實驗6：取樣定理之MATLAB模擬與分析實驗結報

第二組

物理四 C24074031 劉嘉峰

系統三 F14081046 周呈陽

實驗目的

1. 學習設定適合的取樣頻率使訊號得以完美還原，並驗證當取樣頻率不足時，會發生膺頻效應(Aliasing Effect)，還原之頻譜重疊，原來的訊號無法還原。
2. 由時域、頻域了解取樣的膺頻效應，並學習如何選取取樣頻率消除應頻效應。
3. 練習由取樣值和 sinc 函數以內插法還原訊號，並設定適合的取樣頻率和低通濾波器截止頻率，使原本訊號得以還原。

步驟一

1. 程式碼
2. 預期結果(理論依據)
3. 預期結果 v.s 實際結果 (解釋原先訊號與取樣訊號關係)

步驟一： 1.程式碼

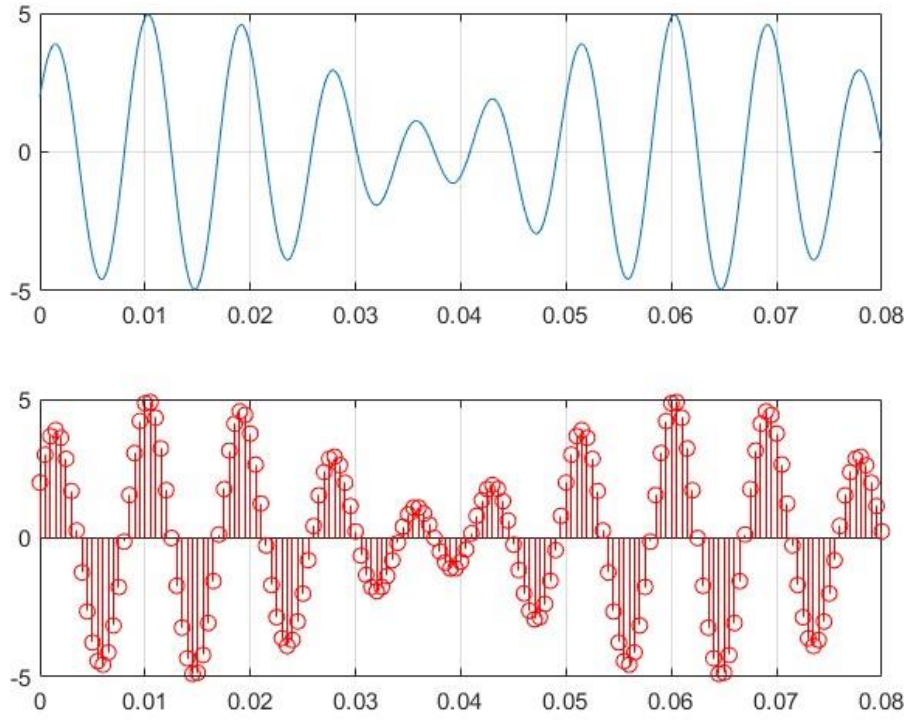
```
%step1
clear all
fs=2000; %設定取樣頻率為2 kHz
fs1=8000; %設定另一個極高的取樣頻率
ts=1/fs;
ts1=1/fs1;
t=0:ts:0.08;
n=0:ts1:0.08;
x1=2*cos(2*pi*100*n)+3*sin(2*pi*120*n); %以極高取樣頻率來近似原本連續訊號
x2=2*cos(2*pi*100*t)+3*sin(2*pi*120*t); %取樣後的訊號
subplot(211)
plot(n,x1)
grid on
subplot(212)
stem(t,x2,'r')
grid on
```

步驟一： 2.預期結果(理論依據)

- 訊號最高頻(W)：120Hz
- 取樣頻率(fs)：2000Hz
- 根據取樣定理：fs>=2W 即可完美還原
- 2000>2*120=240
- 預期結果：訊號可被完美還原

步驟一： 3.實際結果v.s預期結果

- (下圖)取樣訊號x2幾乎完美重現(上圖)原本的訊號x1，可由取樣之訊號推得原先訊號。
- 與原先的預期相符



步驟二

1. 程式碼
2. 預期結果(理論依據)
3. 預期結果 v.s 實際結果(解釋原先訊號與取樣訊號關係)

步驟二： 1.程式碼

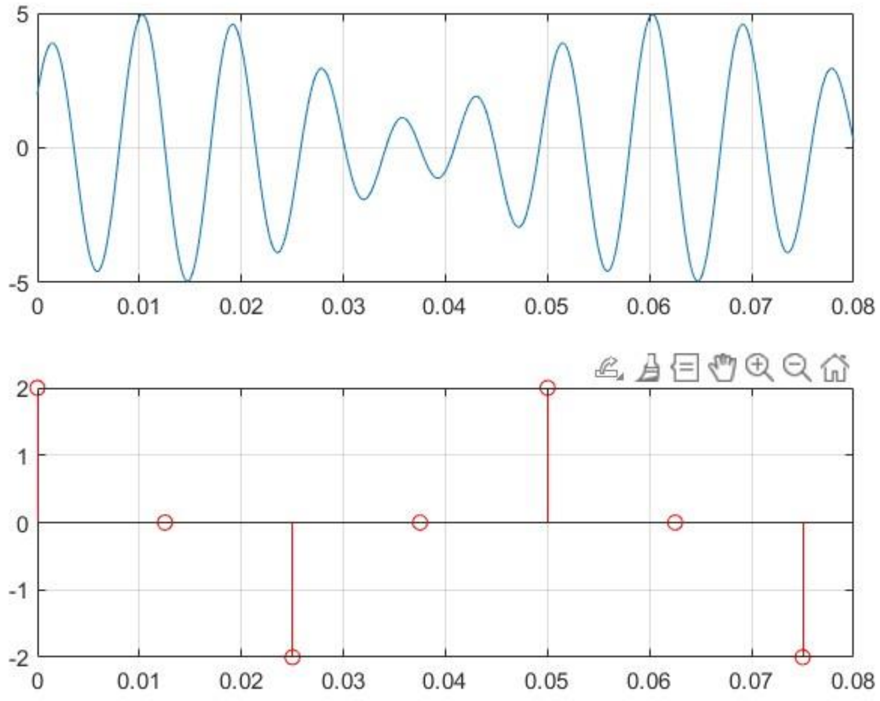
```
%step2
clear all
fs=80; %設定取樣頻率為80Hz
fs1=8000; %設定另一個極高的取樣頻率
ts=1/fs;
ts1=1/fs1;
t=0:ts:0.08;
n=0:ts1:0.08;
x1=2*cos(2*pi*100*n)+3*sin(2*pi*120*n); %以極高取樣頻率來近似原本連續訊號
x2=2*cos(2*pi*100*t)+3*sin(2*pi*120*t); %取樣後的訊號
subplot(211)
plot(n,x1);
grid on
subplot(212)
stem(t,x2,'r')
grid on
```

