая замкнутая кривая на плоскости.
2. D - область, ограниченная кривой C.
3. $P = P(x, y),\ Q = Q(x, y)$ определены в области D и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Тогда выполняется

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Доказательство для простой области



Пусть

1. $D = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ \ y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}$ - элементарная относительно Oy область.

2. Кривая $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ обходится по часовой стрелке.

Тогда

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dx\, dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy =$$

$$= \int\limits_a^b dx [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] =$$

$$= \int\limits_a^b P(x, y_2(x))\, dx - \int\limits_a^b P(x, y_1(x))\, dx \quad (1)$$

Оба интеграла представим как криволинейные интегралы II рода (C_1 от b до a, поэтому в (2) минусы уничтожаются)

$$(2) \quad -\int_a^b P(x, y_1(x))\,dx = \int_{C_1} P(x,y)\,dx$$

$$(3) \quad \int_a^b P(x, y_2(x))\,dx = \int_{C_3} P(x,y)\,dx$$

Криволинейные интегралы по C_2 и C_4 равны нулю, так как $x = \text{const}$

$$(4) \quad \int_{C_2} P(x,y)\,dx = 0$$

$$(5) \quad \int_{C_4} P(x,y)\,dx = 0$$

В выражение (1) произведем замену (2) и (3), а также прибавим (4) и (5) (т.к. они равны нулю, на значение не влияют)

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b P(x, y_2(x))\,dx - \int_a^b P(x, y_1(x))\,dx \overset{2,3,4,5}{=}$$

$$= \int_{C_3} P(x,y)\,dx + \int_{C_1} P(x,y)\,dx + \int_{C_2} P(x,y)\,dx + \int_{C_4} P(x,y)\,dx.$$

Обход по замкнутой кривой C был в отрицательном направлении (по часовой стрелке)

$$(6) \quad \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\oint_C P(x,y)\,dx$$

Аналогично доказывается и по Q (если D элементарная по Ox).

$$(7) \quad \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \oint_C Q(x,y)\,dy$$

Сложим (6) и (7)

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Теорема доказана

Вопрос 6. #доделать

Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования

Вопрос 7. #доделать

Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования - трехмерный случай.

Вопрос 8. #доделать

Поверхности в $\mathbb{R}^n$. Касательная плоскость и нормаль. Ориентация поверхности. Кусочно-гладкие поверхности. Первая квадратичная форма поверхности.

поверхности в R^n

касательная плоскость и нормаль

ориентация поверхности

кусочно-гладкие поверхности

первая квадратичная форма поверхности

Вопрос 9. #доделать

Поверхностные интегралы 1-го рода, их свойства.

поверхностные интегралы 1-го рода

свойства

Вопрос 10. #доделать

Поверхностные интегралы 2-го рода, их свойства.

поверхностные интегралы 2-го рода

свойства

Вопрос 11.

Формула Гаусса-Остроградского

> Связывает поток непрерывно-дифференцируемого векторного поля через замкнутую поверхность и интеграл от дивергенции этого поля по объёму, ограниченному этой поверхностью.

> Применяется для преобразования объёмного интеграла в интеграл по замкнутой поверхности и наоборот.

Формулировка
Пусть
1. Область G из R^3 разбивается кусочно-гладкими поверхностями на на конечное число элементарных областей.
2. Функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ и их частные производные $P_x(x,y,z)$, $Q_y(x,y,z)$, $R_z(x,y,z)$ определены и непрерывны при $(x,y,z) \in \overline{G}$.
Тогда выполняется

$$\int_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,ds = \iiint_G (P_x + Q_y + R_z)\,dx\,dy\,dz,$$

где

$$\cos\alpha\,ds = dy\,dz,$$
$$\cos\beta\,ds = dz\,dx,$$
$$\cos\gamma\,ds = dx\,dy.$$

Доказательство

Пусть G элементарна

(в ином случае произведём доказательство для каждой из частей и объединим интегралы, учитывая взаимоуничтожение общих границ областей).

