Tareas de primer parcial-Topología

Alumnos:

Erick Román Montemayor Treviño - 1957959

Renata Capistrán Fuentes- 2079992

Diego Sanchez-

Everardo Flores Rivera - 2127301

26 de febrero de 2026

1 *Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ un anillo sobre X. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Demostrar por inducción que* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

El caso base fue demostrado en clase, ahora partiendo de la hipótesis inductiva, esto es: $\bigcap_{n=1}^{n=k} A_n \in \mathcal{A}$ veamos que se cumple para $n = k+1$

Podemos concluir que $\bigcap_{n=1}^{n=k+1} A_n = \bigcap_{n=1}^{n=k} A_n \bigcap_{n=1} A_n \in \mathcal{A}$ por la hipótesis inicial, la hipótesis inductiva y el caso base.

2 *Hallar un anillo que no sea algebra.*

Sea $X = \mathbb{Z}$, $S = \{\varnothing\} \cup P(2\mathbb{Z})$, es fácil ver que S es anillo pero no es un álgebra ya que $X \notin S$

3 *Sean X, Y conjuntos y S_y una $\sigma-$álgebra en Y. Sea $f : X \to Y$, demuestre que la colección $\{f^{-1}(B) : B \in S_y\}$ es una $\sigma-$álgebra*

Sea $\mathcal{A} = \{f^{-1}(B) : B \in S_y\}$. Para demostrar que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra en X, debemos verificar tres propiedades:

- ⋆ **El vacío está en $\mathcal{A}$:** Como S_y es una σ-álgebra en Y, por definición $\emptyset \in S_y$. Dado que la preimagen del conjunto vacío es el conjunto vacío, tenemos que $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Por lo tanto, $\emptyset \in \mathcal{A}$.

- ⋆ **Cerradura bajo complementos:** Sea $A \in \mathcal{A}$. Por definición de nuestra colección, existe un conjunto $B \in S_y$ tal que $A = f^{-1}(B)$. El complemento de A en X es $A^c = X \setminus A = X \setminus f^{-1}(B)$.

  Por propiedades de la preimagen, sabemos que el complemento de una preimagen es la preimagen del complemento:

  $$X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$$

  Como $B \in S_y$ y S_y es una σ-álgebra, su complemento $B^c = Y \setminus B \in S_y$. Al ser la preimagen de un elemento de S_y, concluimos que $A^c = f^{-1}(B^c) \in \mathcal{A}$.

- ⋆ **Cerradura de uniones numerables:** Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ una sucesión numerable de conjuntos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $B_n \in S_y$ tal que $A_n = f^{-1}(B_n)$.

  La unión de la sucesión es:

  $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n)$$

  Por propiedades de la preimagen, la unión de preimágenes es la preimagen de la unión:

  $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right)$$

  Dado que S_y es una σ-álgebra y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S_y$, por definición sabemos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in S_y$. Por lo tanto, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Al cumplir las tres propiedades, concluimos que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra en X.

4 *Demostrar que* $(0,1] = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n})$.

Veamos que $(0,1] \subset \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n})$.

Sea $x \in (0,1]$, esto es $0 < x \leq 1$, se sigue que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < x \leq 1 < 1 + \frac{1}{n}$

Entonces $x \in (0, 1 + \frac{1}{n}) \forall n \in \mathbb{N}$

Entonces $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n})$

Ahora veamos la otra contención. Esto es que $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n}) \subset (0,1]$

Sea $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n})$, esto es: $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < x < 1 + \frac{1}{n}$.

De aqui es evidente que $0 < x \leq 1$. Ahora veamos que $x \not> 1$

Supongamos que $x > 1 \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{n_0}$ para algun $n_0 \in \mathbb{N}$. Ahora por principio Arquimideano tenemos lo siguiente: $\exists N > n_0 : 1 + \frac{1}{N} < 1 + \frac{1}{n_0} = x$. Entonces $x \notin \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n})$ lo cual es una contracción.

