Tareas de segundo parcial-Topología

Alumnos:

Arturo Rodriguez Contreras - 2132880

Jonathan Raymundo Torres Cardenas - 1949731

Praxedis Jimenes Ruvalcaba

Erick Román Montemayor Treviño - 1957959

Alexis Noe Mora Leyva - 1956093

Everardo Flores Rivera - 2127301

25 de mayo de 2025

1 *Sea $f, g : X \to Y$ funciones continuas y Y bajo la top. del orden. Sea $h(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$. Demostrar que h es continua en X*

La topología del orden en Y tiene como base los conjuntos abiertos de la forma:

$$(a, b), \quad (-\infty, b), \quad (a, \infty).$$

Queremos probar que h es continua. Sea $a \in Y$, consideremos un abierto básico $U = (a, \infty) \subset Y$. Queremos ver que $h^{-1}(U) \subset X$ es abierto.

observamos que La función $h(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\}$ puede reescribirse como:

$$h(x) > a \iff \text{mín}\{f(x), g(x)\} > a \iff f(x) > a \text{ y } g(x) > a.$$

Es decir:

$$h^{-1}((a, \infty)) = f^{-1}((a, \infty)) \cap g^{-1}((a, \infty)).$$

Como f y g son continuas y (a, ∞) es abierto en Y, las preimágenes $f^{-1}((a, \infty))$ y $g^{-1}((a, \infty))$

son abiertas en X. La intersección de abiertos es abierta, por lo tanto:

$$h^{-1}((a,\infty)) \text{ es abierto en } X.$$

Un razonamiento análogo muestra que:

$$h^{-1}((-\infty,b)) = f^{-1}((-\infty,b)) \cup g^{-1}((-\infty,b)),$$

lo cual también es abierto, ya que la unión de abiertos es abierta, y para los casos (a,b) se pueden omitir pues es una combinación de intersecciones y uniones de los casos anteriores Dado que la preimagen por h de cualquier conjunto abierto básico de Y es abierta en X, se concluye que h es continua.

2 *Sea $f : X \to Y$ una función abierta. Si $S \subset Y$ y C cerrado en X tal que $f^{-1}(S) \subset C$, entonces existe K cerrado en Y tal que $S \subset K$ y $f^{-1}(K) \subset C$* El conjunto que buscamos es $K = \overline{S}$. Esto pues:

$$f^{-1}(S) \subset f^{-1}(\overline{S}) \subset \overline{f^{-1}(S)} \subset f^{-1}(C) \tag{1}$$

Solo falta mostrar que $f^{-1}(\overline{S}) \subset \overline{f^{-1}(S)}$ Demostraremos que si $f(x) \in \overline{S} \Rightarrow x \in \overline{f^{-1}(S)}$. Para ello sea V_x un entorno de x, entonces $f(V_x)$ es un entorno de $f(x)$ que interseca a S (pues $f(x) \in \overline{S}$) en un punto $y^* = f(y), y \in V_x, y \in S$, así, ahora como el entorno de x era arbitrario, $x \in \overline{f^{-1}(S)}$ y acabamos la prueba.

3 *Caso 2 de ejemplo clase del 12/03/2025* Considere $(c,d) \cap [a,b] = (c,b]$, entonces queremos ver que $h^{-1}[(c,b]]$ es abierto, pero de hecho:

$$h^{-1}[(c,b]] = (\frac{c-a}{b-a}, 1] = [0,1] \cap (\frac{c-a}{b-a}, 2) \tag{2}$$

El cual es de hecho un abierto en la topología del subespacio, que era lo que queríamos demostrar.

4 *Ver que $h^{-1} = g$ es continua en [a,b]*

Note que g queda definida como $g(x) = \frac{x-a}{b-a}$ e igual manera tomaremos la topología del subespacio, así que tome (c,d) básico de la topolgía euclidiana y $(c,d)\cap[0,1]$ básico de la topologia del subespacio. Ahora, queremos ver que $h[(c,d)\cap[0,1]]$ es de hecho abierto. Si $(c,d)\cap[0,1]=(c,1]\Rightarrow h[(c,1]]=(a+(b-a)c,b]=[a,b]\cap(a+(b-a)c,b+1)$ abierto bajo la topología del subespacio. Por otro lado, si $(c,d)\cap[0,1]=[a,d)\Rightarrow h[[a,d)]=[a,a+(b-a)d)=[a,b]\cap(a-1,a+(b-a)d)$ abierto bajo la topología del subespacio. Así, $g=h^{-1}$ es continua (y h un homeomorfismo).