Рассмотрим интеграл

$$\iiint\limits_{G} R_z(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Вследствие элементарности G относительно оси Oz имеем

$$\iiint\limits_{G} R_z\,(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} R_z(x, y, z)\, dz \right) dx\, dy =$$

$$= \iint\limits_{\Omega} [R(x, y, \psi(x, y)) - R(x, y, \varphi(x, y))]\, dx\, dy.$$

С другой стороны, учитывая представление $z = \varphi(x, y)$ и $z = \psi(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, поверхностей S_1, S_2, вычисляя нормаль (чтобы узнать знак ориентации)

$\vec{n}_\psi = (-\psi'_x, -\psi'_y, 1)$

$\vec{n}_\varphi = (-\varphi'_x, -\varphi'_y, 1)$

Получим

$$\iint\limits_{\Omega} R(x, y, \psi(x, y))\, dx\, dy = \iint\limits_{S_2^+} R(x, y, \psi(x, y))\, dx\, dy,$$

$$\iint\limits_{\Omega} R(x, y, \varphi(x, y))\, dx\, dy = \iint\limits_{S_2^+} R(x, y, \psi(x, y))\, dx\, dy.$$

Приведем их к общей внешней нормали (нижний вниз, верхний вверх)

$$\int\limits_{S_2^+} R\,dx\,dy = \int\limits_{S_2} R\cos\gamma\,ds,$$

$$\int\limits_{S_1^+} R\,dx\,dy = -\int\limits_{S_1} R\cos\gamma\,ds.$$

Учитывая равенство "площадь под стенками цилиндра (боковые стенки) есть ноль"

$$\int\limits_{S_0} R\cos\gamma\,dS = 0$$

получаем

$$\iiint\limits_{G} R_z(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{S_1} R\cos\gamma\,ds -$$

$$-\left(-\int\limits_{S_2} R\cos\gamma\,ds.\right) + \int\limits_{S_0} R\cos\gamma\,ds = \int\limits_{S} R\cos\gamma\,ds.$$

Аналогично показывается, что имеют место формулы

$$\iiint\limits_{G} P_x(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{S} P\cos\alpha\,ds,$$

$$\iiint\limits_{G} Q_y(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{S} P\cos\beta\,ds.$$

Суммируя последние три формулы получим требуемое равенство.
Формула будет работать и для составных элементарных областей

$$G = G_1 \cup G_2 \cup S^*,$$

где S^* - разделяющая эти множества кусочно-гладкая поверхность (стенка).

Вопрос 12.

Формула Стокса

> Циркуляция поля по замкнутому контуру равна потоку ротора этого поля через поверхность, ограниченную этим контуром.

> Условие формулы Грина
> 1. C - положительно ориентированная кусочно-гладкая замкнутая кривая на плоскости.
> 2. D - область, ограниченная кривой C.
> 3. $P = P(x, y),\ Q = Q(x, y)$ определены в области D и имеют непрерывные частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y}, \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Формулировка

Пусть

1. $S \subset \mathbb{R}^3$ - поверхность с параметризацией $\Phi(u, v)$, где $(u, v) \in \overline{\Omega}$.
2. $\Phi(u, v)$ дважды непрерывно-дифференцируема в $\overline{\Omega}$, а S не имеет особых точек (т.е. она сама непрерывна и её частные производные непрерывны).
3. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - ограниченная область, для который выполняется условие формулы Грина.
4. $\gamma_0 = \partial\Omega$ - замкнутая кусочно-гладкая кривая без самопересечений с положительным направлением обхода и параметризацией $(u(t), v(t))$, где $t \in [a, b]$.
5. на S определена (единичная) нормаль $\vec{\nu} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.
6. γ - кривая в $\mathbb{R}^3$ с параметризацией $\Phi(u(t), v(t))$, где $t \in [a, b]$, являющаяся границей (краем) поверхности S.
7. $G \subset \mathbb{R}^3$ - область такая, что $S \subset G$ и $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ определены при $(x, y, z) \in G$. (область, ограниченная поверхностью S)

8. P, Q, R, а также все их первые частные производные существуют и непрерывны в G.
Тогда выполняется

$$\oint\limits_{\gamma}(P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \iint\limits_{S}\left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right)ds.$$

Доказательство
1. Перейдем от криволинейного интеграла II рода по кривой γ к криволинейному интегралу II рода по кривой γ_0 в области параметров Ω.
Пусть

$$\Phi(u,v) = (f(u,v), g(u,v), h(u,v)).$$

Тогда по определению криволинейного интеграла второго рода (и параметризации)

$$(1) \quad I = \oint\limits_{\gamma} P(x,y,z)\,dx = \int\limits_{a}^{b} P(f,g,h)\frac{\partial f}{\partial t}\,dt,$$

где
  $f = f(u(t), v(t))$
  $g = g(u(t), v(t))$
  $h = h(u(t), v(t))$
производная сложной функции:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f'_u\,u'_t + f'_v\,v'_t.$$

Подставим в (1):

$$I = \int\limits_a^b P(f,g,h)\underbrace{[f'_u u'_t + f'_v v'_t]\,dt}_{f'_u \underbrace{u'_t\,dt}_{du} + f'_v \underbrace{v'_t\,dt}_{dv}} =$$

$$= \oint\limits_{\gamma_0} P(f,g,h)[f'_u\,du + f'_v\,dv].$$

На кривой γ_0 функции u и v зависимы лишь от t, следовательно: $du = u'(t)\,dt$ и $dv = v'(t)\,dt$.

