

## 實驗7: 匹配濾波器(Matched Filter)模擬

# 大綱

- 目的
- 原理
  - 匹配濾波器
- 實驗：匹配濾波器(Matlab)
  - 實驗步驟
  - 實驗結果討論
  - 實習作業
- 參考文獻

# 目的

- 目的
- 原理
  - 匹配濾波器
- 實驗：匹配濾波器(Matlab)
  - 實驗步驟
  - 實驗結果討論
  - 實習作業
- 參考文獻

# 目的

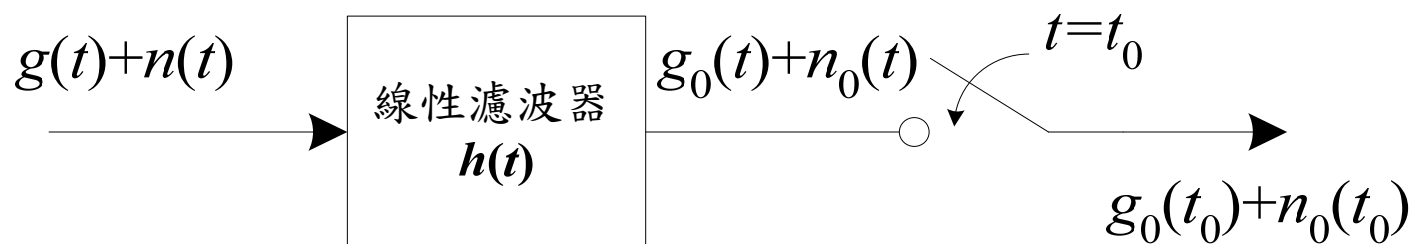
本實習主要探討接收端利用匹配濾波器，配合適當取樣時間來解調傳送端傳送的兩波形所代表的二位元信號，並探討如何模擬實現匹配濾波器。

# 原理

- 目的
- 原理
  - 匹配濾波器
- 實驗：匹配濾波器(Matlab)
  - 實驗步驟
  - 實驗結果討論
  - 實習作業
- 參考文獻

# 匹配濾波器

- 匹配濾波器



- 什麼樣的濾波器能提供最小的錯誤機率？
- 在時間點  $t = t_0$  時取樣，取樣值包含一個信號相關的參數  $g_0(t_0)$ ，以及和雜訊相關的參數  $n_0(t_0)$ 。
- $n_0(t_0)$  的變異數是  $\sigma^2$ ，也就是雜訊的平均功率。
- 最佳化的目標就是找出能在取樣時間點  $t_0$  提供最大的信號雜訊比 (maximum signal-to-noise ratio, SNR) 的濾波器。
- 信號雜訊比：

$$\zeta^2 = \frac{g_0^2(t_0)}{\sigma^2}$$

輸出信號瞬時功率

輸出雜訊平均功率

# 匹配濾波器

- 假設雜訊 $n(t)$  是白色而且功率頻譜密度為  $N_0/2$  :

$$\begin{aligned}(1) \quad \sigma^2 &= R_Y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f) e^{j2\pi f\tau} df \Big|_{\tau=0} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_N(f) |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df\end{aligned}$$

$$(2) \quad g_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(f) e^{j2\pi ft} df = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) H(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$(3) \quad \zeta^2 = \frac{g_0^2(t_0)}{\sigma^2} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} G(f) H(f) e^{j2\pi ft_0} df \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}$$

# 匹配濾波器

- 利用舒瓦茲定理(Schwarz's inequality)：

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} X(f)Y^*(f)df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |Y(f)|^2 df$$

- 所以：

$$\begin{aligned}\zeta^2 &= \frac{g_0^2(t_0)}{\sigma^2} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} G(f)H(f)e^{j2\pi ft_0} df \right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} \leq \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} \\ &= \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df = \frac{2\xi_g}{N_0} \\ \xi_g &= \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} |G(t)|^2 dt\end{aligned}$$

