MAP5724
Resolução Numérica de Equações Diferenciais Parciais
Projeto Elíptico 1

Prof.: Antoine Laurain
Aluno Eric Vargas

Segundo semestre de 2022.

Sumário

1 Parte teórica

Seja $\Omega = (0,1)^2$ e $\Gamma = \partial\Omega$. Implementar e estudar a convergência para uma discretização de ordem superior, usando o estêncil compacto de 9 pontos, para a equação de Poisson seguinte

$$-\Delta u = f \text{ em } \Omega \tag{1}$$
$$u = g \text{ em } \Gamma. \tag{2}$$

A equação do estêncil compacto é:

$$D_h u = R_h f, \text{ com } D_h = \frac{h^-2}{6}\begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & 20 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}, \text{ e } R_h = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & 8 & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} \tag{3}$$

1.1 Consistência

Para consistência, por Taylor temos:

$$D_h u = -\Delta u - \frac{h^2}{12}\Delta^2 u - \frac{h^4}{360}\left[\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right] + O(h^6) \tag{4}$$

De modo similar:

$$R_h f = f(x,y) + \frac{h^2}{12}\Delta f(x,y) + \frac{h^4}{144}\left[\frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial y^4}\right] + O(h^4),$$

como $\Delta f = -\Delta^2 u$ temos que o estêncil $D_h u = R_h f \implies -\Delta u = f + O(h^4)$.

1.2 Estabilidade

O estêncil pode ser escrito de forma matricial da forma $L_h u_h = q_h$, onde L_h possui a forma:

$$L_h = \frac{h^{-2}}{6}\begin{bmatrix} T & B & 0 & \dots & 0 \\ B & T & B & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & B & T & B \\ 0 & \dots & 0 & B & T \end{bmatrix}$$

com :

$$T = \begin{bmatrix} 20 & -4 & 0 & \dots & 0 \\ -4 & 20 & -4 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -4 & 20 & -4 \\ 0 & \dots & 0 & -4 & 20 \end{bmatrix}, \text{ e } B = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -4 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & -4 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$$

A maioria das linhas são diagonalmente dominantes (não estritamente):

$$20 = 4 + 4 + 2(1 + 4 + 1)$$

mas elementos de cantos são estritos, por exemplo da primeira linha:

$$20 > 4 + 1 + 4 + 1$$

Somando isso, ao fato dos termos da diagonal principal serem positivos e todos os outros são negativos ou zero, temos que L_h é irredutivelmente diagonalmente dominante, portanto possui inversa e o esquema é estável.

2 Resultados numéricos

Para este trabalho o sistema $L_h u_h = q_h$ foi resolvido com o método iterativo de Gauss-Seidel. Abaixo podemos ver alguns exemplos gerados a partir do código em anexo.

3 Interpretação dos resultados e conclusões

Podemos ver que a ordem $O(h^4)$ produz resultados altamente precisos