Tareas de primer parcial-Topología

Alumnos:
Arturo Rodriguez Contreras - 2132880
Jonathan Raymundo Torres Cardenas - 1949731
Praxedis Jimenes Ruvalcaba
Erick Román Montemayor Treviño - 1957959
Alexis Noe Mora Leyva
Everardo Flores Rivera - 2127301

24 de febrero de 2025

1 *¿Es la unión de topologías una topología?*

Sea $X = \{a, b, c\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$ se tiene que τ_1 es topología ya que contiene al conjunto vacio, X, contiene las uniones arbitrarias $\{a\} \cup X = X \in \tau_1$, y tambien $\{a\} \cup \emptyset = \{a\} \in \tau_1$ y $\emptyset \cup X = X \in \tau_1$ y contiene a las intersecciones finitas de sus elementos, de igual forma se sigue que τ_2 es topologia de X. La union de las dos topologías es $U = \tau_1 \cup \tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$ lo cual no es topología, ya que $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin U$, por lo tanto, no necesariamente la unión de topologías es una topología.

2 *Demostrar que $\tau_{\mathbb{N}}$ es topologia.*

Se tiene por definicion que $\{\emptyset, X\} \subset \tau_{\mathbb{N}}$. Ahora, sea $\{U_a\}_{a \in J}$ una coleccion de elementos en $\tau_{\mathbb{N}}$, y $U = \bigcup_{a \in J} U_a$. Queremos ver que $U \in \tau_{\mathbb{N}}$, para esto observemos que $X - U = (\bigcup_{a \in J} U_a)^c$ por leyes de De Morgan es igual a $\bigcap_{a \in J} U_a^c$, sabemos por teorema que la intersección arbitraria de conjuntos contables es tambien contable, entonces $\bigcap_{a \in J} U_a^c \in \tau_{\mathbb{N}}$.

Luego, tomemos$\{U_a\}_{a \in J}$ una colección finita de elementos en $\tau_{\mathbb{N}}$, y sea $U = \bigcap_{a \in J} U_a$ entonces tenemos $X - U = (\bigcap_{a \in J} U_a)^c$ por leyes de DeMorgan es igual a $\bigcup_{a \in J} U_a^c$ y por teorema la union finita de conjuntos contables es tambien contable. Entonces $X - U$ es contable, por lo cual se tiene que $U \in \tau_{\mathbb{N}}$ entonces $\tau_{\mathbb{N}}$ esta cerrado por intersección finita, como consequente es una topología.

3 *Verificar si* τ_∞ *es topologia.*

Sea $X = \mathbb{R}$, sea $U_1 = (-\infty, 0), U_2 = (0, \infty)$, claramente $U_1, U_2 \in \tau_{\mathbb{N}}$, pero $U = U_1 \cup U_2 = (\infty, 0) \cup (0, \infty) \notin \tau_\infty$ ya que $\mathbb{R} - U = \{0\}$ no es infinito. Por lo tanto no cumple el axioma de uniones arbitrarias de topología.
$\therefore \tau_\infty$ no es topología.

4 *Demostrar que* $(0,1) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}-\{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$.

$(\subset)$

Sea $x \in (0,1)$, esto es $0 < x < 1$, por propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ $t.q$ $\forall n \geq N$ $0 < \frac{1}{n} \leqslant x < 1$ entonces $x \in [\frac{1}{n}, 1)$ entonces $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}-\{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$
$\therefore (0,1) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}-\{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$

$(\supset)$

Sea $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}-\{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$, entonces $0 < \frac{1}{n_0} \leq x < 1$ para algun $n_0 \in \mathbb{N} - \{1\}$
$x \in (0,1)$
$\therefore (0,1) \supset \bigcup_{n \in \mathbb{N}-\{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$

5 *Verificar que* β_K *satisface el teorema de creación de topologías.*

6 *Verificar que* $B_S = \{(a,b] : a < b\}$ *es base de algunas topologias*

7 *Verificar las comparaciones entre* τ_S, τ_L *y entre* τ_S, τ_K

8 *Demostrar si* $\tau_{\mathbb{R}^2} = \tau_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$

9 *Terminar paso inductivo del teorema de las proyecciones*

10 *Demuestra que* $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

$(\subset)$

Sea $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$. Por definición de intersección $(x, y) \in A \times B$ y $(x, y) \in C \times D$. Además, por definición de producto cruz $x \in A$ y $y \in B$, $x \in C$ y $y \in D$. Reescribiendo obtenemos $x \in A$ y $x \in C$, $y \in B$ y $y \in D$ *i.e.* $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.