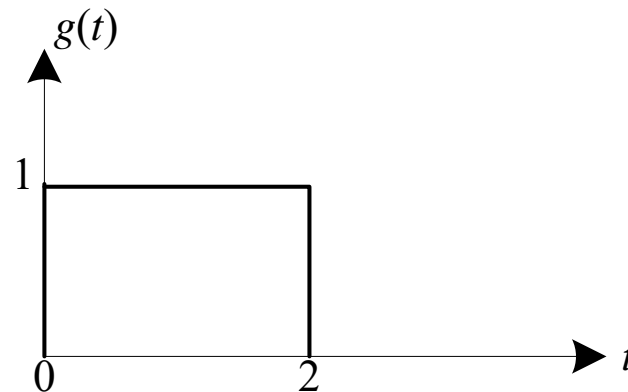
由巴斯瓦定理  
(Parseval's theory)



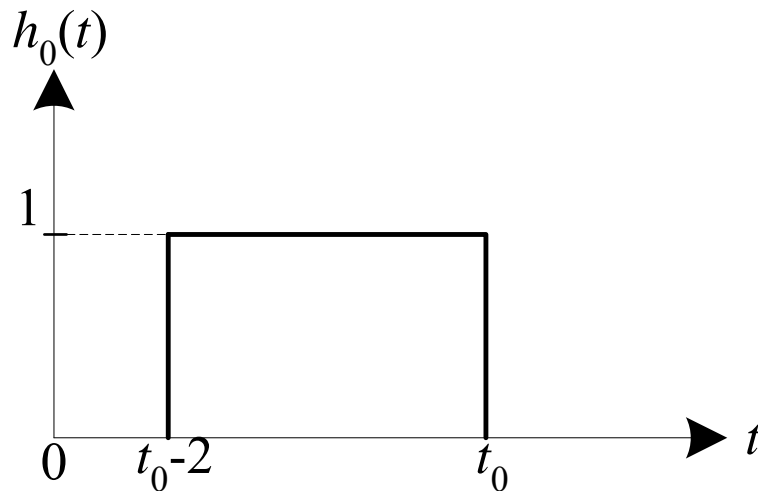
# 匹配濾波器

## ● 範例 3-2-1

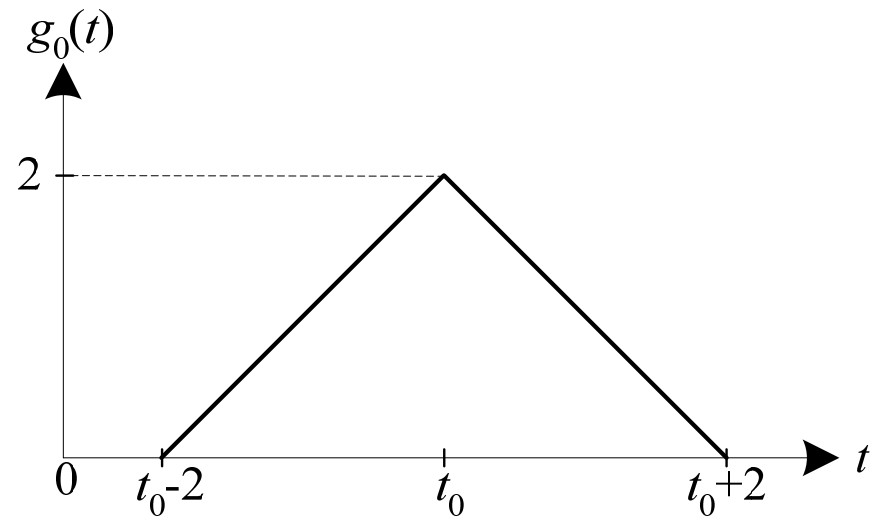
- 假設有個訊號是 $g(t) = \Pi[(t-1)/2]$ ，時域上的波形如圖所示，試畫出匹配濾波器的脈衝響應以及此訊號通過濾波器的輸出：