步驟二： 2.預期結果(理論依據)

- 訊號最高頻(W)：120Hz
- 取樣頻率(fs)：80Hz
- 根據取樣定理：fs>=2W 即可完美還原，反之則無法
- 80<2*120=240
- 預期結果：訊號無法被完美還原

步驟二： 3.實際結果v.s預期結果

- 根據(下圖)取樣訊號x2難以推得(上圖)原先訊號x(t)的樣子，無法推得原先訊號
- 與預期結果符合



步驟三

1. 程式碼
2. 預期結果(理論依據)
3. 預期結果 v.s 實際結果(解釋x1與x2關係)

步驟三： 1.程式碼

```
%step3
clear all
fs=80; %設定取樣頻率80 Hz
ts=1/fs;
t=0:0.00001:0.08;
n=0:ts:0.08;
x1=2*cos(2*pi*100*t)+3*sin(2*pi*120*t); %極高取樣近似的連續波
x2=2*cos(2*pi*100*n)+3*sin(2*pi*120*n); %以80 Hz取樣的訊號
x3=2*cos(2*pi*20*t)+3*sin(2*pi*40*t); %產生另一個極高取樣近似的連續波
x4=2*cos(2*pi*20*n)+3*sin(2*pi*40*n);
plot(t,x1)
hold on
plot(t,x3,'r')
stem(n,x2,'k')
stem(n,x4)
legend({'x1(t)','x2(t)','x1(n),x2(n)'})
```

步驟三： 2.預期結果(理論依據)

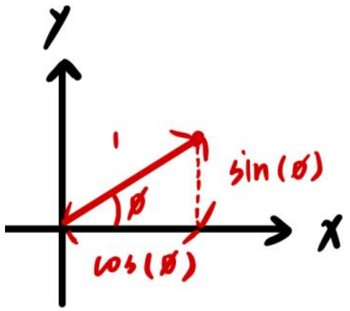
- 以取樣頻率 fs = 80 Hz 分別對x1(t)、x2(t)取樣
- f11 = 100Hz ，f12 = 120Hz；f21 = 20Hz，f22 = 40Hz、，取樣頻率fs = 80Hz
- 觀察 f11 = f21+1*fs ， f12 = f22+1*fs
- 由f1 = f2+m*fs，m為正整數，兩訊號之取樣值應為相同，從時域無法有效區分還原之訊號。

步驟三: 3.實際結果v.s預期結果

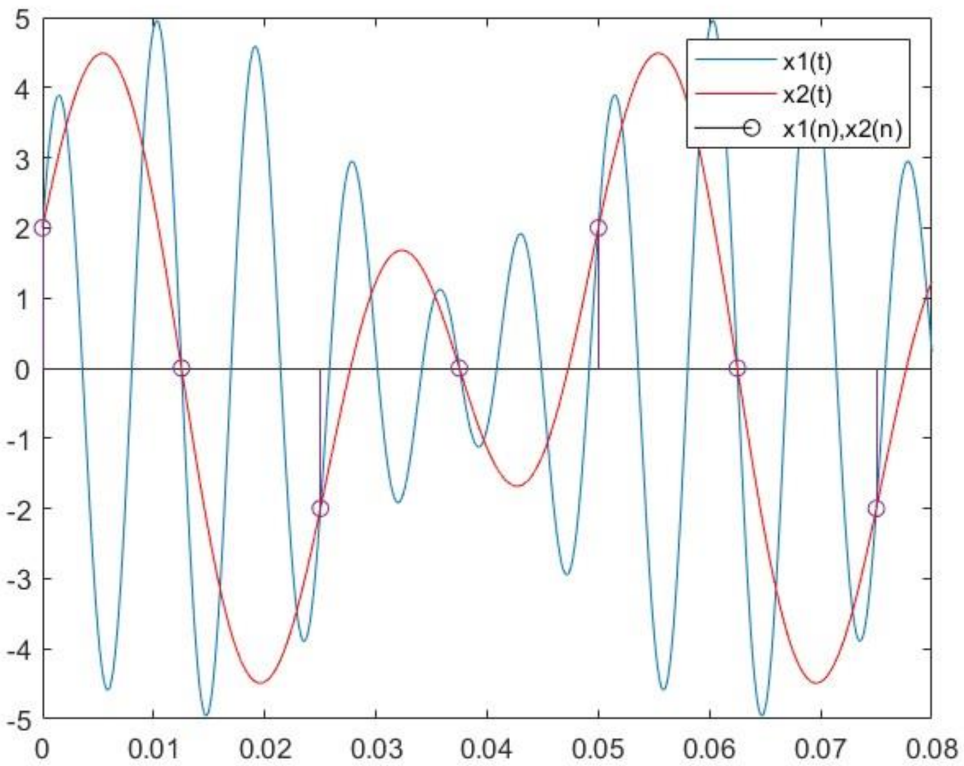
- x1(t)、x2(t)為不同訊號，但兩者取樣值卻相同(x1(n)、x2(n))，從時域無法有效區分取樣訊號所對應之原本訊號為何
- x1最高頻為W1 = 120Hz，x2最高頻W2 = 40Hz
- 由取樣定理fs<2*W1，x1無法由取樣值唯一表示
- 因為f1 = f2+fs，故2者取樣值相同。

$$x_1(n) = x_1(t)\Big|_{t=\frac{1}{80}n} = 2\cdot\cos\left(\frac{5}{2}\pi n\right) + 3\cdot\sin(3\pi n)$$

$$x_2(n) = x_2(t)\Big|_{t=\frac{1}{80}n} = 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right) + 3\cdot\sin(\pi n)$$



$$\begin{cases} \cos(\phi) = \cos(2\pi\cdot m + \phi), & m \in N \\ \sin(\phi) = \sin(2\pi m + \phi), & m \in N \end{cases}$$



步驟四

1. 程式碼
2. 預期結果(理論依據)
3. 預期結果 v.s 實際結果(觀察頻譜與訊號實際頻譜)