2. Перейдем к двойному интегралу по Ω.
Пусть

$$A = P(f,g,h)\,f'_u\,du\,, \quad B = P(f,g,h)\,f'_v\,dv.$$

Так как (2) Φ дважды-дифференцируема (т.е. $f,\ g,\ h,\ f'_u,\ f'_v$), P также непрерывна и имеет непрерывные производные в G (8), используя $(3,4)$ воспользуемся формулой Грина:

$$I = \oint\limits_{\gamma_0}(A\,du + B\,dv) = \iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v}\right)du\,dv.$$

Т.к. $A,\ B$ - сложные функции. Поставим производные, используя правила производной произведения и сложной функции и учитывая $f = x,\ g = y,\ h = z$ на их областях определения из условия $(\overline{\Omega},\ G)$.

$$I = \iint\limits_{\Omega}\left(\left(\cancel{\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}}^{1} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial u}\right)\frac{\partial f}{\partial v} + \cancel{P\frac{\partial^2 f}{\partial v\,\partial u}}^{2} -\right.$$

$$\left.-\left(\cancel{\frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}}^{1} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial h}{\partial v}\right)\frac{\partial f}{\partial u} - \cancel{P\frac{\partial^2 f}{\partial u\,\partial v}}^{2}\right)du\,dv.$$

Сократим и перегрупируем

$$(2)\ I = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \underbrace{\left(\frac{\partial h}{\partial u}\frac{\partial f}{dv} - \frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u} \right)}_{(4)} + \frac{\partial P}{\partial y} \underbrace{\left(\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial u} \right)}_{(5)\text{ с минусом}} \right) d$$

3. Перейдем к поверхностному интегралу по S.

> Определение
>
> $$\iint_S \xi\, ds = \iint_\Omega \xi \sqrt{EG - F^2}\, dx\, dy,$$
>
> $$E = (\Phi'_u, \Phi'_u) = f_u^2 + g_u^2 + h_u^2,$$
> $$F = (\Phi'_u, \Phi'_v) = f_u f_v + g_u g_v + h_u h_v,$$
> $$G = (\Phi'_v, \Phi'_v) = f_v^2 + g_v^2 + h_v^2.$$

Тогда (здесь $A,\ B$ уже другие)

$$\begin{aligned}
EG - F^2 &= \cancel{f_u^2 f_v^2} + f_u^2 g_v^2 + f_u^2 h_v^2 + g_u^2 f_v^2 + \cancel{g_u^2 g_v^2} + g_u^2 h_v^2 + h_u^2 f_v^2 + h_u^2 g_v^2 + \cancel{h_u^2 h_v^2} - \\
&- \cancel{f_u^2 f_v^2} - \cancel{g_u^2 g_v^2} - \cancel{h_u^2 h_v^2} - 2f_u f_v g_u g_v - 2f_u f_v h_u h_v - 2g_u g_v h_u h_v = \\
&= f_u^2 g_v^2 - 2f_u f_v g_u g_v + g_u^2 f_v^2 + \\
&+ f_u^2 h_v^2 - 2f_u f_v h_u h_v + h_u^2 f_v^2 + \\
&+ g_u^2 h_v^2 - 2g_u g_v h_u h_v + h_u^2 g_v^2 = \\
&= (f_u g_v - g_u f_v)^2 + (f_u h_v - h_u f_v)^2 + (g_u h_v - h_u g_v)^2 = \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f_u & g_u & h_u \\ f_v & g_v & h_v \end{vmatrix}^2 = \\
&= |[\Phi'_u, \Phi'_v]|^2 = \\
&= |\vec{n}|^2 = \\
&= A^2 + B^2 + C^2,
\end{aligned}$$

где $\vec{n} = (A, B, C)$ - вектор нормали, вычисляемый по формуле (векторное произведение частных производных):

$$(3) \quad A = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial v} - \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial u}$$

$$(4) \quad B = \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial h}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial h}{\partial v}$$

$$(5) \quad C = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial g}{\partial u}$$

