# Modelagem de Sistemas Dinâmicos

Trabalho 4

Erica da Cunha Ferreira

Novembro 2020

UFRJ

# Sumário

# 1 Introdução

Este trabalho tem como objetivo analisar o sistema do *Segway*, como um pêndulo invertido de duas rodas.

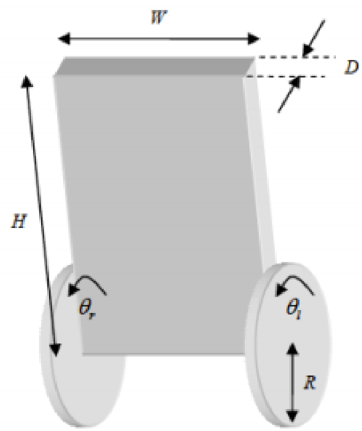


Figura 1: Sistema de Pêndulo Invertido

Abaixo temos as vistas lateral e superior do sistema.

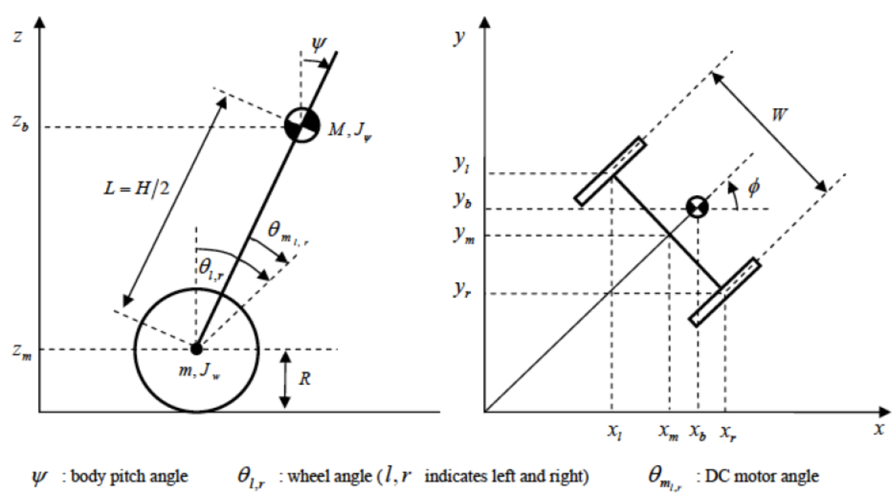


Figura 2: Visão Lateral e Superior do Sistema

Temos os parâmetros físicos deste sistema que são:

- $g = 0.98\ m/s^2$, gravidade.
- $m = 0.03\ kg$, peso da roda.
- $R = 0.04\ m$, rádio da roda.
- $M = 0.6\ kg$, peso do corpo.
- $W = 0.14\ m$, largura do corpo.
- $D = 0.04\ m$, profundidade do corpo.
- $H = 0.144\ m$, altura do corpo.
- $J_m = 10^{-5}\ kg \cdot m^2$, inércia do motor DC.
- $R_m = 6.69\ \Omega$, resistência do motor DC.
- $K_t = K_e = 0.4$, constante de torque e de EMF.

# 2 Metodologia

A partir desses dados e da figura dos sistema podemos chegar às seguintes equações:

$$J_w = \frac{m \cdot R^2}{2} \tag{1}$$

$$L = \frac{H}{2} \tag{2}$$

$$J_y = \frac{M \cdot L^2}{3} \tag{3}$$

$$J_o = \frac{M \cdot (W^2 + D^2)}{12} \tag{4}$$

$$\alpha = \frac{n \cdot K_t}{R_m} \tag{5}$$

$$\beta = \frac{n \cdot K_t \cdot K_b}{R_m} + f_m \tag{6}$$

$$J = \frac{W^2 \cdot (b + f_w)}{2R^2} \tag{7}$$

$$I = \frac{m \cdot W^2}{2} + J_o + \frac{W^2 \cdot (J_w + J_m \cdot n^2)}{2 \cdot R^2} \tag{8}$$

$$K = \frac{W \cdot a}{2R} \tag{9}$$

$$f_w = 0 \tag{10}$$

$$n = 1 \tag{11}$$

$$F_m = 0.0022 \tag{12}$$

## 2.1 Análise de Lagrange

Ao analisar a **Figura 2** e ao considerar a direção positiva para o pêndulo no tempo de $t = 0$ *segundos*, chegamos às seguintes expressões do sistema:

$$\theta, \phi = \frac{(\theta_1 + \theta_r) \cdot (\theta_r - \theta_i) \cdot R}{2 \cdot W} \tag{13}$$

$$x_m, y_m, z_m = \int \dot{x}_m dt, \int \dot{y}_m dt, R \tag{14}$$

$$\dot{x}_m, \dot{y}_m = R \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\phi, R \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\phi \tag{15}$$

$$x_l, y_l, z_l = x_m - \frac{W \cdot \sin\phi}{2}, y_m + \frac{W \cdot \cos\phi}{2}, z_m \tag{16}$$

$$x_r, y_r, z_r = x_m + \frac{W \cdot \sin\phi}{2}, y_m - \frac{W \cdot \cos\phi}{2}, z_m \tag{17}$$

$$x_b, y_b, z_b = x_m + L \cdot \sin\Psi \cdot \cos\phi, y_m + L \cdot \sin\Psi \sin\phi, z_m + L \cdot \cos\Psi \tag{18}$$

