實驗6: 取樣定理之MATLAB模擬與分析

大綱

- 目的
- 原理
  - 由時域的觀點了解膺頻效應
  - 由頻域的觀點了解膺頻效應
  - 使用內插法還原訊號
- 模擬與討論
  - 由時域的觀點了解膺頻效應 (難度：簡單)
  - 由頻域的觀點了解膺頻效應 (難度：稍難)
  - 使用內插法還原訊號 (難度：中等)
- 實習作業

參考文獻

目的

- 透過本實驗，驗證當取樣頻率不足時，因為膺頻效應，原來的訊號無法還原。並學習如何設定適合的取樣頻率使原本訊號得以完美地還原。
- 透過本實驗，對同一訊號以不同的取樣頻率取樣，在頻域中觀察取樣後的訊號。並學習如何設定適合的取樣頻率以消除膺頻效應。
- 透過本實驗練習由取樣值和 sinc 函數以內插法還原訊號。並學習設定適合的取樣頻率和低通濾波器截止頻率，使原本訊號得以還原。

大綱

- 目的
- 原理
  - 由時域的觀點了解膺頻效應
  - 由頻域的觀點了解膺頻效應
  - 使用內插法還原訊號
- 模擬與討論
  - 由時域的觀點了解膺頻效應 (難度：簡單)
  - 由頻域的觀點了解膺頻效應 (難度：稍難)
  - 使用內插法還原訊號 (難度：中等)
- 實習作業

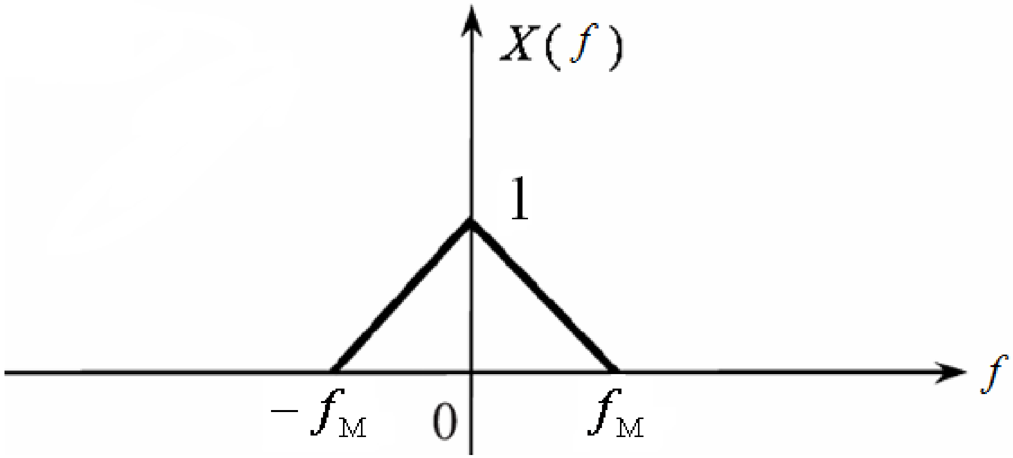
參考文獻

取樣定理

- 考慮一有限頻寬(band-limited)之信號 $x(t)$，其最高頻率為 f_M
  (即 $X(f)=0, |f|>f_M$)。
  若取樣頻率 f_S 大於 f_M 的2倍，則 $x(t)$可由其取樣值$x(n\mathrm{T})$唯一表示。
  - T : 取樣週期(或稱取樣時間間隔)
  - $f_s=\dfrac{1}{T}$: 取樣頻率(單位 Hz)
  - ω_s : 取樣頻率(單位 rad/sec)

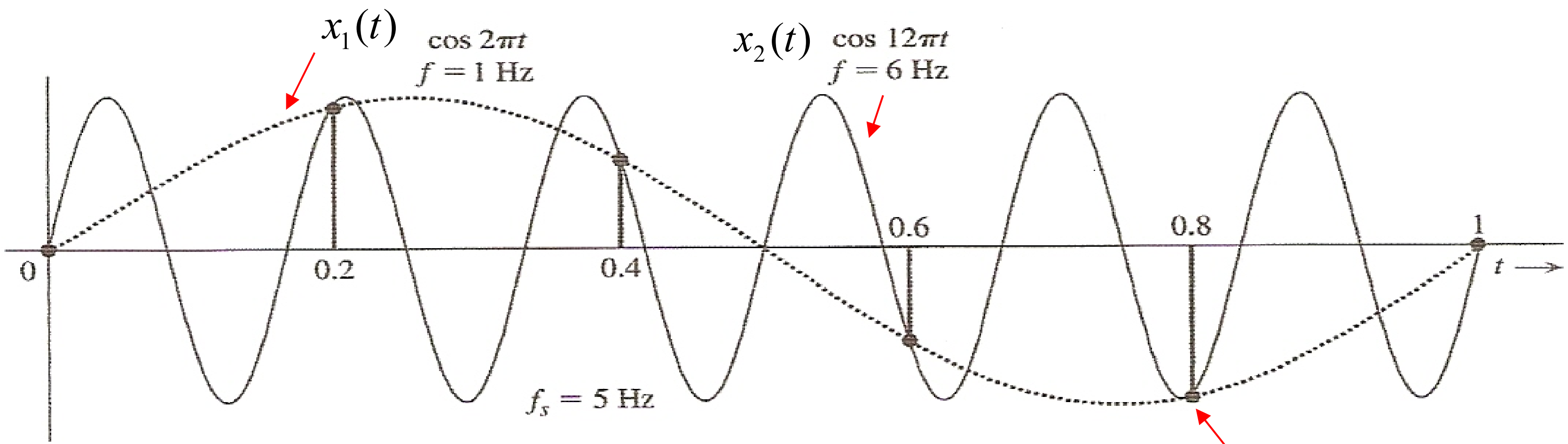
$$\omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T}$$

- 有限頻寬之信號如圖所示：



1997 Prentice-Hall, Inc., Oppenheim, Willsky, and Nawab, *Signals and Systems*, 2nd Ed.

由時域的觀點了解膺頻效應



$x_1(t) = \cos(2\pi t)$ (頻率 $f_1 = 1\,\text{Hz}$)

$x_2(t) = \cos(12\pi t)$ (頻率 $f_2 = 6\,\text{Hz}$)

- 在取樣頻率 $f_s = 5\,\text{Hz}$ 下 $\Rightarrow x_1(n) = x_2(n)$

結論：

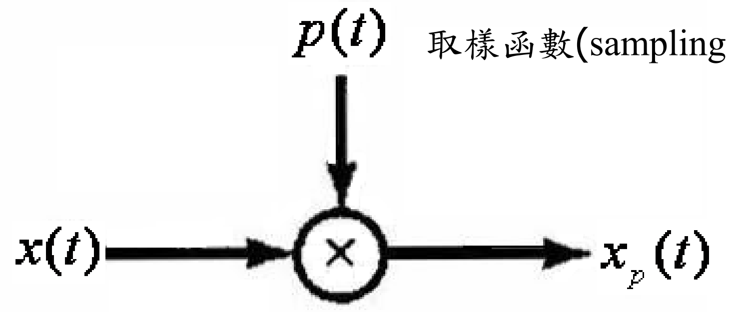
(1)雖然 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 具有不同的頻率，但經過取樣後，我們無法區別 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$。

