Lista - Princípios de Telecomunicações

Nome: Caio Vilela Freitas
RA: 201800790582

Questão 1) $D_f = 850 \frac{rad}{V.s}$; $\beta_f = 15$.

(a) O sinal modulante $m(t)$ é um triângulo simétrico com $V_p = 3V$ e $T_m = 0{,}05s$. A frequência fundamental do sinal é dada por:

$$f_m = \frac{1}{T_m} = 20\,Hz.$$

Os coeficientes de Fourier da série de Fourier do sinal triangular são:

$$a_0 = \frac{2 \cdot V_p}{\pi} = \frac{6}{\pi};$$

$$a_n = \frac{4\,V_p}{\pi \cdot n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$ onde n é um nº ímpar positivo;

$$b_n = 0.$$

Logo, o espectro do sinal modulante é:

$$S(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cdot \cos(2\pi f_m \cdot n t) + b_n \cdot \sin(2\pi f_m\, n t)\right]$$

$$S(f) = \frac{3}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12}{\pi n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \cos(2\pi f_m\, n t)$$

(b) Desvio máximo:

$$\Delta F = \frac{D_f\, V_p}{2\pi} = \frac{850 \cdot 3}{2\pi} \approx 405{,}84\,Hz.$$

ocorre nos instantes 0,025 e 0,075.

(c) Considerando que o índice de modulação é igual a 15, podemos afirmar que o sinal modulado é WBFM. Por causa do elevado índice $\beta_f \gg 1$.

(d) Largura de banda do sinal modular triangular:

$$BW_m \approx 7 \cdot f_m = 140\,Hz \quad \text{ou} \approx 9\,f_m = 180\,Hz$$

Logo, o índice de modulação é dado por:

$$\beta_f = \frac{D_f \cdot \max|m(t)|}{2\pi \cdot BW} \approx \frac{850 \cdot 3}{2\pi\ 140} = 2{,}8989 > 1.$$

ou

$$\approx \frac{850 \cdot 3}{2\pi\ 180} = 2{,}2547 > 1.$$

A magnitude da PDF associada a este sinal é dada por:

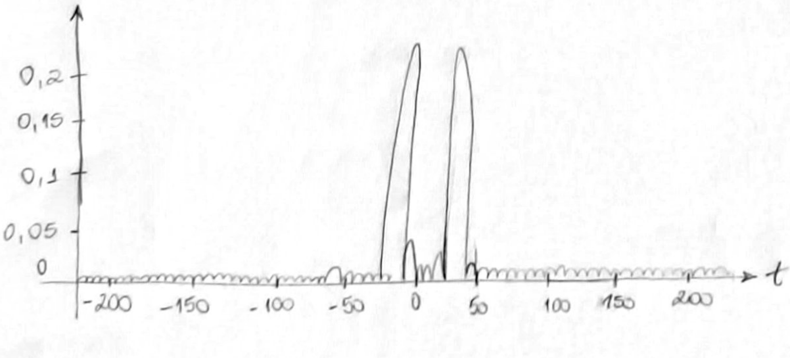
$$f_m(m) = \begin{cases} \dfrac{1}{2 \cdot V_p}, & |m| < V_p \\ 0, & c.c. \end{cases},$$

neste exemplo, $V_p = 3V$ e $A_c = 50V$. Substituindo essa PDF, tem-se:

$$\mathcal{P}_s(f) = \left\{ \begin{cases} \dfrac{\pi \cdot A_c^2}{4 \cdot D_f \cdot V_p}, & (f_c - \Delta F) < f < (f_c - \Delta F) \\ 0, & f \cdot c.c. \end{cases} + \begin{cases} \dfrac{\pi \cdot A_c^2}{4 \cdot D_f \cdot V_p}, & (-f_c - \Delta F) < f < (-f_c + \Delta F) \\ 0, & f \cdot c.c. \end{cases} \right\}$$

O resultado que obtemos é aproximado devido ao fato de que o espectro real são linhas espectrais por funções Delta espaçadas de f_m, nesse caso.