Sendo $T_1$ e $T_2$ as energias cinéticas de translação e rotação, respectivamente, e U a energia potencial total do sistema, temos:

$$T_1 = \frac{m \cdot [(\dot{x}_l^2 + \dot{y}_l^2 + \dot{z}_l^2) + (\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2 + \dot{z}_r^2)] + M \cdot [(\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2 + \dot{z}_b^2)]}{2} \tag{19}$$

$$T_2 = \frac{J_w(\dot{\theta}_l^2 + \dot{\theta}_r^2) + J_\Psi \dot{\Psi}^2 + J_\phi \dot{\phi}^2 + n^2 J_m[(\dot{\theta}_l - \dot{\phi})^2 + (\dot{\theta}_r - \dot{\Psi})^2]}{2} \tag{20}$$

$$U = mgz_l + mgz_r + Mgz_b \tag{21}$$

Partindo do princípio geral do Lagrangiano:

$$L = T_1 + T_2 - U \tag{22}$$

Sendo as nossas variáveis generalizadas:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \theta \\ \Psi \\ \phi \end{bmatrix} \tag{23}$$

Então, temos como base as expressões:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = F_\theta \tag{24}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \Psi} = F_\Psi \tag{25}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = F_\phi \tag{26}$$

Com isso temos que:

$$[(2m+M)R^2+2J_w+2n^2J_m)]\ddot{\theta}+\left(MLR \cdot \cos\Psi - 2n^2J_m\right)\ddot{\Psi}-MLR\Psi 2\sin\Psi = F_\theta \tag{27}$$

$$(MLP \cdot \cos\Psi+2n^2J_m)\ddot{\theta}+(ML^2+J_\Psi+2n^2J_m)\ddot{\Psi}-MgL\sin\Psi-ML^2\dot{\phi}^2\sin\Psi\cos\Psi = F_\Psi \tag{28}$$

$$\left(\frac{m \cdot W^2 J_\phi}{2} + \frac{W^2 \cdot (J_w + n^2 J_m)}{2R^2} + ML^2 \sin^2 \Psi\right) \ddot{\theta} + 2 \cdot ML^2 \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\Psi} \cdot \sin \Psi \cdot \cos \Psi = F_\phi \tag{29}$$

Considerando o torque do motor DC e atrito, temos as seguintes forças generalizadas do sistema:

$$F_\theta, F_\Psi, F_\phi = F_l + F_r, F_\Psi, \frac{W \cdot (F_r - F_l)}{2 \cdot R}$$

$$F_l = nK_t i_l + f_m(\dot{\Psi} - \dot{\theta}_l) - f_w \dot{\theta}_l$$

$$F_r = nK_t i_r + f_m(\dot{\Psi} - \dot{\theta}_l) - f_w \dot{\theta}_r$$

$$F_\Psi = -nK_t i_r - nK_t i_r - f_m(\dot{\Psi} - \dot{\theta}_r)$$

Sendo $i_{l,r}$ equivalente à corrente do motor DC. A relação entre corrente e tensão do motor DC é dada por:

$$i_{l,r} = \frac{v_{l,r} + K_b(\dot{\Psi} - \dot{\theta_{l,r}})}{R_m} \tag{30}$$

Considerando o atrito interno e a indutância do motor como desprezíveis, podemos escrever as forças generalizadas do sistema da seguinte forma:

$$F_\theta = \alpha(v_l - v_r) - 2\dot{\theta}(\beta + f_w) + 2 \cdot \beta \cdot \dot{\Psi}$$

$$F_\Psi = -\alpha \cdot (v_l + v_r) + 2\beta \cdot (\dot{\theta} + \dot{\Psi}) \tag{31}$$

$$F_\phi = \frac{W \cdot \alpha \cdot (v_r - v_i)}{2R} - \frac{W^2 \cdot (\beta + f_w) \cdot \dot{\phi}}{2R^2}$$

$$\alpha = \frac{nK_t}{R_m}$$

$$\beta = \frac{nK_t K_b}{R_m} + f_m$$

## 2.2 Equações de Estado do Modelo Dinâmico

Será utilizada a formulação abaixo para descrever o modelo no espaço de estados:

$$E \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\Psi} \end{bmatrix} + F \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \theta \\ \Psi \end{bmatrix} + N = H \begin{bmatrix} v_l \\ v_r \end{bmatrix} \tag{32}$$

