

# Tareas de primer parcial-Topología

Alumnos:

Erick Román Montemayor Treviño - 1957959

Renata - 1956093

Diego -

Everardo Flores Rivera - 2127301

25 de febrero de 2026

**1** Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{A}$  un anillo sobre  $X$ . Sea  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Demostrar por inducción que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

El caso base fue demostrado en clase, ahora partiendo de la hipótesis inductiva, esto es:

$$\bigcap_{n=1}^{n=k} A_n \in \mathcal{A} \text{ veamos que se cumple para } n = k + 1$$

Podemos concluir que  $\bigcap_{n=1}^{n=k+1} A_n = \bigcap_{n=1}^{n=k} A_n \cap A_{k+1} \in \mathcal{A}$  por la hipótesis inicial, la hipótesis inductiva y el caso base.

**2** Hallar un anillo que no sea álgebra.

Sea  $X = \mathbb{Z}$ ,  $S = \{\emptyset\} \cup P(2\mathbb{Z})$ , es fácil ver que  $S$  es anillo pero no es un álgebra ya que  $X \notin S$

**3** Sean  $X, Y$  conjuntos y  $S_y$  una  $\sigma$ -álgebra en  $Y$ . Sea  $f : X \rightarrow Y$ , demuestre que la colección  $\{f^{-1}(B) : B \in S_y\}$  es una  $\sigma$ -álgebra

**4** Demostrar que  $(0, 1] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n})$ .

Veamos que  $(0, 1] \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n})$ .

Sea  $x \in (0, 1]$ , esto es  $0 < x \leq 1$ , se sigue que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < x \leq 1 < 1 + \frac{1}{n}$

Entonces  $x \in (0, 1 + \frac{1}{n}) \forall n \in \mathbb{N}$

Entonces  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n})$

Ahora veamos la otra contención. Esto es que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n}) \subset (0, 1]$

Sea  $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n})$ , esto es:  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < x < 1 + \frac{1}{n}$ .

De aquí es evidente que  $0 < x \leq 1$ . Ahora veamos que  $x \neq 1$

Supongamos que  $x > 1 \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{n_0}$  para algún  $n_0 \in \mathbb{N}$ . Ahora por principio Arquimideano tenemos lo siguiente:  $\exists N > n_0 : 1 + \frac{1}{N} < 1 + \frac{1}{n_0} = x$ . Entonces  $x \notin \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (0, 1 + \frac{1}{n})$  lo cual es una contradicción.

Esto demuestra la igualdad de los conjuntos.

## 5 Demostrar las 5 propiedades de $F_\sigma$ y $G_\delta$

- $F_\sigma$  y  $G_\delta$  son boleanos

Sabemos que todos los conjuntos abiertos son Boleanos por la definición, además sabemos que la intersección numerable de conjuntos de una  $\sigma$ -álgebra es elemento de la  $\sigma$ -álgebra, así  $G_\delta$  es Boleano. Análogamente todos los cerrados son boleanos y por definición de  $\sigma$ -álgebra la unión numerable de cerrados también, así  $F_\sigma$  es Boleano.

- Si  $A$  es  $F_\sigma$ , entonces  $A^c = G_\delta$
- Si  $A$  es  $G_\delta$ , entonces  $A^c = F_\sigma$
- La unión numerable de conjuntos  $F_\sigma$  es  $F_\sigma$
- La intersección numerable de conjuntos  $G_\delta$  es  $G_\delta$

## 6 Sea $X$ conjunto y $S$ $\sigma$ -álgebra. Sean $x_0 \in X; E \in S$ . Definimos $\mu_{x_0} : S \rightarrow [0, \infty]$ Como

$$\mu_{x_0}(E) = \begin{cases} 1, & x_0 \in E \\ 0, & x_0 \notin E \end{cases}$$

Demostrar que  $\mu_{x_0}$  es medida.

## 7 Sea $(X, \mu, S)$ un esp. de medida y $E_{n \in \mathbb{N}}$ una suc decreciente con respecto a la contención en $S$ . Si $\mu(E_1) < \infty$ , demuestre que $\mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n)$

**8** Sea  $t \in \mathbb{R}$  y  $A \subset \mathbb{R}$ . Se define el conjunto

$$t \cdot A = \{ta : a \in A\}.$$

y se conoce como dilatcación de  $A$ . Demostrar que  $m^*(t \cdot A) = |t| \cdot m^*(A)$  Sea la coleccion  $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , numerable tal que  $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_n$  entonces  $t \cdot A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} t \cdot I_n$ . Se tiene que

$$m^*(t \cdot A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |t \cdot I_n| = |t| \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} |I_n|$$

entonces  $m^*(t \cdot A) \leq |t| \cdot m^*(A)$  esto es por ínfimo para la otra desigualdad

$$m^*(A) = m^*((1/t) \cdot tA) \leq |1/t| m^*(t \cdot A)$$

el último paso es por la demostración de la primera parte, y mulplicando por t tenemos que  $|t| \cdot m^*(A) \leq m^*(t \cdot A)$ .

Por lo tanto  $|t| \cdot m^*(A) = m^*(t \cdot A)$

**9** Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{R} : a < b \wedge c < d$ .

Demostrar que  $m^*((a, b) \cup (c, d)) = (b - a) + (d - c)$  ssi  $(a, b) \cap (c, d) \neq \emptyset$

**10** Si  $A \in \mu$ . Demostrar que  $t + E \in \mu \forall t \in \mathbb{R}$

**11** Demostrar que  $E \subset \mathbb{R}$  es medible ssi  $\forall \epsilon > 0 \exists U$  abto. en  $\mathbb{R}$  t.q  $C \subset E \subset U \wedge m(U - C) < \epsilon$

**12** Sea  $E \subset [0, 1]$  medible con  $m(E) > 0$ . Demostrar  $\exists x, y \in E : x > y$  tales que  $x - y \in \mathbb{Q}^c$

**13** Sea  $V$  el conjunto de Vitali si  $E \in \mu$ , demostrar que  $m(E) = 0$ .

**14** Demostrar que  $\mathbb{R} - \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2}) \neq \emptyset$  donde  $r_n \in \mathbb{Q}$