步驟四: 1.程式碼

```
%step4
clear all;close all
fs=90000; %設定取樣頻率90 kHz
ts=1/fs;
ts1=(1/10)^8;
t1=0:ts1:0.0005;t=0:ts:1;
f=10000; %原始訊號頻率10 kHz
x=cos(2*pi*f*t); %取樣後的訊號
x1=cos(2*pi*f*t1); %極高取樣近似的連續波
f1=[0:(length(x)-1)]/length(x)-0.5;
X=fft(x)/length(x); %Matlab 內建的傅立葉轉換
subplot(311)
plot(t1,x1);
axis([0 4.5*(10)^-4 -1 1]) %限制畫圖的範圍
subplot(312)
stem(t(1:40),x(1:40));
axis([0 4.5*(10)^-4 -1 1])
subplot(313)
plot(fs*f1,fftshift(X),'r')
```

步驟四： 2.預期結果(理論依據)

- x1(t) = cos(2*pi**fm*t)，fm = 10kHz

  經Fourier tranform為 X1(f) = 0.5$\delta(t+fm)+0.5\delta(t-fm)$

- 根據取樣定理， 最高頻W1 = 10kHz，取樣頻率fs = 90kHz

  90k>2*10k = 20k ，可完美重建訊號

步驟四：3.實際結果v.s預期結果

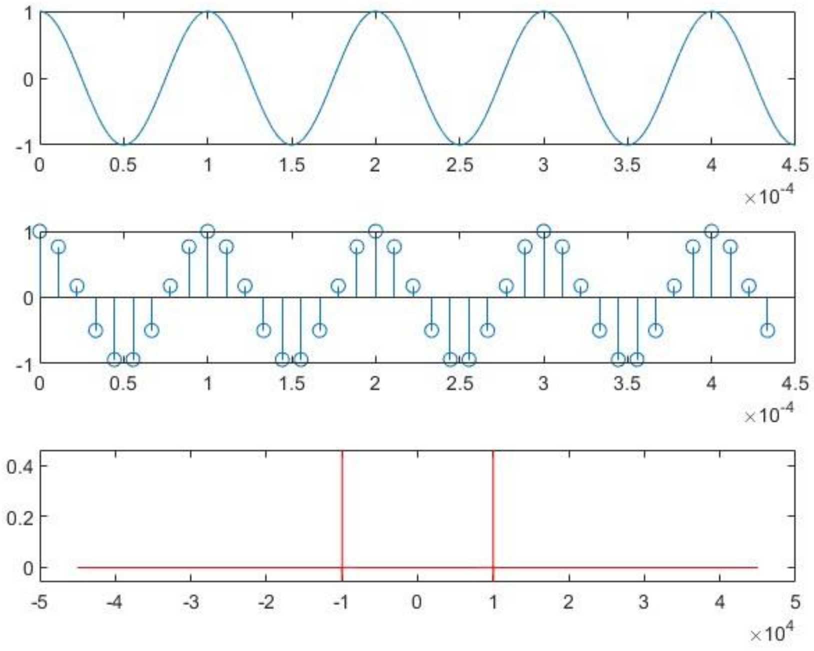
- 重建訊號(下圖)幾乎還原原先的訊號(上圖)，與取樣定理的推測相符。
- 傳立葉轉換完應為+-10kHz的兩根脈衝，但與實驗結果不符:

  下圖的傳立葉轉換結果利用的是fft的快速傳立葉轉換，

  其轉換是根據離散訊號去做運算得到的近似值，

  因此振幅與連續時間之訊號不完全相同，

  但其頻率成分是與連續訊號相符合的。



步驟五

1. 程式碼
2. 預期結果(理論依據)
3. 預期結果 v.s 實際結果(觀察頻譜與訊號實際頻譜)

步驟五: 1.程式碼

```
%step5
clear all;close all
fs=9000; %設定取樣頻率9 kHz
ts=1/fs;
ts1=(1/10)^8;
t1=0:ts1:0.0005;t=0:ts:1;
f=10000; %原始訊號頻率10 kHz
x=cos(2*pi*f*t); %取樣後的訊號
x1=cos(2*pi*f*t1); %極高取樣近似的連續波
f1=[0:(length(x)-1)]/length(x)-0.5;
X=fft(x)/length(x); %Matlab 內建的傅立葉轉換
subplot(311)
plot(t1,x1);
axis([0 4.5*(10)^-4 -1 1]) %限制畫圖的範圍
subplot(312)
stem(t(1:40),x(1:40));
axis([0 4.5*(10)^-4 -1 1])
subplot(313)
plot(fs*f1,fftshift(X),'r')
```

步驟五： 2.預期結果(理論依據)

- x1(t) = cos(2*pi**fm*t)，fm = 10kHz

  經Fourier tranform為 X1(f) = 0.5*δ(t+fm)+0.5δ(t-fm)*

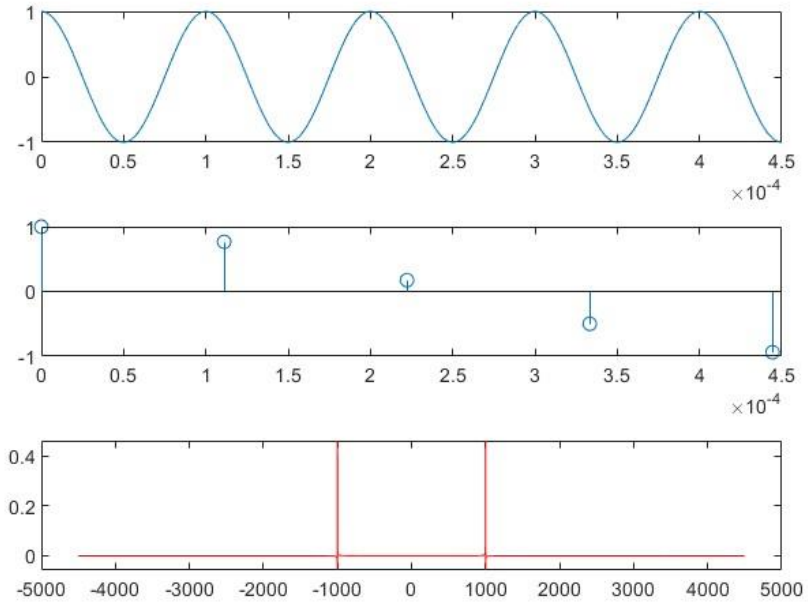
- x1(t)的最高頻W1=10kHz，取樣頻率fs為9kHz，

  根據取樣定理，9k<10*20k=20k，訊號無法完美重建

步驟五：3.實際結果v.s預期結果

- 因為取樣頻率太小，取樣訊號無法唯一決定原先之訊號。(觀察上、中兩圖)

