Tareas de tercer parcial-Topología

Alumnos:

Arturo Rodriguez Contreras - 2132880

Jonathan Raymundo Torres Cardenas - 1949731

Praxedis Jimenes Ruvalcaba

Erick Román Montemayor Treviño - 1957959

Alexis Noe Mora Leyva

Everardo Flores Rivera - 2127301

26 de mayo de 2025

1 *Sea Y subespacio de X con U, V separación en Y. Entonces* $\overline{U} \cap V = \emptyset$ *y* $U \cap \overline{V} = \emptyset$

Demostraremos que $\overline{U} \cap V = \emptyset$. Como U, V es separación de Y, entonces U es abierto y cerrado en Y. El conjunto de puntos de adherencia de U en Y es $\overline{U} \cap Y$. Como U es cerrado en Y, $U = \overline{U} \cap Y$, entonces $\overline{U} \cap V = \emptyset$.

2 *Sean X, Y esp. top. y* $h : X \to Y$ *un homeomorfismo. Demostrar que si C es componente de X, entonces h(C) es componente de Y*

Sea C_x una componente conexa de X, esto es hay un x tal que $C_x = \bigcup\{C \subset X | x \in C\}; C$ conexo. Entonces por continuidad se tiene lo siguiente $h(C_x) = h(\bigcup C) = \bigcup h(C)$, el cual es conexo por la invariante de la conexidad, ademas es el conjunto de todos los conexos que tienen a $h(x)$ por ser homeomorfismo.

3 *Sea* $Y \subset X$ *un subespacio de un esp. top. X. Y es compacto en X ssi toda cubierta abierta para Y por abiertos de X contiene una subcolección finita de abiertos en Y que lo cubren.*

($\Rightarrow$) Sea Y compacto y $A = \{A_\alpha\}_\alpha \in J$ una cubierta de Y de abiertos de X. Entonces $\{A_\alpha \cap Y | \alpha \in J\}$ tambien es una cubierta de Y por conjuntos abiertos en Y bajo la topologia del subespacio; como Y es compacto, existe una subcolección finita de dicha colección.

($\Leftarrow$) Ahora $A = \{A_\alpha\}$ es una cubierta de de Y de abiertos en X y por hipótesis existe una subcubierta finita $\{A_{\alpha_1}, ..., A_{\alpha_n}\}$. Entonces $\{A_{\alpha_1} \cap Y, ..., A_{\alpha_n} \cap Y\}$ es recubrimiento finito de Y con abiertos en Y.

4 *La compacidad es una invariante topologica bajo continuidad.*

Sea $B = \{B_\alpha\}_{\alpha \in J}$ una cubierta de $f(X)$ por abiertos de Y, como f es continua entonces la colección $A = \{f^{-1}(B_\alpha)\}_{\alpha \in J}$ es una cubierta de X de abiertos en X. Por ser X compacto, $\{f^{-1}(B_\alpha)\}_{\alpha=1}^{n}$ es subcubierta finita de X. Entonces $\{B_\alpha\}_{\alpha=1}^{n}$ es subcubierta finita de $f(X)$.

5 *Sea $f : X \to Y$,con Y compacto y T_2. f es continua en X ssi el conjunto $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ es cerrado en $X \times Y$.*

($\Rightarrow$)

Demostraremos que $A = (X \times Y) - G_f$ es abierto en $X \times Y$. Sea $(x_0, y_0) \in A$ esto es que $y_0 \neq f(x_0)$, como Y es Hausdörff, existen abiertos disjuntos U,V tales que $f(x_0) \in U$ y $y_0 \in V$. Como f es continua $W = f^{-1}(U) \times V$ es vecindad de (x_0, y_0). Veamos que no intersecta a G_f, su poniendo que hay un $(x, y) \in W \cap G_f$ entonces $y = f(x)$ por ser elemento de G_f y se sigue que $f(x) = y \in U \wedge y \in V$ lo cual es una contradicción ya que U,V son disjuntos. Por tanto, $(x_0, y_0) \in f^{-1}(U) \times V \subset A$, entonces A es abierto por caracterización de abiertos.

($\Leftarrow$)

Sea $x_0 \in X$ y sea V una vecindad de $f(x_0)$. Entonces por hipotesis tenemos que, $K = G_f \cap (X \times (Y - V))$ es cerrado en $X \times Y$, ahora como Y es compacto, la proyección en X como $\pi_1(K)$ es cerrada en X por teorema. Sea $U = X - \pi_1(K)$, veremos que U es vecindad de x_0 tal que $f(U) \subset V$. Primero $x_0 \in U$ ya que $f(x_0) \notin Y - V$. Sea $x \in U$ y supongamos que $f(x) \notin V$. Entonces $(x, f(x)) \in K$, entonces $\pi_1(x, f(x)) = x \in \pi(K)$, contradiciendo que $x \in U$. Por lo tanto se cumple la afirmación y f es continua.

