Tareas de primer parcial-Topología

Alumnos:

Erick Román Montemayor Treviño - 1957959

Renata - 1956093

Diego -

Everardo Flores Rivera - 2127301

26 de enero de 2026

1 *Sea X un conjunto y $\mathcal{A}$ un anillo sobre X. Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Demostrar por inducción que* $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$

El caso base fue demostrado en clase, ahora partiendo de la hipótesis inductiva, esto es:
$\bigcap\limits_{n=1}^{n=k} A_n \in \mathcal{A}$ veamos que se cumple para $n = k+1$

Podemos concluir que $\bigcap\limits_{n=1}^{n=k+1} A_n \in \mathcal{A} = \bigcap\limits_{n=1}^{n=k} A_n \bigcap\limits_{n=1} A_n \in \mathcal{A}$ por la hipótesis inicial, la hipótesis inductiva y el caso base.

2 *Hallar un anillo que no sea algebra.*

Sea $X = \mathbb{Z}$, $S = \{\varnothing\} \cup P(2\mathbb{Z})$, es fácil ver que S es anillo pero no es un álgebra ya que $X \notin S$

3 *Sean X, Y conjuntos y S_y una $\sigma-$álgebra en Y. Sea $f : X \to Y$, demuestre que la colección $\{f^{-1}(B) : B \in S_y\}$ es una $\sigma-$álgebra*

4 *Demostrar que* $(0,1] = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n})$.

Veamos que $(0,1] \subset \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n})$.

Sea $x \in (0,1]$, esto es $0 < x \leq 1$, por propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}\ t.q\ \forall n \geq N\ 0 < \frac{1}{n} \leqslant x < 1$ entonces $x \in [\frac{1}{n}, 1)$ entonces $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}-\{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$

Por tanto $(0,1) \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}-\{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$

Ahora veamos la otra contención.

Sea $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}-\{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$, entonces $0 < \frac{1}{n_0} \leq x < 1$ para algun $n_0 \in \mathbb{N} - \{1\}$

$x \in (0,1)$

Por tanto $(0,1) \supset \bigcup_{n \in \mathbb{N}-\{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$

Esto demuestra la igualdad de los conjuntos.

5 *Demostrar las 5 propiedades de* F_σ *y* G_δ

- F_σ y G_δ son bolerianos

  Sabemos que todos los conjuntos abiertos son Bolerianos por la definición, ademas sabemos que la intersección numerable de conjuntos de una $\sigma - algebra$ es elemento de la $\sigma - algebra$, así G_δ es Boleriano. Analogamente todos los cerrados son bolerianos y por definición de $\sigma - algebra$ la union numerablede cerrados también, asi F_σ es Boleriano.

- Si A es F_σ, entonces $A^c = G_\delta$

- Si A es G_δ, entonces $A^c = F_\sigma$

- La union numerable de conjuntos F_σ es F_σ

- La intersección numerable de conjuntos G_δ es G_δ

6 *Sea X conjunto y S* $\sigma - algebra$*. Sean* $x_0 \in X; E \in S$*. Definimos* $\mu_{x_0} : S \to [0, \infty]$ *Como*

$$\mu_{x_0}(E) = \begin{cases} 1, & x_0 \in E \\ 0, & x_0 \notin E \end{cases}$$

Demostrar que μ_{x_0} *es medida.*