Заметим, что

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \overset{(5)}{=} \vec{\nu} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}(A, B, C)$$

Значит

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,$$
$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,,$$
$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\,.$$

Произведем в (2) замену $(4, 5)$:

$$I = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial z}B - \frac{\partial P}{\partial y}C\right) du\, dv =$$

$$= \iint_S \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \left(\frac{\partial P}{\partial z}B - \frac{\partial P}{\partial y}C\right) ds =$$
$$= \iint_S \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \left(\frac{\partial P}{\partial z}B - \frac{\partial P}{\partial y}C\right) ds =$$
$$= \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right) ds =$$
$$= \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) ds.$$

Получили поверхностный интеграл

$$(6) \quad I = \oint\limits_{\gamma} P(x, y, z)\, dx = \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right) ds.$$

Аналогично получаются и

$$(7)\qquad \int\limits_{\gamma} Q\,dy = \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos\alpha \right) ds.$$

$$(8)\qquad \int\limits_{\gamma} R\,dz = \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos\beta \right) ds.$$

Суммируем (6), (7), (8) и получим требуемое равенство.
Теорема доказана.

Вопрос 13. #доделать

Градиент, дивергенция, ротор, циркуляция и поток векторного поля.

градиент

дивергенция

ротор

циркуляция

поток

Вопрос 14. #доделать

Потенциальное и соленоидальное векторные поля.

потенциальное векторное поле

соленоидальное векторное поле

Вопрос 15. #доделать

Вычисление некоторых физических характеристик с помощью криволинейных и поверхностных интегралов

(нахождение массы, координат центра тяжести, моментов).

Вопрос 16. #доделать

Метрические, линейные, нормированные и банаховы пространства. Множества в них

метрические пространства

линейные пространства

нормированные пространства

банаховы пространства

Вопрос 17. #доделать

Непрерывность нормы. Эквивалентность всех норм в конечномерном пространстве.

непрерывность нормы

эквивалентность всех норм в конечномерном пространстве

Вопрос 18. #доделать

Пространства. Сепарабельность пространств. Несепарабельность пространства.

пространства

сепарабельность пространств

несепарабельность пространства

Вопрос 21. #доделать

Фактор-пространство. Нормируемость фактор-пространства

фактор-пространство

нормируемость фактор-пространства

Вопрос 22.

Гильбертовы пространства. Задача о наилучшем приближении. Разложение элемента гильбертова пространства по подпространству.

> **Унитарное пространство** - пространство X, для которого выполняются следующие условия:
> 1. X - векторное пространство.
> 2. На X определена операция умножения на комплексные числа.
> 3. Каждой паре $x, y \in X$ поставлено в соответствие комплексное число (x, y) - скалярное произведение x на y.
> 4. Для скалярного произведения выполняются следующие условия:
> 1. $(x, x) \geqslant 0, \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$.
> 2. $(x, y) = \overline{(y, x)}$.
> 3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.
> 4. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.
> Здесь x, y, z - произвольные элементы из X, λ - произвольное комплексное число.

> **Евклидово пространство** - пространство X такое, что выполняются следующие условия:
> 1. X - линейное пространство над $\mathbb{R}$.
> 2. Определено отображение $X \times X \to \mathbb{R}$. *(требуется для скалярного произведения)*
> 3. Выполняются условия: (здесь $\lambda \in \mathbb{R}$)
> 1. $(x, x) \geqslant 0, \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$.

2. $(x, y) = \overline{(y, x)}$.
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$.
4. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$.

Норма евклидового или унитарного пространства
В евклидовом или унитарном пространстве X функция $f(x)$, определенная при $x \in X$ равенством $f(x) = (x, x)^{\frac{1}{2}}$, обладает всеми свойствами нормы:
1. $\|x\| \geqslant 0, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

гильбертовы пространства

Гильбертово пространство H - унитарное или евклидово пространство, полное по норме, порожденной имеющимся в этом пространстве скалярным произведением.

задача о наилучшем приближении

Последовательность точек $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ метрического пространства (X, ρ) называется **фундаментальной**, если она удовлетворяет **критерию Коши**:

$$\text{Для всякого } \varepsilon > 0 \text{ найдется такое натуральное } N,$$
$$\text{что } \rho(x_n, x_m) < \varepsilon \text{ для всех } n, m > N.$$

Утверждение 2.5.2. *В евклидовом или унитарном пространстве для любых двух элементов x и y выполняется равенство*

$$(x + y, x + y) + (x - y, x - y) = 2[(x, x) + (y, y)].$$

Теорема
Пусть
1. H - гильбертово пространство.
2. L - подпространство H.
3. Фиксированный $x \in H \setminus L$.

