

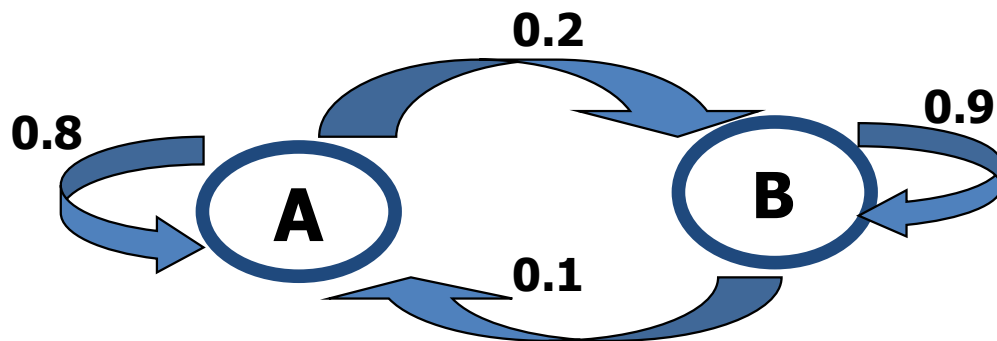
# Hidden Markov model and Viterbi's decoding algorithm

Minghua Deng and Dongbo Bu

2012

# HMM—韦小宝的骰子

- 两种骰子，开始以 $2/5$ 的概率出千。
  - 正常A：以 $1/6$ 的概率出现每个点
  - 不正常B：5,6出现概率为 $3/10$ ,其它为 $1/10$
- 出千的随机规律