$$I\ddot{\phi} + J\dot{\phi} + N_2 = K(v_r - v_l) \tag{33}$$

Em que,

$$I = \frac{mW^2}{2} + J_\phi + \frac{W^2 \cdot (J_w + n^2 J_m)}{2R^2} + ML^2 \sin^2 \Psi \tag{34}$$

$$J = \frac{W^2 \cdot (\beta + f_w)}{2R^2} \tag{35}$$

$$K = \frac{W \cdot \alpha}{2R} \tag{36}$$

$$E = \begin{bmatrix} (2m + M)R^2 + 2 \cdot (J_m n^2 + J_w) & MLR \cos \Psi - 2J_m n^2 \\ MLR \cos \Psi - 2J_m n^2 & ML^2 + J_\Psi + 2J_m n^2 \end{bmatrix} \tag{37}$$

$$E = 2 \begin{bmatrix} \beta + f_w & -\beta \\ -\beta & \beta \end{bmatrix} \tag{38}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{39}$$

$$H = 2 \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ -\alpha & -\alpha \end{bmatrix} \tag{40}$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} -MLR \cdot \dot{\Psi}^2 \cdot \sin \Psi \\ \frac{-MgL \sin \Psi - ML^2 \dot{\phi} \sin \Psi \cdot \cos \Psi}{det(E)} \end{bmatrix} \tag{41}$$

$$N_2 = 2ML^2 \cdot \dot{\phi} \cdot \dot{\Psi} \cdot \sin \Psi \cdot \cos \Psi \tag{42}$$

Dados $x_1$ e $x_2$ as variáveis de estado, e $u$ a entrada, então:

$$x_1^T = \begin{bmatrix} \theta & \Psi & \dot{\theta} & \dot{\Psi} \end{bmatrix} \tag{43}$$

$$x_2^T = \begin{bmatrix}\phi & \dot{\phi}\end{bmatrix} \tag{44}$$

$$u^T = \begin{bmatrix}v_l & v_r\end{bmatrix} \tag{45}$$

Logo:

$$\dot{x_1} = A_1 x_1 + B_1 u + C_1 \tag{46}$$

$$\dot{x_2} = A_2 x_1 + B_2 u + C_2 \tag{47}$$

Sendo,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & A_1(3,3) & A_1(3,4) \\ 0 & 0 & A_1(4,3) & A_1(4,4) \end{bmatrix} \tag{48}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_1(3) & B_1(3) \\ B_1(4) & B_1(4) \end{bmatrix} \tag{49}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{J}{I} \end{bmatrix} \tag{50}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{K}{I} & \frac{K}{I} \end{bmatrix} \tag{51}$$

$$C_1 = \frac{-N_1}{det} \tag{52}$$

$$C_2 = \frac{-N_2}{det} \tag{53}$$

Estes elementos podem ser descritos como:

$$det = det(E) \tag{54}$$

$$A_1(3,3) = -\frac{2 \cdot [(b + f_w) \cdot E(2,2)] + b \cdot E(1,2)}{det} \tag{55}$$

$$A_1(4,3) = \frac{2 \cdot [(b + f_w) \cdot E(1,2)] + b \cdot E(1,1)}{det} \tag{56}$$

$$A_1(3,4) = \frac{2b \cdot (E(2,2) + E(1,2))}{det} \tag{57}$$

$$A_1(4,4) = -\frac{2 \cdot b \cdot [E(1,1) + E(1,2)]}{det} \tag{58}$$

$$B_1(3) = \frac{\alpha \cdot [E(2,2) + E(1,2)]}{det} \tag{59}$$

$$B_1(4) = -\frac{\alpha \cdot [E(1,1) + E(1,2)]}{det} \tag{60}$$

## 2.3 Linearização

A partir das equações de estado, indicadas no **item 2.2**, o sistema é linearizado em torno do ponto $\Psi = 0$. Logo, temos que $\sin\Psi = \Psi$ e $\cos\Psi = 1$ e:

$$\left((2m + M) \cdot R^2 + 2J_w + 2 \cdot n^2 \cdot J_m\right)\ddot{\theta} + (MLR - 2n^2 J_m)\ddot{\Psi} = F_\theta \tag{61}$$

$$(MLP + 2n^2 J_m)\ddot{\theta} + (ML^2 + J_\Psi + 2n^2 J_m)\ddot{\Psi} = F_\Psi \tag{62}$$

$$\left(\frac{m \cdot W^2 \cdot J_\phi}{2} + \frac{W^2 \cdot (J_w + n^2 J_m)}{2R^2}\right)\ddot{\theta} = F_\phi \tag{63}$$

Ao reescrevê-las em forma de matriz, temos:

$$E \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} + F \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\Psi} \end{bmatrix} + G \begin{bmatrix} \theta \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_l \\ v_r \end{bmatrix}$$