(e)



(f) ×

Questão 2)

Na aproximação banda estreita, a fase do sinal PM é dada por:

$$\phi(t) = \beta_P \cdot m(t) = \beta_P \sin(2\pi t).$$

A forma de onda do sinal PM é obtida através da função seno com fase instantânea:

$$s_{PM}(t) = Ac.\cos(2\pi f_c t + \phi(t)) = Ac \cos(2\pi f_c t + \beta_P . \sin(2\pi t)),$$

onde Ac é a amplitude da portadora e fc é a frequência da portadora. Sem aproximação banda estreita, a fase do sinal PM é dada por:

$$\phi(t) = \beta_P \cdot \sin(\pi . m(t)) = \beta_P . \sin(\pi . \sin(2\pi t)).$$

A forma de onda do sinal sem aproximação é:

$$s_{PM\_NA}(t) = Ac.\cos(2\pi f_c t + \phi(t)) = Ac.\cos(2\pi f_c t + \beta_P . \sin(\pi . \sin(2\pi t))).$$

Desse modo, na aproximação banda estreita, o espectro do sinal PM é composto por uma linha espectral na frequência da portadora com amplitude Ac e outras linhas espectrais com amplitudes menores em frequências adjacentes.

O erro na aproximação do espectro é dado pela diferença entre o espectro do sinal PM com e sem aproximação. O erro aumenta com o aumento do índice de modulação β_P. Para $\beta_P = 0,8$, o erro pode ser significativo, especialmente, em frequências próximas à portadora.

Questão 4)

(a) Para determinar a faixa da frequência instantânea do sinal modulado, devemos, inicialmente, encontrar a equação para o sinal modulado. Para isso, usaremos a seguinte equação:

$$s(t) = Ac \cos\left(2\pi f_c t + K_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)\, d\tau\right),$$

onde A_c é a amplitude do sinal da portadora, f_c é a frequência da portadora, K_f é a constante de desvio e $m(t)$ o sinal modulante.
Neste caso, $A_c = 2V$, $f_c = 1MHz$, $K_f = 25$, $m(t) = 2-t$, para $1 \leq t < 22$ e $m(t) = 0{,}1$, para $22 \leq t \leq 25$.

Por isso, a equação para o sinal modulado é

$$s(t) = 2 \cdot \cos\left[2\pi 10^6 t + 25\left(\int_1^{22} 2-t \, dt + \int_{22}^{25} 0{,}1 \, dt\right)\right].$$

Para encontrar a faixa de frequência instantânea, precisamos encontrar a derivada do sinal modulado:

$$\varphi(t) = 2\pi \cdot 10^6 t + 25\left(\int_1^{22} 2-t \, dt + \int_{22}^{25} 0{,}1 dt\right)$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = 2\pi \cdot 10^6 - 25 \cdot m(t).$$

A faixa da frequência instantânea é dada por:

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt}_{max} - \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi}{dt}_{min},$$

para encontrar os valores máximos e mínimos de $\frac{d\varphi}{dt}$, necessitamos os valores máximos e mínimos do intervalo $0 < t < 1$ Assim,

- Para $t = [0, 1/2]$, $m(t) = -t+2$, logo $\frac{d\varphi}{dt} = 2\pi 10^6 - 25(2-t) = \frac{25}{2} + 2\pi(10^6 + 25)$
- Para $t = (1/2, 1]$, $m(t) = 0{,}1$, então $\frac{d\varphi}{dt} = 2\pi \cdot 10^6 - 25 \cdot 0{,}1 = 2\pi 10^6 - 2{,}5$

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{25}{2} + 2\pi(10^6 + 25)\right] - \frac{1}{2\pi}\left[2\pi 10^6 - 2{,}5\right] \approx$$

$$= 1\,000\,026{,}989 - 999\,999{,}6021$$

$$= 27{,}39 \text{ Hz}$$

(b) A largura de banda do sinal é dada por:

$$B = 2 \cdot 27{,}39 = 54{,}77 \text{ Hz}.$$

(c) X

(d) Para calcular o índice de modulação, precisamos encontrar o pico de amplitude do sinal modulante $(m(t))$ e a máxima amplitude do sinal da portadora $(c(t))$. O sinal $m(t)$ é dado por:

$$m(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 2-t, & 1 \leq t < 22 \\ 0{,}1, & c.c. \end{cases}$$