## ● Solution :



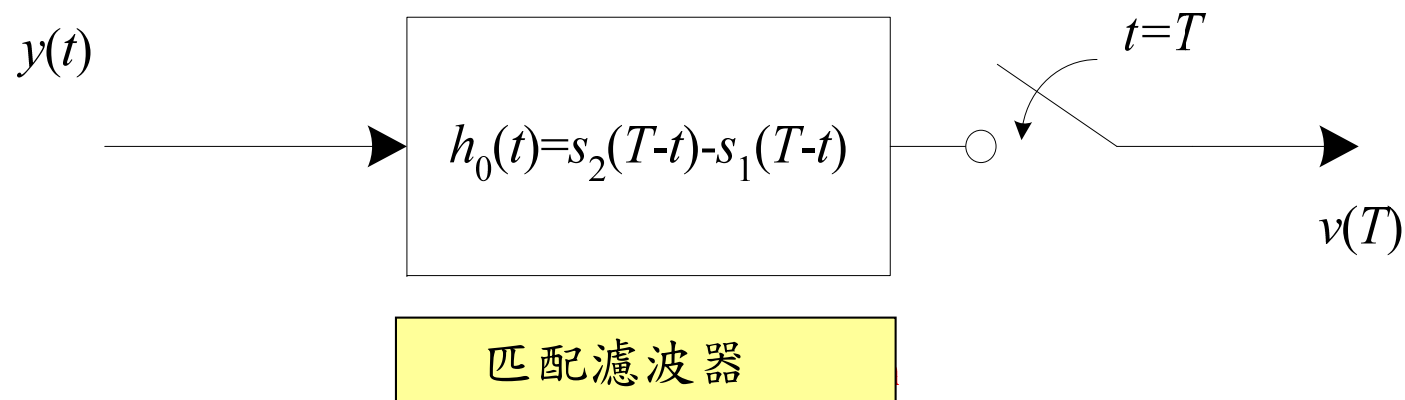
濾波器的脈衝響應



濾波器的輸出

# 匹配濾波器

- 用相關器(Correlator)來實現匹配濾波器：

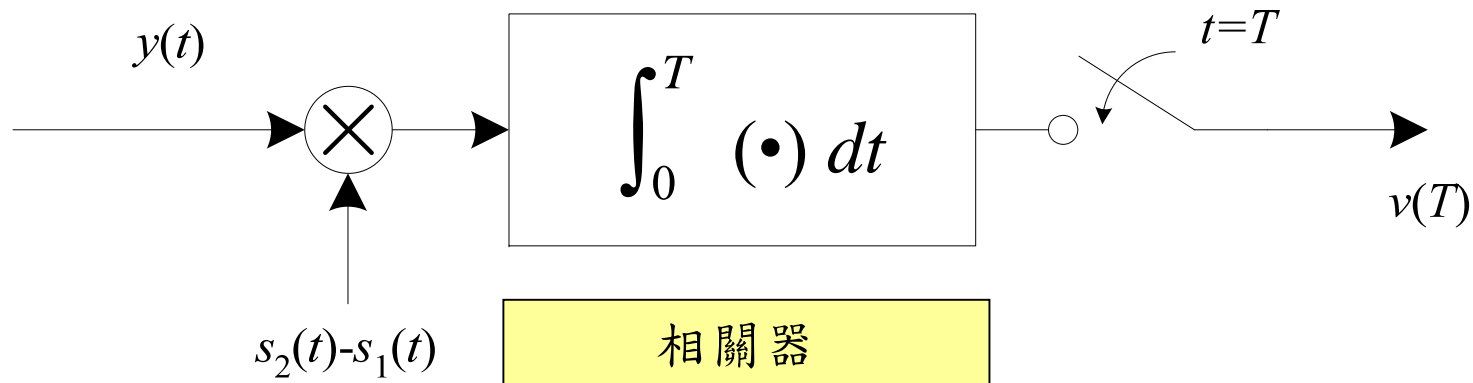


$$v(t) = y(t) * h_0(t) = \int_0^T [s_2(T-\tau) - s_1(T-\tau)] y(t-\tau) d\tau$$

# 匹配濾波器

由以上式子來看

$$v(T) = \int_0^T [s_2(T-\tau) - s_1(T-\tau)] y(T-\tau) d\tau$$
$$= \int_0^T [s_2(\alpha) - s_1(\alpha)] y(\alpha) d\alpha$$