6 *Hallar un espacio 1-num pero no 2-num.*

Tomemos $(\mathbb{R}^w, \tau_{uniforme})$, que como sabemos, es metrizable, que por teorema esto implica que es 1-numerable.

Consideremos $S = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} | x_n = 0 \vee x_n = 1\}$ y tomemos $x, y \in A$ donde $x \neq y$. Entonces $\overline{\rho}(x, y) = 1$, por lo que para todo punto de A tiene una distancia de 1 hacía cualquiera que

sea distinto a sí mismo, y 0 para cualquier otro, es decir, A sería discreto. Pero a su vez, las sucesiones binarias son un conjunto no numerable, por lo que tenemos un conjunto discreto y no numerable, entonces no existe una base numerable que pueda generar todos los elemento.
$\therefore$ $(\mathbb{R}^w, \tau_{uniforme})$ es 1-numerable pero no 2-numerable

7 *Un subespacio de un espacio 2-num es 2-num. Hallar un contraejemplo del teorema de Lindelof.*
Sea X un es espacio 2-num y A subespacio de X. Entonces existe una base numerable $\mathfrak{B}$, entonces $\{B \cap A | B \in \mathfrak{B}\}$ es una base numerable para el subespacio A.

8 *El producto finito de Lindelof no es Lindelof*
Sabemos que $\mathbb{R}_l$ es Lindelöf. Tomemos el producto $\mathbb{R}_l$x$\mathbb{R}_l$
Sea $D = \{(-x, x) | x \in \mathbb{R}\}$, el cual es un cerrado, por lo que $(\mathbb{R}_l\text{x}\mathbb{R}_l) - L$ es abierto. Entonces, $\{(\mathbb{R}_l\text{x}\mathbb{R}_l) - L\} \cup \{[a, b)\text{x}[a, d) | a, b, d \in \mathbb{R}\}$, donde uno es el complemente de D y el otro conjunto cubre a D punto por punto, en una recta de reales, es decir, es una cantidad no numberable de elementos que se cubren de manera discreta, por lo que no hay una subcubierta numerable para esta.
$\therefore$ existe un producto finitio de espacios Lindelöf que no es Lindelöf, así que el producto finito de Lindelöf no es Lindelöf

9 *Hallar un T_3 que no es T_4*
Tomemos el caso anterior, es decir $\mathbb{R}_l$x$\mathbb{R}_l$ el cual es regular y consideremos $D = \{(-x, x) | x \in \mathbb{R}\}$. También tomemos $A \subset D$ entonces A es cerrado (porque es regular, entonces es T_1. Y L-A es también cerrado.
Supongamos que $\mathbb{R}_l$x$\mathbb{R}_l$ es normal. Entonces existen U_A, V_A abiertos disjuntos tales que $A \subset U_A$ y $L - A \subset V_A$. Y consideremos el conjunto $B = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Q}\}$, el cual es denso es en el conjunto, pues se trata del producto cruz de racionales dentro del producto cruz de reales. Ahora tomamos $f : P(D) \to P(B)$ donde P(D) se refiere a tomar un subconjunto de propio de D, y esta va de $A \to U_A \cap B$ y $D \to B$. Si tomamos $A, C \subset D$ donde $A \neq C$, entonces existe $x \in A$ tal que $x \notin C$, entonces $x \in D - C \subset V_C$ y $x \in U_A$, entonces $x \in U_A \cap V_C$ y por lo tanto, $x \notin U_C$, así que $B \cap U_A \neq B \cap U_B$, es decir, $f(A) \neq f(B)$
Considerando también $h : P(B) \to D$, la cual es una función que va de un conjunto numerable

(naturales), a uno no numerable, definiendola como $J \to 0.a_1a_2a_3...$ donde $a_i = o$ si $i \in J$ y $a_i = 1$ de lo contrario,es decir volvemos a utilizar la función que manda de los naturales a binarios, la cual ya se estableció que es inyectiva. Por como definimos ambas funciones podemos componerlas para tener una composición $g : P(D) \to D$ la cual es inyectiva y es una contradicción, puesto que una función no puede ser inyectiva e ir de un subconjunto propio al conjunto total. DIcha contradicción viene de asumir que en efecto podemos hallar dos abiertos disjuntos que contengan a dos conjuntos cerrados, es decir, viene de asumir que se trata de un conjunto normal.

