Kapitel 2

Das Hebelgesetz

Übersicht

Sie können sich sicher noch erinnern, wie Sie als Kind auf der „Gigampfi“ (Wippe) gespielt haben. Stellen Sie sich vor, dass die Zwillingsschwestern Laura und Sarah auf der Wippe sitzen. Da sie gleich schwer sind und den gleichen Abstand zum Drehpunkt haben, sind sie im Gleichgewicht (Abbildung 2.1(a)). Will nun aber Laura mit ihrem älteren (und etwas schwereren) Bruder Marco auf die Wippe, so sind sie nur im Gleichgewicht, wenn Laura weiter aussen als Marco sitzt (Abbildung 2.1(b)).

Mit Hilfe eines Modells versuchen wir die Gesetzmässigkeit zwischen Massen und Abstand selber zu erkennen. Dieses Gesetz werden wir anhand eines Gedankenexperimentes begründen.

(a) Sarah und Laura

(b) Marco und Laura

Abbildung 2.1: Wippe

Lernziele

- Sie können die Gesetzmässigkeit an der Wippe in eigenen Worten formulieren und die Abstände berechnen, die nötig sind, damit sich Marco und Laura (Abbildung 2.1(b)) im Gleichgewicht befinden.
- Sie verstehen das Gedankenexperiment und können es jemandem erklären.

2.1 Probieren geht über Studieren

Experiment 2.1

Wir legen einen Bleistift auf eine waagrechte Unterlage. Anschliessend legen wir unseren Massstab so auf den Bleistift, dass er im Gleichgewicht ist (Abbildung 2.2 auf der nächsten Seite)[1]. Der Umstand, dass der Bleistift einen sechseckigen Querschnitt hat, erleichtert uns die Arbeit etwas.

[1] Falls der Massstab auf der einen Seite ein Loch hat, liegt er nicht in der Mitte auf.

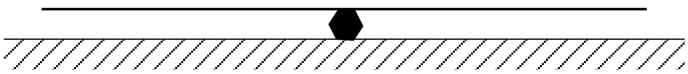


Abbildung 2.2: Massstab im Gleichgewicht

Experiment 2.2
Nun positionieren wir zwei Münzen in einem Abstand (Mittelpunktsabstand) von 6 cm links vom Drehpunkt[2] und gleichzeitig eine Münze[3] rechts vom Drehpunkt. Probieren Sie aus, wie gross der rechte Abstand sein muss, damit der Massstab im Gleichgewicht ist (Abbildung 2.3).

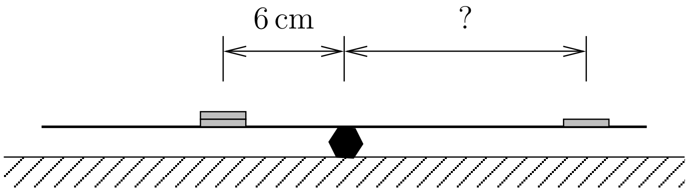


Abbildung 2.3: Massstab mit drei Münzen im Gleichgewicht

Experiment 2.3
Im nächsten Experiment positionieren wir drei Münzen in einem Abstand von 4.5 cm links vom Drehpunkt und gleichzeitig eine Münze rechts vom Drehpunkt. Probieren Sie aus, wie gross der rechte Abstand sein muss, damit der Massstab im Gleichgewicht ist (Abbildung 2.4).

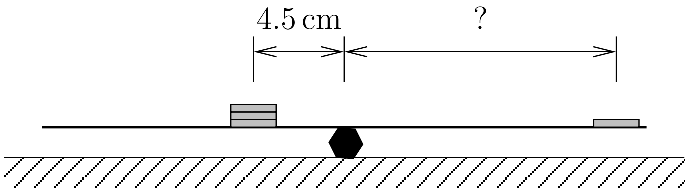


Abbildung 2.4: Massstab mit vier Münzen im Gleichgewicht

Experiment 2.4
Im nächsten Experiment positionieren wir vier Münzen in einem Abstand von 9 cm links vom Drehpunkt und gleichzeitig drei Münzen rechts vom Drehpunkt. Probieren Sie aus, wie gross der rechte Abstand sein muss, damit der Massstab im Gleichgewicht ist (Abbildung 2.5).

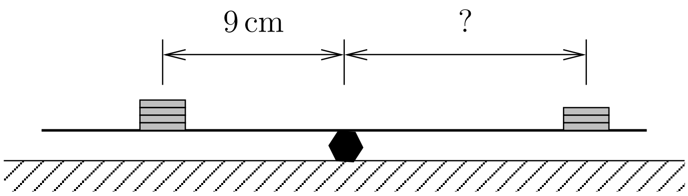


Abbildung 2.5: Massstab mit sieben Münzen im Gleichgewicht

[2] Achten Sie darauf, dass Sie wirklich den Abstand vom Drehpunkt nehmen und nicht von der Mitte des Massstabes!

[3] Selbstverständlich müssen alle Münzen identisch sein.

Tabelle 2.1: Ergebnisse der Messungen

Massenverhältnis	Abstand links [cm]	Abstand rechts [cm]	Abstandsverhältnis
2:1	6	____________	____:____
3:1	4.5	____________	____:____
4:3	9	____________	____:____

Aufgabe 2.1 (Gesetzmässigkeit der Verhältnisse)

a) Tragen Sie alle Messwerte in die Tabelle 2.1 ein.
b) Versuchen Sie eine Gesetzmässigkeit zwischen Abstandsverhältnis und Massenverhältnis zu erkennen.

Die Abstände verhalten sich...

Statt die Massen auf einen Massstab zu legen, können wir auch einen drehbar gelagerten Stab nehmen und die Massen anhängen (Abbildung 2.6).

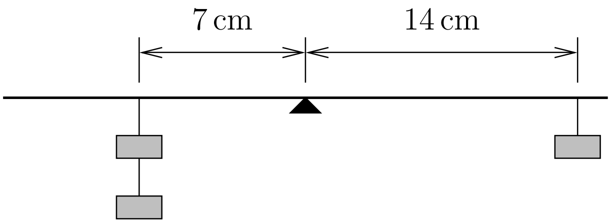


Abbildung 2.6: Hebel mit angehängten Massen

Statt Gewichte anzuhängen, können wir auch mit den entsprechenden Gewichtskräften[4] ziehen (Abbildung 2.7).

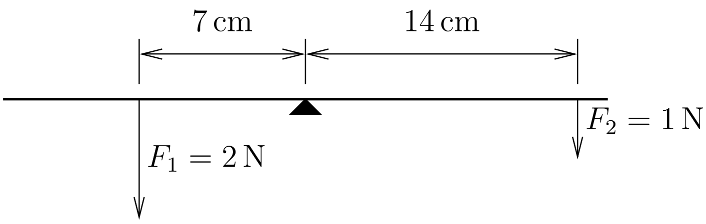


Abbildung 2.7: Hebel mit zwei angreifenden Kräften

Hier gilt nun analog:

Die Abstände verhalten sich umgekehrt proportional zum Verhältnis der Kräfte!

Im Allgemeinen formuliert man das Hebelgesetz aber etwas anders. Damit werden wir uns im nächsten Abschnitt beschäftigen.

[4] $F_G = mg$ mit $g = 9.8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ oder gerundet $10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Eselsbrücke: Die Schwerkraft auf eine Schokoladentafel (100 g) ist etwa 1 Newton

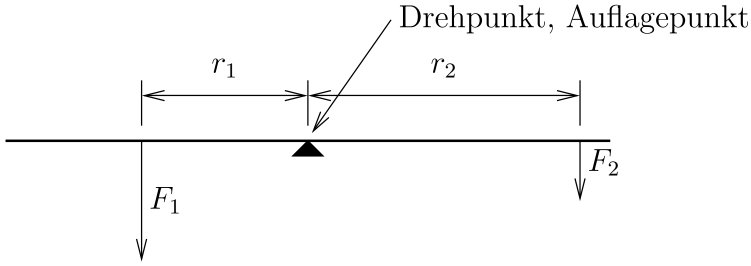


Abbildung 2.8: Hebel mit zwei angreifenden Kräften

2.2 Formulierung des Hebelgesetzes

Zuerst sollten wir wissen, was man in der Physik überhaupt unter einem Hebel versteht.

Hebel Unter einem Hebel versteht man einen drehbar gelagerten Körper (z. B. eine Stange).