- 因為不滿足取樣定理，出來的頻譜結果X2(f)與原先訊號的頻譜不相同。
  由於取樣頻率fs=9kHz太小，導致頻譜發生疊合的現象。
  此外可觀察到因為取樣頻率，僅顯示了9k個點的數值，範圍為-4500~4500，
  尚未涵蓋到理論值得10kHz。



步驟列六

1. 程式碼
2. 預期結果(理論依據)
3. 預期結果 v.s 實際結果(觀察訊號與重建訊號)

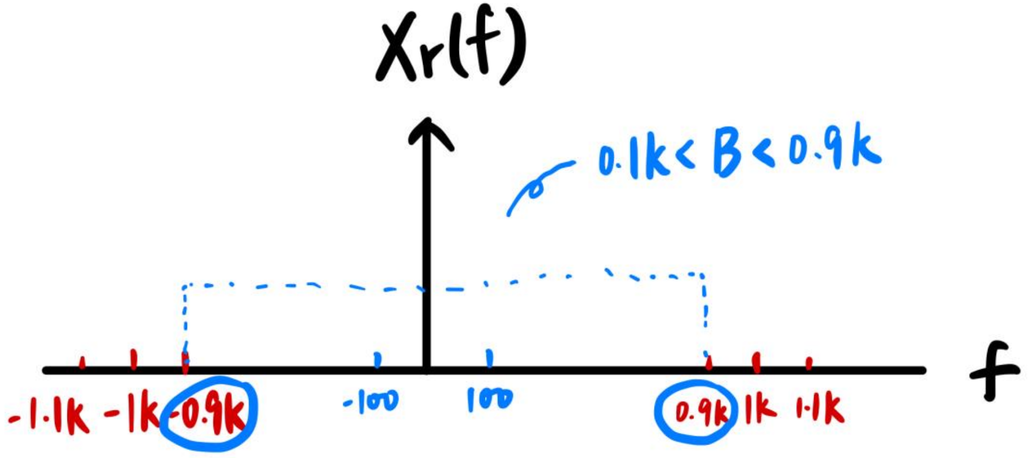
步驟六: 1.程式碼

```
%step6
clear all
fs=10000;
fs1=1000; %設定取樣頻率1 kHz
B=500; %設定截止頻率
ts=1/fs;ts1=1/fs1;
t=-0.02:ts:0.02;t1=-0.02:ts1:0.02;
x=2*cos(2*pi*100*t)+3*sin(2*pi*200*t);
x1=2*cos(2*pi*100*t1)+3*sin(2*pi*200*t1);
for i=1:length(t)
x11=x1.*2*B*ts1.*sinc(2*B*(t(i)-t1));
x2(i)=sum(x11);
end
plot(t,x)
hold on
plot(t,x2,'r')
grid on
```

步驟六：2.預期結果(理論依據)

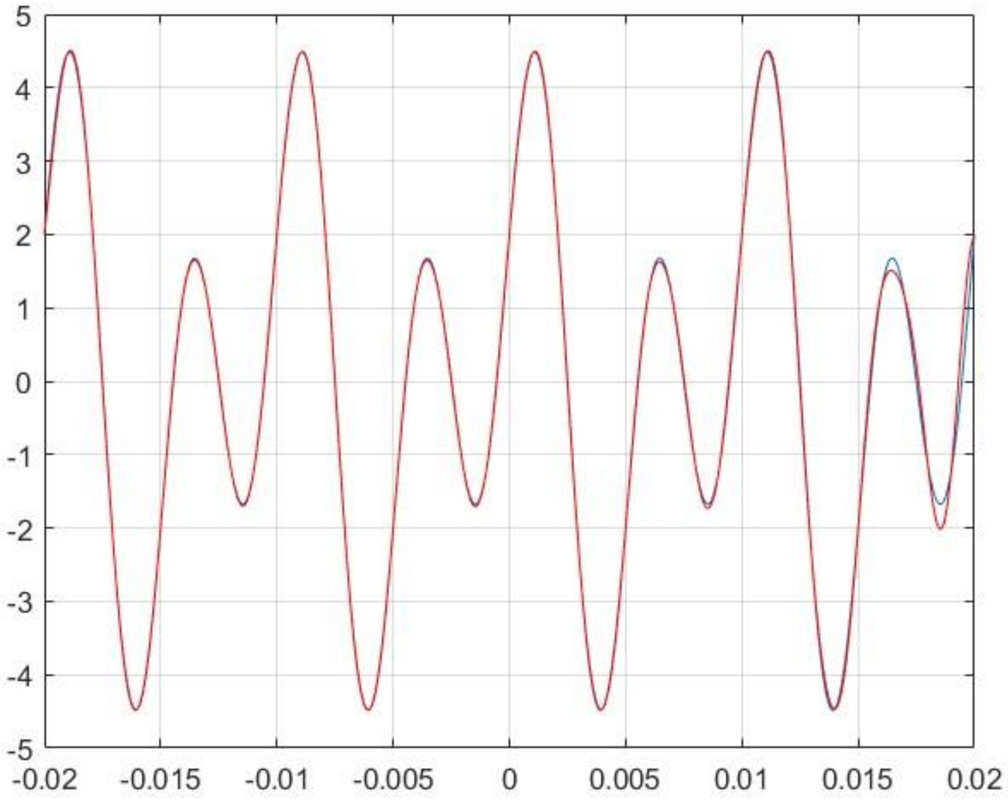
- x1(t)的最高頻W1 = 100Hz，取樣頻率fs為1kHz，
  根據取樣定理，1k>2*100，訊號得以完美重建。

- 重建頻譜為每1k複製一次頻寬為1k的訊號，截止頻率B=500Hz
  可濾出原本的頻譜，故可完美重建。



步驟六：3.實際結果v.s預期結果

- 重建訊號(紅色)與原先訊號(藍色)幾乎完全重疊，視為完美重建，與理論相符。



步驟七

1. 程式碼
2. 預期結果(理論依據)
3. 預期結果 v.s 實際結果(觀察訊號與重建訊號)

步驟七：1.程式碼

```
%step7
clear all
fs=10000;
fs1=150; %設定取樣頻率1 kHz
B=500; %設定截止頻率
ts=1/fs;ts1=1/fs1;
t=-0.02:ts:0.02;t1=-0.02:ts1:0.02;
x=2*cos(2*pi*100*t)+3*sin(2*pi*200*t);
x1=2*cos(2*pi*100*t1)+3*sin(2*pi*200*t1);
for i=1:length(t)
x11=x1.*2*B*ts1.*sinc(2*B*(t(i)-t1));
x2(i)=sum(x11);
end
subplot(1,2,1)
plot(t,x)
hold on
plot(t,x2,'r')
length(t)
length(x)
stem(t(1:(fs/fs1):401),x(1:(fs/fs1):401))
grid on
```