Esto demuestra la igualdad de los conjuntos.

5 *Demostrar las 5 propiedades de F_σ y G_δ*

- F_σ y G_δ son bolerianos

  Sabemos que todos los conjuntos abiertos son Bolerianos por la definición, ademas sabemos que la intersección numerable de conjuntos de una $\sigma - algebra$ es elemento de la $\sigma - algebra$, así G_δ es Boleriano. Analogamente todos los cerrados son bolerianos y por definición de $\sigma - algebra$ la union numerablede cerrados también, asi F_σ es Boleriano.

- Si A es F_σ, entonces $A^c = G_\delta$

  El resultado se sigue directo de las leyes de Morgan.

- Si A es G_δ, entonces $A^c = F_\sigma$

  De igual forma se sigue el resultado por las leyes de Morgan.

- La unión numerable de conjuntos F_σ es F_σ

  La union de los elementos de una coleccion, cuyos elementos son uniones de cerrados, a su vez la union de uniones de cerrados, puede ser vista como una propia union de cerrados.

- La intersección numerable de conjuntos G_δ es G_δ

  La intersección de los elementos de una colección, cuyos elementos son intersecciones de cerrados, a su vez la intersección de intersecciones de cerrados, puede ser vista como una propia intersección de cerrados.

6 *Sea X conjunto y S $\sigma - algebra$. Sean $x_0 \in X; E \in S$. Definimos $\mu_{x_0} : S \to [0, \infty]$ Como*

$$\mu_{x_0}(E) = \begin{cases} 1, & x_0 \in E \\ 0, & x_0 \notin E \end{cases}$$

Demostrar que μ_{x_0} es medida.

* Medida del vacío: Por vacuidad, sabemos que el conjunto vacío no contiene elementos, luego $x_0 \notin \emptyset$. Por la definición de nuestra función, esto implica directamente que:

$$\mu_{x_0}(\emptyset) = 0$$

* σ-aditividad: Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de conjuntos en S ajenos por pares (es decir, $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$). Queremos demostrar que $\mu_{x_0}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_{x_0}(E_n)$.

  Analizamos por casos:

  Caso 1: Suponga que $x_0 \notin E_n \forall n \in \mathbb{N}$.

  Si x_0 no está en ningún conjunto de la sucesión, entonces tampoco está en su unión, por lo que $x_0 \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Evaluando la función, tenemos que $\mu_{x_0}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = 0$. Por otro lado, la suma de las medidas es $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_{x_0}(E_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0$. Ambos lados son iguales a cero, por lo que la igualdad se cumple.

  Caso 2: Suponga que existe un índice $k \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \in E_k$.

  Al pertenecer a E_k, evidentemente $x_0 \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, lo que implica que la medida de la unión es $\mu_{x_0}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) = 1$. Ahora, como los conjuntos son **ajenos por pares**, x_0 no puede pertenecer a ningún otro conjunto E_j con $j \neq k$. Por lo tanto, $\mu_{x_0}(E_k) = 1$ y $\mu_{x_0}(E_j) = 0$ para todo $j \neq k$. Al hacer la suma infinita obtenemos:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_{x_0}(E_n) = \mu_{x_0}(E_k) + \sum_{j\neq k} \mu_{x_0}(E_j) = 1 + 0 = 1$$

  Ambos lados de la ecuación son iguales a 1, demostrando la igualdad.

7 *Sea (X, μ, S) un esp. de medida y $E_{n n\in\mathbb{N}}$ una suc decreciente con respecto la contención en S. Si $\mu(E_1) < \infty$, demuestre que $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$*

Se sabe que si $\{F_n\} \subset S$ es sucesión creciente, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n).$$

Sea la sucesión G_n tal que

$$G_n = E_1 - E_n.$$

P.D. $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es sucesión creciente.

