

# Tareas de primer parcial-Topología

Alumnos:

Erick Román Montemayor Treviño - 1957959

Renata Capistrán Fuentes- 2079992

Diego Sanchez-

Everardo Flores Rivera - 2127301

26 de febrero de 2026

**1** Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{A}$  un anillo sobre  $X$ . Sea  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Demostrar por inducción que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

El caso base fue demostrado en clase, ahora partiendo de la hipótesis inductiva, esto es:

$$\bigcap_{n=1}^{n=k} A_n \in \mathcal{A} \text{ veamos que se cumple para } n = k + 1$$

Podemos concluir que  $\bigcap_{n=1}^{n=k+1} A_n = \bigcap_{n=1}^{n=k} A_n \bigcap_{n=1} A_n \in \mathcal{A}$  por la hipótesis inicial, la hipótesis inductiva y el caso base.

**2** Hallar un anillo que no sea álgebra.

Sea  $X = \mathbb{Z}$ ,  $S = \{\emptyset\} \cup P(2\mathbb{Z})$ , es fácil ver que  $S$  es anillo pero no es un álgebra ya que  $X \notin S$

**3** Sean  $X$ ,  $Y$  conjuntos y  $S_y$  una  $\sigma$ -álgebra en  $Y$ . Sea  $f : X \rightarrow Y$ , demuestre que la colección  $\{f^{-1}(B) : B \in S_y\}$  es una  $\sigma$ -álgebra

Sea  $\mathcal{A} = \{f^{-1}(B) : B \in S_y\}$ . Para demostrar que  $\mathcal{A}$  es una  $\sigma$ -álgebra en  $X$ , debemos verificar tres propiedades:

- \* **El vacío está en  $\mathcal{A}$ :** Como  $S_y$  es una  $\sigma$ -álgebra en  $Y$ , por definición  $\emptyset \in S_y$ . Dado que la preimagen del conjunto vacío es el conjunto vacío, tenemos que  $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ . Por lo tanto,  $\emptyset \in \mathcal{A}$ .

- \* **Cerradura bajo complementos:** Sea  $A \in \mathcal{A}$ . Por definición de nuestra colección, existe un conjunto  $B \in S_y$  tal que  $A = f^{-1}(B)$ . El complemento de  $A$  en  $X$  es  $A^c = X \setminus A = X \setminus f^{-1}(B)$ .

Por propiedades de la preimagen, sabemos que el complemento de una preimagen es la preimagen del complemento:

$$X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$$

Como  $B \in S_y$  y  $S_y$  es una  $\sigma$ -álgebra, su complemento  $B^c = Y \setminus B \in S_y$ . Al ser la preimagen de un elemento de  $S_y$ , concluimos que  $A^c = f^{-1}(B^c) \in \mathcal{A}$ .

- \* **Cerradura de uniones numerables:** Sea  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  una sucesión numerable de conjuntos. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $B_n \in S_y$  tal que  $A_n = f^{-1}(B_n)$ .

La unión de la sucesión es:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$$

Por propiedades de la preimagen, la unión de preimágenes es la preimagen de la unión:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1} \left( \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right)$$

Dado que  $S_y$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S_y$ , por definición sabemos que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in S_y$ .

Por lo tanto,  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ .

Al cumplir las tres propiedades, concluimos que  $\mathcal{A}$  es una  $\sigma$ -álgebra en  $X$ .

**4 Demostrar que  $(0, 1] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n})$ .**

Veamos que  $(0, 1] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n})$ .

Sea  $x \in (0, 1]$ , esto es  $0 < x \leq 1$ , se sigue que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < x \leq 1 < 1 + \frac{1}{n}$

Entonces  $x \in (0, 1 + \frac{1}{n}) \forall n \in \mathbb{N}$

Entonces  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n})$

Ahora veamos la otra contención. Esto es que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n}) \subset (0, 1]$

Sea  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n})$ , esto es:  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < x < 1 + \frac{1}{n}$ .

De aqui es evidente que  $0 < x \leq 1$ . Ahora veamos que  $x \not> 1$

Supongamos que  $x > 1 \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{n_0}$  para algun  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Ahora por principio Arquimediano tenemos lo siguiente:  $\exists N > n_0 : 1 + \frac{1}{N} < 1 + \frac{1}{n_0} = x$ . Entonces  $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n})$  lo cual es una contradicción.

Esto demuestra la igualdad de los conjuntos.

## 5 Demostrar las 5 propiedades de $F_\sigma$ y $G_\delta$

- $F_\sigma$  y  $G_\delta$  son bolerianos

Sabemos que todos los conjuntos abiertos son Bolerianos por la definición, ademas sabemos que la intersección numerable de conjuntos de una  $\sigma - algebra$  es elemento de la  $\sigma - algebra$ , así  $G_\delta$  es Boleriano. Analogamente todos los cerrados son bolerianos y por definición de  $\sigma - algebra$  la union numerable de cerrados también, asi  $F_\sigma$  es Boleriano.