$(\supset)$

De forma análoga, sea $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \times D)$ luego $x \in A$ y $y \in B$, $x \in C$ y $y \in D$ y $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$.

11 *Verificar que la topologia del orden* $\tau(\beta_O)$ *es topología.*

12 *Verificar si en* $\mathbb{N}$, $\tau_O = \tau_d$.

Veamos que las topologías coinciden.

Sea $U \in \tau_O$, observe que $U = \cup_{x \in U}\{x\}$ es una unión de básicos de τ_d *i.e.* $\tau_O \subset \tau_d$.

De forma análoga, sea $U \in \tau_d$, y $I_x = (x-1, x+1)$ si $x \neq 1$, $I_1 = [1, 2)$. Note que $U = \cup_{x \in U} I_x$ es una unión de basicos de τ_O y por tanto $\tau_d \subset \tau_O$. Esto demuestra que, en $\mathbb{N}$, $\tau_O = \tau_d$.

13 *Verificar que el orden lexicografico genera un orden en* $\mathbb{R}$.

14 *Verificar las comparaciones entre* τ_O *y* $\tau_{d \times d}$ *en* $\mathbb{R}$

15 *Demuestre que* $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Sabemos que $A \subset \overline{A}$ y $B \subset \overline{B}$. Luego $A \cap B \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. La cerradura de un conjunto es siempre cerrado y la intersección de cerrados es cerrada, por lo que $A \cap B$ está contenido en un cerrado y la cerradura es el cerrado más pequeño que contiene al conjunto. Por lo tanto $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

16 *Verificar si* $\overline{\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in J} \overline{A_\alpha}$

El resultado es en general falso. Sea $X = \mathbb{R}$ y $A_n = [1/n, 1)$. Luego $[0, 1] = \overline{\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha} \neq \bigcup_{\alpha \in J} \overline{A_\alpha} = (0, 1]$.

17 *Verificar si* $X - \overline{A} = \overline{X - A}$

El resultado es en general, falso. Sea $X = \mathbb{R}$ y $A = \{0\}$ bajo la topología usual. Luego $\mathbb{R} - \{0\} = X - \overline{A} \neq \overline{X - A} = \mathbb{R}$

18 *Considere* $([0,1])^2$ *bajo* $\tau_{\mathbb{R}_L \times \mathbb{R}_S}$ *hallar* $Int([0,1]^2)$

Podemos deducir que los básicos de $\tau_{\mathbb{R}_L \times \mathbb{R}_S}$ son de la forma $[a,b) \times (c,d]$, por lo cual el abierto más grande que está en $Int([0,1]^2)$ es $[0,1) \times (0,1]$

19 *Verificar si* $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$

Es un hecho conocido que $\mathrm{Int}(A) = \overline{A^c}^c$ y que $\overline{A \cup B} = \overline{A}\overline{B}$. Aplicando estas propiedades tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Int}(A \cap B) &= \overline{(A \cap B)^c}^c \\
&= (\overline{A^c \cup B^c})^c \\
&= (\overline{A^c} \cup \overline{B^c})^c \\
&= \overline{A^c}^c \cap \overline{B^c}^c \\
&= \mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Int}(B).
\end{aligned}$$

20 *Verificar que si* D_1, D_2 *son densos y abiertos en* X, *entonces* $D_1 \cap D_2$ *es denso en* X

Sea U un abierto arbitrario de X, tenemos que por asociatividad de la intersección $U \cap (D_1 \cap D_2) = (U \cap D_1) \cap D_2$, y $(U \cap D_1)$ es abierto por la segunda axioma de topología. Ahora bien, tenemos que la intersección de cualquier abierto con D_2 es no vacio ya que D_2 es denso, entonces $(U \cap D_1) \cap D_2 \neq \varnothing$. Juntando todo lo que tenemos, $U \cap (D_1 \cap D_2) = (U \cap D_1) \cap D_2 \neq \varnothing$, por teorema se tiene que $D_1 \cap D_2$ es denso.