

Tareas de primer parcial-Topología

Alumnos:

Erick Román Montemayor Treviño - 1957959

Renata Capistrán Fuentes- 2079992

Diego Sanchez-

Everardo Flores Rivera - 2127301

26 de febrero de 2026

1 Sea X un conjunto y \mathcal{A} un anillo sobre X . Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Demostrar por inducción que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

El caso base fue demostrado en clase, ahora partiendo de la hipótesis inductiva, esto es:

$$\bigcap_{n=1}^{n=k} A_n \in \mathcal{A} \text{ veamos que se cumple para } n = k + 1$$

Podemos concluir que $\bigcap_{n=1}^{n=k+1} A_n = \bigcap_{n=1}^{n=k} A_n \cap A_{k+1} \in \mathcal{A}$ por la hipótesis inicial, la hipótesis inductiva y el caso base.

2 Hallar un anillo que no sea álgebra.

Sea $X = \mathbb{Z}$, $S = \{\emptyset\} \cup P(2\mathbb{Z})$, es fácil ver que S es anillo pero no es un álgebra ya que $X \notin S$

3 Sean X, Y conjuntos y S_y una σ -álgebra en Y . Sea $f : X \rightarrow Y$, demuestre que la colección $\{f^{-1}(B) : B \in S_y\}$ es una σ -álgebra

Sea $\mathcal{A} = \{f^{-1}(B) : B \in S_y\}$. Para demostrar que \mathcal{A} es una σ -álgebra en X , debemos verificar tres propiedades:

- ★ **El vacío está en \mathcal{A} :** Como S_y es una σ -álgebra en Y , por definición $\emptyset \in S_y$. Dado que la preimagen del conjunto vacío es el conjunto vacío, tenemos que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Por lo tanto, $\emptyset \in \mathcal{A}$.

★ **Cerradura bajo complementos:** Sea $A \in \mathcal{A}$. Por definición de nuestra colección, existe un conjunto $B \in S_y$ tal que $A = f^{-1}(B)$. El complemento de A en X es $A^c = X \setminus A = X \setminus f^{-1}(B)$.

Por propiedades de la preimagen, sabemos que el complemento de una preimagen es la preimagen del complemento:

$$X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$$

Como $B \in S_y$ y S_y es una σ -álgebra, su complemento $B^c = Y \setminus B \in S_y$. Al ser la preimagen de un elemento de S_y , concluimos que $A^c = f^{-1}(B^c) \in \mathcal{A}$.

★ **Cerradura de uniones numerables:** Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ una sucesión numerable de conjuntos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $B_n \in S_y$ tal que $A_n = f^{-1}(B_n)$.

La unión de la sucesión es:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$$

Por propiedades de la preimagen, la unión de preimágenes es la preimagen de la unión:

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \right)$$

Dado que S_y es una σ -álgebra y $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S_y$, por definición sabemos que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in S_y$.

Por lo tanto, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Al cumplir las tres propiedades, concluimos que \mathcal{A} es una σ -álgebra en X .

4 *Demostrar que $(0, 1] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n})$.*

Veamos que $(0, 1] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n})$.

Sea $x \in (0, 1]$, esto es $0 < x \leq 1$, se sigue que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < x \leq 1 < 1 + \frac{1}{n}$

Entonces $x \in (0, 1 + \frac{1}{n}) \forall n \in \mathbb{N}$

Entonces $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n})$

Ahora veamos la otra contención. Esto es que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n}) \subset (0, 1]$

Sea $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n})$, esto es: $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < x < 1 + \frac{1}{n}$.

De aqui es evidente que $0 < x \leq 1$. Ahora veamos que $x \not\geq 1$

Supongamos que $x > 1 \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{n_0}$ para algun $n_0 \in \mathbb{N}$. Ahora por principio Arquimideano tenemos lo siguiente: $\exists N > n_0 : 1 + \frac{1}{N} < 1 + \frac{1}{n_0} = x$. Entonces $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n})$ lo cual es una contradicción.

Esto demuestra la igualdad de los conjuntos.

5 Demostrar las 5 propiedades de F_σ y G_δ

- F_σ y G_δ son boleanos

Sabemos que todos los conjuntos abiertos son Boleanos por la definición, ademas sabemos que la intersección numerable de conjuntos de una σ -álgebra es elemento de la σ -álgebra, así G_δ es Boleano. Analogamente todos los cerrados son boleanos y por definición de σ -álgebra la union numerable de cerrados también, así F_σ es Boleano.