O pico da amplitude de $m(t)$ ocorre em $t = 1$: $mp = 2 - 1 = 1$. A máxima amplitude do sinal de portadora é $Ac = 2V$. Assim, o índice de modulação será:

$$\mu = \frac{mp}{Ac} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

Questão 5)

(a) A transformada de Fourier da PDF do sinal modulante $pm(f)$ é dada por:

$$pm(f) = \frac{1}{2D} \cdot \left[\frac{\sin(2\pi D f)}{\pi f} \right]^2.$$

O espectro da portadora modulada $Ps(f)$ é dado pela convolução da função de impulso $\delta(f)$ com a transformada de Fourier do sinal modulante:

$$Ps(f) = \delta(f) * pm(f).$$

(b) Para um índice de modulação elevado, a largura de banda do sinal FM pode ser estimada pela Regra de Carson:

$$B = 2\,\beta \cdot fm$$

$$B = 2 \cdot \beta \cdot \frac{1}{2D}$$

$$B = \frac{\beta}{D}$$

Questão 6)

(a) A função densidade espectral do sinal modulante $p_m(f)$ é dada pela transformada de Fourier do seu PDF $p_m(m)$:

$$P_m(f) = \int_{-\infty}^{\infty} p_m(m) \cdot \exp(-j2\pi f m \tau)\, d\tau$$

$$P_m(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{2} \cdot \exp[-\alpha \cdot |m|]\, \exp(-j2\pi f m \cdot \tau)\, d\tau$$

$$P_m(f) = \frac{\alpha}{(\pi f)^2 + \alpha^2}.$$

Assim, a PSD do sinal FM com índice de modulação elevado é dada por:

$$S(f) = A^2 \cdot \left[\delta(f - f_c) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cdot |M(f - n f_s)|^2 \right],$$

substituindo $p_m(f)$ temos:

$$S(f) = A^2 \left[\delta(f - f_c) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cdot \left| \frac{\alpha}{(\pi(f - nf_s))^2 + \alpha^2} \right|^2 \right].$$

(b) A largura de banda depende do índice de modulação β e da forma de PDF do sinal modulante. Assim, a BW pode ser estimada como:

$$BW_{FM} = 2 \cdot \beta \cdot f_s + \underbrace{BW_m}_{\text{banda larga do sinal modulante.}},$$

a BW_m depende do parâmetro α, logo, $BW_m = 2 \cdot \alpha$. Logo,

$$BW_{FM} = 2 \cdot \beta \cdot f_s + 2\alpha$$

Questão 8)

(a) $s(t) = \mathrm{Re}\left[g(t)\, e^{j\omega_c t}\right]$, sendo $g(t) = A_c\, e^{j\theta(t)}$. Assim, pela aproximação de Taylor, temos:

$$g(t) = A_c\, [1 + j\theta(t)].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} s(t) &= \mathrm{Re}\left[g(t)\cdot e^{j w_c t}\right] \\ &= \mathrm{Re}\left[A_c\,(1+j\theta(t))\cdot e^{j w_c t}\right] \\ &= A_c\cdot \mathrm{Re}\left[(1+j\theta(t))\,(\cos(w_c t)+j\sin(w_c t))\right] \\ &= A_c\left[\cos(w_c t) - \theta(t)\sin(w_c t)\right] \\ &= A_c\left[\cos(w_c t) - D_p\, m(t)\sin(w_c t)\right]. \end{aligned}$$

Sabendo que:

$$g(t) = A_c\left[1 + j\theta(t)\right] \iff G(f) = \left[\delta(f) + j\Theta(f)\right]A_c,$$

temos que:

$$S(f) = \frac{A_c}{2}\left[\delta(f-f_c) + \delta(f+f_c) + j\left\{\Theta(f-f_c) - \Theta(f+f_c)\right\}\right].$$

(b) A modulação AM residual surge devido à aproximação de banda estreita ($\beta <<< 1$), assim, os termos de segunda ordem da série de Taylor que geram essa modulação. Ademais, a amplitude da AM residual é proporcional ao índice de modulação (β) e à amplitude do sinal modulante.

