Project 1： Matched filtering of Linear Frequency Modulated (LFM) signal 线性调频信号的匹配滤波

Generating Original Waves

$$ s(t) = rect(\frac{t}{10 \times 10^{-6}})e^{j2 \pi (2 \times 10^{12} t^2)} $$

According to the Euler's formula, we can get: $$ s(t) = rect(\frac{t}{10 \times 10^{-6}})(cos(2 \pi (2 \times 10^{12} t^2)) + jsin(2 \pi (2 \times 10^{12} t^2))) $$

The real part of the signal is: $$ s(t) = rect(\frac{t}{10 \times 10^{-6}})cos(2 \pi (2 \times 10^{12} t^2)) $$

The imaginary part of the signal is: $$ s(t) = rect(\frac{t}{10 \times 10^{-6}})sin(2 \pi (2 \times 10^{12} t^2)) $$

{% pdf untitled1.pdf %}

```
T=10e-6;
B=40e6;
K=B/T;
Fs=2*B;Ts=1/Fs;
N=T/Ts;
t=linspace(-T/2,T/2,N);
St=exp(1i*pi*K*t.^2);
figure(1)
subplot(311)
plot(t*1e6,real(St));
xlabel('time/us');
title('waveform of LFM signal real part');
grid on;axis tight;
subplot(312)
plot(t*1e6,imag(St));
xlabel('time/us');
title('waveform of LFM signal imaginiary part');
grid on;axis tight;
subplot(313)
freq=linspace(-Fs/2,Fs/2,N);
plot(freq*1e-6,fftshift(abs(fft(St))));
xlabel('f/MHz');
title('corresponding amplitude spectrum');
grid on;axis tight;
```

Matched filtering

{% pdf untitled2.pdf %}

```
St_wgn = awgn(St,10);%%叠加高斯白噪声, SNR= 10
Ht = conj(fliplr(St));%%发射信号时间反褶后取共轭得到h(t)
```

```
yt = conv(St_wgn, Ht) ;%%时域信号
yf = Sf.*Hf ;%%频域信号
t_0=linspace(-T/2,T/2,2*N-1);
freq=linspace(-Fs/2,Fs/2,2*N-1);
figure(2)
subplot(311)
plot(t_0*1e6,real(yt));
xlabel('time/us');
title('real part of output signal');
grid on;axis tight;
subplot(312)
plot(t_0*1e6,imag(yt));
xlabel('time/us');
title('imaginary part of output signal');
grid on;axis tight;
subplot(313)
plot(freq*1e-6,fftshift(abs(fft(yt))));
xlabel('f/MHz');
title('corresponding amplitude spectrum of output signal');
grid on;axis tight;
```

Principle Analysis

考虑观测信号：$$y(t)=s(t)+n(t)$$

$s(t)$为已知信号，$n(t)$为零均值的加性平稳噪声（白色或有色）

- 白噪声（white noise）是指功率谱密度在整个频域内是常数的噪声。 所有频率具有相同能量密度的随机噪声称为白噪声。
- 有色噪声 （ coloured noise）是指功率谱密度函数不平坦的噪声。大多数的噪声的频谱主要都是非白色频谱，通过信道的白噪声受信道频率的影响而变为有色的。

令$h(t)$为滤波器的时不变冲激响应函数，目标就是设计滤波器$h(t)$，使得滤波器的输出信号$y(t)$的信噪比最大化。 滤波器的输出信号为：

$$ \begin{align} y_0(t) & =y(t)*h(t) \ & = \int_{-\infty}^{\infty} y_0(\tau)h(t-\tau)d\tau \ & = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau)h(t-\tau)d\tau \ & = s_0(t) + n_0(t) \end{align} $$

$s_o(t)$、$n_o(t)$分别为滤波器的输出信号分量和噪声信号分量。

在$t=T_0$时刻，滤波器的输出信噪比定义为

$$ \begin{align} (\frac{S}{N})^2 & = \frac{t=T_0时刻输出的瞬时信号功率}{输出噪声的平均功率} \ & = \frac{s_0^2(T_0)}{E[n_0^2(t)]} \end{align} $$