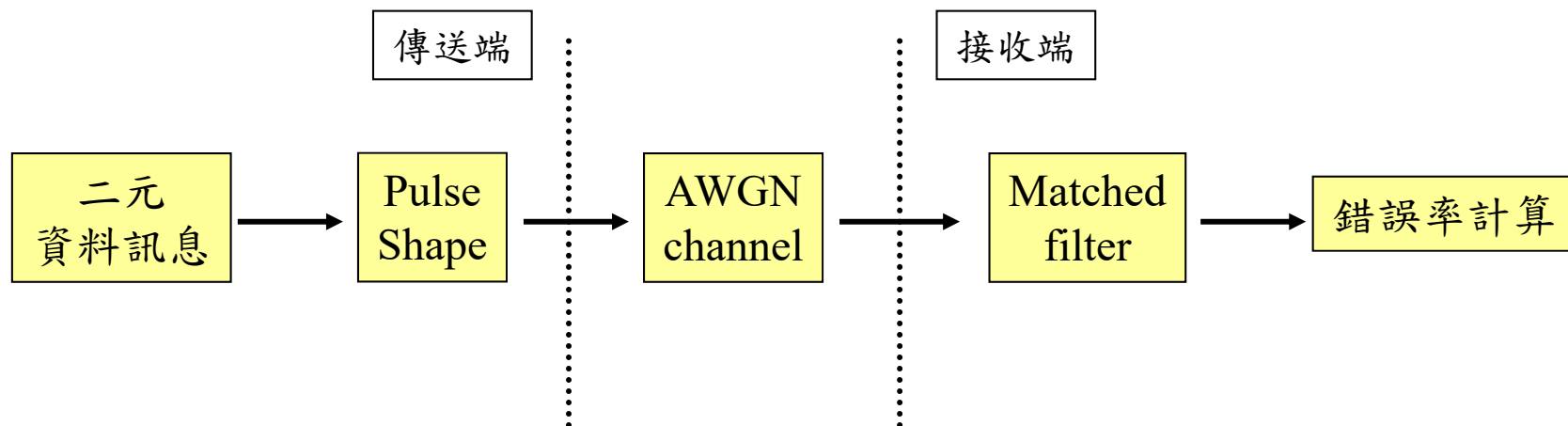


# 實驗步驟

- 目的
- 原理
  - 匹配濾波器
- 實驗：匹配濾波器(Matlab)
  - 實驗步驟
  - 實驗結果討論
  - 實習作業
- 參考文獻

# 實驗步驟 (Matlab)

- 匹配濾波器：
- 以下是我們這次實驗的系統方塊圖：



# 實驗步驟 (Matlab)

- 假設 On-Off Keying (OOK) 調變:

- bit 0 的波型為

$$s_1(t) = 0$$

- bit 1 的波型為

$$s_2(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中  $A = 1$ ,  $T = 1$ 。

# 範例程式

```
% matched filter
% - on-off keying (OOK) using rectangular pulse (T=1)
% That is, when OFF, assuming A=0, thus E1 = 0
%           when ON: assuming A=1, thus E2 = 1
% The “average bit energy” (Eb) = (E1+E2)/2 = 1/2
%

clear all;
close all;

%% parameters
data_number = 10^5; % # of bits
EbN0dB_vec = [0:2:10 11.5]; % Eb/N0 in dB
Fs=10; % sampling frequency (used to generate received samples)
```

## 範例程式 (cont.)

```
%% transmitter
```

```
Data_bit=(rand(1,data_number) > 0.5 ); % random bits
```

```
p1=ones(1,Fs);% discrete-time rectangular pulse that represents one  
symbol
```

```
Data_pulse_array=(p1.)*Data_bit;
```

```
Data_pulse=reshape(Data_pulse_array,1,length(p1)*data_number);
```