(c) Para NBFM/NBPM, a distorção de fase, causada pelos termos de AM residual, deve ser menor do que 5%. Logo, o valor de β que limita a distorção de fase a 5% é dado por:

$$\beta \leq 0{,}125.$$

Questão 9)

(a) Considerando que m(t) trata-se de um sinal senoidal, podemos obter o espectro do sinal através de Bessel. Portanto, calcula-se a energia:

$$N \rightarrow J_0^2(\beta) + \sum_{n=1}^{N} J_n^2(\beta).$$

$0 \to 0{,}02268$

$1 \to 0{,}17580$

$2 \to 0{,}29380$

$3 \to 0{,}32016$

$4 \to 0{,}57592$

$5 \to 0{,}83813$

$6 \to 0{,}95898$

$7 \to 0{,}99258$

$\boxed{8 \to 0{,}99910}$

Logo, o menor espectro que garante os 99,99% é $J_n(6)$.

(b) $\beta_f = \dfrac{\Delta F}{BW_{FM}} = \dfrac{A_m \cdot D_f}{BW_{FM} \cdot 2\pi} \Rightarrow A_m = \dfrac{6 \cdot 2\pi \cdot 20}{850} = \underline{0{,}887}$

(c) Para $2 < \beta < 10$, tem-se:

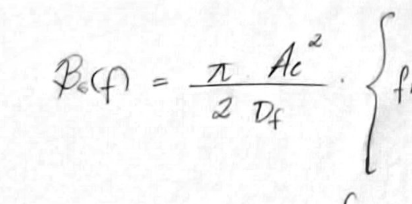
$$BW_{FM} \approx 2 \cdot (2 + \beta) \cdot f_m = 2 \cdot 8 \cdot 20 = 320\,\text{Hz}.$$

Como, $BW = 2 \cdot \Delta F \Rightarrow \Delta F = \dfrac{320}{2} = 160\,\text{Hz}$, temos que $\Delta F_{máx}$ ocorrerá nos máximos dos cossenos. Isto é, quando

$$t = 0{,}025\,s.$$

(d) Um sinal FM é considerado banda larga se $\beta > 1$ e banda estreita se $\beta < 1$. Como $\beta > 1$, logo, o sinal é classificado como banda larga.

(e) Para o $m(t)$ da Figura 67.a, o comportamento de $f_m(m)$ é:



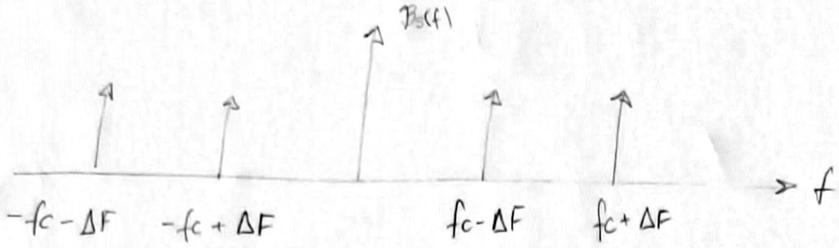
$$\begin{cases} 1/2, & |m| = 0{,}5 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Assim, a PDS será:

$$\mathcal{B}_s(f) = \frac{\pi}{2} \frac{A_c^2}{D_f} \cdot \left\{ f_m\left[\frac{2\pi}{D_f}(f - f_c)\right] + f_m\left[\frac{2\pi}{D_f} \cdot (f + f_c)\right] \right\}$$

$$\mathcal{B}_s(f) \approx \frac{A_c^2}{4 \cdot k_f} \cdot \begin{cases} \frac{1}{2}, \ (-f_c - \Delta F) < f < (-f_c + \Delta F) + \frac{1}{2}, \ (f_c - \Delta F) < f < (f_c + \Delta F) \\ 0, \ f \ c.c. \qquad\qquad 0, \ f \ c.c. \end{cases}$$

O novo espectro será:



(f) $BW = 2 \cdot \Delta F = 2 \cdot \frac{D_f}{2\pi} V_p = 2 \frac{850}{2\pi} \cdot 0,5 = 135,28\ Hz.$

Questão 10)