(2)當 $f_2 = f_1 + mf_s$；$m =$ 整數，我們無法分辨其取樣後的訊號。

2004 Oxford University Press, Lathi, *Linear Systems and Signals*, 2nd Ed.

脈衝串取樣(Impulse Train Sampling)的訊號模型

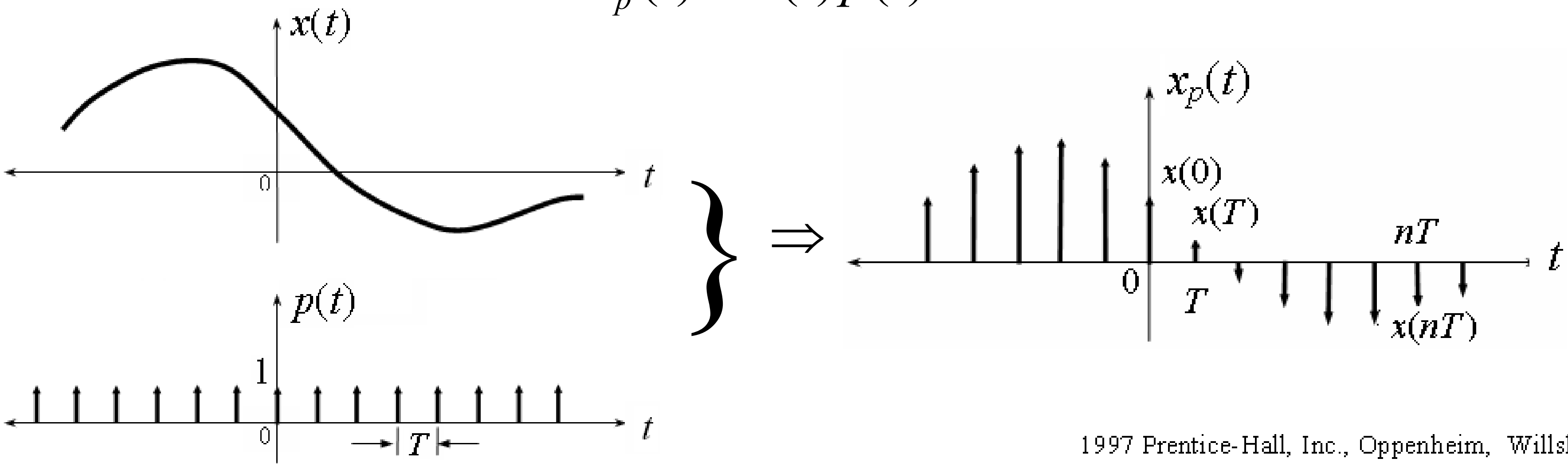
- 脈衝串取樣為一個簡單的模型，用以描述如何對一個連續時間訊號 $x(t)$ 做均勻取樣。



取樣函數(sampling function)

- 取樣後之訊號為一脈衝串 $x_p(t)$：

$$x_p(t) = x(t)p(t)$$



1997 Prentice-Hall, Inc., Oppenheim, Willsky, and Nawab, *Signals and Systems*, 2nd Ed.

脈衝串取樣的頻域分析

- 週期脈衝串 $p(t)$稱為取樣函數(sampling function)：

$$p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)$$

- 將 $x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$之性質代入 $x_p(t)=x(t)p(t)$：

可得：

$$x_p(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(nT)\delta(t-nT)$$

- 然後對 $x_p(t)$ 做傅立葉轉換 ：

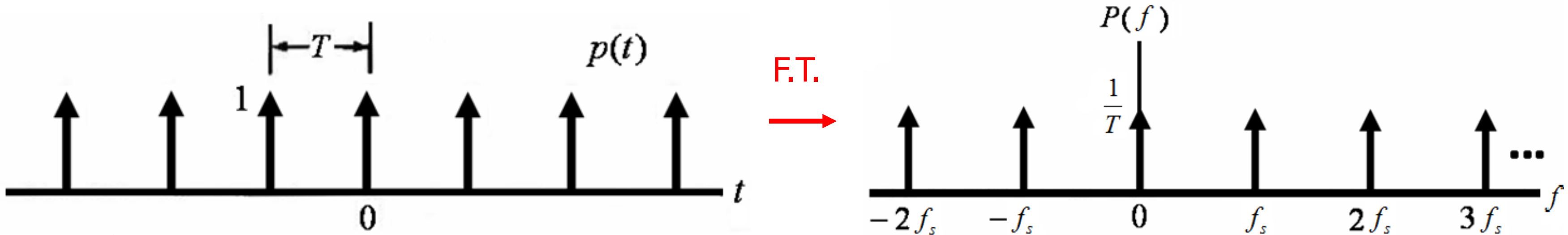
$$x_p(t)=\underbrace{x(t)\cdot p(t)}_{\text{在時域相乘}}\xrightarrow{F.T.}X_p(f)=\underbrace{X(f)*P(f)}_{\text{在頻域做旋積}}$$

- 其中

$$P(f)\equiv\Im[p(t)]=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-nf_s)$$

脈衝串取樣的頻域分析(續)

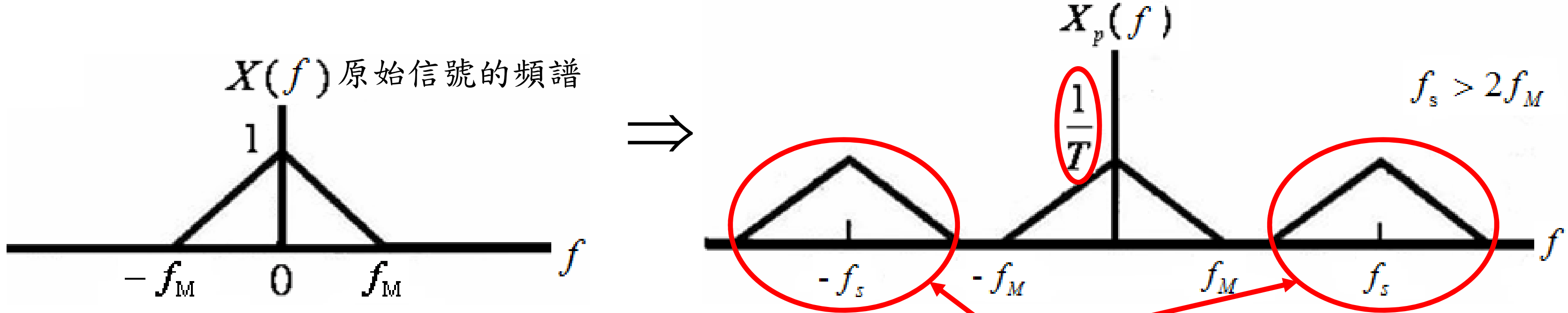
- 脈衝串$p(t)$在時域與頻域$P(f)$圖示如下 ：



- 所以

$$\boxed{X_p(f) = \underbrace{\frac{1}{T}}_{\text{Scaling}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{X(f - nf_s)}_{X(f)\text{向右位移}nf_s}}$$