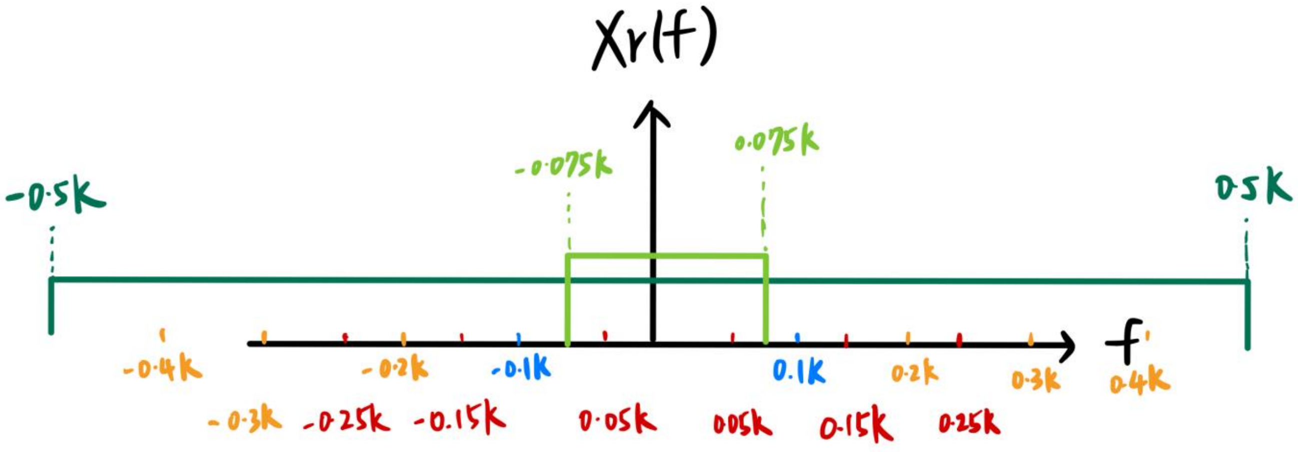
```
%承接左圖
B=75; %設定截止頻率
ts=1/fs;ts1=1/fs1;
t=-0.02:ts:0.02;t1=-0.02:ts1:0.02;
x=2*cos(2*pi*100*t)+3*sin(2*pi*200*t);
x1=2*cos(2*pi*100*t1)+3*sin(2*pi*200*t1);
for i=1:length(t)
x11=x1.*2*B*ts1.*sinc(2*B*(t(i)-t1));
x2(i)=sum(x11);
end
subplot(1,2,2)
plot(t,x)
hold on
plot(t,x2,'r')
grid on
legend('原本訊號x1(t)','還原訊號xr2(t)')
```

步驟七:　2.預期結果(理論依據)

- x1(t)的最高頻W1 = 100Hz，取樣頻率fs為150Hz，
  根據取樣定理，150<2*100，訊號無法完美重建。

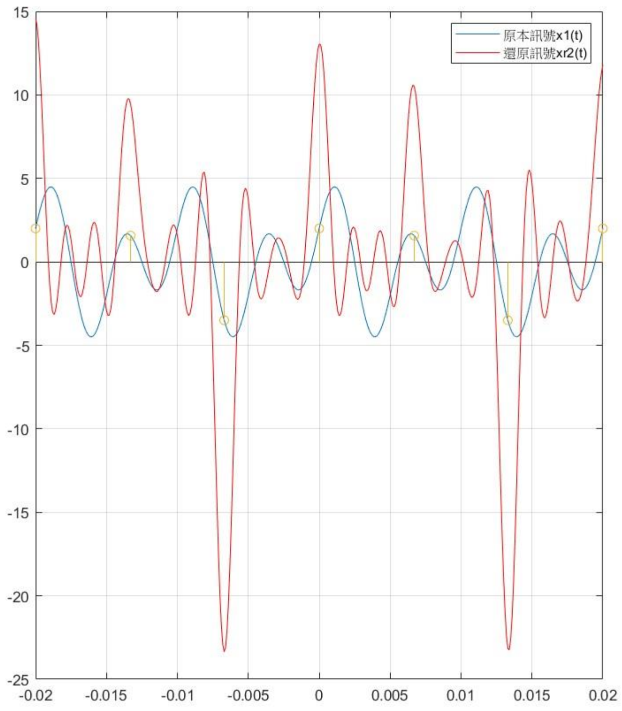
- 利用截止頻率B=500Hz，會產生贗頻效應，濾出多餘的頻譜訊號。

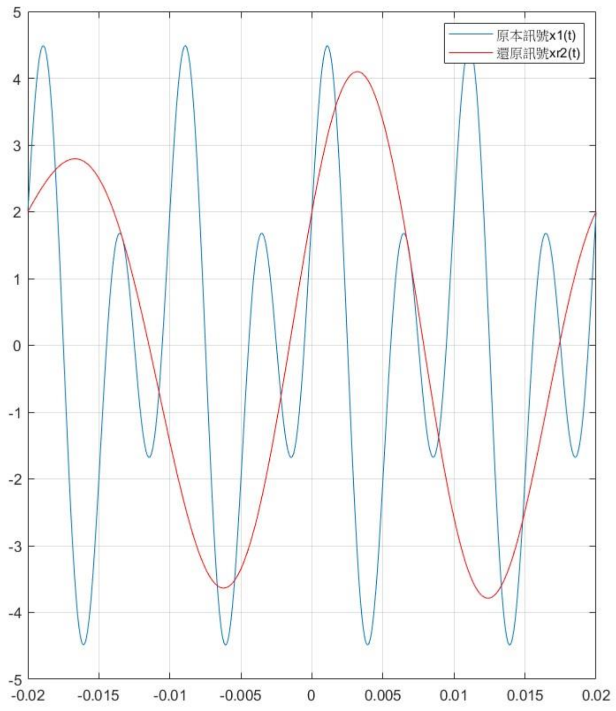
- 將截止頻率B改為75Hz，在0.05k~0.1k的地方會產生贗頻效應，亦無法重建。



步驟七：3.實際結果v.s預期結果

- 由圖可知，若取樣頻率fs=150Hz，不管B=500(左圖)或B=75(右圖)，均無法重建原先的訊號，因為取樣頻率太小，導致複製的頻譜發生重疊，無法呈現原本訊號的樣子。