- Si A es  $F_\sigma$ , entonces  $A^c = G_\delta$

El resultado se sigue directo de las leyes de Morgan.

- Si A es  $G_\delta$ , entonces  $A^c = F_\sigma$

De igual forma se sigue el resultado por las leyes de Morgan.

- La unión numerable de conjuntos  $F_\sigma$  es  $F_\sigma$

La union de los elementos de una colección, cuyos elementos son uniones de cerrados, a su vez la union de uniones de cerrados, puede ser vista como una propia union de cerrados.

- La intersección numerable de conjuntos  $G_\delta$  es  $G_\delta$

La intersección de los elementos de una colección, cuyos elementos son intersecciones de cerrados, a su vez la intersección de intersecciones de cerrados, puede ser vista como una propia intersección de cerrados.

## 6 Sea $X$ conjunto y $S$ $\sigma - algebra$ . Sean $x_0 \in X; E \in S$ . Definimos $\mu_{x_0} : S \rightarrow [0, \infty]$ Como

$$\mu_{x_0}(E) = \begin{cases} 1, & x_0 \in E \\ 0, & x_0 \notin E \end{cases}$$

Demostrar que  $\mu_{x_0}$  es medida.

7 Sea  $(X, \mu, S)$  un esp. de medida y  $E_{nn \in \mathbb{N}}$  una suc de creciente con respecto la contención en  $S$ .

Si  $\mu(E_1) < \infty$ , demuestre que  $\mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$

Se sabe que si  $\{F_n\} \subset S$  es sucesión creciente, entonces

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n).$$

Sea la sucesión  $G_n$  tal que

$$G_n = E_1 - E_n.$$

P.D.  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es sucesión creciente.

Si tomamos  $G_1$  y  $G_2$ ,

$$G_1 = E_1 - E_1 = \emptyset,$$

$$G_2 = E_1 - E_2.$$

Pero  $E_2 \subset E_1$ , al menos que  $E_1 = E_2$ , por ende

$$G_1 \subset G_2$$

Supongamos que

$$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n.$$

P.D.

$$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n \subset G_{n+1}$$

$$G_{n+1} = E_1 - E_{n+1}$$

$$G_n = E_1 - E_n.$$

Tenemos que

$$E_{n+1} \subset E_n \subset E_1,$$

por conjuntos tenemos que

$$E_1 - E_{n+1} \supset E_1 - E_n \Rightarrow G_{n+1} \supset G_n.$$

Por lo tanto

$$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n \subset G_{n+1}.$$

es decir,  $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  es creciente respecto a contención.

Entonces

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G_n).$$

$$\mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_1 - E_n) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_1 - E_n).$$

$$\mu \left( E_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\mu(E_1) - \mu(E_n)] \quad \text{por teorema de conjuntos y un teorema de medida}$$

$$\mu(E_1) - \mu \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \mu(E_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$

por lo tanto

$$\mu \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$

**8** Sea  $t \in \mathbb{R}$  y  $A \subset \mathbb{R}$ . Se define el conjunto

$$t \cdot A = \{ ta : a \in A \}.$$

y se conoce como dilatación de  $A$ . Demostrar que  $m^*(t \cdot A) = |t| \cdot m^*(A)$  Sea la colección  $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , numerable tal que  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_n$  entonces  $t \cdot A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} t \cdot I_n$ . Se tiene que

$$m^*(t \cdot A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |t \cdot I_n| = |t| \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n|$$

entonces  $m^*(t \cdot A) \leq |t| \cdot m^*(A)$  esto es por ínfimo para la otra desigualdad

$$m^*(A) = m^*((1/t) \cdot tA) \leq |1/t|m^*(t \cdot A)$$

el último paso es por la demostración de la primera parte, y multiplicando por  $t$  tenemos que  $|t| \cdot m^*(A) \leq m^*(t \cdot A)$ .

Por lo tanto  $|t| \cdot m^*(A) = m^*(t \cdot A)$

**9** Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{R} : a < b \wedge c < d$ .

Demostrar que  $m^*((a, b) \cup (c, d)) = (b - a) + (d - c)$  ssi  $(a, b) \cap (c, d) \neq \emptyset$

( $\Rightarrow$ ) Si  $(a, b) \cap (c, d) \neq \emptyset$ , por ende  $a, b, c, d$  son todos diferentes a lo mucho uno es igual a 0 entonces

$$(a, b) \cup (c, d) = (\min(a, c), \max(b, d)).$$

y

$$m^*((\min(a, c), \max(b, d))) = \max(b, d) - \min(a, c).$$

Se tiene que

$$\max(b, d) \leq b + d \quad \text{y} \quad \min(a, c) \geq a + c.$$

Luego

$$\max(b, d) - \min(a, c) < b + d - a - c = (b - a) + (d - c).$$

$$\Rightarrow m^*((a, b) \cup (c, d)) < (b - a) + (d - c).$$

por lo tanto

$$m^*((a, b) \cup (c, d)) = (b - a) + (d - c) \Rightarrow (a, b) \cap (c, d) = \emptyset.$$

( $\Leftarrow$ )

$$m^*((a, b) \cup (c, d)) \leq (b - a) + (d - c)$$

por subaditividad.