Vorläufige Formulierung des Hebelgesetzes Wenn der Hebel im Gleichgewicht ist, gilt:

Die Abstände verhalten sich umgekehrt proportional zum Verhältnis der Kräfte!

Schreiben wir r_1 und r_2 für die Abstände und F_1 und F_2 für die Kräfte (Abbildung 2.8), so können wir das Gesetz auch als Formel schreiben:

$$\begin{aligned} \frac{r_1}{r_2} &= \frac{F_2}{F_1} \qquad | \cdot r_2 \cdot F_1 \\ r_1 \cdot F_1 &= r_2 \cdot F_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Kraft mal Kraftarm} &= \text{Last mal Lastarm} \\ r_1 \cdot F_1 &= r_2 \cdot F_2 \end{aligned}$$

Hebelgesetz

Beispiel 2.1 (Laura und Daniela auf der Wippe)
Laura und Daniela vergnügen sich auf der Wippe. Laura hat ein Gewicht von 330 N (33 kg). Sie sitzt so auf der Wippe, dass ihr Schwerpunkt 2.4 m vom Drehpunkt entfernt ist. Daniela hat ein Gewicht von 360 N (36 kg).

Wie weit vom Drehpunkt entfernt muss Daniela sitzen, damit die Wippe im Gleichgewicht ist?

Lösung des Beispiel 2.1

Es empfiehlt sich zuerst das Problem zu skizzieren (Abbildung 2.9 auf der nächsten Seite): Gegeben:

$$\begin{aligned} F_1 &= 330\,\mathrm{N} \\ r_1 &= 2.4\,\mathrm{m} \\ F_2 &= 360\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

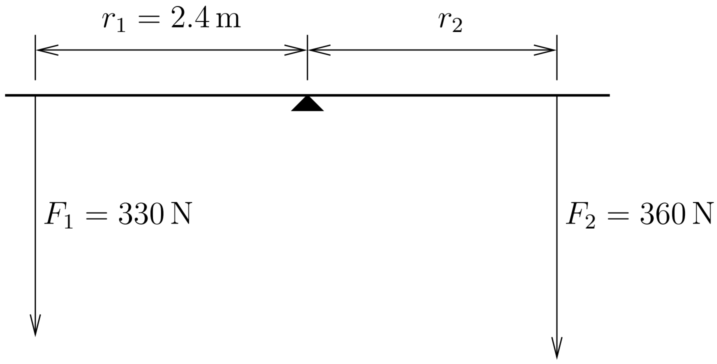


Abbildung 2.9: Skizze der Wippe mit Laura und Daniela

Gesucht:

$$r_2$$

es gilt:

$$\begin{aligned} r_1 \cdot F_1 &= r_2 \cdot F_2 \qquad | : F_2 \\ r_2 &= \frac{r_1 \cdot F_1}{F_2} \\ r_2 &= \frac{2.4\,\mathrm{m} \cdot 330\,\mathrm{N}}{360\,\mathrm{N}} = 2.2\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.2 (Symmetrischer Hebel)
Ein symmetrischer Hebel wird 4.0 cm links vom Drehzentrum mit einer Kraft von 7.0 N belastet. Wie gross muss eine Kraft sein, die den Hebel 5.5 cm rechts vom Drehzentrum belastet, wenn der Hebel im Gleichgewicht ist (Abbildung 2.10)?

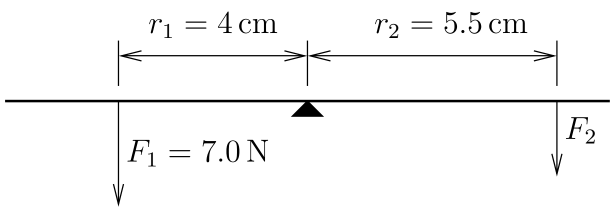


Abbildung 2.10: Hebel mit zwei angreifenden Kräften

2.3 Begründung des Hebelgesetzes

Das Hebelgesetz ist vermutlich schon seit Urzeiten bekannt. Der erste, der sich systematisch mit dem Hebelgesetz befasste, war vermutlich Archimedes. Er versuchte auch, das Hebelgesetz theoretisch zu begründen. Einen Teil seiner Theorie werden wir nun stark vereinfacht wiedergeben.

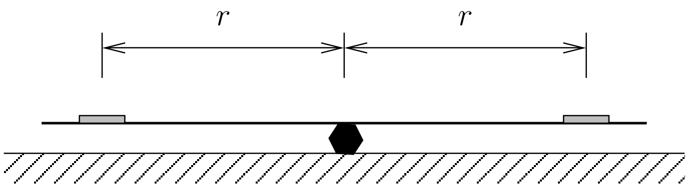


Abbildung 2.12: Symmetrischer Hebel

Exkurs 2.1 (Wer war Archimedes?)
Archimedes (von Syrakus) lebte von 287 bis 212 v. Chr. in Syrakus (Abbildung 2.11). Die Stadt Syrakus war damals eine griechische Kolonie; sie liegt auf Sizilien.
Archimedes beschäftigte sich mit Mathematik, Physik, Ingenieurwissenschaften und diversen anderen Dingen.

In der Mathematik berechnete er unter anderem die Zahl π. In der Physik beschäftigte er sich intensiv mit dem Hebelgesetz, dem Schwerpunkt und der Statik. Seine bekannteste physikalische Entdeckung ist jedoch das so genannte Archimedische Prinzip.
Er hat diverse einfache Maschinen erfunden, so zum Beispiel den Flaschenzug und die Archimedische Spirale (eine spezielle Wasserpumpe).

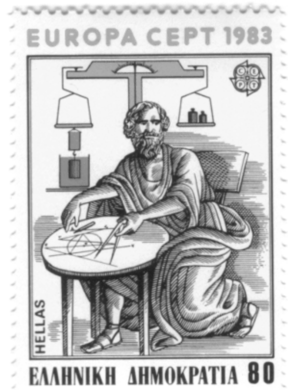


Abbildung 2.11: Griechische Briefmarke mit Archimedes

2.4 Grundannahmen, Axiome

Jede Theorie braucht ein paar Grundannahmen. Diese Grundannahmen, die ohne Beweis einleuchten, werden in der Physik Axiome genannt. Ein Axiom sollte gut experimentell überprüft sein.

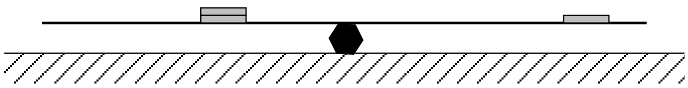
Axiom 1
Ein symmetrisch belasteter Hebel befindet sich im Gleichgewicht.

Dieses Axiom ist ganz offensichtlich richtig. Da die Situation absolut symmetrisch ist, wäre es speziell, wenn der Hebel nicht im Gleichgewicht wäre. Ebenso ist unser Axiom 1 leicht überprüfbar z. B. mit einem Massstab und zwei Münzen wie in Abbildung 2.14 auf der nächsten Seite dargestellt.

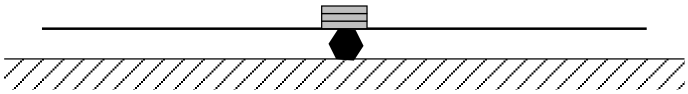
Axiom 2
Die Gesamtkraft greift im Aufhängepunkt/Schwerpunkt an.

Wir belasten einen Massstab auf einem Bleistift links mit zwei Münzen und rechts mit einer Münze, so dass er im Gleichgewicht ist (Abbildung 2.13(a) auf der nächsten Seite). Die wirkende Last auf den Auflagepunkt (Bleistift) entspricht drei Münzen (der als Hebel verwendete Massstab sei masselos). Es wirkt genau die gleiche Last auf den Bleistift, wenn wir die drei Münzen auf dem Massstab direkt über dem Bleistift stapeln (Abbildung 2.13(b) auf der nächsten Seite). Das heisst, es spielt keine Rolle, ob wir den Hebel mit den Kräften F_1 und F_2 oder den Hebel im Aufhängepunk mit der Summe $F_1 + F_2$ belasten (Abbildung 2.12). Auch unser zweites Axiom scheint richtig zu sein und ist ebenfalls einfach überprüfbar.

Beispiel 2.2 (Axiom 2 überprüfen)
Das Axiom 2 kann mit einem Hebel und zwei mal zwei gleichen Gewichten wie in Abbildung 2.15 auf der nächsten Seite dargestellt überprüft werden.