$\therefore$ $\mathbb{R}_l$x$\mathbb{R}_l$ bajo la topología producto es regular pero no es normal.

10 *Sea (X, τ_X) un espacio top. T_1. Demostrar que X es normal ssi para cada $A \subset X$ cerrado y U abierto en X tal que $A \subset U$, existe V abierto en X tal que $A \subset \overline{V} \subset U$*

$(\Rightarrow)X$ es normal

Sea $A \subset X$ cerrado en X y U vecindad abierta de X tal que $A \subset U$. Entonces $X - U$ es cerrado (complemento de un abierto) y S.P.G. supongamos que es no vacío, entonces $\nexists a \in A$ y $a \in X - U$. Como X es normal, entonces existen V, W abiertos tales que $A \subset V$ y $X - U \subset W$. Supongamos que $\overline{V} \not\subset U$, entonces $\exists y \in \overline{V} \cap (X - U)$. Como $y \in X - U \to y \in W$, pero como es normal, entonces $W \cap V = \emptyset$, entonces $y \notin \overline{V}$, lo cual es una contradicción

$\therefore \overline{V} \subset W$

$\therefore$ Si X es normal, entonces para cada cerrado A tal que $A \subset U$ con U abierto de X, existe abierto W tal que $A \subset \overline{V} \subset U$

$(\Leftarrow)X$ es T_1 y para cada cerrado A tal que $A \subset U$ con U abierto de X, existe abierto W tal que $A \subset \overline{V} \subset U$

Sean $A \subset X$ y $C \subset X$ cerrados en X tales que $A \cap C = \emptyset$. Tenemos que $X - C$ es abierto en X, entonces existe V abierto de X tal que $A \subset \overline{V} \subset X - C$, además $X - \overline{V}$ es abierto en X. Entonces $A \subset V$ y $C \subset X - \overline{V}$, donde $V \cap (X - \overline{V}) = \emptyset$

$\therefore$ existen abiertos disjuntos $V, (X - \overline{V})$ que contienen respectivamente a los cerrados A y C

$\therefore$ X es normal

11 *Si X es T_2 y compacto, entonces X es normal.*

Primero demostraremos que si (X, τ) es Hausdörff y C es un compacto $C \subset X$ donde $x \in X$ pero $x \notin C$, entonces existen U y V, abiertos disjuntos tales que $x \in U$ y $C \subset V$

Sea $x \in U_y$ con U_y abierto de X. Como (X, τ) es Hausdörff, entonces $\forall y \in C$ $\exists V_y$ tal que $y \in V_y$ y $U_y \cap V_y = \emptyset$. Entonces $\cup_{y \in C} V_y$ es una cubierta abierta de C, y como C es compacto, entonces existe una subcubierta numerable, digamos $V_{y_1}, V_{y_2}, ..., V_{y_n}$.

Sea $U = \bigcap_{j=1}^{n} U_{y_j}$ y $V = \bigcup_{j=1}^{n} V_{y_j}$

Entonces $x \in U$ y $C \subset V$. Para ver que en efecto U y V son disjuntos supongamos que no lo son, entonces $\exists w \in U \cap V$, entonces $w \in V_{y_j}$ para algún j y $w \in U_{y_i} \forall i \in [1, n]$, pero por Houdrörff y cómo se seleccionaron los abiertos: $U_j \cap V_j = \emptyset$, por lo que es una contradicción. Así que $U \cap V = \emptyset$

Con esto ya podemos probar lo que se indica en el inciso. Tomemos C_1 y C_2 cerrados de X donde (X, τ) es compacto y cerrado. Por teorema, obtenemos que C_1, C_2 son compactos al ser cerrados dentro de un compacto. Sea $x \in C_1$ pero $x \notin C_2$, entonces por lo que acabamos de probar antes, $\exists U_x \wedge V_x$ tales que $x \in U_x$ y $C_2 \subset V_x$ donde $U_x \cap V_x = \emptyset$. Pero C_1 también es compacto, así que existe una subcubierta finita tal que $C_1 \subset \bigcap_{j=1}^{n} U_{x_j} = U$ y sea $V = \bigcup_{j=1}^{n} V_{x_j}$ entonces $C_2 \subset V$ y $C_1 \subset U$, con $U \cap V = \emptyset$