Тогда
1. В L имеется z, являющийся элементом наилучшего приближения для x.
2. z единственный.

План доказательства

Существование
1. Составляем неравенство (1) из определения точной нижней грани и расстояния до подпространства.
2. Через фундаментальность показываем, что последовательность z_n имеет конечный предел при $n \to \infty$. (сама же она достигается путем метрических преобразований)

Единственность
1. Используя уверждение 2.5.2 сводим к противоречию.

Доказательство

Существование

Доказательство. Обозначим $d = \rho(x, L)$. Согласно определению расстояния от x до подпространства L и согласно определению точной нижней грани, для любого натурального числа n найдется элемент z_n, принадлежащий L и такой, что выполняются неравенства

$$d \leq \|x - z_n\| < d + \frac{1}{n}.$$

Покажем, что последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет фундаментальной.

Используя утверждение 2.5.2 для элементов $z_n - x$ и $z_m - x$, получим

$$\|z_n - z_m\|^2 = \|z_n - x + x - z_m\|^2 = 2\|x - z_n\|^2 + 2\|x - z_m\|^2 - \|2x - z_n - z_m\|^2.$$

Имеем

$$\|2x - z_n - z_m\|^2 = 4\underbrace{\left\|x - \frac{z_n + z_m}{2}\right\|^2}_{\geqslant d} \geqslant 4d^2$$

Поскольку элемент $\frac{z_n+z_m}{2}$ принадлежит L, то выполняется

$$\|2x - z_n - z_m\|^2 \geq 4d^2.$$

Далее, имеют место неравенства

$$\|x - z_n\|^2 < \left(d + \frac{1}{n}\right)^2, \quad \|x - z_m\|^2 < \left(d + \frac{1}{m}\right)^2.$$

$$\|z_n - z_m\|^2 = \underbrace{2\|z_n - x\|^2}_{<2\left(d+\frac{1}{n}\right)^2} + \underbrace{2\|z_m - x\|^2}_{<2\left(d+\frac{1}{m}\right)^2} - \underbrace{4\left\|x - \frac{z_n + z_m}{2}\right\|^2}_{\geqslant 4d^2} <$$

$$< \cancel{2d^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{4d}{n} + \cancel{2d^2} + \frac{2}{m^2} + \frac{4d}{m} - \cancel{4d^2}$$

Из последнего неравенства и следует, что последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ будет фундаментальной.

Поскольку последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна, и подпространство L замкнуто, то при $n \to \infty$ имеет место сходимость

$$z_n \to x \in L.$$

$$z_n \to x \in L.$$

Переходя теперь к пределу в неравенствах

$$d \leq \|x - z_n\| < d + \frac{1}{n},$$

получим

$$\|x - z\| = d.$$

А это и означает существование элемента наилучшего приближения.

Единственность

Покажем, что элемент наилучшего приближения существует ровно один.

Предположим, что элементов наилучшего приближения два — z и z^*. Имеем

$$4d^2 = 2(\|x - z\|^2 + \|x - z^*\|^2) = \|z - z^*\|^2 + 4\left\|x - \frac{z + z^*}{2}\right\|^2 \geq \|z - z^*\| + 4d^2.$$

Отсюда

$$\|z - z^*\| \leq 0,$$

что и дает $z = z^*$.

Теорема доказана.

разложение элемента гильбертова пространства по подпространству

Теорема (об ортогональном проектировании) Пусть 1. H - гильбертово пространство 2. L - подпространство H. Тогда Для любого элемента $x\in H$ существует единственный элемент $z\in L$ и единственный элемент $w \in L^{\perp}$ такие, что справедливо разложение $x = z + w$.

План доказательства
Существование
1. Если элемент не из подпространства, тогда существует элемент наилучшего приближения z. Нужно показать, что $z-th \in L$.
2. Метрическими преобразованиями получаем, что можно положить $t=-\dfrac{(x-z,h)}{\|h\|^2}$ и получить $(x-z,h)=0$, что и доказывает принадлежность к дополнению L.
Единственность
1. Предполагаем, что существует еще один один элемент, z^*+w^* , рассмотрев $z-z^*=w^*-w$ получим, что элементы совпадают (скалярно домножим на w^*-w).