- 我們現在可以求得$X_p(f)$之頻譜圖如下 ：



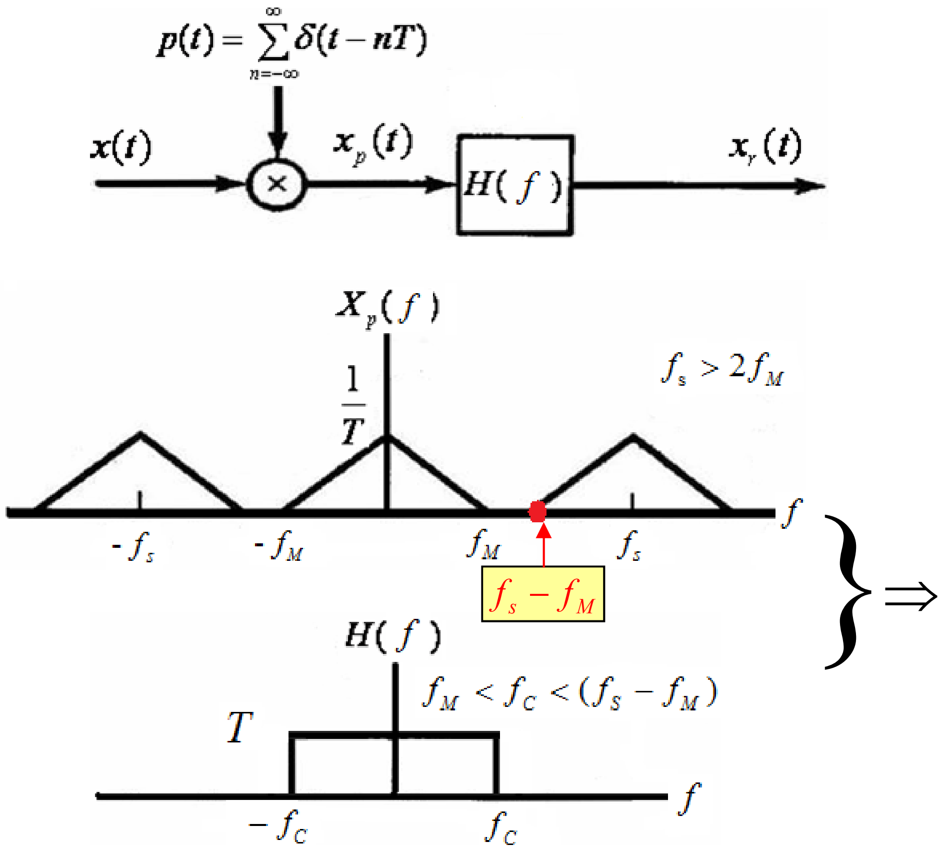
• 原始頻譜複製在 f_s 的整數倍處。

• 脈衝串取樣所得頻譜為這些複製的頻譜之總和。

1997 Prentice-Hall, Inc., Oppenheim, Willsky, and Nawab, *Signals and Systems*, 2nd Ed.

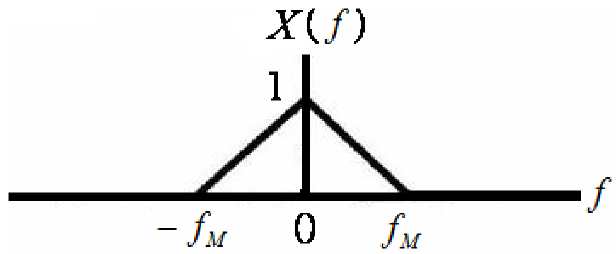
觀察頻譜所得結論

- 若 $f_M < (f_s - f_M)$，亦即 $f_s > 2f_M$ ：
  - 信號經取樣後之複製的頻譜不會互相重疊，因此信號 $x(t)$可經由低通濾波器恰好還原。



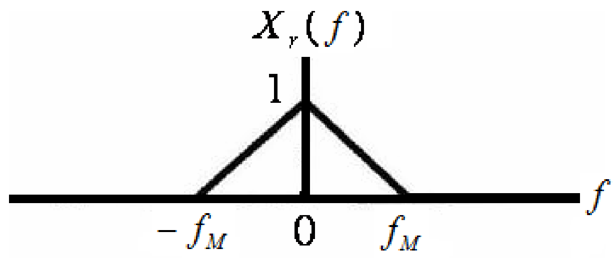
用以重建信號之低通濾波器

原始信號的頻譜



重建信號的頻譜(和原始信號的頻譜一致)

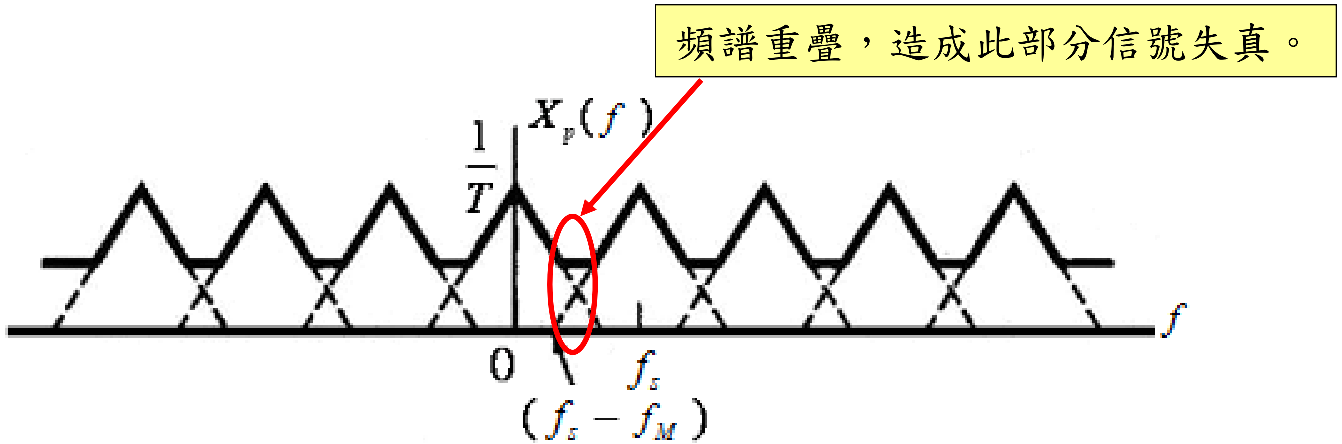
$$X_r(f) = X_p(f)\cdot H(f)$$



1997 Prentice-Hall, Inc., Oppenheim, Willsky, and Nawab, *Signals and Systems*, 2nd Ed.

觀察頻譜所得結論(續)

- 若 $(f_s - f_M) < f_M$，亦即 $f_s < 2f_M$：
  - 信號經取樣後頻譜發生重疊之現象，此稱為膺頻效應(aliasing effect)。
  - 故取樣後無法藉由低通濾波器完美重建原來的信號。



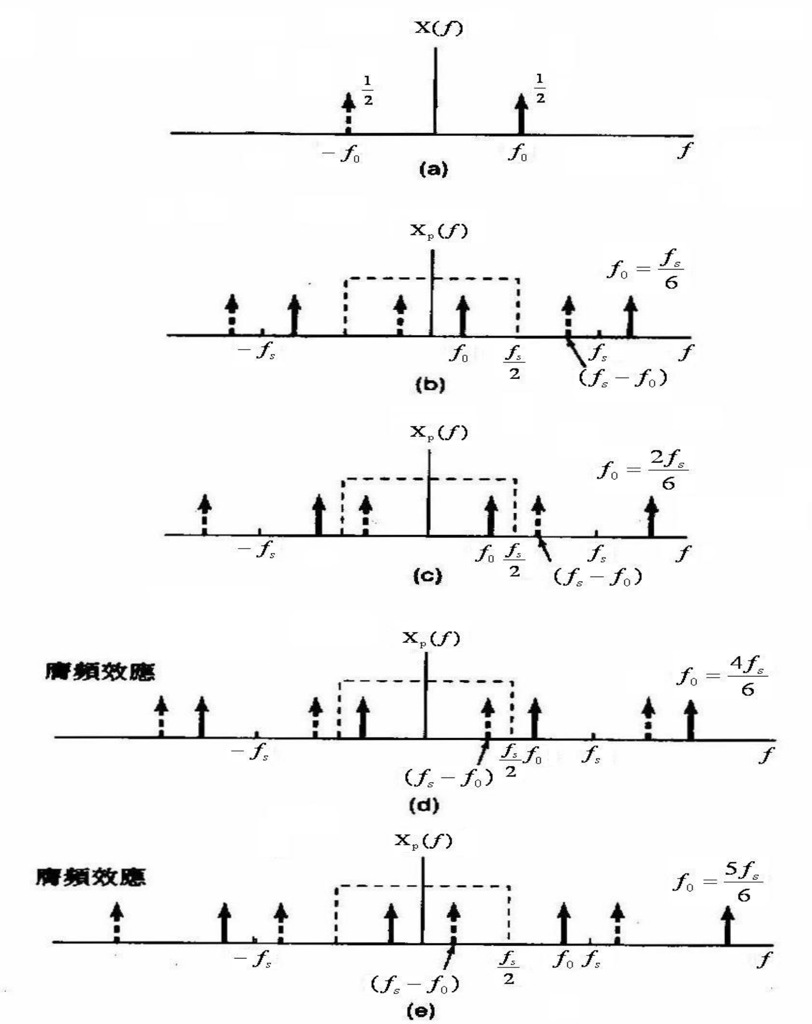
- $2f_M$ 稱為奈奎斯特頻率(Nyquist rate)。[註：有人亦稱之為Nyquist frequency。]