實習作業一

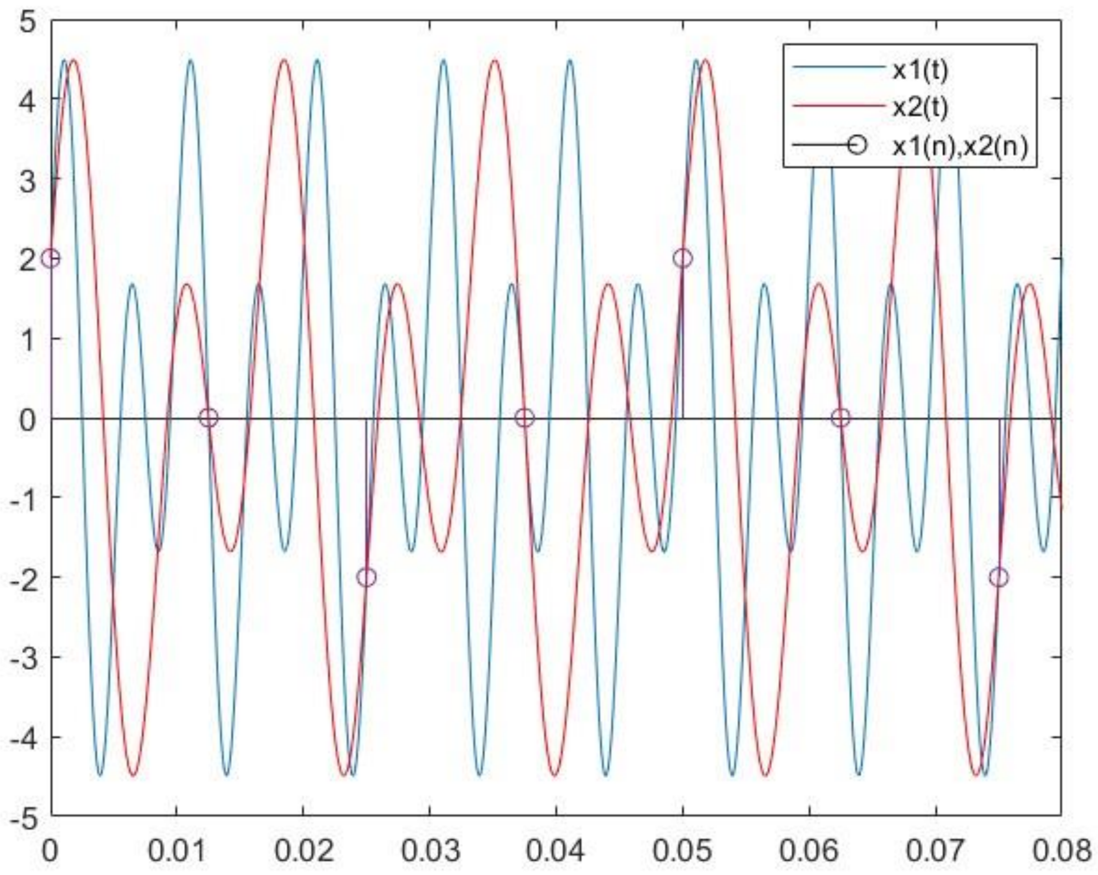
1. 程式碼
2. 結果驗證
3. 理論依據(f1、f2、fs關係)

實習作業一：1.程式碼

```
%extra1
clear all;close all
fs=80; %設定取樣頻率80 Hz
ts=1/fs;
t=0:0.00001:0.08;
n=0:ts:0.08;
f11 = 100
f12 = 200
f21 = f11-fs/2
f22 = f12-fs
x1 = 2*cos(2*pi*f11*t)+3*sin(2*pi*f12*t); %極高取樣近似的連續波
x2 = 2*cos(2*pi*f11*n)+3*sin(2*pi*f12*n); %以80 Hz取樣的訊號
x3 = 2*cos(2*pi*f21*t)+3*sin(2*pi*f22*t); %產生另一個極高取樣近似的連續波
x4 = 2*cos(2*pi*f21*n)+3*sin(2*pi*f22*n);
plot(t,x1)
hold on
plot(t,x3,'r')
stem(n,x2,'k')
stem(n,x4)
legend({'x1(t)','x2(t)','x1(n),x2(n)'})
```

實習作業一：2.結果驗證

- 由圖可知，雖然x1(t)、x2(t)為不同頻率之訊號，但在取樣值時均為相同值。



實習作業一：3.理論依據

- 當滿足 f1 = f2 +m*fs ，則取樣值會相同，兩訊號在sin、cos均滿足此等式。

$\boxed{f_s = 80}$

$x_1(t) = 2\cdot\cos(200\pi t) + 3\sin(240\pi t)$

$\boxed{f_{11} = 100, \quad f_{12} = 120}$

$x_2(t) = 2\cdot\cos(40\pi t) + 3\sin(80\pi t)$

$\boxed{f_{21} = 20, \quad f_{22} = 40}$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{11} = f_{21} + f_s \\ f_{12} = f_{22} + f_s \end{cases}$$

$\Rightarrow$ 滿足 $f_{1i} = f_{2i} + m\cdot f_s$

ex: $\cos\left(\frac{2\pi f_{11}}{f_s} n\right) = \cos\left(\frac{2\pi (f_{21} + m f_s)}{f_s} n\right)$

(f_{11} 取樣值)

$= \cos\left(\frac{2\pi f_{21}}{f_s} n + 2\pi m\cdot n\right)$

f_{21} 取樣值　　同界角

實習作業二

1. 程式碼
2. 結果驗證
3. 理論依據(f1、f2、f3、fs關係)