- Si A es F_σ , entonces $A^c = G_\delta$

El resultado se sigue directo de las leyes de Morgan.

- Si A es G_δ , entonces $A^c = F_\sigma$

De igual forma se sigue el resultado por las leyes de Morgan.

- La unión numerable de conjuntos F_σ es F_σ

La union de los elementos de una coleccion, cuyos elementos son uniones de cerrados, a su vez la union de uniones de cerrados, puede ser vista como una propia union de cerrados.

- La intersección numerable de conjuntos G_δ es G_δ

La intersección de los elementos de una colección, cuyos elementos son intersecciones de cerrados, a su vez la intersección de intersecciones de cerrados, puede ser vista como una propia intersección de cerrados.

6 Sea X conjunto y S σ -álgebra. Sean $x_0 \in X; E \in S$. Definimos $\mu_{x_0} : S \rightarrow [0, \infty]$ Como

$$\mu_{x_0}(E) = \begin{cases} 1, & x_0 \in E \\ 0, & x_0 \notin E \end{cases}$$

Demostrar que μ_{x_0} es medida.

7 Sea (X, μ, S) un esp. de medida y $E_{nn \in \mathbb{N}}$ una suc decreciente con respecto la contención en S . Si $\mu(E_1) < \infty$, demuestre que $\mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$
Se sabe que si $\{F_n\} \subset S$ es sucesión creciente, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n).$$

Sea la sucesión G_n tal que

$$G_n = E_1 - E_n.$$

P.D. $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es sucesión creciente.

Si tomamos G_1 y G_2 ,

$$G_1 = E_1 - E_1 = \emptyset,$$

$$G_2 = E_1 - E_2.$$

Pero $E_2 \subset E_1$, al menos que $E_1 = E_2$, por ende

$$G_1 \subset G_2$$

Supongamos que

$$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n.$$

P.D.

$$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n \subset G_{n+1}$$

$$G_{n+1} = E_1 - E_{n+1}$$

$$G_n = E_1 - E_n.$$

Tenemos que

$$E_{n+1} \subset E_n \subset E_1,$$

por conjuntos tenemos que

$$E_1 - E_{n+1} \supset E_1 - E_n \Rightarrow G_{n+1} \supset G_n.$$

Por lo tanto

$$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n \subset G_{n+1}.$$

es decir, $\{G_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente respecto a contención.

Entonces

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(G_n).$$

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (E_1 - E_n) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_1 - E_n).$$

$$\mu \left(E_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\mu(E_1) - \mu(E_n)] \quad \text{por teorema de conjuntos y un teorema de medida}$$

$$\mu(E_1) - \mu \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \mu(E_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$

por lo tanto

$$\mu \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n).$$

8 Sea $t \in \mathbb{R}$ y $A \subset \mathbb{R}$. Se define el conjunto

$$t \cdot A = \{ ta : a \in A \}.$$

y se conoce como *dilatcación de A*. Demostrar que $m^*(t \cdot A) = |t| \cdot m^*(A)$ Sea la coleccion $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, numerable tal que $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_n$ entonces $t \cdot A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} t \cdot I_n$. Se tiene que

$$m^*(t \cdot A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |t \cdot I_n| = |t| \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n|$$

entonces $m^*(t \cdot A) \leq |t| \cdot m^*(A)$ esto es por ínfimo para la otra desigualdad

$$m^*(A) = m^*((1/t) \cdot tA) \leq |1/t| m^*(t \cdot A)$$

el último paso es por la demostración de la primera parte, y multiplicando por t tenemos que

$$|t| \cdot m^*(A) \leq m^*(t \cdot A).$$

Por lo tanto $|t| \cdot m^*(A) = m^*(t \cdot A)$

9 Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R} : a < b \wedge c < d$.

Demostrar que $m^((a, b) \cup (c, d)) = (b - a) + (d - c)$ ssi $(a, b) \cap (c, d) \neq \emptyset$*

(\Rightarrow) Si $(a, b) \cap (c, d) \neq \emptyset$, por ende a,b,c,d son todos diferentes a lo mucho uno es igual a 0 entonces

$$(a, b) \cup (c, d) = (\min(a, c), \max(b, d)).$$

y

$$m^*((\min(a, c), \max(b, d))) = \max(b, d) - \min(a, c).$$

Se tiene que

$$\max(b, d) \leq b + d \quad \text{y} \quad \min(a, c) \geq a + c.$$

Luego

$$\max(b, d) - \min(a, c) < b + d - a - c = (b - a) + (d - c).$$

$$\Rightarrow m^*((a, b) \cup (c, d)) < (b - a) + (d - c).$$

por lo tanto

$$m^*((a, b) \cup (c, d)) = (b - a) + (d - c) \Rightarrow (a, b) \cap (c, d) = \emptyset.$$

(\Leftarrow)

$$m^*((a, b) \cup (c, d)) \leq (b - a) + (d - c)$$

por subaditividad.