Доказательство
Если $x \in L$, то в качестве z можно взять сам элемент x, в качестве w - нулевой элемент пространства H. Тогда $x=x+\mathbb{0}$.
Пусть $x \notin L$ и пусть z - элемент наилучшего приближения для x из L. Покажем, что $x-z\in L^{\perp}$.
Пусть y - произвольный элемент L, t - произвольное действительное число. Поскольку z есть элемент наилучшего приближения, $z-th\in L$, выполняется:
$\|x-z+th\|^2 \geqslant \|x-z\|^2$ (т.к. у элем.наил.приб. наименьшая норма, ведь это расстояние)
Отсюда:
$(x-z+th, x-z+th) \geqslant (x-z,x-z)$
$((x-z)+(th),(x-z)+(th))-(x-z,x-z) \geqslant 0$

$\cancel{(x-z,x-z)} + (x-z,th) + (th,x-z) + (th,th) - \cancel{(x-z,x-z)} =$
$= 2t(x-z,h) + t^2(h,h) \geqslant 0$
Положим $t = -\dfrac{(x-z,h)}{\|h\|^2}$.
$= -\dfrac{(x-z,h)}{\|h\|^2} 2(x-z,h) + \dfrac{(x-z,h)}{\|h\|^2} \dfrac{(x-z,h)}{\|h\|^2} (h,h) =$
$= \dfrac{|(x-z,h)|^2}{\|h\|^4} \|h\|^2 (1-2) = -\dfrac{|(x-z,h)|^2}{\|h\|^2} \geqslant 0$
Такое возможно лишь в том случае, если $(x-z,h)=0$, что и означает $x-z \in L^\perp$.

Показываем, что можно найти такой параметр t, что скалярное произведение будет равно 0, поэтому и $x-z+th$ будет лежать в $L^\perp$.
Единственность. Пусть есть два элемента $z^* \in L$ и $w^* \in L^\perp$ такие, что $x = z + w = z^* + w^*$. Справедливо равенство
$z - z^* = w^* - w$
Умножим левую и правую части равенства скалярно на $w^* - w$:
$(z - z^*, w^* - w) = (w^* - w, w^* - w)$
$(z - z^*, w^* - w) = \|w^* - w\|^2$
т.к. элементы левой части из ортогональных друг другу пространств ⇒ $\|w^* - w\|^2 = 0$ ⇒ $\|w^* - w\| = 0$.
Т.е. $w^* = w$. Вторoе аналогично. Теорема доказана

Вопрос 23. #доделать

Ортонормированные системы. Многочлены Фурье и ряд Фурье. Минимальное свойство коэффицентов Фурье. Неравенство Бесселя.

ортонормированные системы

многочлены Фурье и ряд Фурье

минимальное свойство коэффицентов Фурье

неравенство Бесселя

Вопрос 24. #доделать

Ряды Фурье в гильбертовом пространстве. Полные и замкнутые системы.

ряды Фурье в гильбертовом пространстве

полные и замкнутые системы

Вопрос 25. #доделать

Гильбертов базис.

гильбертов базис

Вопрос 26. #доделать

Линейный операторы в нормированных пространствах. Операторная норма. Пространство ограниченных операторов.

линейные операторы в нормированных пространствах

операторная норма

пространство ограниченных операторов

Вопрос 27. #доделать

Обратные операторы. Обратимость операторов.

обратные операторы

обратимость операторов

Вопрос 28. #доделать

Продолжение линейного оператора с всюду плотного подпространства.

Вопрос 29. #доделать

Вполне непрерывные операторы. Пространство линейных вполне непрерывных операторов.

вполне непрерывные операторы

пространство линейных вполне непрерывных операторов

Вопрос 30. #доделать

Линейные функционалы. Теорема Рисса.

> **Неравенство Коши-Буняковского** (НКБ)
>
> $$|(x,y)| \leqslant (x,x)^{\frac{1}{2}} \cdot (y,y)^{\frac{1}{2}}$$

> **Теорема 2.10.2**
> Пространство $\mathcal{L}(X,Y)$ нормируемо, функция $M_0(A)$ является нормой в нем:
>
> $$\|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \inf\{M : \quad \|A(x)\|_Y \leqslant M\|x\|_X \quad \forall x \in X\}.$$

> **Следствие 2.10.2**
> Для нормы в пространстве $\mathcal{L}(X,Y)$ имеют место:
> неравенство:
>
> $$\|A(x)\|_Y \leqslant \|A\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \cdot \|x\|_X$$
>
> равенства:
>
> $$\|A\| = \sup_{x:\|x\|_X \leqslant 1} \|A(x)\|_Y = \sup_{x:\|x\|_X = 1} \|A(x)\|_Y$$

> **Теорема 2.5.2** (об ортогональном проектировании)
> Пусть H - гильбертово пространство, L - его подпространство. Тогда для любого элемента $x \in H$ существует единственный элемент $z \in L$ и единственный

> элемент $w \in L^{\perp}$ такие, что справедливо разложение $x = z + w$
> .