## 範例程式 (cont.)

```
for kk=1:length(EbN0dB_vec)

    %% AWGN channel
    [a b] = size(Data_pulse);
    EbN0dB = EbN0dB_vec(kk);
    EbN0 = 10^(EbN0dB/10); % EbN0 is now in linear scale
    sigma = sqrt( 0.5/EbN0/2*10 );
    noise = normrnd(0, sigma, a, b );

    Data_receive=Data_pulse+noise; % received samples

    %% receiver
    D_filtered=conv(Data_receive,p1); % MF output
    D_demapping=D_filtered(10:10:end)/10; % sampling at symbol rate

    % decsion based on D_demapping
    D_demap_N = (D_demapping > 0.5); % >0.5: 1; <=0.5: 0

    % BER computation
    Error_num=sum(xor(D_demap_N,Data_bit));
    BER(kk) = Error_num/data_number;

    fprintf('EbN0 in dB is %g\n',EbN0dB);
    fprintf('Bit error rate is %g\n',BER);

end
```

## 範例程式 (cont.)

```
%% generate plots
figure;
semilogy(EbN0dB_vec, BER, 'o-');
xlabel('Eb/N0 (dB), where Eb: average energy  
per bit');
ylabel('Bit Error Rate')
legend('OOK (Simulation)');
grid
axis([0 12 1e-4 1e0])
title('OOK with Rectangular Pulse (Simulation)')
```

# 實驗結果討論

- 目的
- 原理
  - 匹配濾波器
- 實驗：匹配濾波器(Matlab)
  - 實驗步驟
  - 實驗結果討論
  - 實習作業
- 參考文獻

# 實驗結果討論

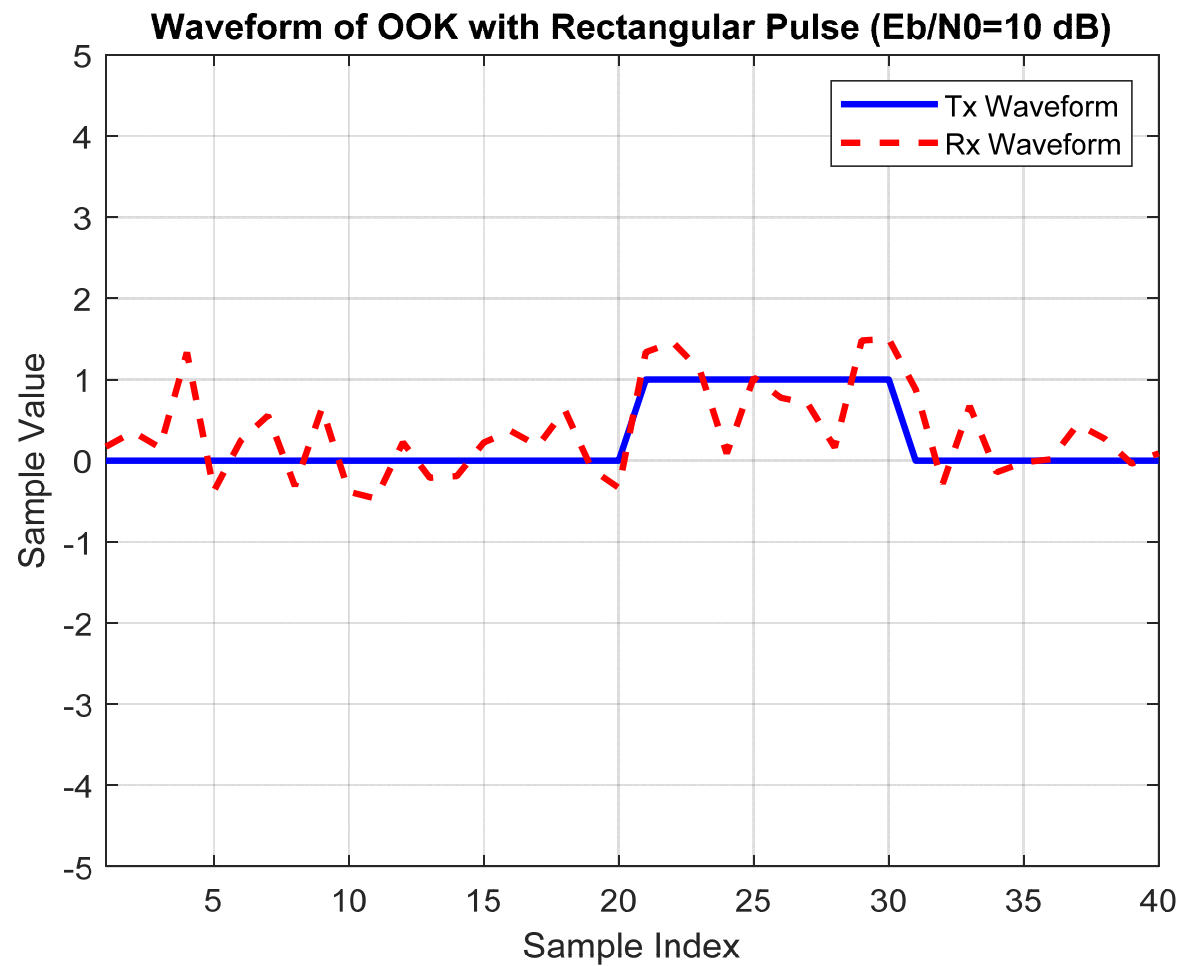
1. 修改範例程式，畫出 transmitted waveform 和 received waveform

