网络流作业第六题的粗劣证明

Table of Contents

1 写在前面

很抱歉昨天答疑很多题目没有提供证明，因为时间和形式的关系证明实在不适合在答疑课上讲，这里补上网络流作业第六题粗劣的证明，本题解法很多，只提供一种相对简单的，请各位认真思考，如有疑问可随时联系我，mail: jufusong@gmail.com 。（PS：因为各种各样的原因请勿外传，谢谢合作，其他题目的证明我觉得挺显然就没有做补充证明，如果有疑问也可以联系我）。

2 题目描述

Given an undirected graph, each edge is assigned one weight, find a subset S of nodes to maximize $e(S)/|S|$, where $e(S)$ denotes the sum of edge weights in S and $|S|$ is the number of nodes in S. Give a polynomial-time algorithm that takes a rational number α and de- termines whether there exists a set S with cohesiveness at least α.

3 解法

题目要求带边权无向图中是否存在顶点的子集 S 满足 $\frac{e(S)}{|S|} > \alpha$ ，其中 $e(S)$ 是点集 S 中的边权和（题目中可能忘记强调所有边权非负）。

首先给出解法：假设图有 n 个点 m 条边，对于原图中的每条边，建立一个点 $E_i, 1 \le i \le m$ ，对于原图中每个点，建立一个点 $V_i, 1 \le i \le n$，添加源点 s 和汇点 t 。然后添加边：

1. 对于每条边 E_i ，添加边 (s, E_i, W_{E_i}) (PS: (u, v, c) 表示 u 到 v 连一条容量为 c 的边)， W_{E_i} 表示 E_i 的权值
2. 对于每条边 E_i ，设这个边所连接的两个点分别是 V_x 和 V_y ，添加边 $(E_i, V_x, +\infty)$ 和 $(E_i, V_y, +\infty)$ 。
3. 对于每个点 V_i ，添加边 (V_i, t, α)

然后设这个网络的最大流为 F ，如果 $\sum_{i=1}^{m} W_{E_i} - F > 0$ ，则存在一个子集 S 满足 $\frac{e(S)}{|S|} > \alpha$ 。

4 证明

接下来证明当且仅当 $\sum_{i=1}^{m} W_{E_i} - F > 0$ ，存在一个子集 S 满足 $\frac{e(S)}{|S|} > \alpha$ 。如果有解，设这个网络的最小割为 $[S,T]$ ，那么在 S 中的 V_i 和 E_i 共同构成一组解。

4.1 最小割和满足条件的点集一一对应

首先考虑什么叫满足条件的点集，首先满足一个条件：对于所有边 $E_i = (V_x, V_y)$ ，如果 $E_i \in S$ 那么 $V_x, V_y \in S$ 。

1. 每个最小割对应一个满足条件的点集

   证明：由于所有 E_i 到 V_i 边的容量都是 +∞ ，所以这些边都不能成为割边（显然这个网络的最大流不是 +∞ ），所以对于每条边 (E_i, V_x, W_{E_I}) ，如果 $E_i \in S$ ， 那么 $V_x \in S$ ，满足条件。

2. 每个满足的点集都对应一个割。

   这个相对显然，可以参考上一个证明用反证法自行尝试。

其实还应满足一个条件，对于所有 $E_i = (V_x, V_y)$ ，如果 $V_x, V_y \in S$ ， 那么 $E_i \in S$ ，这个先放一下，接下来会说计算的结果会满足这个条件。

4.2 当且仅当 $\sum_{i=1}^{m} W_{E_i} - F > 0$ ，存在一个子集 Z 满足 $\frac{e(Z)}{|Z|} > \alpha$

首先改写下目标， $\frac{e(Z)}{|Z|} > \alpha \Rightarrow e(Z) - \alpha|Z| > 0$ ，问题可以转化为判断 $max\{e(Z) - \alpha|Z|\} > 0$ 。

接下来证明我们用上述方法求出的解就是 $max\{e(Z) - \alpha|Z|\}$ 。

设最小割是 $[S,T]$ ，割的值是（即最大流）F ，则有

$$F = \sum_{E_i \in T} W_{E_i} + \alpha \sum_{V_i \in S} 1$$

其中 $\sum_{E_i \in T} W_{E_i}$ 表示连接源点 s 的割边的容量和， $\alpha \sum_{V_i \in S} 1$ 是连接汇点t的割边的容量和，（上文已经提到不存在 E_i到V_i 的割边）。

上文提到了， S 中的 E_i 和 V_i 构成一组解，接下来计算这个解的函数值，

$$e(Z) - \alpha|Z| = \sum_{E_i \in S} W_{E_i} - \alpha \sum_{V_i \in S} 1$$

$\sum_{E_i \in S} W_{E_i}$ 是 S 集中的边权和， $\sum_{V_i \in S} 1$ 是 S 集中的点的个数。

最后神奇的地方来了，将上述两式相加

$$
\begin{aligned}
e(Z)-\alpha|Z|+F &= \sum_{E_i \in S} W_{E_i} - \alpha \sum_{V_i \in S} 1 + \sum_{E_i \in T} W_{E_i} + \alpha \sum_{V_i \in S} 1 \\
&= \sum_{E_i \in E} W_{E_i} \\
e(Z)-\alpha|Z| &= \sum_{E_i \in E} W_{E_i} - F
\end{aligned}
$$

其中 $\sum_{E_i \in E} W_{E_i}$ 是所有的边权和，是个定值，所以目标就是让 F 最小，也就是最小割了，值就是最大流。

4.3 extra

到目前为止大部分内容都进行了不严格证明， 在本章第一节还剩最后一个没证明。

> 对于所有 $E_i = (V_x, V_y)$ ，如果 $V_x, V_y \in S$ ， 那么 $E_i \in S$

这个我在最开始补充了个条件，所有边权非负，目前来看这个结论就很显然了，在上一节求出的 $max\{e(Z)-\alpha|Z|\}$ 是一定满足这个条件的（尝试反证法）。

5 最后

有兴趣同学可以自行搜索“最大密度子图”，本题解法多样，也都很巧妙。

More efforts, more rewards

最后祝大家考试顺利