Temos também:

$$I = \frac{m \cdot W^2}{2} + J_\phi + \frac{W^2 \cdot (J_w + n^2 J_m)}{2R^2} \tag{64}$$

$$J = \frac{W^2 \cdot (\beta + f_w)}{2R^2} \tag{65}$$

$$K = \frac{W \cdot \alpha}{2R} \tag{66}$$

$$E = \begin{bmatrix} (2m + M)R^2 + 2J_w + 2J_m n^2 & MLR - 2J_m n^2 \\ MLR - 2J_m n^2 & ML^2 + J_\Psi + 2J_m n^2 \end{bmatrix} \tag{67}$$

$$F = 2\begin{bmatrix} \beta + f_w & -\beta \\ -\beta & \beta \end{bmatrix} \tag{68}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -MgL \end{bmatrix} \tag{69}$$

$$H = 2\begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ -\alpha - \alpha & \end{bmatrix} \tag{70}$$

Com as variáveis de estado $x_1$ e $x_2$ e $u$ como entrada, temos:

$$x_1{}^T = \begin{bmatrix} \theta & \Psi & \dot{\theta} & \dot{\Psi} \end{bmatrix}$$

$$x_2{}^T = \begin{bmatrix} \phi & \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

$$u^T = \begin{bmatrix} v_l & v_r \end{bmatrix}$$

Logo, podemos escrever as expressões na forma:

$$\dot{x_1} = A_1 x_1 + B_1 u \tag{71}$$

$$\dot{x_2} = A_2 x_1 + B_2 u \tag{72}$$

Sendo os coeficientes indicados por:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \tag{73}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ B_3 & B_3 \\ B_4 & B_4 \end{bmatrix} \tag{74}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{J}{I} \end{bmatrix} \tag{75}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{K}{I} & \frac{K}{I} \end{bmatrix} \tag{76}$$

Com:

$$det = det(E) \tag{77}$$

$$A_{32} = -\frac{gMLE(1,2)}{det} \tag{78}$$

$$A_{42} = \frac{gMLE(1,1)}{det} \tag{79}$$

$$A_{33} = -\frac{2[(b+f_w)\cdot E(2,2) + b\cdot E(1,2)]}{det} \tag{80}$$

$$A_{43} = \frac{2[(b+f_w)\cdot E(2,2) + b\cdot E(1,1)]}{det} \tag{81}$$

$$A_{34} = 2b\cdot\frac{E(2,2)+E(1,2)}{det} \tag{82}$$

$$A_{44} = -2b\cdot\frac{E(1,1)+E(1,2)}{det} \tag{83}$$

$$B_3 = a\cdot\frac{E(2,2)+E(1,2)}{det} \tag{84}$$

$$B_4 = -a\cdot\frac{E(1,1)+E(1,2)}{det} \tag{85}$$

## 2.4 Simulações

### 2.4.1 S-Function

A partir dos arquivos de referência do trabalho, *NXTway_init.m* e *NXTway_simu.slx*, é executada a simulação do sistema abaixo, utilizando o modelo de S-Functions.

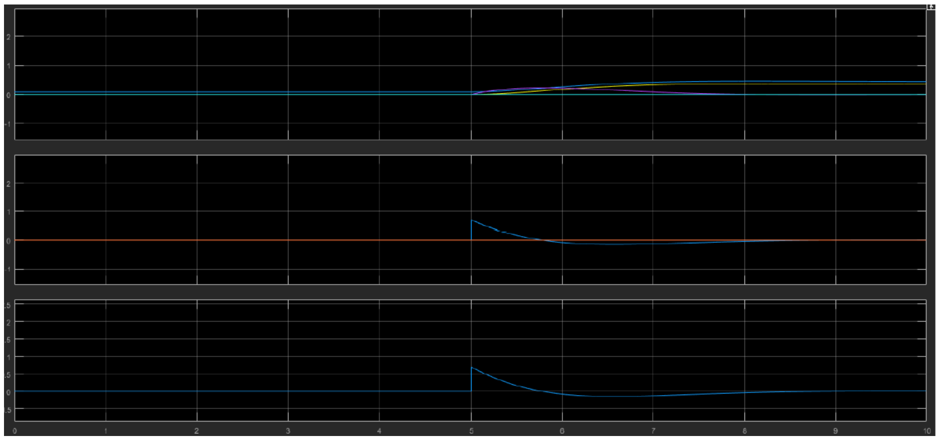

Figura 3: Simulação S-Functions.

No gráfico da **Figura 3** temos a variação do *body pitch*, em azul, e *body yaw*, em vermelho. Nele também pode-se observar a resposta do sistemas à pertubações em sua inércia, onde se tem o assentamento como resposta das derivadas na ordenada nula. Da mesma forma, o gráfico superior representa o *body pitch* e *body yaw*, de acordo com o avanço temporal.

### 2.4.2 ode45

Utilizando o arquivo *"NXTway_figs.m"*, é obtido outra forma de visualização da **Figura 3**.