(duration = 4 symbol periods ,  $\frac{E_b}{N_0} = 10$  dB) , 並比較之。

再畫  $\frac{E_b}{N_0} = 3$  dB 的圖，說明與  $\frac{E_b}{N_0} = 10$  dB 時之差異。

# 實驗結果討論

- 預期結果:



# 實驗結果討論

2. 理解範例程式，並回答下列問題。

a. 解釋為何 (p. 16)

```
Data_bit=(rand(1,data_number) > 0.5 );
```

可產生 random bits?

此行所產生之 bit 0 和 bit 1，其發生機率理論上應為何？（說明之。）

實際於模擬中 bit 0 和 bit 1 發生的機率為何？是否符合理論預測？

# 實驗結果討論

## b. 說明 (p. 16)

```
Data_pulse=reshape(Data_pulse_array,1,length(p1)*data_number);
```

這行程式碼的作用為何？

## 實驗結果討論

- c. 沒有雜訊時，matched filter output（即 p. 11 圖中之  $v(T)$ ）之理論值應為何？（以數學推理之）。而用此程式模擬時（請先不加雜訊），變數 `D_demapping`（於 p. 17 程式中代表 matched filter output）的值為何？理論值和模擬值相同嗎？解釋之。



# 實驗結果討論

## d. 解釋程式碼 (p. 17)

```
D_demapping=D_filtered(10:10:end)/10;
```

為何需取 10:10:end ?

