Conbinatorics Title

Jnotes

Chap.1:

2: 奇数: $\{1,3,5,7,9\}$. — — — — 5选4排列:

$$P(5,4)=\frac{5!}{(5-4)!}=120$$

4. (1): 10个人全排列: $10!=3628800$ 种

(2): 两人坐在一起: 本质为9个人全排列: (AB, BA): $9!\times 2=725760$ 种

不坐在一起: $10!-9!\times 2=2903040$ 种

5. 10个人圆排列: $\frac{10!}{10}=362880$ 种

两人坐在一起(同上): $\frac{9!}{9}\times 2=80640$ 种

不坐在一起: $\frac{10!}{10}-\frac{9!}{9}\times 2=282240$ 种

6. $\frac{6!}{6}\times 6!=6!\times 5!=86400$ 种

7. $4\times 4!-3\times 3!=96-18=78$ (个)

10. (1): 包含"3"一次:

①: 千位上为"3": 重集 $B=\{\infty\cdot 0,\infty\cdot 1,\cdots,\infty\cdot 9\}$ 取3个:

重排列数: $(10-1)^3$ 个

②: 千位上非"3", 非"0": $\binom{8}{1}\times 3\times(10-1)^2$ 个

①.② 互不相容: $(10-1)^3+\binom{8}{1}\times 3\times(10-1)^2=2673$ 个

(2): 包含"3"(不限次数):

$$9\times 10^3-8\times 9^3=3168\text{ 个}$$

(总个数) (一个"3"都没有)

(3): ① $\_777/777\_$: $(10-2)+(10-1)=17$

② 77_7 : 9

7_77 : 9

总个数: $17+10+10=37$ 种

11. (1) MISSISSIPPI: 1M, 4I, 4S, 2P

重集 $B=\{1\cdot M, 4\cdot S, 4\cdot I, 2\cdot P\}$ 的全排列: $\frac{11!}{1!\,4!\,4!\,2!}=34650$ 种

(2) 去掉S: 重集 $B'=\{1\cdot M, 4\cdot I, 2\cdot P\}$ 全排列: $\frac{7!}{1!\,4!\,2!}$

嵌入S(插空): $\binom{8}{4}$: △_△_△_△_△_△_△_△

总个数: $\frac{7!}{1!\,4!\,2!}\binom{8}{4}=7350$ 种

13. $\sum_{i=1}^{n} x_i = r$ 非负整数解个数为: $\binom{n+r-1}{r}$

令 $x_i' = x_i - 1$. $\sum_{i=1}^{n} x_i' = \sum_{i=1}^{n} x_i - n = r-n$.

转化为 $\sum_{i=1}^{n} x_i' = r-n$ 的非负整数解的个数为:

将 $r-n$ 个单位分配给 n 个变量: $\binom{r-n+n-1}{n-1}=\binom{r-1}{n-1}$ $(r\geq n)$

14. (1): 四位. $\Longleftrightarrow$ $x_1+x_2+x_3+x_4=5$ 的非负整数解个数:

$F(4,5)=\binom{4+5-1}{5}=56$

五位: 不考虑: 故总共有56个数

(2): 四位 $\Longleftrightarrow$: $x_1+x_2+x_3+x_4<5$ 非负整数解个数

$\Longleftrightarrow$ $x_1+x_2+x_3+x_4=\begin{cases}4\\3\\2\\1\end{cases}$

$F(4,4)+F(4,3)+F(4,2)+F(4,1)=69$

五位: 10000 满足,

$\therefore$ 总共有 $69+1=70$ 个数

16. $A=\{1,2,\cdots,1000\}$

$A_i=\{x \mid x\equiv i \pmod 4\}$ $i=1,2,3,4.$

$|A_i|=250$

A中选3个数 a_1、a_2，a_3：

① a_1、a_2、$a_3\in A_4$ ： $N_1=C(250,3)$

② a_1、a_2、a_3中来自 A_1、A_2，且A_1中选2个，A_2中选1个.

$N_2=C(250,2)\times C(250,1)$

③ a_1、a_2、a_3中来自 A_1、A_3、A_4. $N_3=[C(250,1)]^3$

④ a_1、a_2、a_3 中来自 A_2、A_4，且A_2中选2个. A_4中选1个

$N_4=C(250,2)\times C(250,1)$

⑤ a_1、a_2、a_3中来自 A_2、A_3，且A_2中选1个. A_3中选2个.

$N_5=C(250,1)\times C(250,2)$

$\therefore N=\sum_{i=1}^{5}N_i=C(250,3)+C(250,2)\times C(250,1)\times 3+[C(250,1)]^3$

19: 考虑一个字符串共n个元素，k个a、(n−k)个b.

重集：$B=\{k\cdot a,(n-k)\cdot b\}$的n排列 $=\binom{n}{k}$ $(k=0,1,2,\cdots n)$.

$\therefore$ 总共存在 $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ 个

该字符串每一位取a/b，共有2^n种.

$\therefore \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$， Q.E.D.

24. (1): $\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}=\binom{n+1}{m}$

$RHS=\binom{n+1}{m}=\binom{n}{m}+\binom{n}{m-1}$

$=\binom{n}{m}+\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-1}{m-2}$

$=\binom{n}{m}+\binom{n-1}{m-1}+\cdots+\binom{n-m+1}{m-m+1}+\binom{n-m+1}{m-m}$

$=\binom{n}{m}+\binom{n-1}{m-1}+\cdots+\binom{n-m+1}{m-m+1}+\binom{n-m}{m-m}+\binom{n-m}{m-m-1}$

$=\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}+\binom{n-m}{-1}$

$=\sum_{k=0}^{m}\binom{n-k}{m-k}=LHS$

(3): $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}=(-1)^m\binom{n-1}{m}$

由二项式定理，$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}x^k$得：

$(1-x)^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k$

$=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}x^k+\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}x^k$

令$x=1$：$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{n}{k}=\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}$

$LHS=\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k+1}\left[\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right]$

$=\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}+\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k-1}$

$=\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}+\sum_{k=m+1}^{n}(-1)^{k}\binom{n-1}{k}$

$=(-1)^{n+1}\binom{n-1}{n}+\sum_{k=m+1}^{n-1}(-1)^{k+1}\binom{n-1}{k}+\sum_{k=m+1}^{n-1}(-1)^{k}\binom{n-1}{k}+$

$(-1)^m\binom{n-1}{m}$

$=(-1)^m\binom{n-1}{m}+(-1)^{n+1}\binom{n-1}{n}$

$=(-1)^m\binom{n-1}{m}=RHS.$ Q.E.D.

26. 向右：E，向上：N.

$S \to T$：由E.N构成的排列：$B = \{m \cdot E, n \cdot N\}$

全排列为 $\dfrac{(m+n)!}{m!\,n!} = \dbinom{m+n}{n}$.