> **Ограниченный линейный оператор** - линейный оператор $A : X \to Y$ (где X, Y - нормированные пространства) такой, что существует неотрицательное число M для которого выполняется: $\forall x \in X : \|A(x)\|_Y \leqslant M\|x\|_X$.

линейные функционалы

> **Функционал над множеством (произвольной структуры) $\boldsymbol{M}$** - отображение из M во множество скаляров ($M \to \mathbb{C},\:\: M \to \mathbb{R}$).

теорема Рисса

> Об общем виде линейных ограниченных функционалов над гильбертовым пространством
> Позволяет установить взаимо-однозначное соответствие, сохраняющее норму, причем это соответствие будет линейным, между пространствами H и H^* (другими словами, гильбертово пространство изоморфно и изометрично своему сопряженному).

> **Норма линейного ограниченного оператора**
>
> $$\|A\| = \inf\{M \quad : \|A(x)\|_Y \leqslant M\|x\|_X \quad \forall x \in X\}\,.$$

Теорема
Пусть
1. H есть гильбертово пространство.
2. f есть линейный ограниченный функционал над H.

Тогда
В H найдется **единственный** элемент y такой, что для всех $x \in H$ выполняется

$$f(x) = (x, y),$$

где (,) - скалярное произведение в H;
и справедливо равенство

$$\|f\|_{X^*} = \|y\|_H.$$

План доказательства

Существование

1. Если $f \equiv 0$, тогда просто берём скалярное произведение с Θ.
2. Пусть $f \not\equiv 0$, тогда разложим ненулевой элемент $x^* \in H \setminus N$ (по ортогональному разложению) $x^* = z + w$ и положим $y = \frac{f(w)}{\|w\|_H^2} w$.
3. Осталось показать, что скалярное произведение с этим элементом равняется 0, перебрав все случаи (элемент из N, перпендикулярный N, произвольный).

Единственность

4. Предполагаем существование второго элемента. Скалярные произведения с произвольным x совпадут. Но тогда норма будет 0, что из 1-ой аксиомы нормы говорит о равенстве.

Эквивалентность норм

5. По определению нормы оператора и используя $\forall x \in H : f(x) = (x, y)$ получаем, что для каждого x было найдено (x, y).
Это соответствие $f \to (\ , \ )$ ограничено сверху $\|y\|_{H^*}$ (раскрыть по НКБ).
С другой стороны, $(y, y) \to f(y)$ ограничено сверху $\|f\|_{H^*}$ (а (y, y) считается самым "большим" элементом по предыдущей оценке).
Следовательно, отображения друг друга ограничивают по норме $\sim$ имеют одинаковую норму.

Доказательство

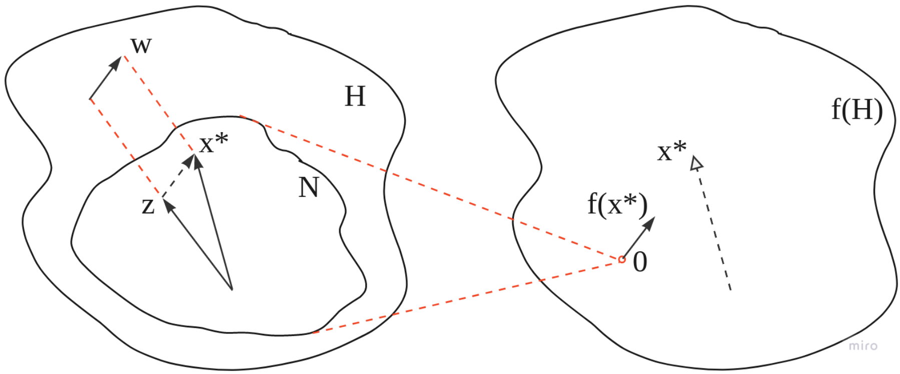
1. Пусть N - ядро функционала f :

$$N = \{x \in H : f(x) = 0\}.$$

Если $N = H$, то в качестве элемента y можно взять нулевой элемент пространства H.