Si tomamos G_1 y G_2,

$$G_1 = E_1 - E_1 = \varnothing,$$

$$G_2 = E_1 - E_2.$$

Pero $E_2 \subset E_1$, al menos que $E_1 = E_2$, por ende

$$G_1 \subset G_2$$

Supongamos que

$$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n.$$

P.D.

$$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n \subset G_{n+1}$$

$$G_{n+1} = E_1 - E_{n+1}$$

$$G_n = E_1 - E_n.$$

Tenemos que

$$E_{n+1} \subset E_n \subset E_1,$$

por conjuntos tenemos que

$$E_1 - E_{n+1} \supset E_1 - E_n \Rightarrow G_{n+1} \supset G_n.$$

Por lo tanto

$$G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_n \subset G_{n+1}.$$

es decir, $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente respecto a contención.

Entonces

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(G_n).$$

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_1 - E_n)\right) = \lim_{n\to\infty}\mu(E_1 - E_n).$$

$$\mu\left(E_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left[\mu(E_1) - \mu(E_n)\right] \quad \text{por teorema de conjuntos y un teorema de medida}$$

$$\mu(E_1) - \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu(E_1) - \lim_{n\to\infty}\mu(E_n).$$

por lo tanto

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty}\mu(E_n).$$

8 *Sea $t \in \mathbb{R}$ y $A \subset \mathbb{R}$. Se define el conjunto*

$$t \cdot A = \{\, ta : a \in A \,\}.$$

y se conoce como dilatcación de A. Demostrar que $m^*(t \cdot A) = |t| \cdot m^*(A)$ Sea la coleccion $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, numerable tal que $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_n$ entonces $t \cdot A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} t \cdot I_n$. Se tiene que

$$m^*(t \cdot A) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |t \cdot I_n| = |t| \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} |I_n|$$

entonces $m^*(t \cdot A) \leq |t| \cdot m^*(A)$ esto es por ínfimo para la otra desigualdad

$$m^*(A) = m^*((1/t) \cdot tA) \leq |1/t| m^*(t \cdot A)$$

el último paso es por la demostración de la primera parte, y mulplicando por t tenemos que $|t| \cdot m^*(A) \leq m^*(t \cdot A)$.

Por lo tanto $|t| \cdot m^*(A) = m^*(t \cdot A)$

9 *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R} : a < b \wedge c < d$.*

Demostrar que $m^*((a, b) \cup (c, d)) = (b - a) + (d - c)$ ssi $(a, b) \cap (c, d) \neq \emptyset$

$(\Rightarrow)$ Si $(a, b) \cap (c, d) \neq \varnothing$, por ende a,b,c,d son todos diferentes a lo mucho uno es igual a 0 entonces

$$(a,b)\cup(c,d)=(\text{mín}(a,c),\text{máx}(b,d)).$$

y

$$m^*((\text{mín}(a,c),\text{máx}(b,d)))=\text{máx}(b,d)-\text{mín}(a,c).$$

Se tiene que

$$\text{máx}(b,d)\leq b+d \qquad \text{y} \qquad \text{mín}(a,c)\geq a+c.$$

Luego

$$\text{máx}(b,d)-\text{mín}(a,c)<b+d-a-c=(b-a)+(d-c).$$

$$\Rightarrow m^*((a,b)\cup(c,d))<(b-a)+(d-c).$$

por lo tanto

$$m^*((a,b)\cup(c,d))=(b-a)+(d-c)\Rightarrow(a,b)\cap(c,d)=\varnothing.$$

$(\Leftarrow)$

$$m^*((a,b)\cup(c,d))\leq(b-a)+(d-c)$$

por subaditividad.

Sean $I_1=(a,b)$ y $I_2=(c,d)$.