Sean  $I_1 = (a, b)$  y  $I_2 = (c, d)$ .

Como  $I_1 \cap I_2 = \emptyset$  y  $I_1 \cup I_2 \subset \bigcup J_n$ ,

$$\sum |J_n| \geq (b-a) + (d-c),$$

porque

$$\sum |J_n| \geq (b-a) \quad \text{y} \quad \sum |J_n| \geq (d-c).$$

$$m^*(I_1 \cup I_2) \geq (b-a) + (d-c)$$

por definición de ínfimo. Por lo tanto

$$m^*((a,b) \cup (c,d)) = (b-a) + (d-c).$$

$$\iff (a,b) \cap (c,d) = \emptyset.$$

**10** Si  $A \in \mu$ . Demostrar que  $t+E \in \mu \ \forall t \in \mathbb{R}$

Sea  $A = \{t+E : E \in \mu\}$  Si  $E = \emptyset$

Entonces  $t+E = \emptyset \in \mu$

$\therefore \emptyset \in A$

Si  $t+E \in A$

$(t+E)^c = t+E^c \in A$  Ya que  $E^c \in \mu$

Sea  $\{t+E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$

Tenemos que  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (t+E_n) = t + \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in A$   
 $\therefore t+E \in \mu$

**11** Demostrar que  $E \subset \mathbb{R}$  es medible ssi  $\forall \epsilon > 0 \exists U$  abto. en  $\mathbb{R}$  tq.  $C \subset E \subset U \wedge m(U-C) < \epsilon$   
 $\Rightarrow$  Si  $E$  es medible se sabe que si  $\epsilon/2 > 0 \exists U$  abierto en  $\mathbb{R}$  tq.  $E \subset U \Rightarrow m(U-E) < \epsilon/2$  y  $C$  cerrado tq.  $C \subset E \Rightarrow m(C-E) < \epsilon/2$ .

Sabemos que

$$m(U-C) = m((U-E) \cup (E-C)) \leq m(U-E) + m(E-C) \text{ por subaditividad}$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$$\therefore m(U - C) < \varepsilon$$

$\Leftarrow$  P.D.

$$m(E) = m(U \cap E) + m(U \cap E^c), \quad E \subset U$$

$$E = (U \cap E) \cup (U \cap E^c) \text{ por conjuntos}$$

$$m(E) \leq m(U \cap E) + m(U \cap E^c) \text{ por subaditividad}$$

$$m(U \cap E) + m(U \cap E^c) = m(E) + m(U - E) < m(E) + \varepsilon \text{ por igualdad de conjuntos y la hipótesis}$$

$$\therefore m(U \cap E) + m(U \cap E^c) \leq m(E) \text{ por ser epsilon arbitrario}$$

$$\therefore m(E) = m(U \cap E) + m(U \cap E^c)$$

$\therefore E$  es medible.

**12** Sea  $E \subset [0, 1]$  medible con  $m(E) > 0$ . Demostrar  $\exists x, y \in E : x > y$  tales que  $x - y \in \mathbb{Q}^c$

Suponemos que  $x - y \in \mathbb{Q} \forall x, y \in E$

$$\Rightarrow x - y = q \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = y + q \quad \forall x, y \in E, q \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow x \in y + \mathbb{Q} \text{ o decir } E \subset y + \mathbb{Q}, y \in E$$

$\Rightarrow m(E) \leq m(y + \mathbb{Q}) = 0$  medida invariante bajo traslaciones

$\Rightarrow m(E) = 0$  contradicción

$\therefore \exists x, y \in E$  t.q.  $x - y \in \mathbb{Q}^c$

**13** Sea  $V$  el conjunto de Vitali si  $E \in \mu$ , demostrar que  $m(E) = 0$ .

**14** Demostrar que  $\mathbb{R} - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2}) \neq \emptyset$  donde  $r_n \in \mathbb{Q}$

Supongamos que  $\mathbb{R} - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2}) = \emptyset$

Entonces se sigue que  $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2})$

Entonces  $\infty = m(\mathbb{R}) = m\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2})\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2}{n^2} = L < \infty$  lo cual es una contradicción.