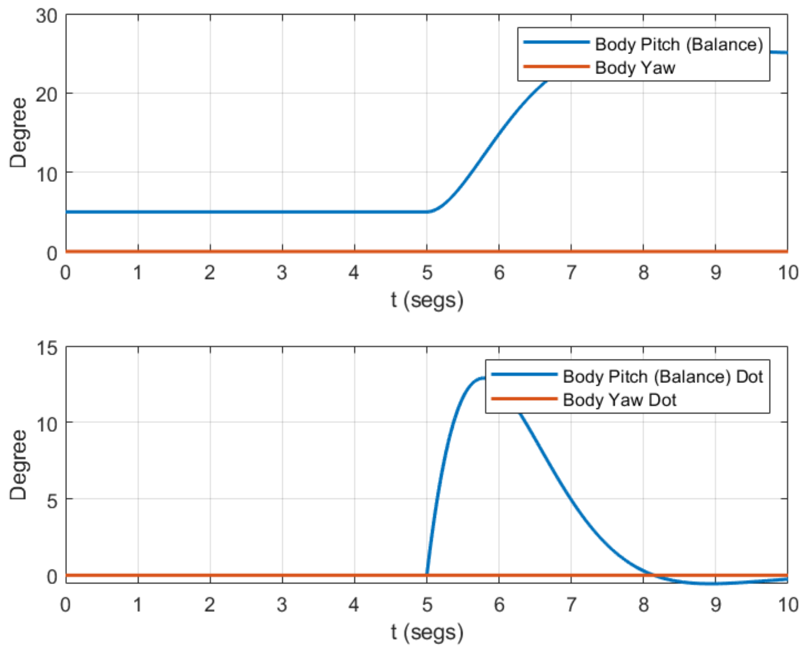


Figura 4: Simulação ode45.

Apesar representar o mesmo da **Figura 3**, nesta visualização temos as transições de *body yaw Dot* de forma menos intensa.

#### 2.4.3 Modelo Linear

Utilizando o algoritmo abaixo, modelo linear foi simulado, com apoio da ferramenta **ode45** do Matlab:

```
>> g = 9.81;
   m = 0.03;
   R = 0.04;
   Jw = m*(R^2)/2;
   M = 0.6;
   W = 0.14;
   D = 0.04;
   H = 0.144;
   L = H/2;
   Jy = M*(L^2)/3;
   Jo = M*((W^2)+(D^2))/12;
   Jm = 10^-5;
   Rm = 6.69;
   Kb = 0.468;
   Kt = 0.317;
   n = 1;
   fm = 0.0022;
   fw = 0;
   a = n*Kt/Rm;
   b=(n*Kt*Kb/Rm)+fm;
   J = (W^2)*(b+fw)/(2*(R^2));
   I = (m*(W^2)/2)+Jo+(W^2)*(Jw+Jm*(n^2))/(2*(R^2));
   K = W*a/(2*R);
   E = [(2*m+M)*(R^2)+2*Jw+2*Jm*(n^2) M*L*R-2*Jm*(n^2);M*L*R-2*Jm*(n^2) M*(L^2)+Jy+2*Jm*(n^2)];
   det = det(E);
   A32 = -g*M*L*E(1,2)/det;
   A42 = g*M*L*E(1,1)/det;
   A33 = -2*((b+fw)*E(2,2)+b*E(1,2))/det;
   A43 = 2*((b+fw)*E(1,2)+b*E(1,1))/det;
   A34 = 2*b*(E(2,2)+E(1,2))/det;
   A44 = -2*b*(E(1,1)+E(1,2))/det;
   B3 = a*(E(2,2)+E(1,2))/det;
   B4 = -a*(E(1,1)+E(1,2))/det;
   A = [0 0 1 0;0 0 0 1;0 A32 A33 A34;0 A42 A43 A44];
   B = [0 0;0 0;B3 B3;B4 B4];
   A2 = [0 1;0 -J/I];
   B2 = [0 0;-K/I K/I]
   v1 = 1; % entrada 1
   v2 = 1; % entrada 2
```

Para as entradas do sistema, $v_1$ e $v_2$, é valor unitário. Assim, é representado o sistema com a aplicação de um degrau unitário.Conforme o comando abaixo, são simuladas as características do *body pitch*:

```
>>  f = @(t,x) [x(3);x(4);A32*x(2)+A33*x(3)+A34*x(4)+v1*B3+v2*B3;
    A42*x(2)+A43*x(3)+A44*x(4)+v1*B4+v2*B4];
    [t,x] = ode45( f, [0,0.4], [0 0 0 0] );
    plot(t,x(:,2),t,x(:,4));
    legend('Body Pitch (Balance)', 'Body Pitch (Balance) Dot');
    xlabel('t'); ylabel('x');
```