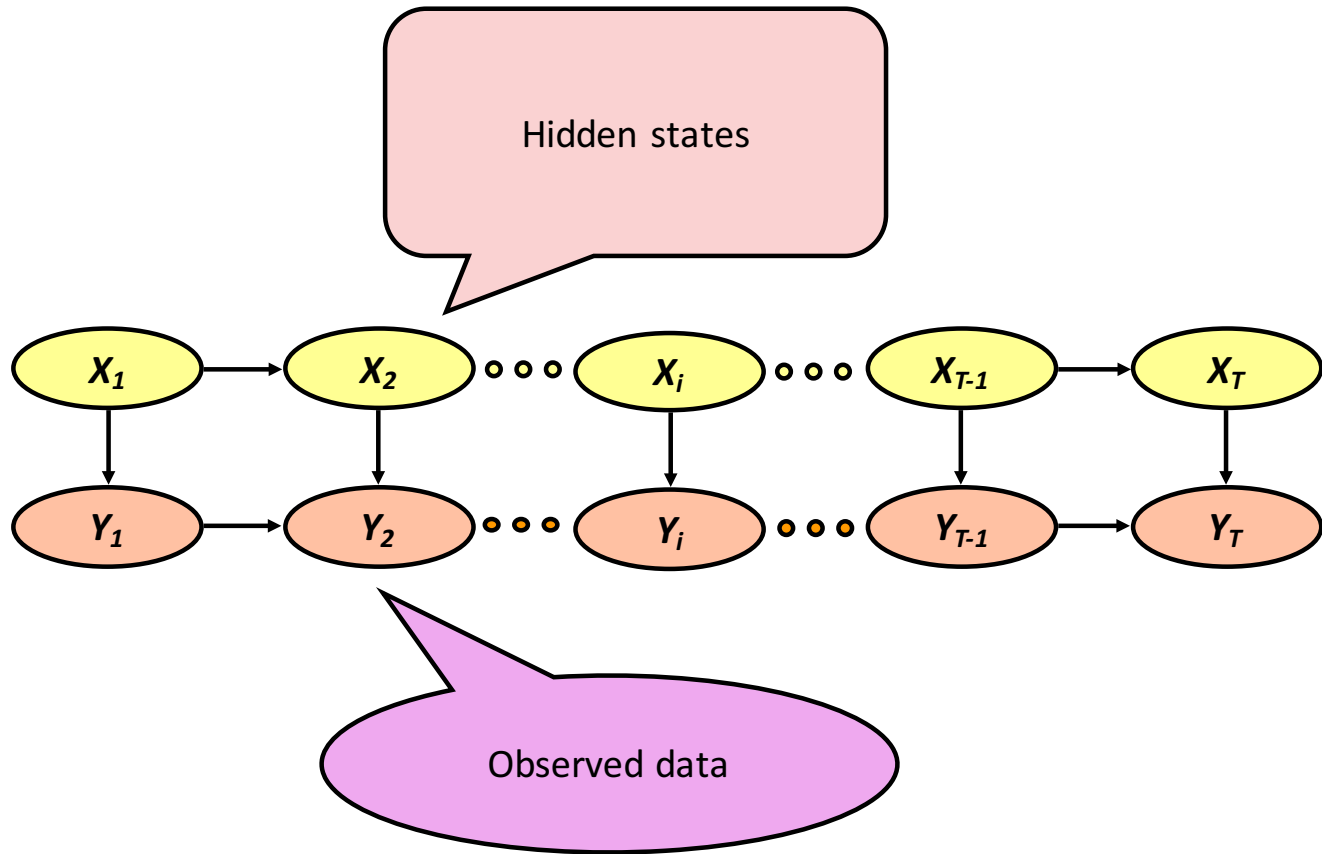
# HMM例1—韦小宝的骰子

- 观测到其一次投掷结果

$$O = (1, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 3, 2, 6)$$

- 问题：请判断韦小宝什么时候出千了？

# Hidden Markov Models - HMM



# 隐马氏模型的数学模型

- 隐过程为 $\mathbf{X}=\{X_1, \cdots, X_T\}$
- 观察过程为 $\mathbf{Y}=\{Y_1, \cdots, Y_T\}$
- 模型参数 $\boldsymbol{\lambda} = \{ \boldsymbol{\pi}, \mathbf{A}, \mathbf{B} \}$ 
  - 初始分布 $\boldsymbol{\pi}=(\pi_i)$ ,  $\pi_i=P\{X_1=i\}$
  - 转移矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})$ ,  $a_{ij}=P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$
  - 给定某个时间的隐状态的情况下, 观测的分布矩阵 $\mathbf{B}=(b_{il})$ ,  $b_{il}=P(Y_n=l \mid X_n=i)$ 。

# 解码问题(I)

- 问题： 给定观测序列  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_T)$ , 如何给出隐状态序列  $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_T^0)$ .
- 路径最优指： 对任意的  $X^0 = (x_1, x_2, \dots, x_T)$  有

$$\begin{aligned} &Pr(x'_1, x'_2, \dots, x'_T | y_1, \dots, y_T) \\ &\geq Pr(x_1, x_2, \dots, x_T | y_1, \dots, y_T) \end{aligned}$$

# 解码问题(II)

- 由Bayesian公式有

$$\begin{aligned} & Pr(x'_1, x'_2, \cdots, x'_T | y_1, \cdots, y_T) \\ &= \frac{Pr(x_1, x_2, \cdots, x_T, y_1, \cdots, y_T)}{Pr(y_1, \cdots, y_T)} \end{aligned}$$

- 又由于序列  $\mathbf{Y}$  给定, 问题等价于找最优的  $\mathbf{x}^0$  使联合概率  $Pr(x_1, \cdots, x_T; y_1, \cdots, y_T)$  最大。

# 一个相关问题

$$\delta_t(i) = \max_{x_1, \dots, x_{t-1}} Pr(x_1, \dots, x_{t-1}, x_t = i, y_1, \dots, y_t | \lambda)$$

- 求解过程：一系列的决策
- 在每个决策步，确定一个 $x_i$ 是A还是B
- 确定决策项之后，剩下的是求解一个更小的子问题



# Viterbi算法(I)

- 算法的思想动态规划的递推算法。
- 递推变量为

$$\delta_t(i) = \max_{x_1, \dots, x_{t-1}} Pr(x_1, \dots, x_{t-1}, x_t = i, y_1, \dots, y_t | \lambda)$$

- 我们有递推公式

$$\begin{aligned} \delta_{t+1}(i) &= \max_{x_1, \dots, x_t} Pr(x_1, \dots, x_t, x_{t+1} = i, y_1, \dots, y_{t+1} | \lambda) \\ &= \left( \max_j \delta_t(j) a_{ji} \right) b_i(y_{t+1}) \end{aligned}$$

- 以 $\psi_t(i)$ 记录 $t$ 时刻时使 $\delta_t(j)a_{ji}$ 最大的状态 $j$ 。

# Viterbi算法(II)

- 初始化

$$\begin{aligned}\delta_1(i) &= \pi_i b_i(y_1), \\ \psi_1(i) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.\end{aligned}$$

