Tareas de segundo parcial-Topología

Alumnos:

Arturo Rodriguez Contreras - 2132880

Jonathan Raymundo Torres Cardenas - 1949731

Praxedis Jimenes Ruvalcaba

Erick Román Montemayor Treviño - 1957959

Alexis Noe Mora Leyva

Everardo Flores Rivera - 2127301

23 de mayo de 2025

1 *Sea $f, g : X \to Y$ funciones continuas y Y bajo la top. del orden. Sea $h(x) = \min f(x), g(x)$. Demostrar que h es continua en X*

2 *Sea $f : X \leftarrow Y$ una función abierta. Si $S \subset Y$ y C cerrado en X tal que $f^{-1}(S) \subset C$, entonces existe K cerrado en Y tal que $S \subset K$ y $f^{-1}(K) \subset C$*

3 *Caso 1 y Caso 2 de ejemplo clase del 12/03/23*

4 *Ver que $h^{-1} = g$ es continua en [a,b]*

5 *Demostrar que la relación entre esp. top. $X \sim Y$ es de equivalencia*

6 *Demostrar que si $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ para cada $A \subset X$ entonces f es un homeomorfismo*

7 *Demostrar que $X \times Y \approx Y \times X$, extenderlo a caso finito utilizando cualquier permutación.*

8 *Demostrar que* $\tau = \{\prod_{\alpha\in J} U_\alpha : U_\alpha \in \tau_\alpha\}$ *es una topologia para el producto y se le conoce como la topolofia por cajas*

9 *Verificar que si* $A_\alpha \subset X_\alpha$*, entonces* $\prod_{\alpha\in J} int(A_\alpha) = int(\prod_{\alpha\in J} A_\alpha)$ *en la topologia por cajas.*
El resultado es en general falso. Tomemos $\mathbb{R}^\omega$, $A_n = (-1/n, 1/n)$. Es facil ver que $\prod \mathrm{int}(A_n) - \prod A_n$, pero si $U = \prod_{i=1}^m U_{n_i} \times \prod_{n\neq n_i} \mathbb{R} \subset \prod A_n$, entonces $x_{n_i} \in U_{n_i} \cap A_{n_i}$ y $x_n = 1$ si $n \neq n_i$, cumple que $(x_n) \in U$, pero $(x_n) \notin \prod A_n$.

10 *Verificar si las* β*-esima proyecciones son abiertas y/o cerradas en ambas topologias*
Sea $U = \prod_{\alpha\in J} U_\alpha$ y note que $\pi_\beta(U) = U_\beta$, por lo que si U es abierto en la top. por cajas o producto, en ambos casos $\pi_\beta(U)$ es abierto en X_β. Ademas, de la igualdad $\overline{U} = \prod_{\alpha\in J} \overline{U_\alpha}$, que se cumple en ambas topologias, se sigue que $\pi_\beta(U) = \overline{U_\beta}$ es cerrado, es decir, π_β es un mapeo abierto y cerrado.

11 *Sea* $f : X \to Y$ *con la topologiamétrica en* $X \times Y$*. Demostrar que* f *es continua en* X *si y solo si* $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0 : f(B_{d_x}(x, \delta)) \subset B_{d_y}(f(x), \epsilon)\forall x \in X$

12 *Demostrar que la métrica uniforme* ρ *es métrica.*
Por definición, $\rho((x_n),(y_n)) = \sup\{\overline{d}(x_n, y_n)\}$, donde $\overline{d}(x, y) \leq 1$ para cada $x, y \in \mathbb{R}$, por lo que ρ está bien definida. Es claro que $\rho((x_n),(x_n)) = 0$, además, $(x_n) \neq (y_n)$ implica que existe un natural m con $\rho((x_n),(y_n)) >= \overline{d}(x_m, y_m) > 0$. Por tanto, $\rho((x_n),(y_n)) = 0$, si y sólo si $(x_n) = (y_n)$. La simetria se hereda de la metrica acotada, $\rho((x_n),(y_n)) = \sup\{\overline{d}(x_n, y_n)\} = \sup\{\overline{d}(y_n, x_n)\} = \rho((y_n),(x_n))$. Finalmente, veamos la desigualdad triangular.

$$\begin{aligned}
\rho((x_n),(y_n)) &\leq \sup\{\overline{d}(x_n, z_n) + \overline{d}(z_n, y_n)\} \\
&\leq \sup\{\overline{d}(x_n, z_n)\} + \sup\{\overline{d}(z_n, y_n)\} \\
&= \rho((x_n),(z_n)) + \rho((z_n),(y_n)).
\end{aligned}$$

13 *Sea* $A = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\omega : \exists N \in \mathbb{N} : x_n = 0; n \geq N\}$ *Hallar* $\overline{A}$ *en top. uniforme*

14 *Sea* A *del ejercicio anterior, hallar* $\overline{A}$ *en top. cajas*

15 *Demostrar que* $f^{-1}(Fr_Y(B)) \subset Fr_X(f^{-1}(B))$

16 *Sea $h : \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}^\omega$ definida por: $h((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a_n x_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ver si h es homeomorfismo en $\mathbb{R}^\omega$ bajo top. cajas*

Si $a_m = 0$ para algun $m \in \mathbb{N}$, dado (x_n), definimos (y_n) por $y_n = x_n$ si $n \neq m$, $y_m = x_m + 1$. Es claro que $(x_n) \neq (y_n)$, pero $h((x_n)) = h((y_n))$, por lo que h no es biyectiva y por tanto, no puede ser homeomorfismo. Supongamos entonces que $a_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observe que $h^{-1}((x_n)) = (\frac{x_n - b_n}{a_n})$ es la función inversa de h. Tanto h como h^{-1} son de la forma $f((x_n)) = (c_n x_n + d_n)$, por lo que basta probar que esta función es continua en la topología por cajas. Sea $p_n((x_n)) = c_n x + d_n$, es facil ver que es continua para cada $n \in \mathbb{N}$, y sea $U = \prod_{i=1}^m U_{n_i} \times \prod_{n \neq n_i} \mathbb{R}$ un abierto en $\mathbb{R}^\omega$, $f^{-1}(U) = \cap_{i=1}^m p_{n_i}^{-1}(U_{n_i})$ es una intersección finita de abiertos, por lo que es abierta y f es continua. Por tanto, h es un homeomorfismo.