2. Пусть $N \neq H$ и $x^* \in H \setminus N$ (возьмем x^* такой, что его образ не является нулём).
Поскольку N есть подпространство H, то согласно теореме об ортогональном разложении, найдутся элементы $z \in H$ и $w \in N^\perp$ такие, что $x^* = z + w$.
Положим

$$y = \frac{f(w)}{\|w\|_H^2} w.$$



Пояснение к y

Положили $y = \dfrac{f(w)}{\|w\|_H^2} w = \dfrac{f(w)}{(w,w)^{\frac{1}{2}}} \dfrac{w}{(w,w)^{\frac{1}{2}}}$, где
$f(w)$ - "длина" образа w,
$\dfrac{f(w)}{(w,w)^{\frac{1}{2}}}$ - отношение "длины" образа к "длине" w.
$\dfrac{w}{(w,w)^{\frac{1}{2}}}$ - нормированный элемент w.
Таким образом, скалярное произведение с y занулит то, что и должно быть занулено (ведь мы не включили ядро в y), а также произведет скалирование в правильных пропорциях (т.к. есть отношение длин).

Покажем, что y есть искомый элемент.

a. Пусть x принадлежит N. Имеем $(w, x) = 0$ и

$$(x, y) = \frac{f(w)}{\|w\|_H^2}(w, x) = 0 = f(x).$$

Для элементов ядра N функционала f требуемое равенство выполняется.

b. Пусть теперь x есть элемент вида λw. Тогда

$$(x, y) = \lambda(w, y) = \frac{\lambda f(w)}{\|w\|_H^2}(w, w) = \lambda f(w) = f(\lambda w) = f(x),$$

и тем самым требуемое равенство на таких элементах x также выполняется.

c. Пусть x есть произвольный элемент из H. Положим $\lambda = \dfrac{f(x)}{f(w)}$ ($f(w) \neq 0$, так как w не принадлежит N). Элемент $x - \lambda w \in N$. Отсюда

$$f(x) = \underbrace{f(x - \lambda w)}_{\in N,\ \text{переходит в } 0} + f(\lambda w) = (\lambda w, y) \overset{[b]}{=} (x, y).$$

Следовательно, требуемое равенство имеет место для всех элементов $x \in H$.

2 (от противного). Покажем, что существует только один элемент y такой, что $f(x) = (x, y)$ для всех $x \in H$. Предположим, что таких элементов два - y и y_1. Имеем $f(x) = (x, y) = (x, y_1)$. Отсюда $(x, y - y_1) = 0$. Положим $x = y - y_1$. Тогда

$$0 = (y - y_1, y - y_1) = \|y - y_1\|^2,$$

что и означает равенство $y = y_1$.

3. Итак, элемент y, дающий требуемое представление функционала f существует ровно один. Покажем, что для этого

элемента и для функционала f имеет место равенство
$\|y\|_H = \|f\|_{H^*}$.
Имеем

$$|f(x)| \overset{C(2.10.2)}{\leqslant} \|f\|_{H^*} \cdot \|x\|_H, \quad |f(x)| = |(x,y)| \overset{\text{НКБ}}{\leqslant} \|x\|_H \cdot \|y\|_H.$$

Отсюда (так как $\|f\|_{H^*}$ - инфимум) $\|f\|_{H^*} \leqslant \|y\|_H$. Далее,

$$|f(y)| \leqslant \|f\|_{H^*} \cdot \|y\|_H, \quad |f(y)| = |(y,y)| = \|y\|_H^2.$$

Следовательно, выполняется $\|y\|_H \leqslant \|f\|_{H^*}$.
Из доказаных двух неравенств и вытекает требуемое равенство
$\|f\|_{H^*} = \|y\|_H$.

Теорема полностью доказана.

Вопрос 19. #доделать

Компактные множества. Свойства компактных множеств.

компактные множества

свойства компактных множеств

Вопрос 20. #доделать

Критерии компактности (теорема Хаусдорфа, открытые покрытия).

Вопрос 31. #доделать

Неподвижные точки. Существование неподвижных точек у сжимающего оператора. Теорема Шаудера

неподвижные точки

существование неподвижных точек у сжимающего оператора

теорема Шаудера

Вопрос 32. #доделать

Приложения функционального анализа. Разрешимость систем нелинейных алгебраических уравнений, разрешимость интегральных уравнений.

приложения функционального анализа

разрешимость систем нелинейных алгебраических уравнений

разрешимость интегральных уравнений

Литература

1. https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4259346
2. Формула Стокса: доказательство с комментариями 2022-01-01- John Smith
3. Кожанов А.И. Дополнительные главы математического анализа 2023.