利用傅里叶变换的卷积特性，有

$$ \begin{align} s_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)h(t-\tau)d\tau & = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega \end{align} $$

式中，$H(j\omega)$ = $\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$为滤波器的频率响应函数（传递函数），$S(j\omega)$ = $\int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t}dt$为信号的频谱密度函数。

$t=T_0$时刻，输出信号的瞬时功率为

$$ \begin{align} s_0^2(T_0) & = |\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)S(j\omega)e^{j\omega T_0}d\omega |^2 \ \end{align} $$

$t=T_0$时刻，输出噪声的平均功率为

$$ \begin{align} E{n_0^2(t)} = E{\int_{-\infty}^{\infty} n(\tau)h(t-\tau)d\tau}^2 \end{align} $$

补一些功率谱密度的知识： 若某一个功率信号$x(t)$的功率为$p_x(t)$，则有

$$ \begin{align} p_x(t) = \lim_{T\rightarrow\infin}\frac{1}{2T}|x_T(t)|^2 \end{align} $$

其功率谱密度函数$P_{x}(j\omega)$为

$$ \begin{align} P_{x}(j\omega)=\lim_{T\rightarrow\infin}\frac{1}{2T}|X_T(j\omega)|^2 \end{align} $$

若以f为自变量，则可以写成

$$ \begin{align} P_{x}(f)=\lim_{T\rightarrow\infin}\frac{1}{2T}|X_T(f)|^2 \end{align} $$

(其中$X_T(j\omega)$为$x_T(t)$的傅里叶变换, $x_T(t)$为$x(t)$在$[-T,T]$上的截断信号) 根据Parseval定理

$$ \begin{align} \int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2dt & = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(j\omega)|^2 d\omega \ & = \int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2 df \end{align} $$

总功率为： $$ \begin{align} P = \lim_{T \rightarrow \infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} |x_T(t)|^2dt & = \lim_{T \rightarrow \infty}\frac{1}{2T}\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(f)|^2 df & = \int_{-\infty}^{\infty}P(f)df \end{align} $$

令$P_n(j\omega)$为加性噪声的功率谱密度函数，则输出噪声的功率谱密度函数为

$$ \begin{align} P_{n_0}(j\omega) = |H(j\omega)|^2 P_n(j\omega) \end{align} $$

输出噪声的平均功率可以写作(以频率作为量度)

$$ \begin{align} E[n_0^2(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}P_{n_0}(j\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2 P_n(j\omega) \end{align} $$

代入信噪比定义式，可以得出

$$ \begin{align} (\frac{S}{N})^2 = \frac{s_0^2(T_0)}{E[n_0^2(t)]} & = \frac{|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega)S(j\omega)e^{j\omega T_0}d\omega |^2}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2 P_n(j\omega)} \ & = \frac{1}{2\pi}\frac{|\int_{-\infty}^{\infty}(H(j\omega)\sqrt{P_n(j\omega)})(\frac{S(j\omega)}{\sqrt{P_n(j\omega)}})e^{j\omega T_0}d\omega|^2}{\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2 P_n(j\omega)} \end{align} $$

分子凑了一个$\sqrt{P_n(j\omega)}$, 因为要用到Cauchy-Schwartz不等式：

$$ \begin{align} \left|\int_{a}^{b} f(x)g(x)\ dx\right| \leq \sqrt{\int_{a}^{b} f^2(x)\ dx}\sqrt{\int_{a}^{b} g^2(x)\ dx} \end{align} $$

等号在当且仅当$f(x)=cg^*(x)$, c是任意复常数时成立。取c = 1：

$$ \begin{align} f(x) = H(j\omega)\sqrt{P_n(j\omega)}， g(x)=\frac{S(j\omega)}{\sqrt{P_n(j\omega)}}e^{j\omega T_0} \end{align} $$

$$ \begin{align} (\frac{S}{N})^2 & \le \frac{1}{2\pi}\frac{\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2P_n(j\omega)d\omega\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{|S(j\omega)|^2}{P_n(j\omega)})e^{j\omega T_0}d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2 P_n(j\omega)d\omega} \ & = \frac{1}{2\pi}\frac{\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2P_n(j\omega)d\omega\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{|S(j\omega)|^2}{P_n(j\omega)})d\omega}{\int_{-\infty}^{\infty}|H(j\omega)|^2 P_n(j\omega)d\omega} \ & e^{ix}的模总是1, 因此平方也是1，复指数乘积项就没了, 进一步化简：\ & = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|S(j\omega)|^2}{P_n(j\omega)}d\omega \end{align} $$