5 *Demostrar que la relación entre esp. top. $X\sim Y$ es de equivalencia*

1. Reflexividad: $f:X\to X$ definida por $f(x)=x$ es un homeomorfismo, por tanto $X\sim X$.
2. Simetria: $f:X\to Y$ homeomorfismo, entonces $f^{-1}:Y\to X$ es un homeomorfismo, esto es, $Y\sim X$.
3. Transitividad: $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ homeomorfismos, por teorema de composición de funciones, $g\circ f$ y $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ son continuas, esto es, $g\circ f:X\to Z$ es un homeomorfismo y $X\sim Z$.

6 *Demostrar que si $f(\overline{A})=\overline{f(A)}$ para cada $A\subset X$ y ademas es biyectiva entonces f es un homeomorfismo*

Por teorema, basta probar que f es continua y cerrada.

P.D. f es cerrada.

Sea $F\subset X$ cerrado. Entonces $\overline{F}=F$. Aplicamos la hipótesis:

$$f(F)=f(\overline{F})=\overline{f(F)}.$$

Esto implica que $f(F)$ es cerrado en Y, pues es igual a su clausura. Así, la imagen por f de cualquier cerrado en X es cerrado en Y, lo que implica que f es cerrada.

Por último, note que de la hipótesis se sigue que $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$ y del teorema de equivalencia de continuidad, f es continua.

7 *Demostrar que $X\times Y\sim Y\times X$, extenderlo a caso finito utilizando cualquier permutación.*

Sea $f:X\times Y\to Y\times X$ definida por $f(x,y)=(y,x)$. Es claro que f es biyectiva, veamos que es un homeomorfismo. Sea $A=V\times U$ un basico de $Y\times X$, tenemo que $f^{-1}(V\times U)=U\times V$

es abierto en $X \times Y$. Con un argumento similar obtenemos que f^{-1} es continua, por tanto f es un homeomorfismo.

Ahora demostraremos que si $\sigma \in S_n$ es una permutación, entonces $\prod_{k=1}^n X_k \sim \prod_{k=1}^n X_{\sigma(k)}$. Recordemos que toda permutación se puede escribir como una composición de transposiciones de la forma $\pi(k) = k$ si $k < i$ o $k > i+1$ y $\pi(i) = i+1$, $\pi(i+1) = i$. Por lo primero demostrado, y del hecho que la relación de homeomorfismo es de equivalencia, tenemos que $\sigma = \pi_1 \circ ... \circ \pi_m$,

$$\prod_{k=1}^n X_k \sim \prod_{k=1}^n X_{\pi_1(k)} \sim \prod_{k=1}^n X_{(\pi_1 \circ \pi_2)(k)} \sim ... \sim \prod_{k=1}^n X_{\sigma(k)}$$

8 *Demostrar que* $\mathcal{B} = \{\prod_{\alpha \in J} U_\alpha : U_\alpha \in \tau_\alpha\}$ *es una base para la topología del producto y se le conoce como la topología por cajas.*

Sean $A = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha, B = \prod_{\alpha \in J} V_\alpha$. Como $A \cap B = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \cap V_\alpha = C \in \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B}$ es base.

9 *Verificar que si* $A_\alpha \subset X_\alpha$*, entonces* $\prod_{\alpha \in J} int(A_\alpha) = int(\prod_{\alpha \in J} A_\alpha)$ *en la topologia por cajas.*

El resultado es en general falso. Tomemos $\mathbb{R}^\omega$, $A_n = (-1/n, 1/n)$. Es facil ver que $\prod \text{int}(A_n) - \prod A_n$, pero si $U = \prod_{i=1}^m U_{n_i} \times \prod_{n \neq n_i} \mathbb{R} \subset \prod A_n$, entonces $x_{n_i} \in U_{n_i} \cap A_{n_i}$ y $x_n = 1$ si $n \neq n_i$, cumple que $(x_n) \in U$, pero $(x_n) \notin \prod A_n$.

10 *Verificar si las* β*-esima proyecciones son abiertas y/o cerradas en ambas topologias*

Sea $U = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha$ y note que $\pi_\beta(U) = U_\beta$, por lo que si U es abierto en la top. por cajas o producto, en ambos casos $\pi_\beta(U)$ es abierto en X_β. Ademas, de la igualdad $\overline{U} = \prod_{\alpha \in J} \overline{U_\alpha}$, que se cumple en ambas topologias, se sigue que $\pi_\beta(U) = \overline{U_\beta}$ es cerrado, es decir, π_β es un mapeo abierto y cerrado.