(a) Münzen links und rechts vom Drehpunkt



(b) Münzen über dem Drehpunkt

Abbildung 2.13: Massstab mit drei Münzen im Gleichgewicht

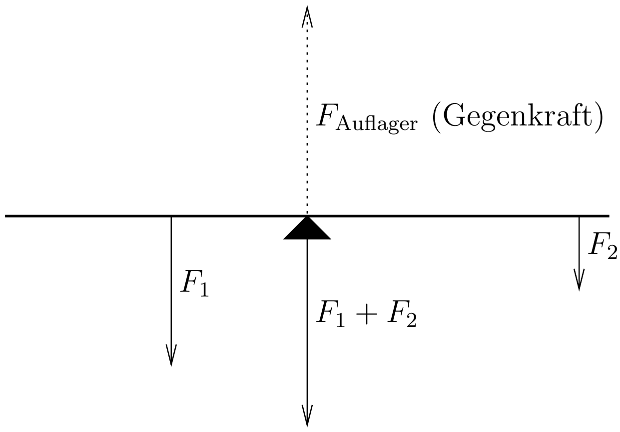


Abbildung 2.14: Kräfte können durch eine Gesamtkraft ersetzt werden

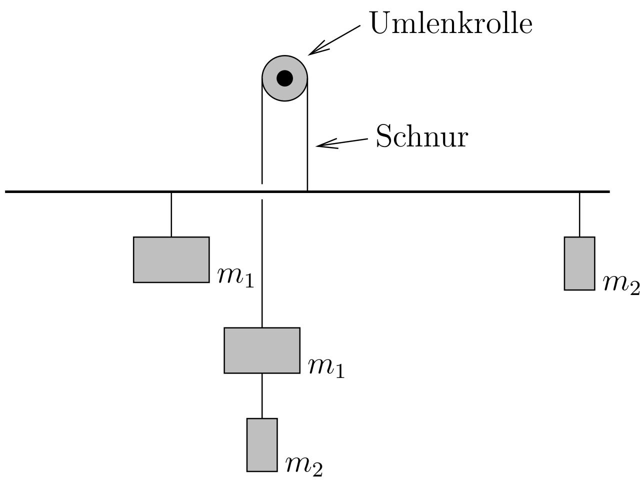


Abbildung 2.15: Überprüfung von Axiom 2

2.5 Gedankenexperiment

Mit diesen beiden Axiomen wollen wir nun ein kleines Gedankenexperiment durchführen.

Experiment 2.5 (Gedankenexperiment)
Nehmen wir an, wir hätten einen symmetrischen Hebel, an dem sich sieben gleich grosse Massen in regelmässigen Abständen befinden. Wir können als Hebel auch den Massstab nehmen und als Massen sieben Münzen (Abbildung 2.16 auf der nächsten Seite). Gemäss unserem ersten Axiom befindet sich der Hebel im Gleichgewicht.

Wir betrachten die beiden linken Münzen als eigenes System. Gemäss Axiom 2 können wir die beiden Münzen auch an „ihrem“ Drehpunkt auflegen (in Abbildung 2.16 auf der nächsten Seite links unten dargestellt).

Dies führt zur Anordnung in Abbildung 2.17 auf der nächsten Seite.

Wir betrachten die fünf rechten Münzen als eigenes System. Gemäss Axiom 2 können wir die fünf Münzen auch an „ihrem“ Drehpunkt auflegen (in Abbildung 2.17 auf der nächsten Seite unten dargestellt). Dies führt zur Anordnung in Abbildung 2.18 auf der nächsten Seite.

Falls Ihnen diese Vorgehensweise nicht einleuchtet, vollziehen Sie dieses Experiment mit einem Massstab und Münzen nach.

Nehmen wir an, jede Münze habe die Masse 10 g (≈ 0.1 N), so führt das zu folgenden Kräften (Abbildung 2.19):

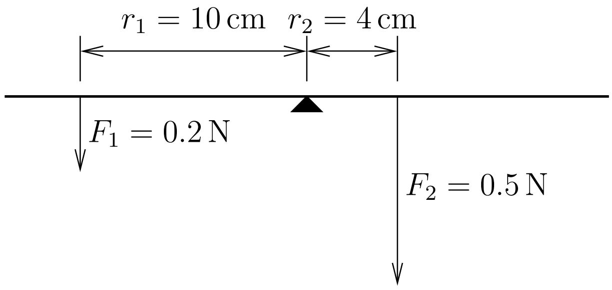


Abbildung 2.19: Hebel mit zwei angreifenden Kräften

Wir sehen also, dass sich die Kräfte in diesem Beispiel wie 2:5 und die Abstände 5:2 (10:4 mit 2 kürzen) verhalten. Genau das Gleiche können wir für 3:2, oder 11:53 oder jedes andere Verhältnis zeigen.

Die Kräfte verhalten sich also umgekehrt proportional zu den Abständen, was gleichbedeutend mit dem Hebelgesetz ist.

Aufgabe 2.3 (Gedankenexperiment)

a) Führen Sie das Gedankenexperiment 2.5 mit 5 statt 7 Massen durch. Zeigen Sie, dass, wenn sich die Massen wie 2:3, sich die Abstände wie 3:2 verhalten.

b) Führen Sie nun dieses Gedankenexperiment tatsächlich mit einem Massstab und fünf Münzen durch.

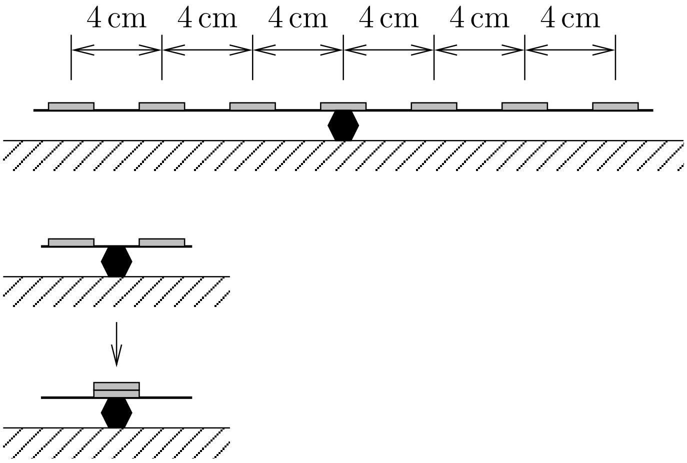


Abbildung 2.16: Hebel mit sieben Münzen

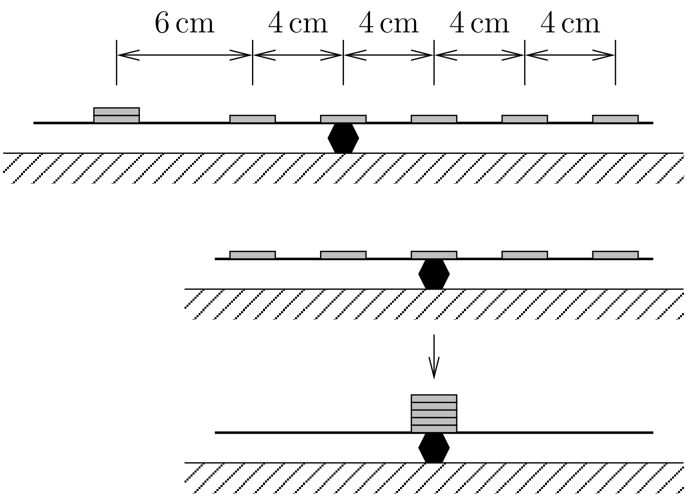


Abbildung 2.17: Hebel mit sieben Münzen

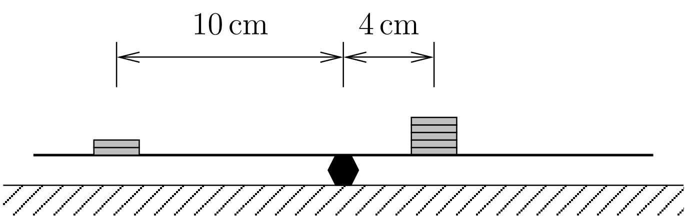


Abbildung 2.18: Hebel mit sieben Münzen

Aufgabe 2.4 (Zweiseitiger Hebel)
Ein symmetrischer Hebel wird 4.0 cm links und 6.0 cm links vom Drehzentrum mit Kräften von je 2.0 N belastet. In welchem Abstand rechts vom Drehzentrum muss man den Hebel mit einer Kraft von 6.0 N belasten, damit der Hebel im Gleichgewicht ist (Abbildung 2.20)?