- 只要滿足取樣頻率大於奈奎斯特頻率(即 f_s > 奈奎斯特頻率)， 則信號經取樣後, 可藉由低通濾波器完美重建。

1997 Prentice-Hall, Inc., Oppenheim, Willsky, and Nawab, *Signals and Systems*, 2nd Ed.

由頻域的觀點了解膺頻效應

- 假設取樣頻率為 f_s Hz



- $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

滿足取樣定理

- $f_0 = \dfrac{f_s}{6};\quad x_r(t) = \cos(2\pi f_0 t) = x(t)$
- $f_0 = \dfrac{2f_s}{6};\quad x_r(t) = \cos(2\pi f_0 t) = x(t)$

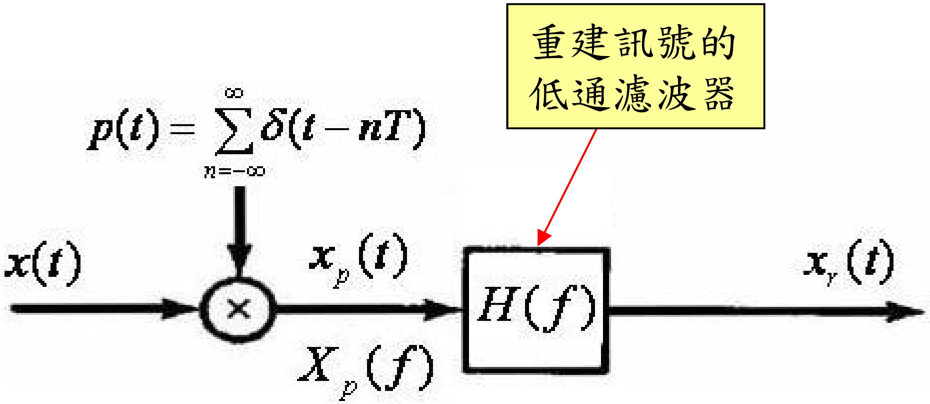
不滿足取樣定理

- $f_0 = \dfrac{4f_s}{6};\quad x_r(t) = \cos(2\pi \underline{(f_s - f_0)} t) \neq x(t)$
- $f_0 = \dfrac{5f_s}{6};\quad x_r(t) = \cos(2\pi \underline{(f_s - f_0)} t) \neq x(t)$

1997 Prentice-Hall, Inc., Oppenheim, Willsky, and Nawab, *Signals and Systems*, 2nd Ed.

訊號的重建—內插法(Interpolation)的觀點

- 信號重建可視為以重建濾波器之單位脈衝函數為內插函數，去內插取樣值之外的$x(t)$之值。



$$h(t)=\Im^{-1}[H(f)]$$

- 重建訊號的數學式 $x_r(t)$:

$$x_r(t)=x_p(t)*h(t)$$

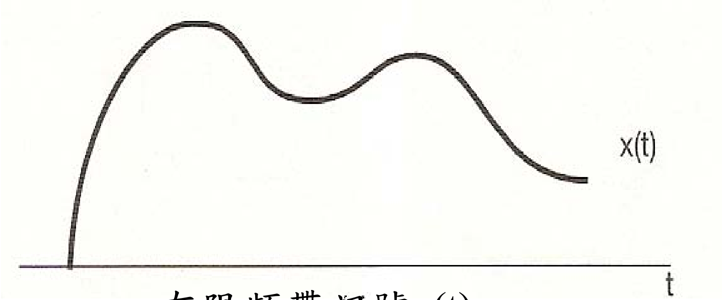
$$=[\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\cdot\delta(t-nT)]*h(t)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT)\cdot[\delta(t-nT)*h(t)]$$

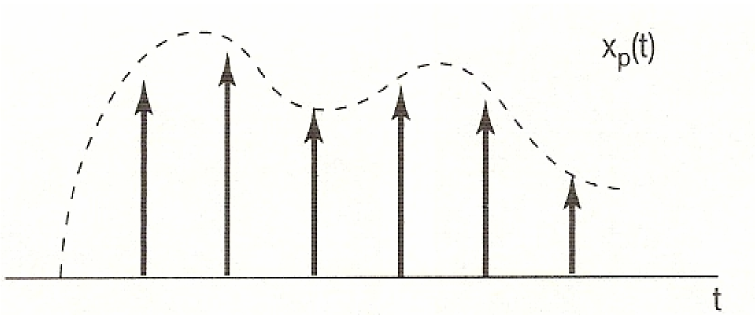
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\underbrace{x(nT)}_{\text{取樣值}}\cdot\underbrace{h(t-nT)}_{\text{內插函數}}$$

1997 Prentice-Hall, Inc., Oppenheim, Willsky, and Nawab, *Signals and Systems*, 2nd Ed.

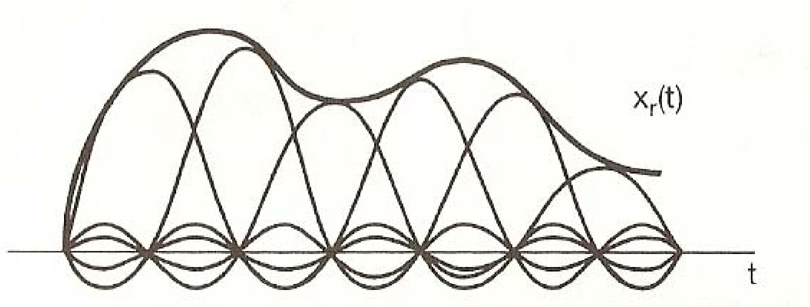
訊號的重建—內插法的觀點(續)



有限頻帶訊號x(t)



x(t)取樣的脈衝列



重建的訊號，為 $x_r(t)$ 式子中各項的疊加

- 例子：當 $h(t)$ 是一個理想低通濾波器：

$$\because \quad h(t) = 2BT\,\mathrm{sinc}\,(2Bt) \qquad B:\text{截止頻率}$$

$$\therefore \quad \underbrace{x_r(t)}_{\text{重建的訊號}} = 2BT \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{x(n)}_{\text{取樣值}}\ \underbrace{\mathrm{sinc}\,(2B(t-nT))}_{\text{以sinc為內插函數}}$$

1997 Prentice-Hall, Inc., Oppenheim, Willsky, and Nawab, *Signals and Systems*, 2nd Ed.

大綱

- 目的
- 原理
  - 由時域的觀點了解膺頻效應
  - 由頻域的觀點了解膺頻效應
  - 使用內插法還原訊號
- **模擬與討論**
  - 由時域的觀點了解膺頻效應 (難度：簡單)
  - 由頻域的觀點了解膺頻效應 (難度：稍難)
  - 使用內插法還原訊號 (難度：中等)
- 實習作業