Sean $I_1 = (a, b)$ y $I_2 = (c, d)$.

Como $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ y $I_1 \cup I_2 \subset \bigcup J_n$,

$$\sum |J_n| \geq (b-a) + (d-c),$$

porque

$$\sum |J_n| \geq (b-a) \quad \text{y} \quad \sum |J_n| \geq (d-c).$$

$$m^*(I_1 \cup I_2) \geq (b-a) + (d-c)$$

por definición de ínfimo. Por lo tanto

$$m^*((a,b) \cup (c,d)) = (b-a) + (d-c).$$

$$\iff (a,b) \cap (c,d) = \emptyset.$$

10 Si $A \in \mu$. Demostrar que $t + E \in \mu \forall t \in \mathbb{R}$

Sea $A = \{t + E : E \in \mu\}$ Si $E = \emptyset$

Entonces $t + E = \emptyset \in \mu$

$\therefore \emptyset \in A$

Si $t + E \in A$

$(t + E)^c = t + E^c \in A$ Ya que $E^c \in \mu$

Sea $\{t + E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$

Tenemos que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (t + E_n) = t + \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \in A$

$\therefore t + E \in \mu$

11 Demostrar que $E \subset \mathbb{R}$ es medible ssi $\forall \epsilon > 0 \exists U$ abto. en \mathbb{R} t.q $C \subset E \subset U \wedge m(U - C) < \epsilon$

\Rightarrow Si E es medible se sabe que si $\epsilon/2 > 0 \exists U$ abierto en \mathbb{R} tq. $E \subset U \Rightarrow m(U - E) < \epsilon/2$ y C cerrado tq. $C \subset E \Rightarrow m(C - E) < \epsilon/2$.

Sabemos que

$$m(U - C) = m((U - E) \cup (E - C)) \leq m(U - E) + m(E - C) \text{ por subaditividad}$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$$\therefore m(U - C) < \varepsilon$$

\Leftarrow P.D.

$$m(E) = m(U \cap E) + m(U \cap E^c), \quad E \subset U$$

$$E = (U \cap E) \cup (U \cap E^c) \text{ por conjuntos}$$

$$m(E) \leq m(U \cap E) + m(U \cap E^c) \text{ por subaditividad}$$

$$m(U \cap E) + m(U \cap E^c) = m(E) + m(U - E) < m(E) + \varepsilon \text{ por igualdad de conjuntos y la hipótesis}$$

$$\therefore m(U \cap E) + m(U \cap E^c) \leq m(E) \text{ por ser epsilon arbitrario}$$

$$\therefore m(E) = m(U \cap E) + m(U \cap E^c)$$

$$\therefore E \text{ es medible.}$$

12 Sea $E \subset [0, 1]$ medible con $m(E) > 0$. Demostrar $\exists x, y \in E : x > y$ tales que $x - y \in \mathbb{Q}^c$

Suponemos que $x - y \in \mathbb{Q} \forall x, y \in E$

$$\Rightarrow x - y = q \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = y + q \forall x, y \in E, q \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow x \in y + \mathbb{Q} \text{ o decir } E \subset y + \mathbb{Q}, y \in E$$

$\Rightarrow m(E) \leq m(y + \mathbb{Q}) = 0$ medida invariante bajo traslaciones

$\Rightarrow m(E) = 0$ contradicción

$\therefore \exists x, y \in E$ t.q. $x - y \in \mathbb{Q}^c$

13 Sea V el conjunto de Vitali si $E \in \mu$, demostrar que $m(E) = 0$.

14 Demostrar que $\mathbb{R} - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2}) \neq \emptyset$ donde $r_n \in \mathbb{Q}$

Supongamos que $\mathbb{R} - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2}) = \emptyset$

Entonces se sigue que $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2})$

Entonces $\infty = m(\mathbb{R}) = m(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2})) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{2}{n^2} = L < \infty$ lo cual es una contradicción.