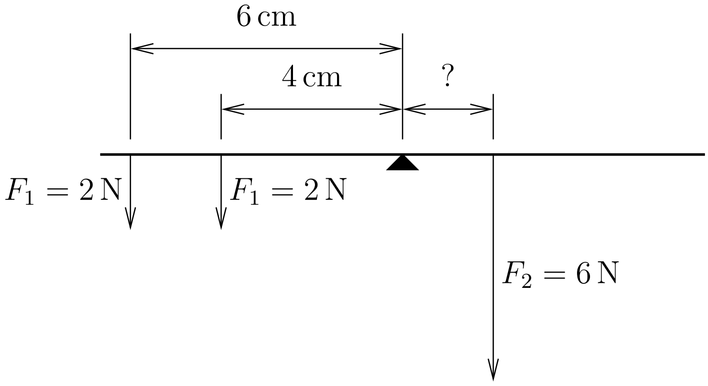


Abbildung 2.20: Hebel

Zusammenfassung

Fassen Sie zusammen! Was haben Sie in diesem Kapitel gelernt? Schreiben Sie sich in ein paar Worten die wichtigsten Punkte auf.

Kapitel 3

Anwendung des Hebelgesetzes

Übersicht

Viele einfache Geräte des Alltags verwenden einen Hebel Wippe, Beisszange, Nussknacker, Locher etc.. Wir werden das Hebelgesetz auf diese und andere Gegenstände anwenden. Einige dieser Gegenstände belasten den Hebel auf beiden Seiten des Drehpunktes (z. B. Wippe), andere nur auf einer Seite (z. B. Schubkarre). Setzen wir zwei Räder mit verschiedenen Radien auf die gleiche Achse, erhalten wir ein so genanntes Wellrad. Wir werden auch hier das Hebelgesetz anwenden. Mit einem Hebel kann man zwar „Kraft sparen“, braucht dafür allerdings einen grösseren Weg. Eine vergleichbare Situation haben wir bei einer Velo-Gangschaltung. Wir haben die Wahl zwischen grosser Kraft und kleinem Weg (bzw. wenig Umdrehungen), oder kleiner Kraft und grossem Weg. Dieser Zusammenhang ist allgemein gültig! Wir werden dazu eine exakte Regel aufstellen („Goldene Regel der Mechanik“).

Lernziele

- Sie unterscheiden zwischen einseitigen und zweiseitigen Hebeln und können in beiden Fällen das Hebelgesetz anwenden.
- Sie können mit Hilfe des Hebelgesetzes erklären, wie eine Beisszange funktioniert.
- Sie kennen den Zusammenhang zwischen „Kraft sparen“ und dafür einen „grösseren Weg benötigen“ („Goldene Regel der Mechanik“) und können ihn an einem Beispiel erläutern.

3.1 Einseitiger und zweiseitiger Hebel

3.1.1 Zweiseitiger Hebel

Wird ein Hebel auf beiden Seiten des Drehpunktes „belastet“, so sprechen wir von einem zweiseitigen Hebel (Abbildung 3.1). Wie wir wissen, gilt das Hebelgesetz:

$$\begin{aligned}\text{Kraft mal Kraftarm} &= \text{Last mal Lastarm}\\ F_1 \cdot r_1 &= F_2 \cdot r_2\end{aligned}$$

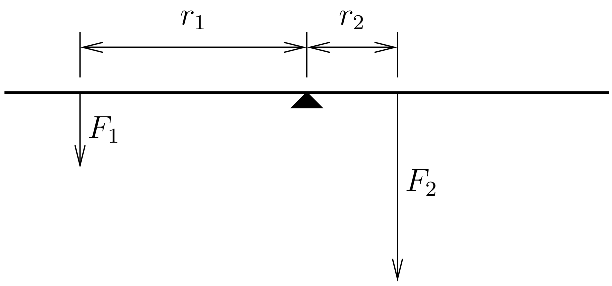


Abbildung 3.1: Zweiseitiger Hebel

3.1.2 Einseitiger Hebel

Wird ein Hebel nur auf einer Seite des Drehpunktes „belastet“, so sprechen wir von einem einseitigen Hebel (Abbildung 3.2). Auch hier gilt das Hebelgesetz:

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$$

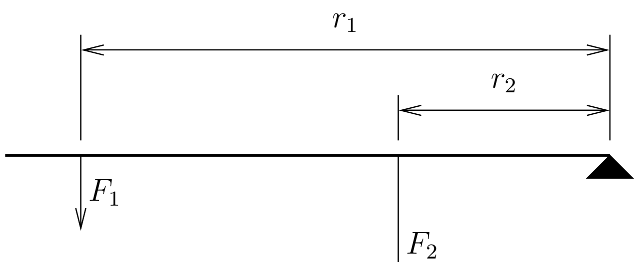


Abbildung 3.2: Einseitiger Hebel

Beachten Sie, dass zu jeder Kraft auch eine Gegenkraft gehört, damit ein Körper (der Hebel) in Ruhe ist. Wird zum Beispiel in der Abbildung 3.2 die Kraft F_2 durch eine Masse verursacht, die dort am Hebel hängt, müssen Sie mit der Kraft F_1 an der Stelle r_1 nach oben ziehen (F_1 kompensieren), damit der Hebel in Ruhe ist.


(a) Beisszange


(b) Nussknacker


(c) Locher

Abbildung 3.3: Hilfsmittel

3.2 Hebel im Alltag

Sie möchten einen Draht durchtrennen, eine Nuss knacken oder 30 Blatt Papier lochen. Für alle diese Aufgaben brauchen sie grosse Kräfte. Zum Glück gibt es dafür Hilfsmittel, nämlich Beisszangen, Nussknacker und Locher (Abbildungen 3.3). Diese Hilfsmittel benutzen jeweils einen Hebel.

Aufgabe 3.1 (Alltagsgegenstände)
Überlegen Sie sich mindestens vier weitere Gegenstände, möglichst aus dem Alltag, die einen Hebel verwenden. Handelt es sich jeweils um einseitige oder zweiseitige Hebel?

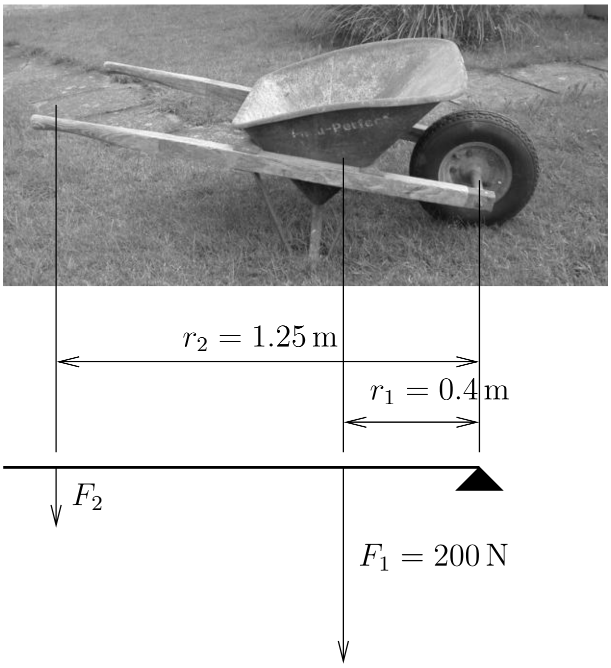


Abbildung 3.4: Karrette

Beispiel 3.1
Ein Bauarbeiter transportiert eine Last mit einer Karrette (Schubkarre). Welche Kraft F_2 „spürt“ der Bauarbeiter am Griff (Abbildung 3.4), wenn die Nutzlast eine Gewichtskraft von 200 N hat? Für unsere Rechnung vernachlässigen wir die Masse der Schubkarre.