Foi necessário segmentar a variação temporal, a fim de mantê-la próxima de zero. Uma vez que este modelo é compatível somente com as proximidades do ponto em que ocorreu a linearização, com um período amostral grande, o efeito esperado do sistema deixa de ser observado. Ao utilizar o algoritmo, obtemos o seguinte gráfico:

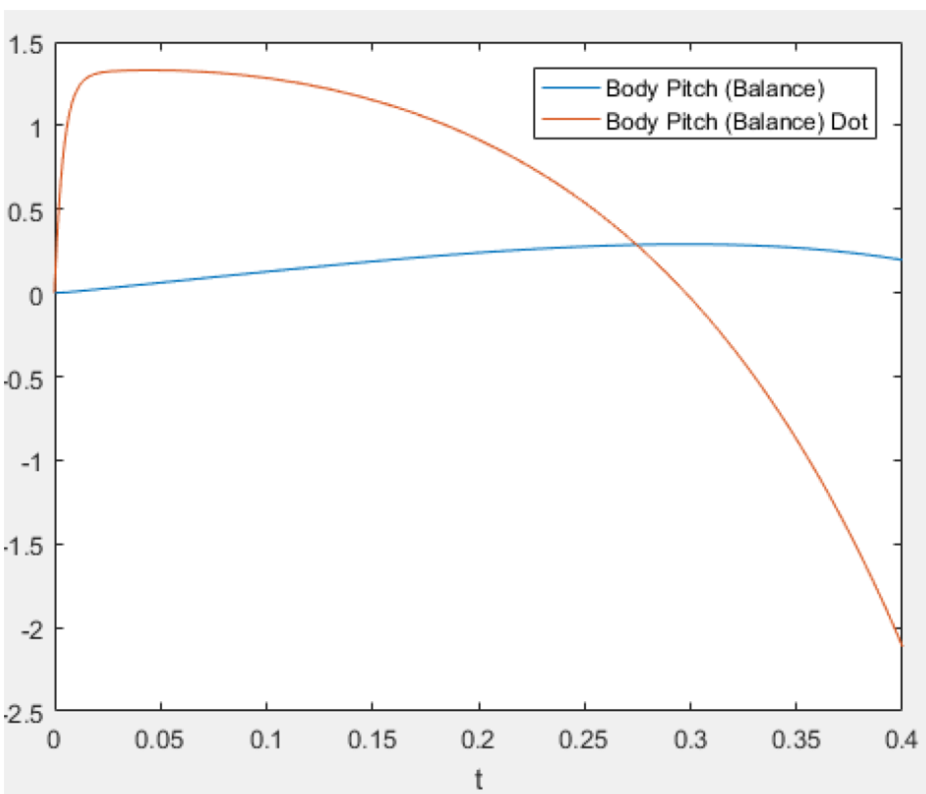


Figura 5: Modelo Linearizado Body Yaw.

Por conseguinte, código seguinte retorna a resposta da variação do *body* *yaw*:

```
>> g = @(t,x) [x(2);(-J/I)*x(2)-K*v1/I+K*v2/I];
   [t,x]=ode45(g,[0,0.45],[0 0]);
   plot(t,x(:,1),t,x(:,2));
   legend('Body Yaw', 'Body Yaw Dot')
   xlabel('t'); ylabel('x');
```

Obtemos o seguinte gráfico:

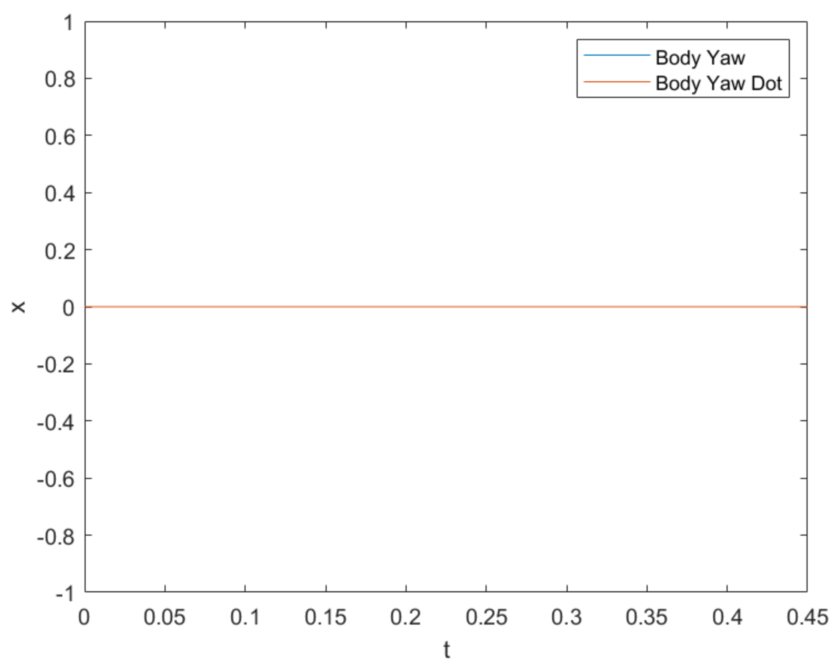


Figura 6: Modelo linearizado Body Yaw dot.