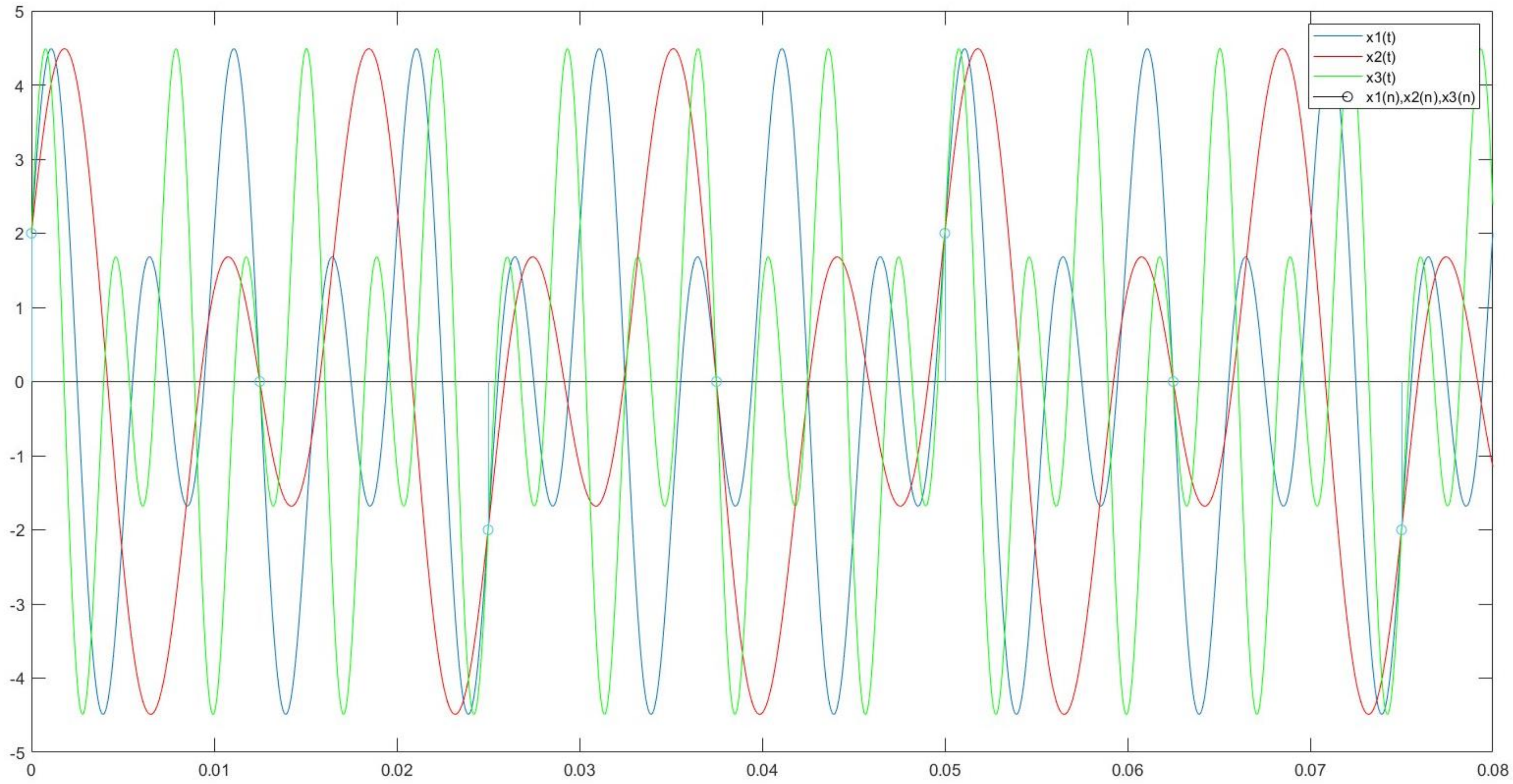
實習作業二：1.程式碼

```
%step3
clear all;close all
fs=80; %設定取樣頻率80 Hz
ts=1/fs;
t=0:0.00001:0.08;
n=0:ts:0.08;
f11 = 100
f12 = 200
f21 = f11-fs/2 %60
f22 = f12-fs %120
f31= 140 %20
f32 = 280 %120
x1 = 2*cos(2*pi*f11*t)+3*sin(2*pi*f12*t); %極高取樣近似的連續波
x2 = 2*cos(2*pi*f11*n)+3*sin(2*pi*f12*n); %以80 Hz取樣的訊號
x3 = 2*cos(2*pi*f21*t)+3*sin(2*pi*f22*t); %產生另一個極高取樣近似的連續波
x4 = 2*cos(2*pi*f21*n)+3*sin(2*pi*f22*n);
x5 = 2*cos(2*pi*f31*t)+3*sin(2*pi*f32*t);
x6 = 2*cos(2*pi*f31*n)+3*sin(2*pi*f32*n);
```

```
%承左圖
plot(t,x1)
hold on
plot(t,x3,'r')
plot(t,x5,'g')
stem(n,x2,'k')
stem(n,x4)
stem(n,x6)
legend({'x1(t)','x2(t)','x3(t)','x1(n),x2(n),x3(n)'})
```

實習作業二： 2.結果驗證

- 由圖可知，雖然x1(t)、x2(t)、x3(t)頻率均不相同，但取樣值卻都相同。



實習作業二： 3.理論依據

- 根據實習一所得的結論，f11 = 100 , f12 = 120 ; f21 = 20 , f22 =40 , fs = 80

  f11 = f21+ fs ； f12 = f22 +fs

  製造訊號x3(t) = 2*cos(2*pi*f31*t)+3*sin*(2*pi*f32*t)

  f31 = 140 ， f32 = 280

  此滿足 f31 = f11 + fs/2 = f21+3/2*fs (cos為偶函數)

  f32 = f12+2*fs = f22+4*fs

  故x1(n) = x2(n) = x3(n)

實習作業三

1. 程式碼
2. 預期結果(理論依據)
3. 結果驗證

實習作業三：1.程式碼

```
%取樣頻率90 kHz
clear all;close all
fs=90*1000; %設定取樣頻率90 kHz
ts=1/fs;
ts1=(1/10)^8;
t1=0:ts1:0.0005;
t=0:ts:1;
f=20*1000; %原始訊號頻率20 kHz
x=cos(2*pi*f*t); %取樣後的訊號
x1=cos(2*pi*f*t1); %極高取樣近似的連續波
f1=[0:(length(x)-1)]/length(x)-0.5;
X=fft(x)/length(x); %Matlab 內建的傅立葉轉換
subplot(311)
plot(t1,x1);
title('取樣頻率90kHz')
axis([0 4.5*(10)^-4 -1 1]) %限制畫圖的範圍
subplot(312)
stem(t(1:40),x(1:40));
axis([0 4.5*(10)^-4 -1 1])
subplot(313)
plot(fs*f1,fftshift(X),'r')
```

```
%取樣頻率9 kHz
clear all;close all
fs=9*1000; %設定取樣頻率9 kHz
ts=1/fs;
ts1=(1/10)^8;
t1=0:ts1:0.0005;
t=0:ts:1;
f=20*1000; %原始訊號頻率20 kHz
x=cos(2*pi*f*t); %取樣後的訊號
x1=cos(2*pi*f*t1); %極高取樣近似的連續波
f1=[0:(length(x)-1)]/length(x)-0.5;
X=fft(x)/length(x); %Matlab 內建的傅立葉轉換
subplot(311)
plot(t1,x1);
title('取樣頻率9kHz')
axis([0 4.5*(10)^-4 -1 1]) %限制畫圖的範圍
subplot(312)
stem(t(1:40),x(1:40));
axis([0 4.5*(10)^-4 -1 1])
subplot(313)
plot(fs*f1,fftshift(X),'r')
```