Lösung des Beispiels 3.1

Wir haben hier einen einseitigen Hebel. Gegeben:

$$\begin{aligned} F_1 &= 200\,\mathrm{N} \\ r_1 &= 0.4\,\mathrm{m} \\ r_2 &= 1.25\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Gesucht:

$$F_2$$

Mit dem Hebelgesetz folgt:

$$\begin{aligned} F_1 \cdot r_1 &= F_2 \cdot r_2 \qquad | : r_2 \\ F_2 &= \frac{F_1 \cdot r_1}{r_2} \\ F_2 &= \frac{200\,\mathrm{N} \cdot 0.4\,\mathrm{m}}{1.25\,\mathrm{m}} = 64\,\mathrm{N} \\ F_2 &= 64\,\mathrm{N} \quad (\approx 6.4\,\mathrm{kg}) \end{aligned}$$

Aufgabe 3.2 (Beisszange)

Sie möchten mit einer Beisszange einen Draht durchschneiden (Abbildung 3.5).

a) Welche Kraft können Sie auf den Draht ausüben, wenn Sie die Zangengriffe mit 60 N zusammendrücken?
b) Was muss man an der Zange ändern, falls man mehr Kraft braucht?

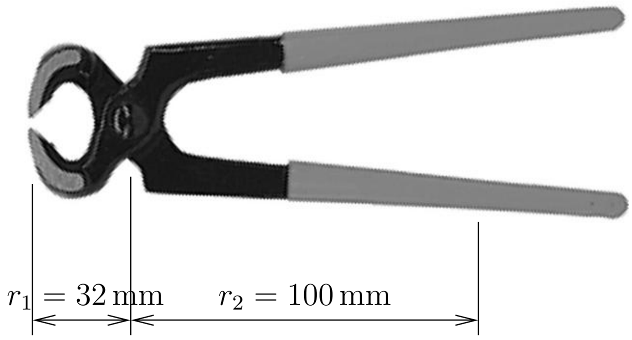


Abbildung 3.5: Beisszange

Aufgabe 3.3 (Nussknacker)

Sie möchten eine Nuss knacken (Abbildung 3.6). Damit die Nussschale bricht, ist eine Kraft von 145 N notwendig. Mit welcher Kraft müssen Sie die Griffe des Nussknackers zusammendrücken?

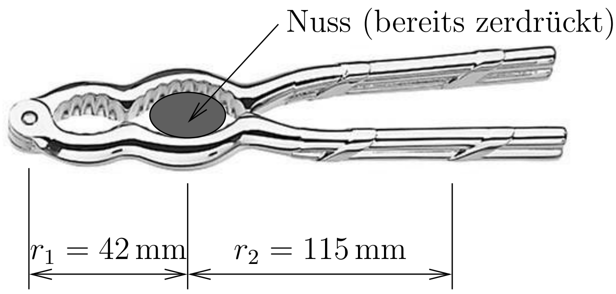
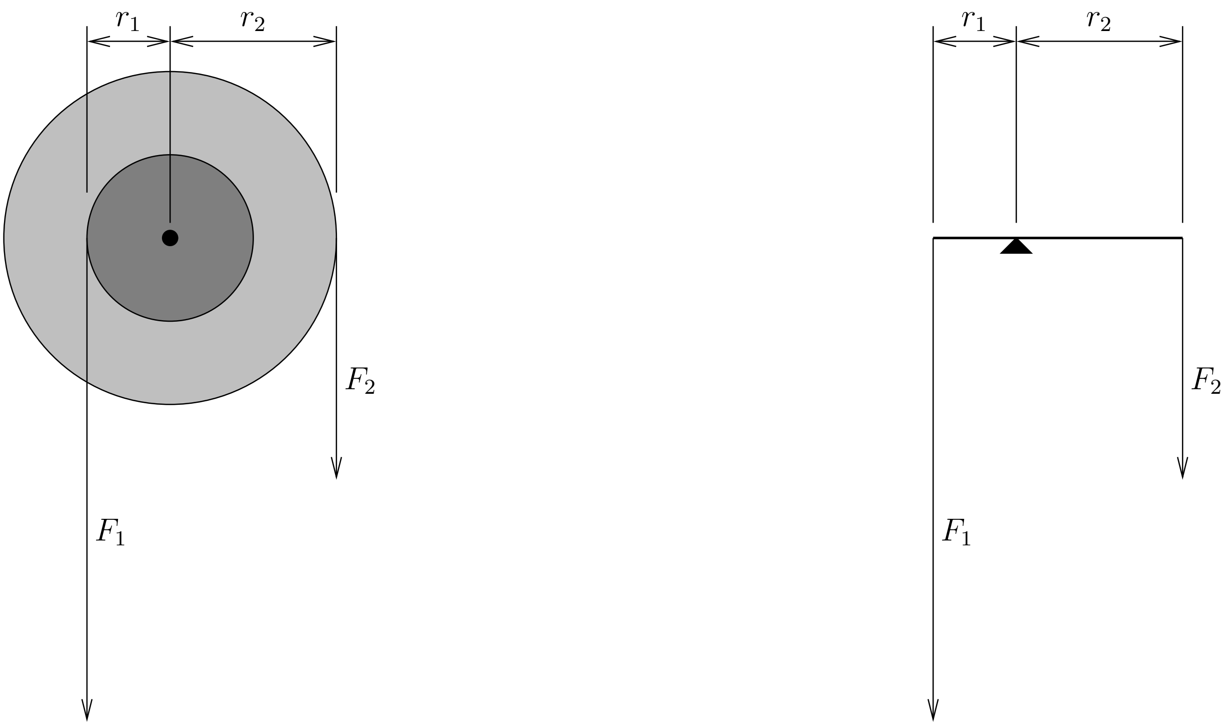


Abbildung 3.6: Nussknacker



(a) Wellrad

(b) Hebel

Abbildung 3.7: Vergleich: Wellrad mit Hebel

3.3 Das Wellrad

Setzen wir zwei Räder mit verschiedenen Radien auf die gleiche Achse, erhalten wir ein so genanntes Wellrad (Abbildung 3.7(a)).

Vergleichen wir Abbildung 3.7(a) und 3.7(b), so sehen wir, dass das Wellrad nichts anderes als ein Hebel mit „etwas Rad darum herum“ ist.

Darum gilt auch hier das Hebelgesetz:

$$F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$$

Aufgabe 3.4 (Ziehbrunnen)
Um aus einem alten Brunnenschacht Wasser zu schöpfen, verwendet man ein Wellrad. Das Seil wird auf ein Rad mit 16 cm Durchmesser aufgewickelt. Die Kurbel, mit der dieses gedreht wird, befindet sich auf einem zweiten Rad, das mit dem ersten verbunden ist. Der Durchmesser des grösseren Rades beträgt 88 cm (Abbildung 3.8 auf der nächsten Seite).

a) Welche Kraft F muss man aufwenden, um den Eimer zu heben?
b) Welchen Weg legt dabei die Kurbel zurück, wenn der Eimer um 8.2 m gehoben wird?

3.4 Die Goldene Regel der Mechanik

Wie wir bei der Aufgabe 3.4 gesehen haben, ist es zwar möglich mit Hilfe eines Wellrades Kraft zu sparen. Allerdings vergrössern wir damit den Weg. Dies gilt nicht nur beim Wellrad, sondern auch beim Hebel.

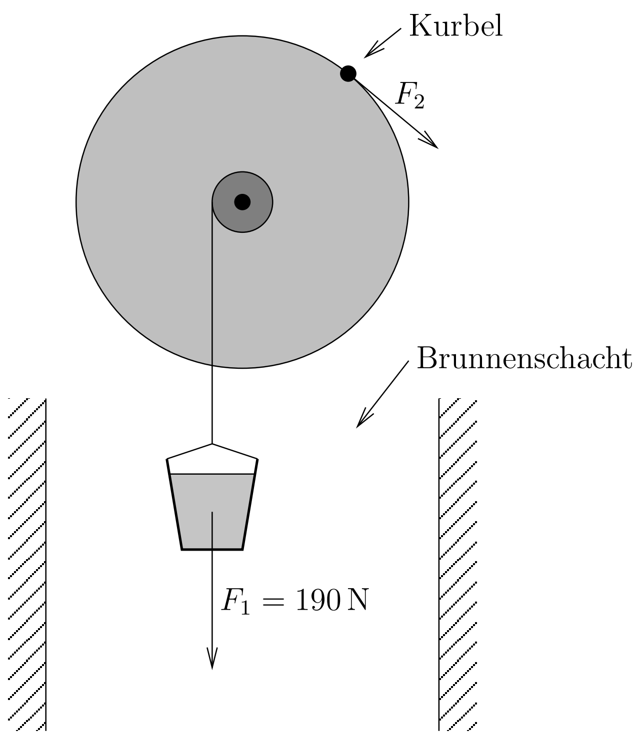


Abbildung 3.8: Ziehbrunnen

Schon vor langer Zeit bemerkte man, dass dies offensichtlich immer gilt. Diese Erkenntnis nennt man die „Goldene Regel der Mechanik“:

> Was an Kraft gewonnen wird, geht an Weg verloren.
> Oder in heutiger Form:
> Der Weg ist umgekehrt proportional zur Kraft.