11 *Sea* $f : X \to Y$*,* X, Y *espacios metricos. Demostrar que* f *es continua en* X *si y solo si* $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : f(B_{d_x}(x, \delta)) \subset B_{d_y}(f(x), \epsilon) \forall x \in X$

Del teorema de equivalencia para continuidad, f es continua si, y sólo si para cada basico $V = B_{d_Y}(f(x), \epsilon)$ existe un basico $U = B_{d_X}(x, \delta)$ tal que $f(U) \subset V$, esto es, $f(B_{d_X}(x, \delta)) \subset B_{d_Y}(f(x), \epsilon)$.

Supongamos que f es continua Sea $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Entonces el conjunto $B_{d_Y}(f(x), \epsilon) \subset Y$ es abierto. Como f es continua, la preimagen $f^{-1}(B_{d_Y}(f(x), \epsilon)) \subset X$ es abierta. Además,

$x \in f^{-1}(B_{d_Y}(f(x), \epsilon))$, ya que $f(x) \in B_{d_Y}(f(x), \epsilon)$.

Entonces, como $f^{-1}(B_{d_Y}(f(x), \epsilon))$ es un abierto que contiene a x, por definición de la topología métrica, existe $\delta > 0$ tal que:

$$B_{d_X}(x, \delta) \subset f^{-1}(B_{d_Y}(f(x), \epsilon)).$$

Aplicando f

$$f(B_{d_X}(x, \delta)) \subset B_{d_Y}(f(x), \epsilon).$$

lo cual es a lo que queremos llegar

Supongamos que:

$$\forall x \in X, \ \forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0 : f(B_{d_X}(x, \delta)) \subset B_{d_Y}(f(x), \epsilon).$$

Queremos probar que f es continua. Sea $V \subset Y$ un abierto

P.D. $f^{-1}(V)$ es abierto en X.

Sea $x \in f^{-1}(V)$, entonces $f(x) \in V$, y como V es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$B_{d_Y}(f(x), \epsilon) \subset V.$$

Por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que:

$$f(B_{d_X}(x, \delta)) \subset B_{d_Y}(f(x), \epsilon) \subset V.$$

Entonces:

$$B_{d_X}(x, \delta) \subset f^{-1}(V).$$

Por lo tanto, $f^{-1}(V)$ es abierto, por lo que queda demostrado el ejercicio

12 *Demostrar que la métrica uniforme ρ es métrica.*

Por definición, $\rho((x_n), (y_n)) = \sup\{\overline{d}(x_n, y_n)\}$, donde $\overline{d}(x, y) \leq 1$ para cada $x, y \in \mathbb{R}$, por lo que ρ está bien definida. Es claro que $\rho((x_n), (x_n)) = 0$, además, $(x_n) \neq (y_n)$ implica que existe un natural m con $\rho((x_n), (y_n)) >= \overline{d}(x_m, y_m) > 0$. Por tanto, $\rho((x_n), (y_n)) = 0$, si y sólo si

$(x_n) = (y_n)$. La simetria se hereda de la metrica acotada, $\rho((x_n),(y_n)) = \sup\{\overline{d}(x_n,y_n)\} = \sup\{\overline{d}(y_n,x_n)\} = \rho((y_n),(x_n))$. Finalmente, veamos la desigualdad triangular.

$$\begin{aligned}\rho((x_n),(y_n)) &\leq \sup\{\overline{d}(x_n,z_n) + \overline{d}(z_n,y_n)\}\\ &\leq \sup\{\overline{d}(x_n,z_n)\} + \sup\{\overline{d}(z_n,y_n)\}\\ &= \rho((x_n),(z_n)) + \rho((z_n),(y_n)).\end{aligned}$$

13 *Sea $A = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\omega : \exists N \in \mathbb{N} : x_n = 0; n \geq N\}$ Hallar $\overline{A}$ en top. uniforme*