取最大值，即为等式成立条件。将式中等号成立时的滤波器传递函数记作$H_{opt}(j\omega)$, 利用Cauchy-Schwartz不等式等号成立条件：

$$ \begin{align} H_{opt}(j\omega)\sqrt{P_n(j\omega)}&=\frac{S^*(j\omega)}{\sqrt{P_n^*(j\omega)}}e^{-j\omega T_0}\(c &= 1)\ H_{opt}(j\omega)&=\frac{S^*(j\omega)}{P_n(j\omega)}e^{-j\omega T_0} \end{align} $$

可以得到最大信噪比： $$ \begin{align} SNR_{max} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|S^*(j\omega)|^2}{P_n(j\omega)}d\omega \end{align} $$

由此，最优线性滤波器理论推导完成。

由题意得其功率谱也恒定为 $\frac{2}{N}$.代入 $H_{opt}(j\omega)$ 中得到：

$$ \begin{align} H_{opt}(j\omega) = \frac{S^*(j\omega)}{\frac{2}{N}}e^{-j\omega T_0} = \frac{NS^*(j\omega)}{2}e^{-j\omega T_0} \end{align} $$

对其进行反变换，得到最优线性滤波器的时域表达式：

$$ \begin{align} h_{opt}(t) = \frac{N}{2}s^*(-t-T_0) \end{align} $$

$T_0 = 0$时，最优线性滤波器为：

$$ \begin{align} h_{opt}(t) = \frac{N}{2}s^*(-t) \end{align} $$

对应题干中：$h(t)=Ks^*(T_0-t)，T_0 = 0$, 能得到N = 2. 该噪声的功率谱密度为1，该噪声为一个白噪声。

Conclusion

1. 匹配滤波器的单位冲激响应是原信号的共轭反转信号
2. 匹配滤波后的实部输出非常像Sinc Function 原因：输出信号的幅度： $$ \begin{align} s(t)= rect(\frac{t}{T})e^{j2 \pi (\frac{k}{2}t^2)} \ h(t)=s^*(-t)= rect(\frac{-t}{T})e^{-j2 \pi (\frac{k}{2}t^2)} \ s_0(t) = s(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}h(u)s(t-u)du\ &= \int_{-\infty}^{\infty}rect(\frac{-u}{T})e^{-j2 \pi (\frac{k}{2}u^2)}rect(\frac{t-u}{T})e^{j2 \pi (\frac{k}{2}(t-u)^2)}du\ &= \int_{-\infty}^{\infty}rect(\frac{-u}{T})rect(\frac{t-u}{T})e^{j \pi k(t^2-2tu)}du\ &= \int_{t-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{j \pi k(t^2-2tu)}du\ (0 \leq t \leq T) &= \int_{t-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{j \pi kt^2}e^{-2j \pi ktu}du\ &= e^{j \pi kt^2}\int_{t-

\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}e^{-2j \pi ktu}du\ &= e^{j \pi kt^2}\frac{e^{-2j \pi ktu}}{-2j \pi kt} \Bigg|^{\frac{T}{2}}_{t-\frac{T}{2}} \ &= \frac{sin \pi k(T-t)t}{\pi kt} \ (0 \leq t \leq T) &= \frac{sin \pi k(T+t)t}{\pi kt} \end{align} $$

$$ \begin{align} s_0(t) &= T\frac{sin \pi kT(1- \frac{|t|}{T})t}{\pi kTt}rect(\frac{t}{2T})\ &= TSa(\pi kTt)rect(\frac{t}{2T}) \end{align} $$

当$t \leq T$时，包络近似为辛格（sinc）函数。

3. 输出幅度/功率在$t=0$处有最大值（考虑延迟，则在$t=T_0$）