Aufgabe 3.5 (Goldene Regel der Mechanik)
Was können Sie mit der Goldenen Regel der Mechanik über eine Velo-Gangschaltung aussagen (Reibung vernachlässigen)?

Zusammenfassung

Fassen Sie zusammen! Was haben Sie in diesem Kapitel gelernt? Schreiben Sie sich in ein paar Worten die wichtigsten Punkte auf.

Weiterarbeit

Melden Sie sich beim Lehrer für den Kapiteltest, wenn Sie die Aufgaben und Experimente in diesem Kapitel gut lösen konnten oder für Sie nun klar ist, was Sie in den Aufgaben falsch gemacht haben. Danach können Sie mit dem nächstem Kapitel weiterfahren.

Kapitel 4

Vom Hebelgesetz zu den Grundgesetzen der Statik

Übersicht

In diesem Kapitel lernen Sie die Ursache für Drehungen kennen. Unter dem Einfluss von Kräften kann sich ein Körper drehen oder nicht. Sie werden erkennen können unter welchen Umständen sich ein Körper dreht und können sein Verhalten beschreiben. Anschliessend betrachten wir genauer, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit sich ein Körper in Ruhe (im Gleichgewicht) befindet.

Lernziele

- Sie kennen die Ursache für die Drehung eines Gegenstands und können voraussagen, wie er sich dreht, wenn eine Kraft auf ihn wirkt.
- Sie wissen, wann ein Gegenstand im Gleichgewicht ist und welche Bedingungen dafür erfüllt sein müssen.
- Dank dem erworbenen Wissen können Sie einfache Aufgaben der Statik lösen.

4.1 Drehmoment

In den vorangehenden Kapiteln haben Sie das Hebelgesetz kennen gelernt. Es besagt Folgendes:

$$\text{Kraft mal Kraftarm} \quad = \quad \text{Last mal Lastarm}$$

Beispiel 4.1 (Schraubenmutter mit einem Gabelschlüssel anziehen)
Betrachten Sie den Vorgang, wenn Sie z. B. eine Schraubenmutter (Mutter) mit einem Gabelschlüssel anziehen (Abbildung 4.1 auf der nächsten Seite). 10 cm von der Mutter (Drehpunkt) entfernt, ziehen Sie mit einer Kraft von 10 N am Gabelschlüssel, um die Mutter anzuziehen. Der wirkende Kraftarm ist also $r = 10\,\mathrm{cm}$. Das Produkt Kraft mal Kraftarm ergibt:

$$10\,\mathrm{N} \cdot 10\,\mathrm{cm} = 10\,\mathrm{N} \cdot 0.1\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{Nm}$$

In der Physik bezeichnet man nun das Produkt Kraft mal Kraftarm oder allgemeiner Kraft mal Hebelarm als *Drehmoment*.

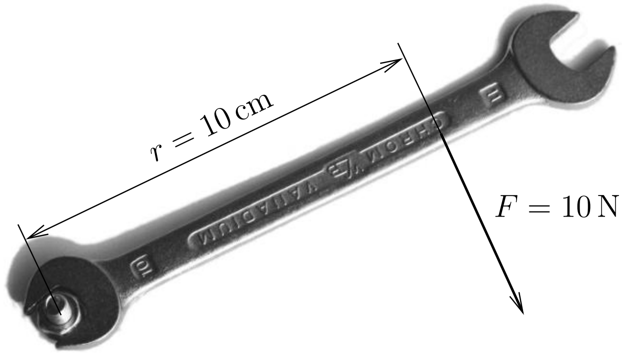


Abbildung 4.1: Mutter mit einem Gabelschlüssel anziehen

$$\begin{aligned} \text{Drehmoment} &= \text{Kraft mal Hebelarm} \\ M &= F \cdot r \end{aligned}$$

Im Beispiel 4.1 auf der vorherigen Seite haben Sie z. B. die Mutter mit einem Drehmoment von 1 Nm angezogen.

Das Drehmoment bezeichnet man in der Physik mit dem Buchstaben M und die Einheit folgt wiederum aus den Einheiten der Kraft F und des Hebelarms r (Länge):

$$[M] = [F] \cdot [r] = 1\,\mathrm{N} \cdot 1\,\mathrm{m} = 1\,\mathrm{Nm}$$

Die Einheit des Drehmoments (M) ist *Newtonmeter* Nm.

Gehen wir nochmals zum Beispiel mit der Mutter zurück. Wenn Sie die Mutter anziehen wollen, so müssen Sie den Gabelschlüssel rechtsherum (Uhrzeigersinn) drehen. Wollen Sie hingegen die Mutter lösen, so müssen Sie den Gabelschlüssel linksherum (Gegenuhrzeigersinn) drehen. Wir müssen also den Drehsinn mitberücksichtigen, denn es kommt darauf an, ob Sie die Mutter lösen oder anziehen wollen!

Wir definieren daher, dass alle linksdrehenden (Gegenuhrzeigersinn) Momente positiv und alle rechtsdrehenden (Uhrzeigersinn) Momente negativ sind.

Um sich das zu merken, stellen Sie sich einen Wasserhahn vor. Drehen Sie im positiven Drehsinn (linksherum) kommt mehr Wasser, drehen sie im negativen Drehsinn kommt weniger Wasser. Kurz: Positiv mehr Wasser.

Beispiel 4.2 (Positive und negative Drehmomente)
Wenn Sie wie im obigen Beispiel die Mutter mit einem Drehmoment von 1 Nm anziehen (rechtsdrehend, Uhrzeigersinn), so ist das Drehmoment negativ:

$$M_{\text{Anziehen}} = -1\,\mathrm{Nm}$$

Lösen Sie jedoch die Mutter (linksdrehend, Gegenuhrzeigersinn) mit demselben Gabelschlüssel und derselben Kraft wie beim Anziehen, so ist das Drehmoment vom Betrag her gleich gross, nun aber positiv.

$$M_{\text{Lösen}} = +1\,\mathrm{Nm}$$

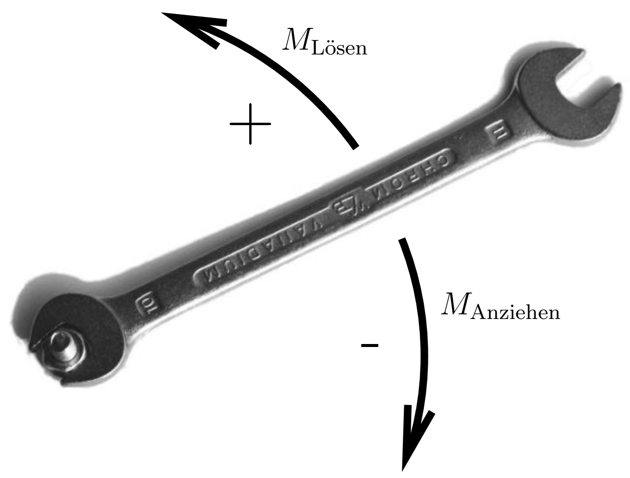


Abbildung 4.2: Positives und negatives Drehmoment

Wirkt ein Drehmoment auf einen Körper, so wird er sich drehen (Abbildung 4.2). Die Mutter dreht sich beim Lösen linksherum (positiv) und beim Anziehen rechtsherum (negativ).

Ein Drehmoment ist also immer die Ursache für eine Drehung eines Körpers.

Wenn wir nicht senkrecht zum Griff des Gabelschlüssels ziehen, können wir nicht die Länge bis zum Angriffspunkt als Hebelarm nehmen. Wollen wir die Kraft senkrecht zum Hebelarm haben, können wir dies durch folgende Überlegung erreichen. Wir ziehen eine Gerade senkrecht zur Wirkungslinie der Kraft durch den Drehpunkt. Der Hebelarm ist nun die Strecke vom Drehpunkt zum Fusspunkt auf der Wirkungslinie also der Abstand des Drehpunktes von der Wirkungslinie. Diese Vorgehensweise ist in Abbildung 4.3 dargestellt.