實習作業三：2.預期結果

- X(t) = cos(40k*pi*t) 經由FT可得 X(f) = 0.5$\delta(t+20k)+0.5\delta(t-20k)$
- x(t)最大頻寬W = 20kHz ，取樣速率fs1 = 90kHz, fs2 = 9kHz

  根據取樣定理:

  fs1 > 2*W ，故頻譜可正確重建

  fs2 < 2*W ，故頻譜無法正確重建

實習作業三：3.結果驗證

- (左圖)取樣頻率90kHz：

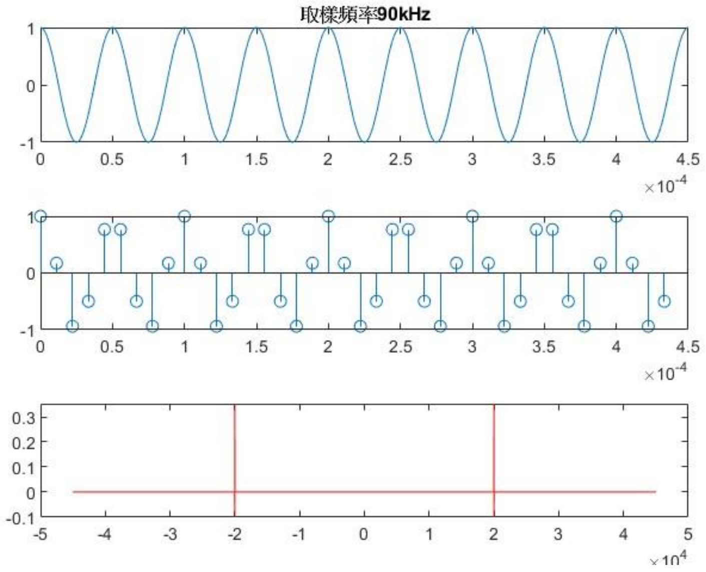
  與先前fm= 10k相比，fm =20k較難從取樣訊號看出原先訊號，但仍舊能看出稍為的輪廓。

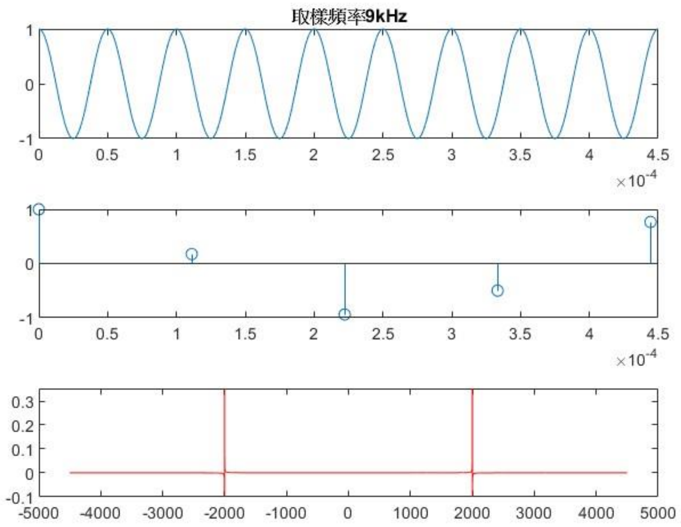
  重建頻譜的頻率成分是正確的，但其振幅並非脈衝，因為fft為利用離散傅立葉相加得到的近似結果。

- (右圖)取樣頻率9kHz：

  因為取樣速率太小，無法從取樣訊號推得原先訊號。

  因為膺頻效應，重建頻譜的頻率成分亦為錯誤成分。





實習作業四

- 在上面步驟六的預期結果中，雖然可以確定能還原本來訊號，但是尾端部分有些偏差，討論造成此現象的原因?

xr(t) = 2BT$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)sinc(2B(t-nT))$

重建訊號是利用sinc函數在進行無窮疊加來重建，

但依據程式的運行，x(n)僅從-0.02~0.02採計400個點，並非無窮級數相加，

所以僅為近似的結果。

實習作業五

1. 程式碼
2. 預期結果(理論分析)
3. 結果驗證

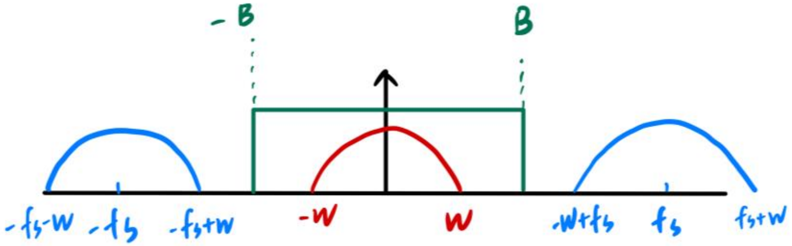
實習作業五：1.程式碼

```
clear all
fs = 10000;
fs1 = 1000; %設定取樣頻率 1k Hz
B = 200; %設定截止頻率B
ts = 1/fs;
ts1 = 1/fs1;
t = -0.02:ts:0.02;
t1 = -0.02:ts1:0.02;
x = 3*cos(2*pi*100*t)+2*sin(2*pi*50*t);
x1 = 3*cos(2*pi*100*t1)+2*sin(2*pi*50*t1);
for i = 1:length(t) %i分成length(i)段 每次i++ 這裡為1 2 3 ... ~ 401
   x11 = x1.*2*B*ts1.*sinc(2*B*(t(i)-t1));
   x2(i) = sum(x11);
end
plot(t,x,'b')
hold on
grid on
plot(t,x2,'r')
legend('x(t)','x[n]')
grid on
```

實習作業五：2.預期結果

- x2(t) = 3*cos(200*pi*t)+2*sin(100*pi*t)，
  最高頻W2 = 100Hz
  由取樣定理可知取樣頻率fs須滿足：fs >2*W2
  由重建頻譜可知截止頻率B須滿足：W2 < B < -W2+fs

- 我們採用 fs=1000Hz，B=200Hz
  1000>2*100 且 100<200<900
  故 訊號可以sinc波疊加完美重建



實習作業五：3.結果驗證

- 由圖可知，x[n]幾乎完美重建了原先的訊號x(t)。
  尾端的偏差來自於真正的完美重建為無窮疊加的結果，
  但我們僅用了有限的取樣值去做近似。