- 迭代

$$\begin{aligned}\delta_t(j) &= \left( \max_{1 \leq i \leq N} \delta_{t-1}(i) a_{ij} \right) b_j(y_t) \\ \psi_t(j) &= \underset{1 \leq i \leq N}{\operatorname{Argmax}} (\delta_{t-1}(i) a_{ij}) \\ t &= 2, \dots, T; \quad j = 1, \dots, N.\end{aligned}$$

# Viterbi算法(III)

- 终止

$$p^* = \max_{1 \leq i \leq N} \delta_T(i)$$

$$x_T^* = \operatorname{Argmax}_{1 \leq i \leq N} \delta_T(i)$$

- Backtracking

$$x_t^* = \psi_{t+1}(x_{t+1}^*)$$

$$t = T - 1, T - 2, \dots, 1.$$

# Viterbi算法实例(I)

- 转移概率以及初概率

	A	B
A	0.8	0.2
B	0.1	0.9
初概率	0.6	0.4

- 条件概率(Emission Probability)

	V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	V <sub>3</sub>	V <sub>4</sub>	V <sub>5</sub>	V <sub>6</sub>
A	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
B	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3	0.3

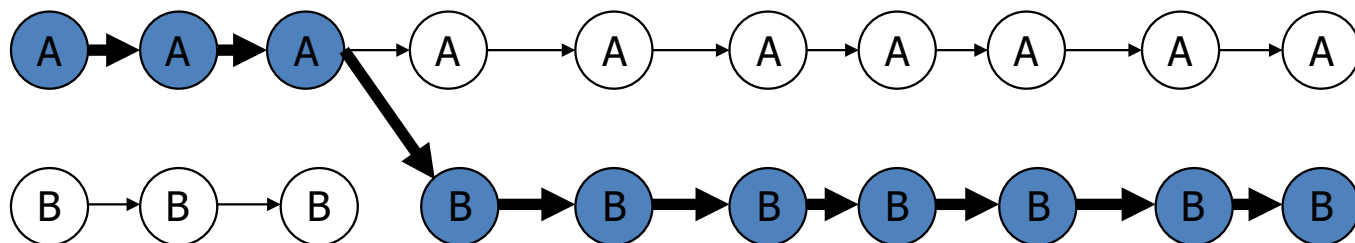
# Viterbi算法实例(II)

	$y_t$	$\delta_t(A)$	$\psi_t(A)$	$\delta_t(B)$	$\psi_t(B)$
t=1	1	$1.000 \times 10^{-1}$	-	$4.000 \times 10^{-2}$	-
t=2	3	$1.333 \times 10^{-2}$	A	$3.600 \times 10^{-3}$	B
t=3	4	$1.778 \times 10^{-3}$	A	$3.240 \times 10^{-4}$	B
t=4	5	$3.370 \times 10^{-4}$	A	$1.067 \times 10^{-4}$	A
t=5	5	$3.161 \times 10^{-4}$	A	$2.880 \times 10^{-5}$	B
t=6	6	$4.214 \times 10^{-6}$	A	$7.776 \times 10^{-6}$	B
t=7	6	$5.619 \times 10^{-7}$	A	$2.100 \times 10^{-6}$	B
t=8	3	$7.492 \times 10^{-8}$	A	$1.890 \times 10^{-7}$	B
t=9	2	$9.989 \times 10^{-9}$	A	$1.701 \times 10^{-8}$	B
t=10	6	$1.322 \times 10^{-9}$	A	$4.592 \times 10^{-9}$	B

# Viterbi算法实例(III)

观测序列为：

1    3    4    5        5    6    6    3        2    6



解码出来的状态序列为：

A    A        A    B        B        B        B        B        B    B

# 参考文献

- 钱敏平，龚光鲁。《应用随机过程》，北京大学出版社，1998。
- David W. Mount. Bioinformatics, Sequence and Genome Analysis. Cold Spring Harbor Laboratory Press, 2002.
- Amy N. Langville and Carl D. Meyer. Deeper Inside PageRank, Internet Mathematics Vol. 1, No. 3: 335-380, 2004.
- L. Rabiner, “A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition”, Proceedings of the IEEE, Vol. 77, No. 2, Feb. 1989
- On-line tutorial: [http://www.comp.leeds.ac.uk/roger/HiddenMarkovModels/html\\_dev/main.html](http://www.comp.leeds.ac.uk/roger/HiddenMarkovModels/html_dev/main.html)