Tareas de primer parcial-Topología

Alumnos:

Erick Román Montemayor Treviño - 1957959

Renata Capistrán Fuentes- 2079992

Diego -

Everardo Flores Rivera - 2127301

26 de febrero de 2026

1 *Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ un anillo sobre X. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Demostrar por inducción que* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

El caso base fue demostrado en clase, ahora partiendo de la hipótesis inductiva, esto es: $\bigcap\limits_{n=1}^{n=k} A_n \in \mathcal{A}$ veamos que se cumple para $n = k+1$

Podemos concluir que $\bigcap\limits_{n=1}^{n=k+1} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{n=k} A_n \bigcap\limits_{n=1} A_n \in \mathcal{A}$ por la hipótesis inicial, la hipótesis inductiva y el caso base.

2 *Hallar un anillo que no sea algebra.*

Sea $X = \mathbb{Z}$, $S = \{\varnothing\} \cup P(2\mathbb{Z})$, es fácil ver que S es anillo pero no es un álgebra ya que $X \notin S$

3 *Sean X, Y conjuntos y S_y una $\sigma-$álgebra en Y. Sea $f : X \to Y$, demuestre que la colección $\{f^{-1}(B) : B \in S_y\}$ es una $\sigma-$álgebra*

Sea $\mathcal{A} = \{f^{-1}(B) : B \in S_y\}$. Para demostrar que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra en X, debemos verificar tres propiedades:

- ⋆ **El vacío está en $\mathcal{A}$:** Como S_y es una σ-álgebra en Y, por definición $\emptyset \in S_y$. Dado que la preimagen del conjunto vacío es el conjunto vacío, tenemos que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Por lo tanto, $\emptyset \in \mathcal{A}$.

* $\star$ **Cerradura bajo complementos:** Sea $A \in \mathcal{A}$. Por definición de nuestra colección, existe un conjunto $B \in S_y$ tal que $A = f^{-1}(B)$. El complemento de A en X es $A^c = X \setminus A = X \setminus f^{-1}(B)$.

  Por propiedades de la preimagen, sabemos que el complemento de una preimagen es la preimagen del complemento:

$$X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$$

  Como $B \in S_y$ y S_y es una σ-álgebra, su complemento $B^c = Y \setminus B \in S_y$. Al ser la preimagen de un elemento de S_y, concluimos que $A^c = f^{-1}(B^c) \in \mathcal{A}$.

* $\star$ **Cerradura de uniones numerables:** Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ una sucesión numerable de conjuntos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $B_n \in S_y$ tal que $A_n = f^{-1}(B_n)$.

  La unión de la sucesión es:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$$

  Por propiedades de la preimagen, la unión de preimágenes es la preimagen de la unión:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$$

  Dado que S_y es una σ-álgebra y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S_y$, por definición sabemos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in S_y$. Por lo tanto, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Al cumplir las tres propiedades, concluimos que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra en X.

4 *Demostrar que* $(0,1] = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (0, 1+\frac{1}{n})$.

Veamos que $(0,1] \subset \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (0, 1+\frac{1}{n})$.

Sea $x \in (0,1]$, esto es $0 < x \leq 1$, se sigue que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < x \leq 1 < 1+\frac{1}{n}$

Entonces $x \in (0, 1+\frac{1}{n}) \forall n \in \mathbb{N}$

Entonces $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (0, 1+\frac{1}{n})$

Ahora veamos la otra contención. Esto es que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (0, 1+\frac{1}{n}) \subset (0,1]$

Sea $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (0, 1+\frac{1}{n})$, esto es: $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < x < 1+\frac{1}{n}$.

De aqui es evidente que $0 < x \leq 1$. Ahora veamos que $x \not> 1$

Supongamos que $x > 1 \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{n_0}$ para algun $n_0 \in \mathbb{N}$. Ahora por principio Arquimideano tenemos lo siguiente: $\exists N > n_0 : 1 + \frac{1}{N} < 1 + \frac{1}{n_0} = x$. Entonces $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n})$ lo cual es una contracción.

Esto demuestra la igualdad de los conjuntos.

5 *Demostrar las 5 propiedades de F_σ y G_δ*

- F_σ y G_δ son bolerianos

  Sabemos que todos los conjuntos abiertos son Bolerianos por la definición, ademas sabemos que la intersección numerable de conjuntos de una $\sigma - algebra$ es elemento de la $\sigma - algebra$, así G_δ es Boleriano. Analogamente todos los cerrados son bolerianos y por definición de $\sigma - algebra$ la union numerablede cerrados también, asi F_σ es Boleriano.