(a) $s(t) = A_c \cos[w_c t + \theta(t)].$

Para sinais FM, $\theta(t) = D_f \cdot \int_{-\infty}^{t} m(\tau)\, d\tau$, portanto,

$$s(t) = A_c \cos\left[w_c t + D_f \int_{-\infty}^{t} m(\tau)\, d\tau\right]$$

$$s(t) = A_c \cdot \cos\left[2\pi f_c t + D_f \cdot \int_{-\infty}^{t} \cos(20\pi\tau)\, d\tau\right]$$

$$s(t) = 10 \cdot \cos\left[2\pi f_c t + \cancel{2\pi}\, 50 \cdot \frac{\sin(20\pi t)}{\cancel{20\pi}}\right]$$

$$s(t) = 10 \cos[2\pi f_c t + 5 \cdot \sin(20\pi t)]$$

O índice de modulação é definido por:

$$\beta_f = \frac{\Delta F}{BW_m} = \frac{\text{máx}\{m(t)\}\, k_f}{f_m}$$

$$\beta_f = \frac{1 \cdot 50}{10} = 5$$

(b) A potência média total do sinal FM:

$$\overline{P} = \frac{A_c^2}{2} = \frac{10^2}{2} = 50\ W_{\Omega}$$

(c) $N \rightarrow J_0^2(\beta) + 2 \cdot \sum_{n=1}^{N} J_n^2(\beta)$

0 → 0,0315

1 → 0,2401

2 → 0,2505

3 → 0,5166

4 → 0,8227

5 → 0,9591

$\boxed{6 \rightarrow 0,9934}$

Logo, a largura de banda será:

$$BW = 2\ N.\ f_m = 2.\ 6.\ 10 = 120\ Hz$$

(d) Pelo método de Carson:

$$B = 2(\beta+1).\ f_m = 2.6.10 = 120\ Hz,$$

$$B = 2.(\beta+2)\ f_m = 2.7.10 = 140 Hz,$$

desse modo, o método de Carson é uma boa aproximação, visto que as largura são bem próximas.

Questão 11)

(a) $\Delta F = k_f.\ A_m = 50\ \frac{Hz}{V}.4.V = \underline{200\ Hz}$

(b) $\beta = \frac{k_f.A_m}{f_m} = \frac{200}{1000} = \underline{0,2}$

Questão 12)

(a) Para sinais FM, com modulação senoidal, a regra de Carson nos dá uma boa aproximação de largura de banda de transmissão. A regra de Carson é definida como:

$$B = 2.(\Delta F + f_m).$$

Considerando que $f_a = 15\ kHz$ e o índice de modulação é igual a $\beta = 2$, o desvio de frequência será:

$$\Delta F = 2.\ 15\ kHz = 30\ kHz.$$

$$\Rightarrow B = 2(30 + 15) = 2\ 45 = \underline{90\ kHz}$$

(b) $N \rightarrow J_0^2(\beta) + \sum_{n=1}^{N} J_n^2(\beta)$

$0 \rightarrow 0,0501$

$1 \rightarrow 0,7152$

$2 \rightarrow 0,9642$

$\boxed{3 \rightarrow 0,9974}$

$$P_T = \frac{A_c^2}{2} = 0,9979 \Rightarrow \%P = \frac{P_{TOTAL}}{A_c^2/2} \cdot 100\% = 99,74\%$$

Questão 13)

$c(t) = 100 \cdot \cos(2\pi 10^9 t) \rightarrow w_c = 2\pi 10^9$ rad/s

$A_c = 100$ V, $\Delta F = 30$ kHz.

$$m(t) = 2,5 \cdot \cos(3\pi \cdot 10^4 t) \rightarrow f_m = \frac{w_m}{2\pi} = \frac{3\pi\, 10^4}{2\pi} = 15 \text{ kHz}$$

$$\beta = \frac{30}{15} = 2,$$

usando a tabela de função de Bessel.

Contudo, pelo enunciado, tem-se 1V-RMS $\longrightarrow \Delta F = 30$ kHz. Desse modo, para o sinal modulante, a amplitude de pico será 1,414 V. Assim,

$$\beta = \frac{\Delta F}{f_m} = \frac{k_f \cdot A_m}{f_m}$$

$$\beta = \frac{30/1,414 \cdot 2,5 \cdot 10^3}{15 \cdot 10^3} = \frac{53}{15} = 3,53 \approx 3,60$$

Pela tabela da função de Bessel: $J_0(\beta) = -0,3918$; $J_1(\beta) = 0,0955$; $J_2(\beta) = 0,4448$; $J_3(\beta) = 0,3988$; $J_4(\beta) = 0,2198$; $J_5(\beta) = 0,0897$; $J_6(\beta) = 0,0293$ e $J_7(\beta) = 0,0080$.