## 實驗結果討論

- e. p. 17 程式碼中， $\sigma^2$  代表 noise sample 之（平均）功率。

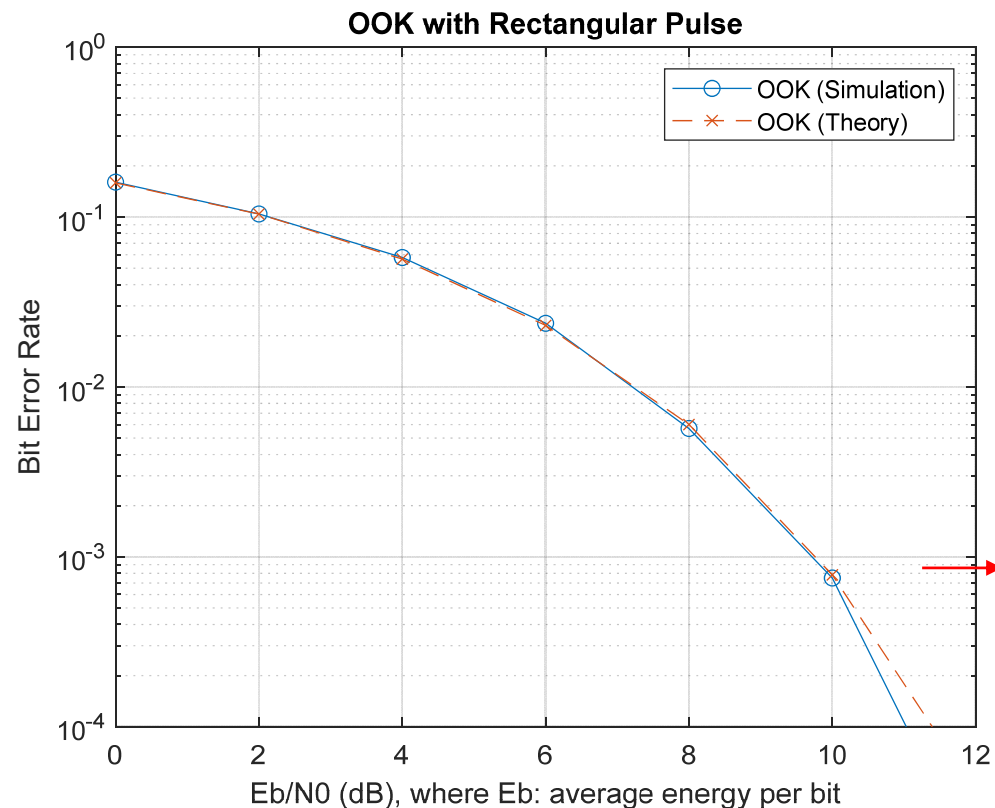
解釋為何

$$\sigma = \sqrt{0.5/E_b N_0 / 2 * 10};$$

如此設定可達到所定義之  $\frac{E_b}{N_0}$  值。

# 實驗結果討論

- f. 畫出 OOK 之模擬錯誤率與  $\frac{E_b}{N_0}$  之關係圖，並修改範例程式，另外畫出 OOK 之理論錯誤率，比較與說明模擬結果與理論結果之差異。



BER plot 預期結果

# 實驗結果討論

g. Conditional pdf at MF output :

① 請修改範例程式，畫出

$$f(v(T) | \text{bit 0 sent}) \text{ 與 } f(v(T) | \text{bit 1 sent})$$

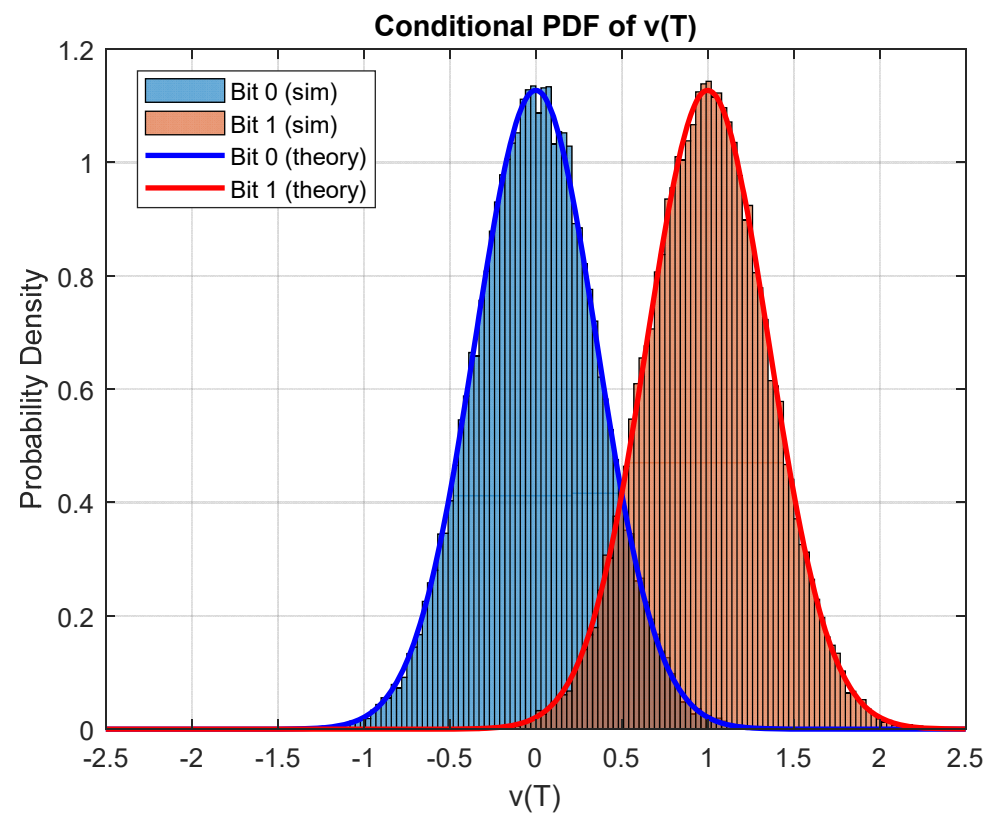
於  $\frac{E_b}{N_0} = 3 \text{ dB}$  之理論值。利用 MF output 之模擬值（如變數 D\_demapping，但你可能要適當 scale 此變數），畫出  $f(v(T) | \text{bit 1 sent})$  之實驗值。