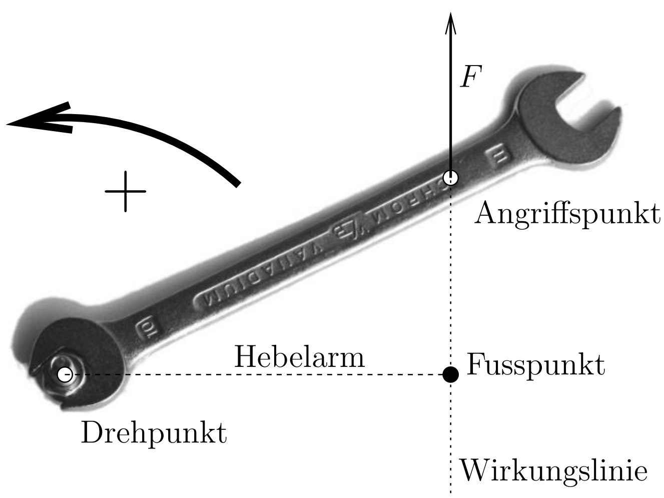


Abbildung 4.3: Angriffs-, Fuss- und Drehpunkt sowie Hebelarm und Wirkungslinie bei einem Gabelschlüssel

Die Kraft F greift beim Angriffspunkt am Gabelschlüssel an und zeigt in die Pfeilrichtung. Die Richtung der Kraftwirkung wird durch die Wirkungslinie (gepunktet) dargestellt. Der

Hebelarm entspricht dem Abstand des Drehpunkts von der Wirkungslinie. Der Hebelarm kann eingezeichnet werden, in dem man das Lot durch den Drehpunkt auf die Wikungslinie fällt (gestrichelt Linie). In unserem Beispiel würde durch die Krafteinwirkung auf den Körper eine Drehwirkung nach links (positiv, Gegenuhrzeigersinn) entstehen.

Was passiert nun, wenn mehrere Drehmomente auf einen Körper wirken? Die Antwort ist ganz einfach: man addiert die Drehmomente gemäss ihrem Drehsinn zu einem *resultierenden Drehmoment* M_R. Wir veranschaulichen dies anhand des Beispiels 4.3.

Beispiel 4.3 (Zwei Personen ziehen an einem Gabelschlüssel)
Zwei Personen ziehen gleichzeitig am Gabelschlüssel. Die eine Person will die Mutter mit der Kraft $F_1 = 5\,\mathrm{N}$ und dem Hebelarm $r_1 = 18\,\mathrm{cm}$ anziehen, die andere die Mutter mit der Kraft $F_2 = 7\,\mathrm{N}$ und dem Hebelarm $r_2 = 14\,\mathrm{cm}$ lösen (Abbildung 4.4).

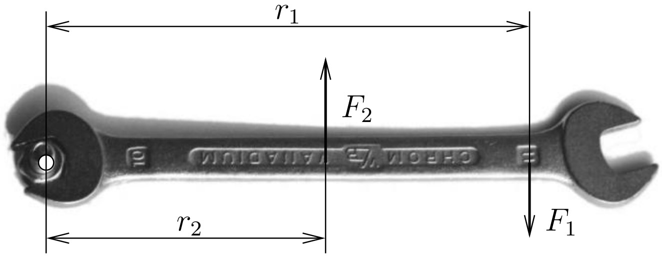


Abbildung 4.4: Zwei Personen ziehen an einem Rollgabelschlüssel

Das Drehmoment, das die erste Person ausübt, ist negativ:

$$M_1 = -F_1 \cdot r_1 = -5\,\mathrm{N} \cdot 18\,\mathrm{cm} = -0.9\,\mathrm{Nm}$$

Das Drehmoment, das die zweite Person ausübt, ist positiv:

$$M_2 = +F_2 \cdot r_2 = +7\,\mathrm{N} \cdot 14\,\mathrm{cm} = +0.98\,\mathrm{Nm}$$

Das resultierende Drehmoment ist nun:

$$M_R = M_1 + M_2 = -0.9\,\mathrm{Nm} + 0.98\,\mathrm{Nm} = +0.08\,\mathrm{Nm}$$

und es wird eine Drehung mit positivem Drehsinn resultieren, da das resultierende Drehmoment positiv ist. Die Mutter wird also gelöst!

Aufgabe 4.1 (Drehbar gelagerte Figur)
Betrachten Sie die Abbildung 4.5 auf der nächsten Seite. Die Figur in der Abbildung ist drehbar am Punkt D gelagert und kann frei um diesen drehen. An ihr greifen drei Kräfte an: $F_1 = 3\,\mathrm{N}$, $F_2 = 3.5\,\mathrm{N}$ und $F_3 = 7\,\mathrm{N}$. Berechnen Sie für jede der drei Kräfte das Drehmoment und bestimmen Sie dessen Drehsinn. Geben Sie zu jedem Drehmoment auch den Hebelarm an und zeichnen Sie diesen in der Abbildung ein. Eine Häuscheneinheit entspricht 1 m. Bestimmen Sie auch das resultierende Drehmoment aus allen drei Kräften.

Zusammenfassung

Was haben Sie in diesem Abschnitt gelernt? Schreiben Sie sich in ein paar Worten die wichtigsten Punkte auf.

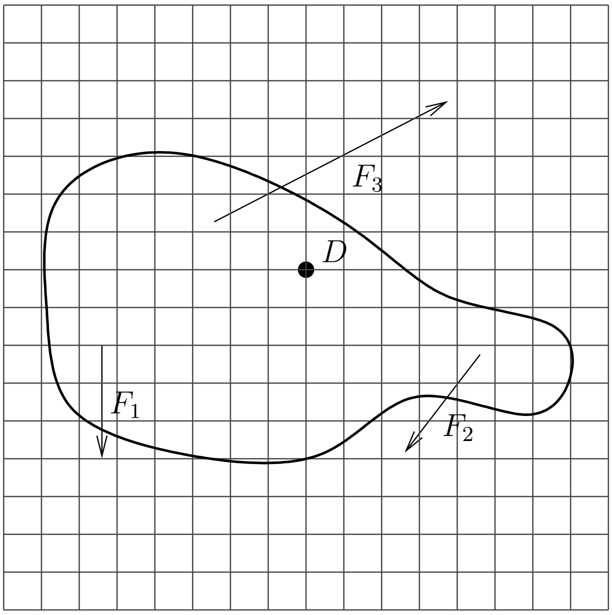


Abbildung 4.5: Drehbar gelagerte Figur

4.2 Statisches Gleichgewicht

Was heisst es wenn man sagt, ein Gegenstand sei in einem statischen Gleichgewicht? Eine umgangssprachliche Formulierung wäre: er bewegt sich nicht, er ist in Ruhe. Doch was ist mit „er bewegt sich nicht“ genau gemeint?

Der Gegenstand darf sich sicher in keine Richtung bewegen. Falls er dies tut, spricht man von einer *Translation*. Es darf keine resultierende äussere Kraft auf den Gegenstand einwirken, sonst würde der Gegenstand entlang dieser Kraft beschleunigt werden und sich in diese Richtung bewegen.

Wenn der Gegenstand aber keine Translationsbewegung macht, könnte er sich immer noch drehen! Diese Bewegungsart nennt man *Rotation*. Es müssen sich also auch alle Drehmomente aufheben, da diese sonst eine Drehung verursachen würden.

Daraus folgt: *Die Summe der linksdrehenden (positiv) und der rechtsdrehenden (negativ) Momente bezüglich irgendeines Punktes des Gegenstands muss Null sein.*

Wenn der Gegenstand in Ruhe ist, d. h. ein statisches Gleichgewicht existiert, müssen in der Physik folgende Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein:

- Die resultierende äussere Kraft ist gleich Null. $F_R = 0$
- Das resultierende äussere Drehmoment bezüglich irgendeines Punktes des Körpers verschwindet. $M_R = 0$

Wie wird ein solches Problem nun gelöst? Was ist eine gute Taktik, eine solche Aufgabe anzupacken? Am besten gehen Sie nach folgendem Rezept vor:

4.2.1 Rezept zum Lösen von Statikproblemen

1. Stellen Sie die Gleichung für das Kräftegleichgewicht (d. h. $F_R = 0$) auf.
2. Wählen Sie einen beliebigen Drehpunkt. Wählen Sie ihn am besten so, dass ein Hebelarm einer unbekannten Kraft Null wird und damit auch das Drehmoment dieser Kraft.
3. Stellen Sie die Gleichungen für die Drehmomente (d. h. $M_R = 0$) auf.
4. Lösen Sie die beiden Gleichungen nach den unbekannten Grössen auf.