- Si A es F_σ, entonces $A^c = G_\delta$
- Si A es G_δ, entonces $A^c = F_\sigma$
- La union numerable de conjuntos F_σ es F_σ
- La intersección numerable de conjuntos G_δ es G_δ

6 *Sea X conjunto y S $\sigma - algebra$. Sean $x_0 \in X; E \in S$. Definimos $\mu_{x_0} : S \to [0, \infty]$ Como*

$$\mu_{x_0}(E) = \begin{cases} 1, & x_0 \in E \\ 0, & x_0 \notin E \end{cases}$$

Demostrar que μ_{x_0} es medida.

7 *Sea (X, μ, S) un esp. de medida y $E_{n n \in \mathbb{N}}$ una suc decreciente con respecto la contención en S. Si $\mu(E_1) < \infty$, demuestre que $\mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n)$*

Se sabe que si $\{F_n\} \subset S$ es sucesión creciente, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n \to \infty} \mu(F_n).$$

Sea la sucesión G_n tal que

$$G_n = E_1 - E_n.$$

P.D. $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión creciente.

Si tomamos G_1 y G_2,

$$G_1 = E_1 - E_1 = \varnothing,$$

$$G_2 = E_1 - E_2.$$

Pero $E_2 \subset E_1$, al menos que $E_1 = E_2$, por ende

$$G_1 \subset G_2$$

Supongamos que

$$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n.$$

P.D.

$$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n \subset G_{n+1}$$

$$G_{n+1} = E_1 - E_{n+1}$$

$$G_n = E_1 - E_n.$$

Tenemos que

$$E_{n+1} \subset E_n \subset E_1,$$

por conjuntos tenemos que

$$E_1 - E_{n+1} \supset E_1 - E_n \Rightarrow G_{n+1} \supset G_n.$$

Por lo tanto

$$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n \subset G_{n+1}.$$

es decir, $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente respecto a contención.

Entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(G_n).$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_1-E_n)\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_1-E_n).$$

$$\mu\left(E_1-\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\lim_{n\to\infty}[\mu(E_1)-\mu(E_n)] \quad \text{por teorema de conjuntos y un teorema de medida}$$

$$\mu(E_1)-\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\mu(E_1)-\lim_{n\to\infty}\mu(E_n).$$

por lo tanto

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n).$$

8 *Sea $t\in\mathbb{R}$ y $A\subset\mathbb{R}$. Se define el conjunto*

$$t\cdot A=\{\,ta:a\in A\,\}.$$

y se conoce como dilatcación de A. Demostrar que $m^*(t\cdot A)=|t|\cdot m^*(A)$ Sea la coleccion $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, numerable tal que $A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}I_n$ entonces $t\cdot A\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}t\cdot I_n$. Se tiene que

$$m^*(t\cdot A)\leq\sum_{n\in\mathbb{N}}|t\cdot I_n|=|t|\cdot\sum_{n\in\mathbb{N}}|I_n|$$

entonces $m^*(t\cdot A)\leq|t|\cdot m^*(A)$ esto es por ínfimo para la otra desigualdad

$$m^*(A)=m^*((1/t)\cdot tA)\leq|1/t|m^*(t\cdot A)$$

el último paso es por la demostración de la primera parte, y mulplicando por t tenemos que $|t|\cdot m^*(A)\leq m^*(t\cdot A)$.

Por lo tanto $|t|\cdot m^*(A)=m^*(t\cdot A)$

9 *Sean $a,b,c,d\in\mathbb{R}:a<b\wedge c<d$.*

Demostrar que $m^*((a,b)\cup(c,d))=(b-a)+(d-c)$ ssi $(a,b)\cap(c,d)\neq\emptyset$

($\Rightarrow$) Si $(a,b)\cap(c,d)\neq\varnothing$, por ende a,b,c,d son todos diferentes a lo mucho uno es igual a 0 entonces

$$(a,b) \cup (c,d) = (\text{mín}(a,c), \text{máx}(b,d)).$$

y

$$m^*((\text{mín}(a,c), \text{máx}(b,d))) = \text{máx}(b,d) - \text{mín}(a,c).$$

Se tiene que

$$\text{máx}(b,d) \leq b + d \qquad \text{y} \qquad \text{mín}(a,c) \geq a + c.$$