② 於  $\frac{E_b}{N_0} = 10 \text{ dB}$  時，重複①步驟，並說明 conditional pdf 之變化。

Hint: 使用 MATLAB 指令：histogram。

# 實驗結果討論

- OOK  $\frac{E_b}{N_0} = 3$  dB 預期結果圖：



## 參考文獻

- L. Couch, *Digital and Analog Communication Systems*, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2001.
- S. Haykin, *Communication Systems*, John Wiley & Sons, New York, 3rd Edition, 1994.
- R.E. Zimer and W.H. Tranter, *Principle of. Communications : Systems, Modulation and Noise*, 5th. Edition, 2002.
- 余兆棠、文成康、林瑞源、張郁斌、林福林 編著，*無線通訊與網路*，滄海，2006年11月。
- 余兆棠、李志鵬 著，*信號與系統*，滄海，2007年1月。。
- Matlab/Simulink online help manual.

## 實驗 8: Antipodal BPSK 錯誤率模擬

# 目的

本實驗主要探討接收端利用匹配濾波器，配合適當取樣時間來解調 AWGN 通道中之 antipodal BPSK 信號，並探討其錯誤率效能。



# 實驗步驟 (Matlab)

- 實驗七 Matched Filter 模擬使用 On-Off Keying (OOK) 之調變。本實驗則使用 antipodal BPSK 之調變，亦即假設：

bit 0 的波型為

$$s_1(t) = \begin{cases} -A, & 0 \leq t < T \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

而 bit 1 的波型為

$$s_2(t) = -s_1(t)$$

其中  $A = 1$ ,  $T = 2$ ,  $F_s = 10$  Hz。

- 請撰寫程式，模擬在 AWGN 通道中之 antipodal BPSK 傳輸，並使用 matched filter 接收，模擬其錯誤率效能。

# 結果報告(ppt 簡報)須包含項目:

1. 實驗目的。(但實驗原理不用寫。)
2. 在 antipodal BPSK之情境下，重新回答實驗7 (上個實驗) 「實驗結果討論」之問題1、2(f)、與2(g)，產生模擬結果，並貼上對應之Matlab程式。
3. 參考資料或文獻 (References)

\* 結報重點: (a)結果(以及程式)之正確性。(b) 討論之正確性、完整性。

\* 結報請先轉成 pdf 檔形式再上傳至Moodle (子課程)。(每組交一份。)

# 參考文獻

- L. Couch, *Digital and Analog Communication Systems*, Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2001.
- S. Haykin, *Communication Systems*, John Wiley & Sons, New York, 3rd Edition, 1994.
- R.E. Zimer and W.H. Tranter, *Principle of. Communications : Systems, Modulation and Noise*, 5th. Edition, 2002.
- 余兆棠、文成康、林瑞源、張郁斌、林福林 編著，*無線通訊與網路*，滄海，2006年11月。
- 余兆棠、李志鵬 著，*信號與系統*，滄海，2007年1月。。
- Matlab/Simulink online help manual.