參考文獻

步驟一

1. 開啟 Matlab 主程式並打開程式 example_1.m

2. 產生一波形 $x_1(t) = 2\cos(200\pi t) + 3\sin(240\pi t)$

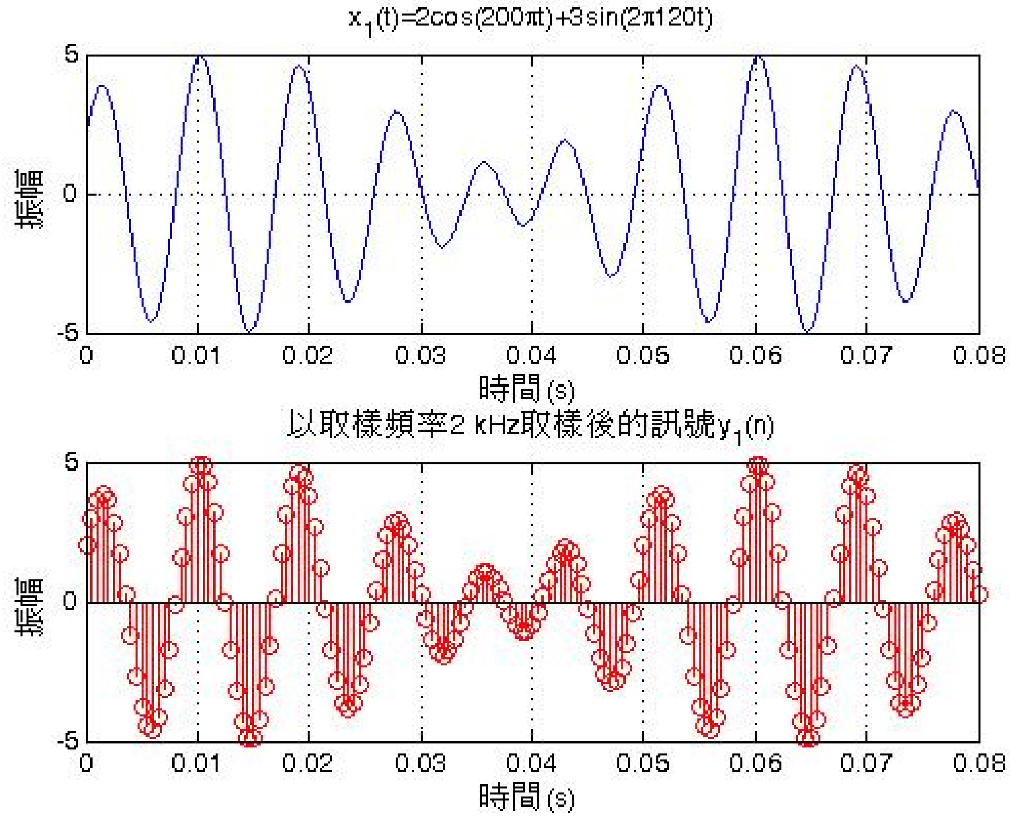
3. 設定取樣頻率 f_s 為 2 kHz

   令 $t = \dfrac{1}{2000}n$ 代入 $x_1(t)$

   得 $y_1(n) = 2\cos(\dfrac{1}{10}\pi n) + 3\sin(\dfrac{3}{25}\pi n)$

4. 觀察原本訊號 $x_1(t)$ 和取樣後訊號 $y_1(n)$ 的相關性，並描述之。(能否以取樣定理解釋? 滿足取樣定理嗎?)

預期結果



x1(t)=2cos(200πt)+3sin(2π120t)
振幅
時間(s)
以取樣頻率2 kHz取樣後的訊號y1(n)
振幅
時間(s)

步驟二

1. 利用步驟一產生的波形 $x_1(t) = 2\cos(200\pi t) + 3\sin(240\pi t)$

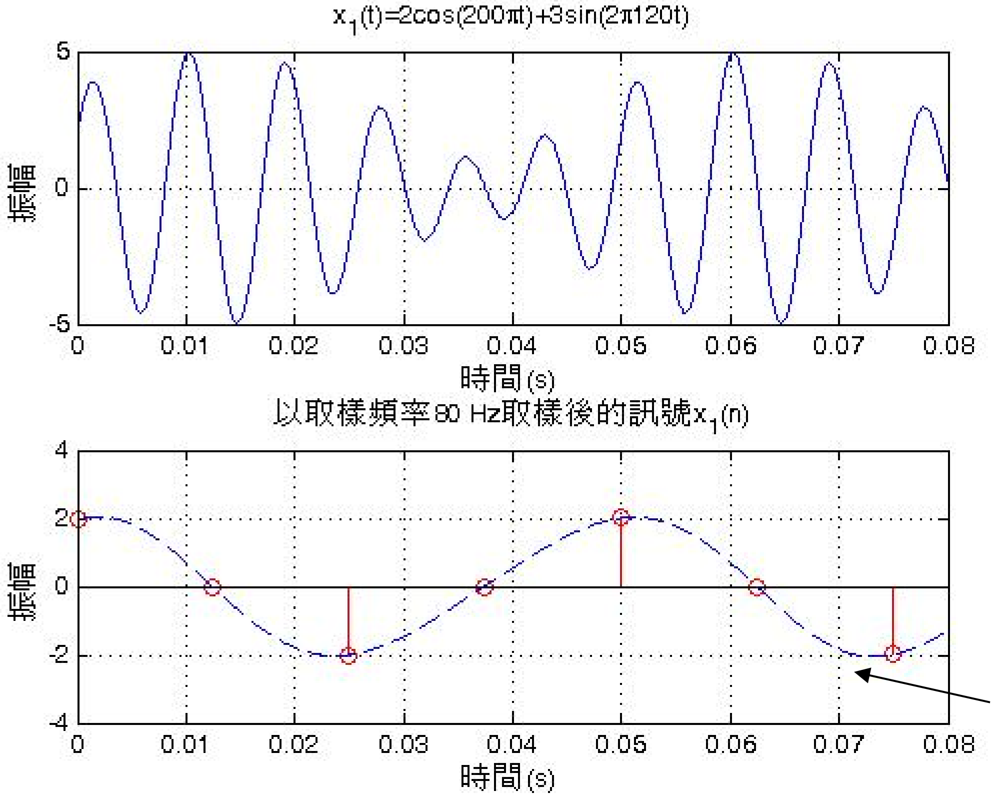
2. 設定取樣頻率 f_s 為 80 Hz

   令 $t = \dfrac{1}{80} n$ 代入 $x_1(t)$

   得 $x_1(n) = 2\cos(\dfrac{5}{2}\pi n) + 3\sin(3\pi n) = 2\cos(\dfrac{1}{2}\pi n) + 3\sin(\pi n)$

3. 畫出根據 $x_1(n)$ 重建之訊號，觀察原本訊號 $x_1(t)$ 和重建後之訊號的相關性並描述之。(能否以取樣定理解釋? 滿足取樣定理嗎?)

預期結果



--虛線代表重建後的訊號

步驟三

1. 開啟 Matlab 主程式並打開程式 example_2.m

2. 利用步驟一產生的波形 $x_1(t) = 2\cos(200\pi t) + 3\sin(240\pi t)$

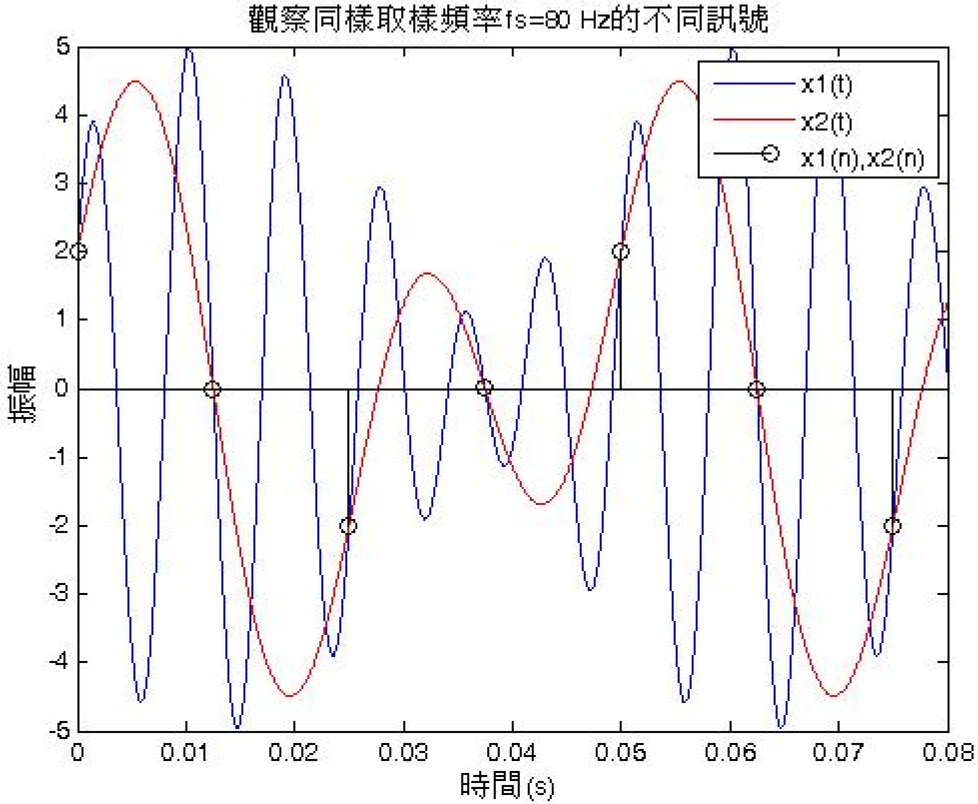
3. 產生另一波形 $x_2(t) = 2\cos(40\pi t) + 3\sin(80\pi t)$