Luego

$$\text{máx}(b,d) - \text{mín}(a,c) < b + d - a - c = (b-a) + (d-c).$$

$$\Rightarrow m^*((a,b) \cup (c,d)) < (b-a) + (d-c).$$

por lo tanto

$$m^*((a,b) \cup (c,d)) = (b-a) + (d-c) \Rightarrow (a,b) \cap (c,d) = \varnothing.$$

$(\Leftarrow)$

$$m^*((a,b) \cup (c,d)) \leq (b-a) + (d-c)$$

por subaditividad.

Sean $I_1 = (a,b)$ y $I_2 = (c,d)$.

Como $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ y $I_1 \cup I_2 \subset \bigcup J_n$,

$$\sum |J_n| \geq (b-a) + (d-c),$$

porque

$$\sum |J_n| \geq (b-a) \qquad \text{y} \qquad \sum |J_n| \geq (d-c).$$

$$m^*(I_1 \cup I_2) \geq (b-a) + (d-c)$$

por definición de ínfimo. Por lo tanto

$$m^*((a,b) \cup (c,d)) = (b-a) + (d-c).$$

$$\iff (a,b)\cap(c,d)=\varnothing.$$

10 *Si $A\in\mu$. Demostrar que $t+E\in\mu$ $\forall t\in\mathbb{R}$*

11 *Demostrar que $E\subset\mathbb{R}$ es medible ssi $\forall\epsilon>0\exists U$ abto. en $\mathbb{R}$ t.q $C\subset E\subset U\wedge m(U-C)<\epsilon$*

$\Rightarrow$ Si E es medible se sabe que si $\varepsilon/2>0$ $\exists U$ abierto en $\mathbb{R}$ tq. $E\subset U\Rightarrow m(U-E)<\varepsilon/2$ y C cerrado tq. $C\subset E\Rightarrow m(C-E)<\varepsilon/2$.

Sabemos que

$$m(U-C)=m((U-E)\cup(E-C))\leq m(U-E)+m(E-C) \text{ por subaditividad}$$

$$<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$$

$$\therefore m(U-C)<\varepsilon$$

$\Leftarrow$ P.D.

$$m(E)=m(U\cap E)+m(U\cap E^c),\quad E\subset U$$

$$E=(U\cap E)\cup(U\cap E^c) \text{ por conjuntos}$$

$$m(E)\leq m(U\cap E)+m(U\cap E^c) \text{ por subaditividad}$$

$$m(U\cap E)+m(U\cap E^c)=m(E)+m(U-E)<m(E)+\varepsilon \text{ por igualdad de conjuntos y la hipótesis}$$

$$\therefore m(U\cap E)+m(U\cap E^c)\leq m(E) \text{ por ser epsilon arbritario}$$

$$\therefore m(E)=m(U\cap E)+m(U\cap E^c)$$

$$\therefore E \text{ es medible.}$$

12 *Sea $E \subset [0,1]$ medible con $m(E) > 0$. Demostrar $\exists x, y \in E : x > y$ tales que $x - y \in \mathbb{Q}^c$*

Suponemos que $x - y \in \mathbb{Q}\ \forall x, y \in E$

$$\Rightarrow x - y = q \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = y + q\ \forall x, y \in E,\ q \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow x \in y + \mathbb{Q} \text{ o decir } E \subset y + \mathbb{Q},\ y \in E$$

$$\Rightarrow m(E) \leq m(y + \mathbb{Q}) = 0 \quad \text{medida invariante bajo traslaciones}$$

$$\Rightarrow m(E) = 0 \text{ contradicción}$$

$$\therefore \exists x, y \in E \text{ t.q. } x - y \in \mathbb{Q}^c$$

13 *Sea V el conjunto de Vitali si $E \in \mu$, demostrar que $m(E) = 0$.*

14 *Demostrar que $\mathbb{R} - \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2}) \neq \emptyset$ donde $r_n \in \mathbb{Q}$*

Supongamos que $\mathbb{R} - \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2}) = \emptyset$

Entonces se sigue que $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2})$

Entonces $\infty = m(\mathbb{R}) = m(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2})) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{2}{n^2} = L < \infty$ lo cual es una contradicción.