# 3 Discussão de Resultados

## 3.1 Análises

### 3.1.1 Variação do *body yaw*

A partir da **Figura 4** é possível perceber como o sistema é não linear. No momento em que analisamos a quebra do estado inercial do *body yaw*, é possível observar uma trajetória de curva, visualmente similar a uma representada por uma função de segundo grau. Entretanto lidamos com um tempo de subida menor que o tempo de descida, observável pela inclinação das curvas. Ainda, é possível ver que, passado o tempo de resposta da perturbação, o sistema volta a operar em um estado inerte, com variação aproximadamente nula do *body yaw*.

De forma similar, **Figura 5**também remete, visualmente, ao escopo de uma função de segundo grau. Suas propriedades são similares ao da referência. Ainda, como mencionado anteriormente, o período de amostragem foi curto, em decorrência da perda de informações úteis, a longo prazo, de um modelo linearizado. Neste caso, é possível ver este efeito, dado que, passado o tempo de resposta à perturbação, o sistema não volta a um estado inerte na ordenada nula.

Unindo as informações, é possível concluir positivamente sobre a compatibilidade entre o modelo não linearizado e o linearizado, mas somente quando analisamos este em pontos próximos ao linearizado.

### 3.1.2 Variação do *body yaw*

Ainda a partir **Figura 4** vemos que a variação do *body yaw*, se manteve constante, em valor nulo. O mesmo ocorreu com a resposta indicada na **Figura 6**, o que indica compatibilidade entre ambos os modelos, de forma satisfatória.

## 3.2 Controle Realimentado

O sistema de controle é baseado em:

$$u = -K_x + N_r \tag{86}$$

Em que temos:

$$x_1{}^T = \begin{bmatrix}\theta & \Psi & \phi & \dot{\theta} & \dot{\phi}\end{bmatrix} \tag{87}$$

$$u^T = \begin{bmatrix}v_l & v_l\end{bmatrix} \tag{88}$$

$$N^T = \begin{bmatrix}-0.70771 & 0.0701\end{bmatrix} \tag{89}$$

$$K = \begin{bmatrix}-0.0224 & -25.4867 & -0.7071 & -1.0362 & -2.2530 & -0.0076 \\ -0.0224 & -25.4867 & 0.7071 & -1.0362 & -2.2530 & 0.0076\end{bmatrix} \tag{90}$$

Ao manipular os códigos anteriores e adicionar novos parâmetros. Neste caso, foi selecionado valor unitário para 'r', a fim de ver as influências que a referência de comando do sistema tem. Em seguida, reajustando os parâmetros de $x_1$, de acordo com a realimentação proposta, encontramos a seguinte resposta para o *body pitch*:

```
>>  Kn = [-0.0224 -25.4867 -0.7071 -1.0362 -2.253 -0.0076;
    -0.0224 -25.4867 0.7071 -1.0362 -2.253 0.0076]
    N = [-0.7071;0.7071];
    r = 1 %entrada de referencias
```

```
>> f = @(t,x) [x(3);
 x(4);
 A32*x(2)+A33*x(3)+A34*x(4)+(-Kn(1,1)*x(1)-Kn(1,2)*x(2)-
Kn(1,4)*x(3)-Kn(1,5)*x(4)+N(1,1)*r)*B3+(-Kn(2,1)*x(1)-Kn(2,2)*x(2)-
Kn(2,4)*x(3)-Kn(2,5)*x(4)+N(2,1)*r)*B3;
 A42*x(2)+A43*x(3)+A44*x(4)+(-Kn(1,1)*x(1)-Kn(1,2)*x(2)-
Kn(1,4)*x(3)-Kn(1,5)*x(4)+N(1,1)*r)*B4+(-Kn(2,1)*x(1)-Kn(2,2)*x(2)-
Kn(2,4)*x(3)-Kn(2,5)*x(4)+N(2,1)*r)*B4];
```