4. 設定取樣頻率 f_s 為 80 Hz

   令 $t = \dfrac{1}{80}n$ 分別代入 $x_1(t)$、$x_2(t)$得到 $x_1(n)$、$x_2(n)$

5. 觀察 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 的關連，並描述之。請以取樣定理解釋之。

預期結果



觀察同樣取樣頻率fs=80 Hz的不同訊號
x1(t)
x2(t)
x1(n),x2(n)
振幅
時間(s)
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
0
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
0.08

步驟四

1. 開啟 Matlab 主程式並打開程式 example_3.m

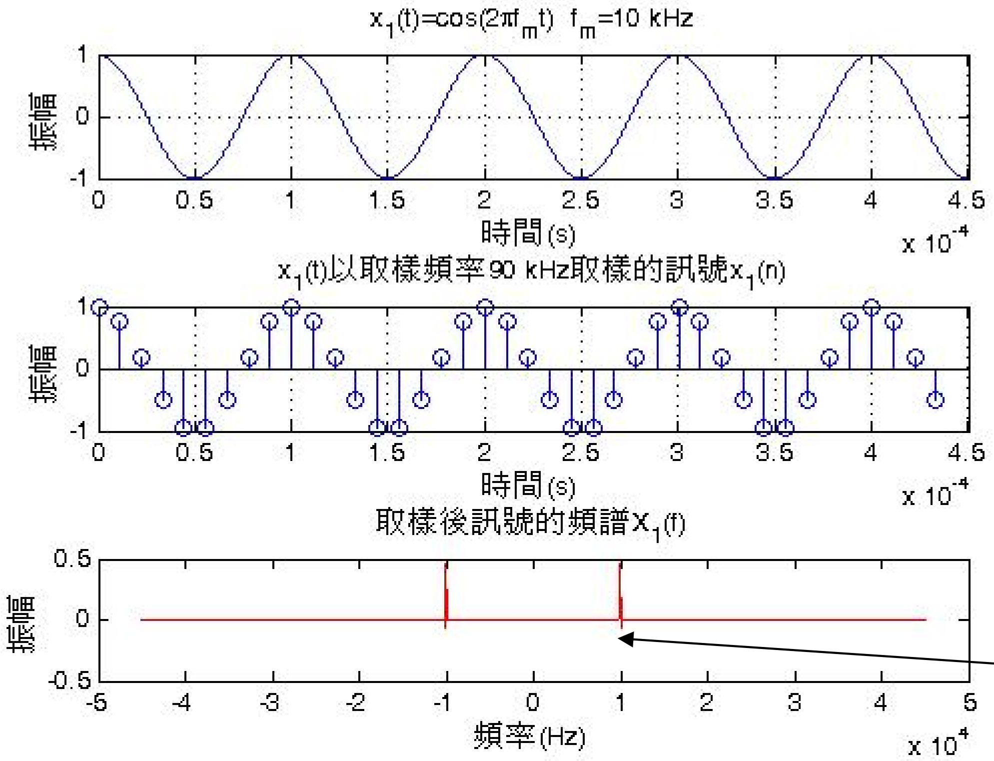
2. 產生一波形 $x_1(t) = \cos(2\pi f_m t)$，$f_m = 10\,\text{kHz}$

3. 設定取樣頻率 f_s 為 90 kHz 得到 $x_1(n)$

4. 利用 Matlab 內建程式 fft 計算出 $x_1(n)$的頻譜 $X_1(f)$

5. 觀察頻譜 $X_1(f)$ 和訊號 $x_1(t)$的實際頻譜是否符合 。
   Hint: $x_1(t)$的實際頻譜乃指其Fourier transform的數學式所
   表示之理論值；而fft只是其數值運算得到之近似值。

預期結果



在±10 kHz各有一根脈衝

步驟五

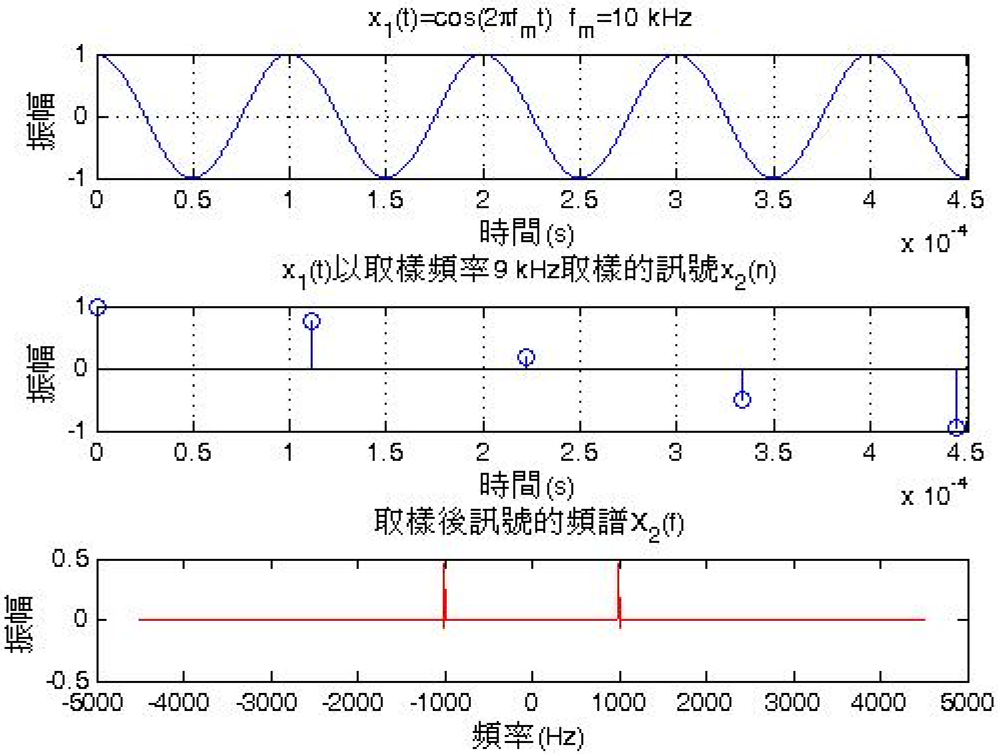
1. 利用步驟四產生的波形 $x_1(t) = \cos(2\pi f_m t)$ ，$f_m = 10\,\text{kHz}$

2. 設定取樣頻率 f_s 為 $9\,\text{kHz}$ 得到 $x_2(n)$

3. 利用 Matlab 內建程式 fft 計算出 $x_2(n)$的頻譜 $X_2(f)$

4. 觀察頻譜 $X_2(f)$ 和訊號 $x_1(t)$的實際頻譜是否符合。

預期結果



$x_1(t)=\cos(2\pi f_m t)$ f_m=10 kHz
振幅
時間(s)
x 10^{-4}
$x_1(t)$以取樣頻率9 kHz取樣的訊號$x_2(n)$
振幅
時間(s)
x 10^{-4}
取樣後訊號的頻譜$X_2(f)$
振幅
頻率(Hz)