Como $I_1\cap I_2=\varnothing$ y $I_1\cup I_2\subset\bigcup J_n$,

$$\sum|J_n|\geq(b-a)+(d-c),$$

porque

$$\sum|J_n|\geq(b-a) \qquad \text{y} \qquad \sum|J_n|\geq(d-c).$$

$$m^*(I_1\cup I_2)\geq(b-a)+(d-c)$$

por definición de ínfimo. Por lo tanto

$$m^*((a,b)\cup(c,d))=(b-a)+(d-c).$$

$$\iff (a,b) \cap (c,d) = \varnothing.$$

10 *Si $A \in \mu$. Demostrar que $t + E \in \mu$ $\forall t \in \mathbb{R}$*

Sea $A = \{t + E : E \in \mu\}$ Si $E = \emptyset$

Entonces $t + E = \emptyset \in \mu$

$\therefore \emptyset \in A$

Si $t + E \in A$

$(t + E)^c = t + E^c \in A$ Ya que $E^c \in \mu$

Sea $\{t + E_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A$

Tenemos que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (t + E_n) = t + \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \in A$

$\therefore t + E \in \mu$

11 *Demostrar que $E \subset \mathbb{R}$ es medible ssi $\forall \epsilon > 0 \exists U$ abto. en $\mathbb{R}$ t.q $C \subset E \subset U \wedge m(U - C) < \epsilon$*

$\Rightarrow$ Si E es medible se sabe que si $\varepsilon/2 > 0$ $\exists U$ abierto en $\mathbb{R}$ tq. $E \subset U \Rightarrow m(U - E) < \varepsilon/2$ y C cerrado tq. $C \subset E \Rightarrow m(C - E) < \varepsilon/2$.

Sabemos que

$$m(U - C) = m((U - E) \cup (E - C)) \leq m(U - E) + m(E - C) \text{ por subaditividad}$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$$\therefore m(U - C) < \varepsilon$$

$\Leftarrow$ P.D.

$$m(E) = m(U \cap E) + m(U \cap E^c), \quad E \subset U$$

$$E = (U \cap E) \cup (U \cap E^c) \text{ por conjuntos}$$

$$m(E) \leq m(U \cap E) + m(U \cap E^c) \text{ por subaditividad}$$

$$m(U\cap E)+m(U\cap E^c) = m(E)+m(U-E) < m(E)+\varepsilon \text{ por igualdad de conjuntos y la hipótesis}$$

$$\therefore m(U \cap E) + m(U \cap E^c) \leq m(E) \text{ por ser epsilon arbritario}$$

$$\therefore m(E) = m(U \cap E) + m(U \cap E^c)$$

$$\therefore E \text{ es medible.}$$

12 *Sea $E \subset [0,1]$ medible con $m(E) > 0$. Demostrar $\exists x, y \in E : x > y$ tales que $x - y \in \mathbb{Q}^c$*

Suponemos que $x - y \in \mathbb{Q}\ \forall x, y \in E$

$$\Rightarrow x - y = q \in \mathbb{Q} \Rightarrow x = y + q\ \forall x, y \in E,\ q \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow x \in y + \mathbb{Q} \text{ o decir } E \subset y + \mathbb{Q},\ y \in E$$

$$\Rightarrow m(E) \leq m(y + \mathbb{Q}) = 0 \quad \text{medida invariante bajo traslaciones}$$

$$\Rightarrow m(E) = 0 \text{ contradicción}$$

$$\therefore \exists x, y \in E \text{ t.q. } x - y \in \mathbb{Q}^c$$

13 *Sea V el conjunto de Vitali si $E \in \mu$, demostrar que $m(E) = 0$.*

14 *Demostrar que $\mathbb{R} - \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2}) \neq \emptyset$ donde $r_n \in \mathbb{Q}$*

Supongamos que $\mathbb{R} - \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2}) = \emptyset$

Entonces se sigue que $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2})$

Entonces $\infty = m(\mathbb{R}) = m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2})) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{2}{n^2} = L < \infty$ lo cual es una contradicción.