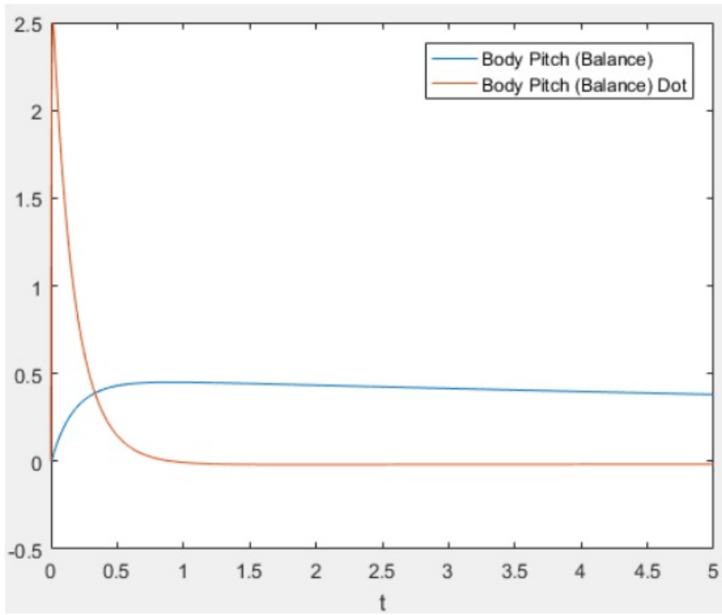


Figura 7: body yaw Realimentado

Como observado, o gráfico plotado é parecido ao encontrado na **Figura 4**. Porém, diferentemente do que foi observado no modelo linearizado, este modelo atua como esperado em todos os pontos do período de análise, reagindo à pertubações, mas mantendo-se estável em estado de inércia.

Com relação ao *body yaw*, encontramos:

```
>>  g = @(t,x) [x(2);(-J/I)*x(2)-(K*(-Kn(1,3)*x(1)-
    Kn(1,6)*x(2)+N(1,1)*r)/I)+K*(-Kn(2,3)*x(1)-Kn(2,6)*x(2)+N(2,1)*r)/I];
    [t,x]=ode45(g,[0,20],[0 0]);
```

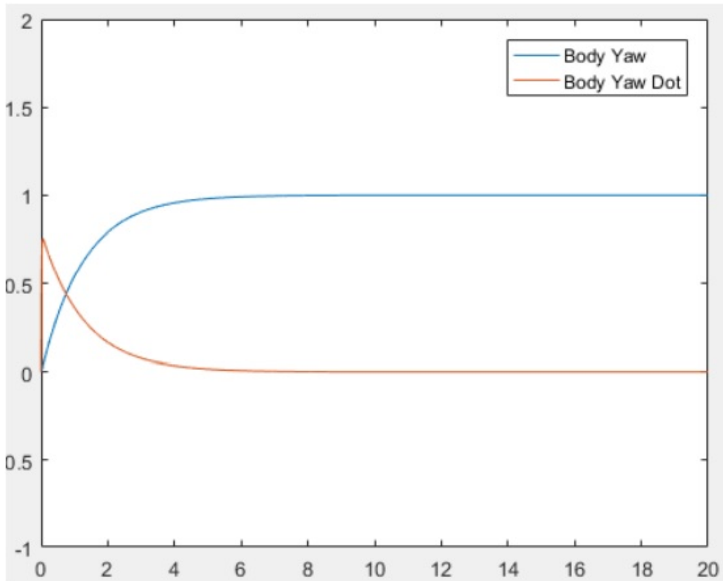


Figura 8: body yaw Realimentado.

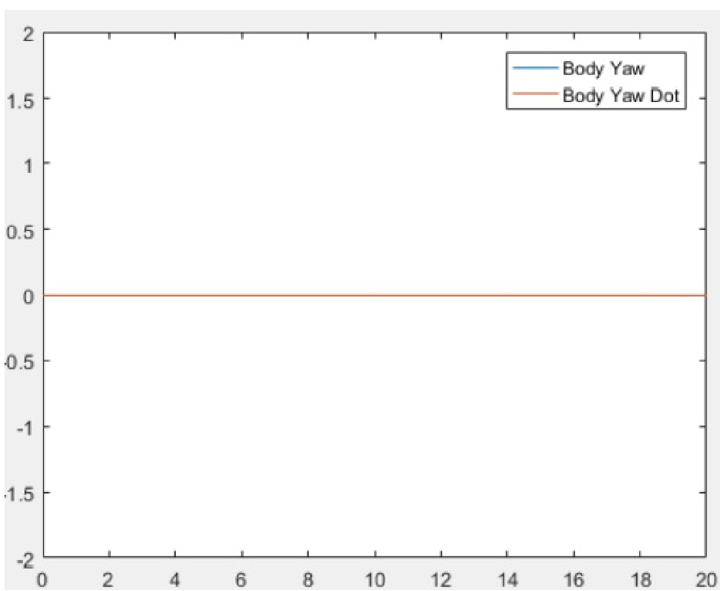


Figura 9: Body yaw Realimentado, r = 0

Neste gráfico é possível ver a influência que o fator ’r’ possui sobre a movimentação do *Segway*; o *body yaw* do sistema estabiliza-se no valor indicado por 'r'. Ainda, como esperado, assim que o sistema alcança o equilíbrio, constante, a variação (*body yaw* dot) tende a zero, assim como foi apresentado os modelos anteriores.

Como exemplo de que este modelo mantém-se compatível com os demonstrados anteriormente, a figura 8 indica a resposta do body yaw quando 'r' é definido nulo.