步驟六

1. 開啟 Matlab 主程式並打開程式 example_4.m

2. 產生一波形 $x_1(t) = 2\cos(100\pi t) + 3\sin(200\pi t)$

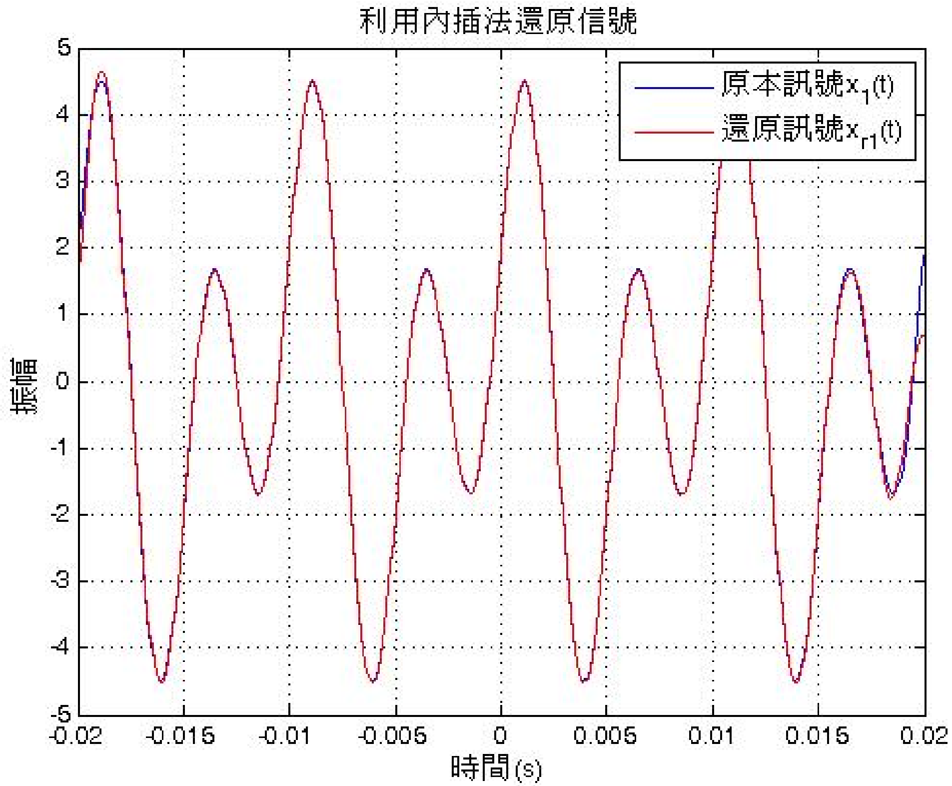
3. 設定取樣頻率 f_s 為 1 kHz 得 $x_1(n) = 2\cos(\frac{1}{10}\pi n) + 3\sin(\frac{1}{5}\pi n)$

4. 將取樣值 $x_1(n)$ 代入下列公式產生

$$x_{r1}(t) = 2BT\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)\,\mathrm{sinc}\,(2B(t-nT))\ (\text{取}\ T = \frac{1}{f_s}\ ,\ B = 500\ \mathrm{Hz})$$

5. 觀察原本訊號 $x_{r1}(t)$是否能還原原本訊號 $x_1(t)$?

預期結果



利用內插法還原信號
原本訊號x1(t)
還原訊號xr1(t)
振幅
時間(s)
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-0.02
-0.015
-0.01
-0.005
0
0.005
0.01
0.015
0.02

步驟七

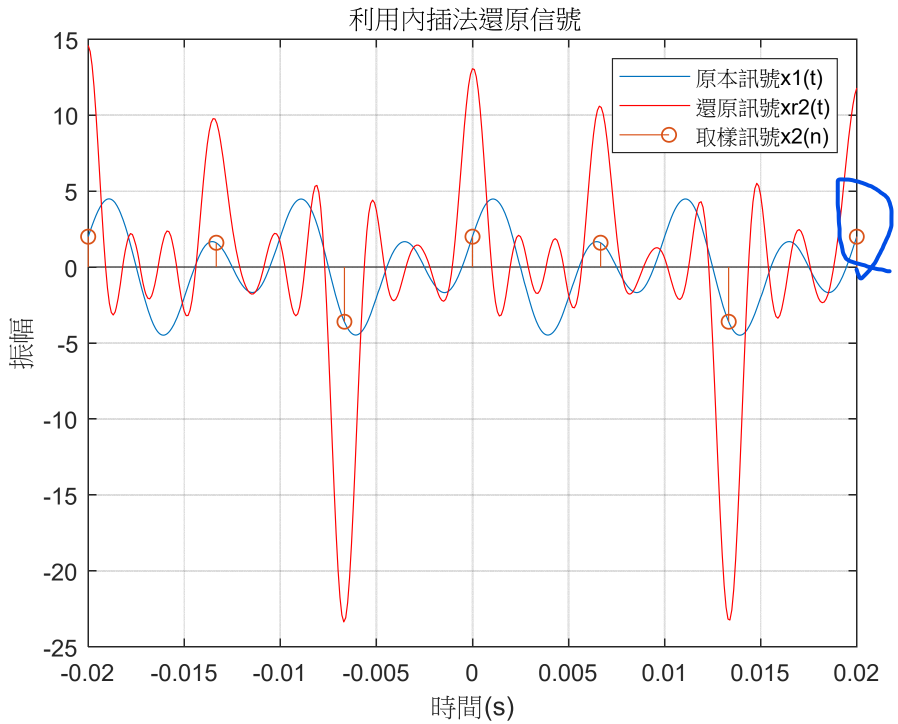
1. 利用步驟六產生的波形 $x_1(t) = 2\cos(100\pi t) + 3\sin(200\pi t)$
2. 設定取樣頻率 f_s 為 150 Hz 得 $x_2(n) = 2\cos(\frac{2}{3}\pi n) + 3\sin(\frac{4}{3}\pi n)$
3. 將取樣值 $x_2(n)$ 代入下列公式產生

$$x_{r2}(t) = 2BT \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)\,\mathrm{sinc}\,(2B(t - n\mathrm{T})) \quad (B = 500\ \mathrm{Hz})$$

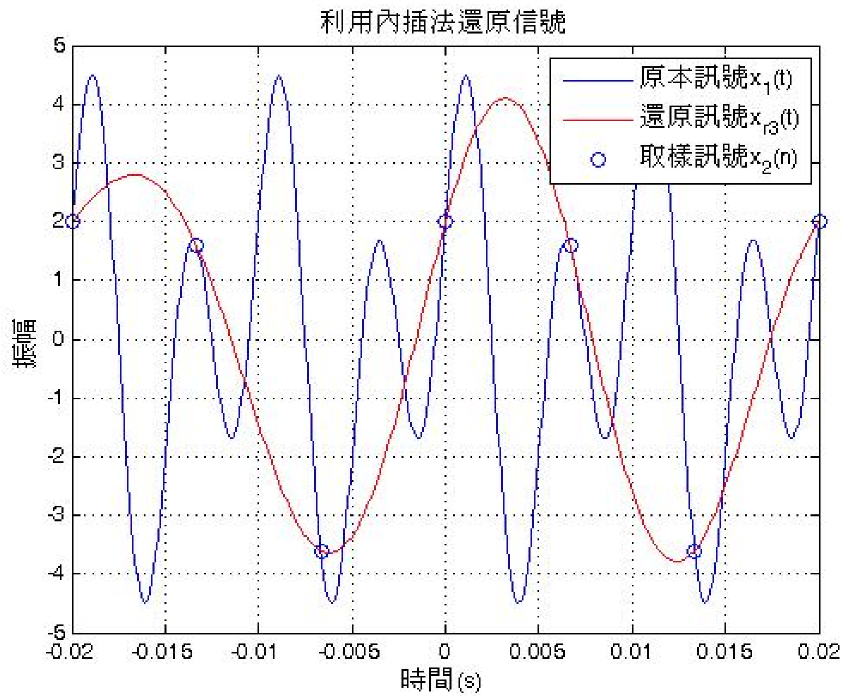
4. 重複 3 的步驟，改成 $B = 75$ Hz 代入上式，得到 $x_{r3}(t)$
5. 觀察重建訊號 $x_{r2}(t)$、$x_{r3}(t)$ 是否能還原成原本訊號 $x_1(t)$?

