因式分解技巧

1 常用公式

1. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
2. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
3. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
4. $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
5. $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
6. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$
7. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$
8. $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$
9. $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
10. $a^6-b^6=(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$
11. $a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$（$n$ 为正奇数）
12. $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$
13. $a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd=(a+b+c+d)^2$
14. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$
15. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

2 十字相乘

如果二次三项式 ax^2+bx+c 的系数和 $a+b+c=0$，那么

$$ax^2+bx+c=(x-1)(ax-c)$$

进一步推论：

对于 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$：

- 如果多项式的系数的和等于0，那么1一定是它的根
- 如果多项式的偶次项系数的和减去奇次项系数的和等于0，那么-1一定是它的根

3 余数定理

令 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，有 $x-c$ 除 $f(x)$ 时，所得的余数为 $f(c)$. 这个结论称为余数定理.

因此，如果 $f(c)=0$，那么 $x-c$ 是 $f(x)$ 的因式. 反过来，如果 $x-c$ 是 $f(x)$ 的因式，那么 $f(c)=0$.

4 有理根的求法

假定 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整系数多项式，有理数 $c=\frac{p}{q}$ （p、q 为互质的整数）是 $f(x)$ 的根，可得有理根 $c=\frac{p}{q}$ 的分子 p 是常数项 a_0 的因数，分母 q 是首项系数 a_n 的因数.

5 实数集与复数集内的分解

5.1 求根公式

$$ax^2+bx+c=a(x-\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a})(x-\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a})$$

5.2 代数基本定理

在复数集内，每一个 x 的（不是常数的）多项式至少有一个根. 即对于多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ （n 是正整数），一定有复数 c 使得 $f(c)=0$.

这个结论称为代数基本定理.

5.3 共轭复数

虚数 $a+bi$ 与 $a-bi$ 称为共轭复数，它们的和为

$$(a+bi)+(a-bi)=2a$$

它们的积为

$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$$

即共轭复数的和与积都是实数.

实系数多项式的虚数根是两两共轭的.

5.4 单位根

三次单位虚根 ω 相关公式有

$$\begin{aligned}
&\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\\
&\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\\
&\omega^3=1\\
&1+\omega=-\omega^2
\end{aligned}$$

一般地，在复数集内有 n 个 n 次单位根，它们是

$$\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}(k=1,2,\cdots,n)$$

其中

$$\cos\frac{2n\pi}{n}+i\sin\frac{2n\pi}{n}=1$$

6 艾氏判别法

设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是整系数多项式.

如果存在一个质数 p 满足以下条件:

1. p 不整除 a_n ;
2. p 整除其余的系数 $(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$;
3. p^2 不整除 a_0 .

那么，$f(x)$ 在有理数集内不可约.

7 分圆多项式

分圆多项式在有理数集内是不可约的.