N	$J_n(\beta)$	$\frac{A_c}{2} \cdot J_n(\beta)$
0	-0,3918	-19,59
1	0,0955	4,775
2	0,4448	22,24
3	0,3988	19,94
4	0,2198	10,99
5	0,0897	4,485
6	0,0293	1,465
7	0,0080	0,4

Todas as amplitudes do espectro de frequência possuem valores maiores do que 1% dos sinais não-modulados até a sexta harmônica.

Questão 14) $\Delta F = 30\ kHz$ $\qquad f_m = \frac{6\pi \cdot 10^4}{2\pi} = 30\ kHz.$

$A_m = 1$

$k_f = \frac{30}{1{,}414} = 21{,}21 \cdot 10^3 \frac{1}{V \cdot s}$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\Delta F}{f_m} = \frac{k_f \cdot A_m}{f_m} = \frac{21{,}21\,10^3 \cdot 1}{30 \cdot 10^3} = 0{,}7072 \approx 0{,}8$$

N	$J_n(\beta)$	$\frac{A_c}{2} \cdot J_n(\beta)$
0	0,8463	42,315
1	0,3688	18,44
2	0,0758	3,79
3	0,0102	0,51

Aos amplitudes dos espectro de frequência possuem valores maiores do que 1% do sinal não modulado até a segunda harmônica.

Questão 15) $k_f = \frac{10\ Hz}{V}$

(a) Sabemos que $\Delta F = k_f \cdot max|m(t)|$, logo,

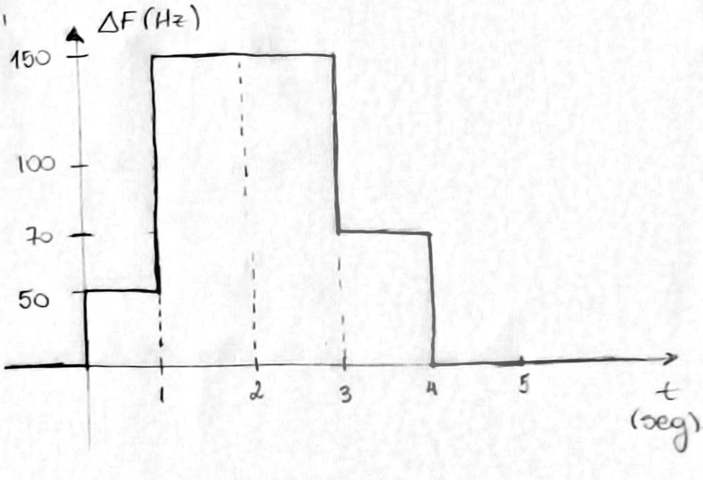
para $t < 0$, $m(t) = 0V \therefore \Delta F = 0\ Hz$

para $0 < t < 1$, $m(t) = 5V \therefore \Delta F = 50\ Hz$

para $1 < t < 3$, $m(t) = 15V \therefore \Delta F = 150\ Hz$

para $3 < t < 4$, $m(t) = 7V \therefore \Delta F = 70\ Hz$

para $t > 4$, $m(t) = 0V \therefore \Delta F = 0\ Hz$



(b) Sabemos que $\Delta\phi = k_p\ A_m = 2 \cdot 10\pi \frac{rad}{V} \cdot A_m = 20\pi\ A_m$, assim,

para $t < 0$, $m(t) = 0V \therefore \Delta\phi = 0\ rad$

para $0 < t < 1$, $m(t) = 5V \therefore \Delta\phi = 100\pi\ rad$

para $1 < t < 3$, $m(t) = 15V \therefore \Delta\phi = 300\pi\ rad$

para $3 < t < 4$, $m(t) = 7V \therefore \Delta\phi = 140\pi\ rad$

para $t > 4$, $m(t) = 0V \therefore \Delta\phi = 0\ rad$