預期結果

$f_s = 150\,\mathrm{Hz}$ ， $B = 500\,\mathrm{Hz}$



$f_s = 150\,\mathrm{Hz}$ ， $B = 75\ \ \mathrm{Hz}$



大綱

- 目的
- 原理
  - 由時域的觀點了解贗頻效應
  - 由頻域的觀點了解贗頻效應
  - 使用內插法還原訊號
- 模擬與討論
  - 由時域的觀點了解贗頻效應 (難度：簡單)
  - 由頻域的觀點了解贗頻效應 (難度：稍難)
  - 使用內插法還原訊號 (難度：中等)
- **實習作業**

參考文獻

結果報告(ppt 簡報)須包含項目

1. 實驗目的。 (但實驗原理不用寫。)
2. 實驗結果與討論:

   (i) 根據步驟一至七之說明進行實驗。每個步驟須包含以下項目於結報中:

   - 以Matlab範例程式產生模擬結果(可參考預期結果)，將結果圖貼至ppt。
   - 敘述觀察到之現象為何，且和預測結果比較。
     - 若相同，進一步解釋為何此現象是正確或合理的，背後的理論依據為何?
       說明與相關理論之連結、比較、或該理論是如何驗證此結果為正確或合理的。
       可否用其他方式解釋之。
     - 若有差異，應說明並討論其原因。
   - 回答該步驟所提出之問題(通常為藍色標示)，並討論之。
   - 貼上你的Matlab程式。

   (ii) 修改Matlab程式以完成本講義以下之實習作業。結報內容亦應包含上述實驗結果與討論之項目。
3. 參考資料或文獻 (References)

* 結報重點: (a)結果(以及程式)之正確性。(b) 討論之正確性、完整性。

* 結報請先轉成 pdf 檔形式再上傳至Moodle (子課程) 。 (每組交一份。)

實習作業

1. 在步驟三中

$$x_1(t) = 2\cos(2\pi f_{11}t) + 3\sin(2\pi f_{12}t)$$

(頻率$f_{11} = 100$ Hz 頻率$f_{12} = 120$ Hz)

$$x_2(t) = 2\cos(2\pi f_{21}t) + 3\sin(2\pi f_{22}t)$$

(頻率$f_{21} = 20$ Hz 頻率$f_{22} = 40$ Hz)

- 在取樣頻率$f_s = 80$ Hz下代入$x_1(t)$、$x_2(t)$得$x_1(n)$、$x_2(n)$。

  f_{11}和f_{21}滿足什麼關係,以及f_{12}和f_{22}滿足什麼關係,

  才會令$x_2(n) = x_1(n)$?

  驗證此例的f_{11}、f_{21}、f_{12}、f_{22}是否滿足這個關係。

實習作業(續)

2.

試著產生另一訊號

$$x_3(t) = 2\cos(2\pi f_{31} t) + 3\sin(2\pi f_{32} t)$$

$(f_{31}, f_{32}$ 自行設計$)$

- 設計的訊號 $x_3(t)$ 在取樣頻率 $f_s = 80\ \text{Hz}$ 下必須滿足 $x_3(n) = x_1(n) = x_2(n)$
- 請用Matlab畫圖驗證 $x_3(n) = x_1(n) = x_2(n)$ 並附在報告中。

實習作業(續)

3.

- 將訊號 $x(t)=\cos(2\pi f_m t)$，$f_m = 20\,\text{kHz}$。
  分別用取樣頻率 $f_s = 90\,\text{kHz}$ 和 $9\,\text{kHz}$ 取樣，
  產生新的 $x_1(n)$、$x_2(n)$。
  利用 Matlab 計算出並畫出取樣後的頻譜 $X_1(f)$、$X_2(f)$。
  並討論 $X_1(f)$、$X_2(f)$、和 $x(t)$ 實際頻譜的關係。

  $x(t)$的實際頻譜:

$$\cos(40k\pi t) \xrightarrow{F.T.} \frac{1}{2}(\delta(f-20k)+\delta(f+20k))$$

實習作業(續)

4.

- 在上面步驟六的預期結果中，雖然可以確定能還原本來訊號，但是尾端部分有些偏差，討論造成此現象的原因?

實習作業(續)

5.

- 產生一個波形 $x_2(t)=3\cos(200\pi t)+2\sin(100\pi t)$
  選定適合的取樣頻率 f_s 和低通濾波器截止頻率B
  試著利用下列公式，還原本來訊號，並利用
  Matlab 做圖驗證，並附在報告中。

$$\text{公式}:x_r(t)=2BT\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\,\mathrm{sinc}\,(2B(t-nT))$$

附錄一: example_1.m

```
clear all
fs=2000; %設定取樣頻率為2 kHz
fs1=8000; %設定另一個極高的取樣頻率
ts=1/fs;
ts1=1/fs1;
t=0:ts:0.08;
n=0:ts1:0.08;
x1=2*cos(2*pi*100*n)+3*sin(2*pi*120*n); %以極高取樣頻率來近似原本連續訊號
x2=2*cos(2*pi*100*t)+3*sin(2*pi*120*t); %取樣後的訊號
subplot(211)
plot(n,x1)
grid on
subplot(212)
stem(t,x2,'r')
grid on
```

附錄二: example_2.m

```
clear all
fs=80; %設定取樣頻率80 Hz
ts=1/fs;
t=0:0.00001:0.08;
n=0:ts:0.08;
x1=2*cos(2*pi*100*t)+3*sin(2*pi*120*t); %極高取樣近似的連續波
x2=2*cos(2*pi*100*n)+3*sin(2*pi*120*n); %以80 Hz取樣的訊號
x3=2*cos(2*pi*20*t)+3*sin(2*pi*40*t); %產生另一個極高取樣近似的連續波
x4=2*cos(2*pi*20*n)+3*sin(2*pi*40*n);
plot(t,x1)
hold on
plot(t,x3,'r')
stem(n,x2,'k')
stem(n,x4)
```

附錄三: example_3.m

```
clear all
fs=90000;  %設定取樣頻率90 kHz
ts=1/fs;
ts1=(1/10)^8;
t1=0:ts1:0.0005;t=0:ts:1;
f=10000;   %原始訊號頻率10 kHz
x=cos(2*pi*f*t);  %取樣後的訊號
x1=cos(2*pi*f*t1);  %極高取樣近似的連續波
f1=[0:(length(x)-1)]/length(x)-0.5;
X=fft(x)/length(x);   %Matlab 內建的傅立葉轉換
subplot(311)
plot(t1,x1);
axis([0 4.5*(10)^-4 -1 1])  %限制畫圖的範圍
subplot(312)
stem(t(1:40),x(1:40));
axis([0 4.5*(10)^-4 -1 1])
subplot(313)
plot(fs*f1,fftshift(X),'r')
```

附錄四: example_4.m

```
clear all
fs=10000;
fs1=1000;     %設定取樣頻率1 kHz
B=500;        %設定截止頻率B
ts=1/fs;ts1=1/fs1;
t=-0.02:ts:0.02;t1=-0.02:ts1:0.02;
x=2*cos(2*pi*100*t)+3*sin(2*pi*200*t);
x1=2*cos(2*pi*100*t1)+3*sin(2*pi*200*t1);
for i=1:length(t)
x11=x1.*2*B*ts1.*sinc(2*B*(t(i)-t1));
x2(i)=sum(x11);
end
plot(t,x)
hold on
plot(t,x2,'r')
grid on
```

參考文獻

- A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab, *Signals and Systems*, 2nd ed., Prentice-Hall, Inc., 1997.
- J. H. McClellan, R. W. Schafer, and M. A. Yoder, *Signal Processing First*, Prentice-Hall, Inc., 2003.
- S. Haykin, *Communication Systems,* 4th ed., John Wiley & Sons, New York, 2001.
- B. P. Lathi, *Linear Systems and Signals*, 2nd ed., Oxford University Press, 2004.
- B. Sklar, *Digital Communications*, 2nd ed., Prentice-Hall, Inc., 2001.
- 余兆棠、李志鵬著，訊號與系統，滄海書局，2007。