Sea X el conjunto de todas las sucesiones en $\mathbb{R}$ que convergen a 0, mostraremos que este conjunto es la cerradura de A. Para ello primero mostraremos que X es de hecho cerrado con la topología uniforme, sea $y \notin X$, esto es, para todo $\epsilon > 0$ existe una sub sucesión de componentes de y tal que $\forall k > N \in \mathbb{Z}^+, |y_{n_k}| \geq \epsilon$ Sea $z \in B_{\overline{\rho}}(y, \frac{\epsilon}{2})$, entonces z es tal que $|z_{n_k}| > |y_{n_k}| - \frac{\epsilon}{2} \geq \frac{\epsilon}{2}$, es decir, $B_{\overline{\rho}}(y, \frac{\epsilon}{2})$ no interseca a X. Así entonces:

$$A \subset \overline{A} \subset \overline{X} = X \tag{3}$$

Ahora, para todo $x \in X$ y $\epsilon > 0$, existe un $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $|x_n| < \frac{\epsilon}{2}$, así de hecho $y = (y_1, ..., y_N, 0, 0, ...) \in B(x,\epsilon) \cap A$, siendo así $X = \overline{A}$

14 *Sea A del ejercicio anterior, hallar $\overline{A}$ en top. cajas*

Veamos que $A = \overline{A}$. Sea $(x_n) \notin A$, luego existe una sucesión extrictamente creciente de naturales (n_k) tal que $x_{n_k} \neq 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{R}$ es T_1, existen vecindades abiertas U_{n_k} de x_{n_k} que no contienen al 0. Tomemos $U = \prod_{k=1}^{\infty} U_{n_k} \times \prod_{n\neq n_k} \mathbb{R}$. Es facil ver que $(x_n) \in U$. Ahora sea $(y_n) \in A \cap U$, por definición existe N tal que $n > N$ entonces $y_n = 0$, pero al ser $n_k \to \infty$, para algun k se cumple que $n_k > N$ y $y_{n_k} \in U_{n_k}$, contradiciendo el hecho que $0 \notin U_{n_k}$. Por tanto $A \cap U = \emptyset$ y $A = \overline{A}$.

15 *Demostrar que $f^{-1}(Fr_Y(B)) \subset Fr_X(f^{-1}(B))$*

La frontera se pueden escribir como:

$$\mathrm{Fr}_Y(B) = \overline{B} \cap \overline{Y - B} \quad \text{y} \quad \mathrm{Fr}_X(f^{-1}(B)) = \overline{f^{-1}(B)} \cap \overline{X - f^{-1}(B)}$$

Sea $x \in f^{-1}(\text{Fr}_Y(B))$. Entonces:

$$f(x) \in \text{Fr}_Y(B) = \overline{B} \cap \overline{Y - B} \Rightarrow f(x) \in \overline{B} \quad \text{y} \quad f(x) \in \overline{Y - B}$$

Aplicando la propiedad de clasura:

$$x \in f^{-1}(\overline{B}) \subset \overline{f^{-1}(B)} \quad \text{y} \quad x \in f^{-1}(\overline{Y - B}) \subset \overline{f^{-1}(Y - B)}$$

Pero como:

$$f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B) \Rightarrow \overline{f^{-1}(Y - B)} = \overline{X - f^{-1}(B)}$$

Entonces:

$$x \in \overline{f^{-1}(B)} \cap \overline{X - f^{-1}(B)} = \text{Fr}_X(f^{-1}(B))$$

Por lo tanto:

$$f^{-1}(\text{Fr}_Y(B)) \subset \text{Fr}_X(f^{-1}(B))$$

16 *Sea $h : \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}^\omega$ definida por: $h((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a_n x_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ver si h es homeomorfismo en $\mathbb{R}^\omega$ bajo top. cajas*

Si $a_m = 0$ para algun $m \in \mathbb{N}$, dado (x_n), definimos (y_n) por $y_n = x_n$ si $n \neq m$, $y_m = x_m + 1$. Es claro que $(x_n) \neq (y_n)$, pero $h((x_n)) = h((y_n))$, por lo que h no es biyectiva y por tanto, no puede ser homeomorfismo. Supongamos entonces que $a_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observe que $h^{-1}((x_n)) = (\frac{x_n - b_n}{a_n})$ es la función inversa de h. Tanto h como h^{-1} son de la forma $f((x_n)) = (c_n x_n + d_n)$, por lo que basta probar que esta función es continua en la topología por cajas. Sea $p_n((x_n)) = c_n x + d_n$, es facil ver que es continua para cada $n \in \mathbb{N}$, y sea $U = \prod_{i=1}^{m} U_{n_i} \times \prod_{n \neq n_i} \mathbb{R}$ un abierto en $\mathbb{R}^\omega$, $f^{-1}(U) = \cap_{i=1}^{m} p_{n_i}^{-1}(U_{n_i})$ es una intersección finita de abiertos, por lo que es abierta y f es continua. Por tanto, h es un homeomorfismo.