Beispiel 4.4 (Mensch liegt im Bett)
In diesem Beispiel wird das Rezept zum lösen von Statikproblemen veranschaulicht. Wir betrachten dazu die Situation, wenn ein Mensch im Bett liegt und schläft (Abbildung 4.6).

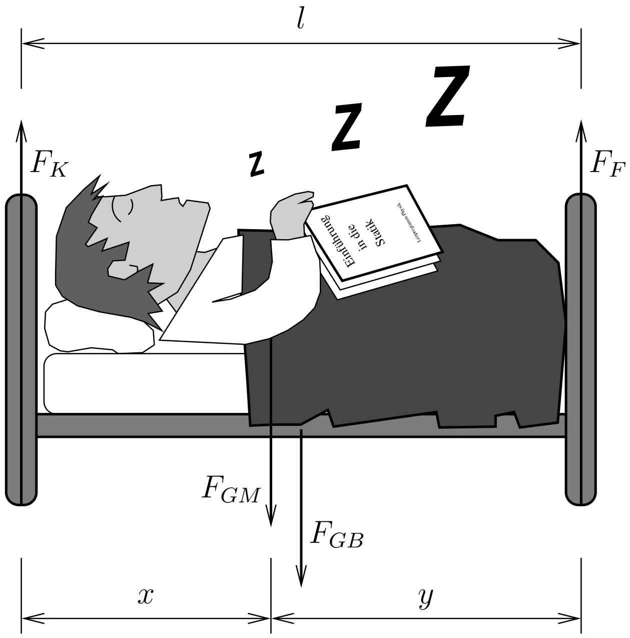


Abbildung 4.6: Mensch liegt im Bett

Der Schwerpunkt des Bettes liege genau in der Mitte. Das Bett hat eine Masse von $m_B = 55\,\text{kg}$ der Mensch eine Masse von $m_M = 70\,\text{kg}$. Die Auflagekraft am Kopfende des Bettes beträgt $F_K = 660\,\text{N}$. Das Bett ist $l = 2.0\,\text{m}$ lang. Wo liegt der Schwerpunkt des Menschen und wie gross ist die Auflagekraft F_F am Fussende des Bettes?

Wir gehen nun genau nach dem Rezept vor

1. Punkt Das Bett und der Mensch darin sind in Ruhe. Daher muss die resultierende äussere Kraft Null sein. Gemäss dem ersten Punkt im Rezept erhalten wir:

$$F_R = F_K + F_F - F_{GB} - F_{GM} = 0$$

Die Kräfte nach oben wurden positiv und die Kräfte nach unten negativ gezählt. Die Gewichtskraft des Bettes und des Menschen sind durch $F = m \cdot g$ gegeben und sind für das Bett $F_{GB} = 550\,\text{N}$ und für den Mensch $F_{GM} = 700\,\text{N}$.

2. Punkt Das Bett dreht sich nicht. Daher müssen die Drehmomente bezüglich eines beliebigen Punktes des Bettes verschwinden (gleich Null sein). Diesen Punkt des Bettes können wir frei wählen. Wir wählen z. B. das Fussende des Bettes. Dadurch verschwindet das Drehmoment der unbekannten Kraft F_F und die Gleichungen sind etwas einfacher zu lösen. Die Wahl des Drehpunktes spielt keine Rolle. Dies wird später im Beispiel gezeigt.

3. Punkt Der Abstand des Schwerpunktes des Menschen vom Kopfende des Bettes wird mit x bezeichnet, derjenige vom Fussende mit y. Die einzelnen Drehmomente sind nun folgendermassen bestimmt:

$$\begin{aligned} M_K &= -F_K \cdot l &&= -1320\,\mathrm{Nm} && \text{(rechtsdrehend, negativ)} \\ M_{GB} &= +F_{GB} \cdot l/2 &&= +550\,\mathrm{Nm} && \text{(linksdrehend, positiv)} \\ M_{GM} &= +F_{GM} \cdot y &&= +700\,\mathrm{N} \cdot y && \text{(linksdrehend, positiv)} \end{aligned}$$

Das resultierende Drehmoment muss Null sein, daraus folgt:

$$M_R = M_K + M_{GB} + M_{GM} = -1320\,\mathrm{Nm} + 550\,\mathrm{Nm} + 700\,\mathrm{N} \cdot y = 0$$

4. Punkt Die Kräftegleichung können wir direkt nach F_F auflösen:

$$F_F = F_{GB} + F_{GM} - F_K = 590\,\mathrm{N}$$

Die Auflagekraft am Fussende ist $F_F = 590\,\mathrm{N}$. Ebenso können wir die obige Gleichung der Drehmomente nach y auflösen und wir erhalten:

$$y = \frac{+1320\,\mathrm{Nm} - 550\,\mathrm{Nm}}{700\,\mathrm{N}} = 1.1\,\mathrm{m}$$

Der Schwerpunkt der Person liegt also 1.1 m von der unteren Bettkante entfernt. Das Problem ist nun komplett gelöst.

Alternativvariante Wir hätten auch einen anderen Punkt als Drehpunkt wählen können. Wählen wir das Kopfende als Drehpunkt erhalten wir folgende Drehmomente unter dem 3. Punkt:

$$\begin{aligned} M_F &= +F_F \cdot l &&= +2.0\,\mathrm{m} \cdot F_F && \text{(linksdrehend, positiv)} \\ M_{GB} &= -F_{GB} \cdot l/2 &&= -550\,\mathrm{Nm} && \text{(rechtsdrehend, negativ)} \\ M_{GM} &= -F_{GM} \cdot x &&= -700\,\mathrm{N} \cdot x && \text{(rechtsdrehend, negativ)} \end{aligned}$$

Das Auflösen der Kräftegleichung, die sich durch die Wahl eines anderen Drehpunktes nicht geändert hat, führt immer noch auf dieselbe Kraft:

$$F_F = 590\,\mathrm{N}$$

Die Drehmomentgleichung ändert sich jedoch:

$$M_R = M_F + M_{GB} + M_{GM} = +2.0\,\mathrm{m} F_F - 550\,\mathrm{Nm} - 700\,\mathrm{N} \cdot x = 0$$

Wir setzen nun den Wert für F_F in die Gleichung ein und lösen nach x auf:

$$x = \frac{-1180\,\mathrm{Nm} + 550\,\mathrm{Nm}}{-700\,\mathrm{N}} = 0.9\,\mathrm{m}$$

Dies entspricht genau der bereits oben erhaltenen Lösung, da $l - y = 2\,\mathrm{m} - 1.1\,\mathrm{m} = 0.9\,\mathrm{m}$ ist!

Die Wahl des Drehpunktes spielt keine Rolle!

Aufgabe 4.2 (Mobile)
Es sei $x_1 = x_3 = 1\,\text{cm}$, $x_2 = 4\,\text{cm}$, $x_4 = x_6 = 3\,\text{cm}$ und $x_5 = 1.5\,\text{cm}$. Ebenso sei $m_3 = 5\,\text{kg}$. Welche Masse haben m_1, m_2 und m_4, wenn das Mobile (Abbildung 4.7) ausbalanciert ist? Wir nehmen an, die Balken selbst hätten keine Masse.

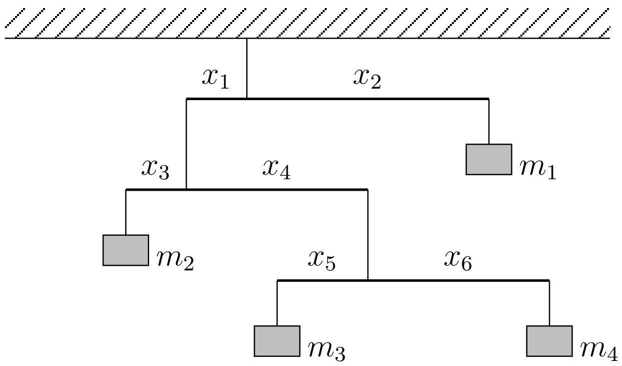


Abbildung 4.7: Mobile

Zusammenfassung

Was haben Sie in diesem Abschnitt gelernt? Schreiben Sie sich in ein paar Worten die wichtigsten Punkte auf.

Weiterarbeit

Wenn Sie die beiden Aufgaben problemlos lösen konnten, haben Sie die Grundlagen der Statik begriffen und sollten bereit sein für den Kapiteltest.