

Tareas de primer parcial-Topología

Alumnos:

Arturo Rodriguez Contreras - 2132880

Jonathan Raymundo Torres Cardenas - 1949731

Praxedis Jimenes Ruvalcaba

Erick Román Montemayor Treviño - 1957959

Alexis Noe Mora Leyva

22 de febrero de 2025

1 ¿Es la unión de topologías una topología?

Sea $X = \{a, b, c\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$ se tiene que τ_1 es topología ya que contiene al conjunto vacío, X , contiene las uniones arbitrarias $\{a\} \cup X = X \in \tau_1$, y también $\{a\} \cup \emptyset = \{a\} \in \tau_1$ y $\emptyset \cup X = X \in \tau_1$ y contiene a las intersecciones finitas de sus elementos, de igual forma se sigue que τ_2 es topología de X . La unión de las dos topologías es $U = \tau_1 \cup \tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$ lo cual no es topología, ya que $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin U$, por lo tanto, no necesariamente la unión de topologías es una topología.

2 Demostrar que $\tau_{\mathbb{N}}$ es topología.

Se tiene por definición que $\{\emptyset, X\} \subset \tau_{\mathbb{N}}$. Ahora, sea $\{U_a\}_{a \in J}$ una colección de elementos en $\tau_{\mathbb{N}}$, y $U = \bigcup_{a \in J} U_a$. Queremos ver que $U \in \tau_{\mathbb{N}}$, para esto observemos que $X - U = (\bigcup_{a \in J} U_a)^c$ por leyes de De Morgan es igual a $\bigcap_{a \in J} U_a^c$, sabemos por teorema que la intersección arbitraria de conjuntos contables es también contable, entonces $\bigcap_{a \in J} U_a^c \in \tau_{\mathbb{N}}$.

Luego, tomemos $\{U_a\}_{a \in J}$ una colección finita de elementos en $\tau_{\mathbb{N}}$, y sea $U = \bigcap_{a \in J} U_a$ entonces tenemos $X - U = (\bigcap_{a \in J} U_a)^c$ por leyes de De Morgan es igual a $\bigcup_{a \in J} U_a^c$ y por teorema la unión finita de conjuntos contables es también contable. Entonces $X - U$ es contable, por lo cual se tiene que $U \in \tau_{\mathbb{N}}$ entonces $\tau_{\mathbb{N}}$ está cerrado por intersección finita, como consecuente es

una topología.

3 Verificar si τ_∞ es topología.

Sea $X = \mathbb{R}$, sea $U_1 = (-\infty, 0)$, $U_2 = (0, \infty)$, claramente $U_1, U_2 \in \tau_\infty$, pero $U = U_1 \cup U_2 = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \notin \tau_\infty$ ya que $\mathbb{R} - U = \{0\}$ no es infinito. Por lo tanto no cumple el axioma de uniones arbitrarias de topología.
 $\therefore \tau_\infty$ no es topología.

4 Demostrar que $(0, 1) = \bigcup_{n \in \mathbb{N} - \{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$.

(\subset)

Sea $x \in (0, 1)$, esto es $0 < x < 1$, por propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n \geq N$ $0 < \frac{1}{n} \leq x < 1$ entonces $x \in [\frac{1}{n}, 1)$ entonces $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N} - \{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$

$\therefore (0, 1) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N} - \{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$

(\supset)

Sea $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N} - \{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$, entonces $0 < \frac{1}{n_0} \leq x < 1$ para algun $n_0 \in \mathbb{N} - \{1\}$

$x \in (0, 1)$

$\therefore (0, 1) \supset \bigcup_{n \in \mathbb{N} - \{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$

5 Verificar que β_K satisface el teorema de creación de topologías.

6 Verificar que $B_S = \{(a, b] : a < b\}$ es base de algunas topologías

7 Verificar las comparaciones entre τ_S, τ_L y entre τ_S, τ_K

8 Demostrar si $\tau_{\mathbb{R}^2} = \tau_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$

9 Terminar paso inductivo del teorema de las proyecciones

10 Demuestra que $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

(\subset)

Sea $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$. Por definición de intersección $(x, y) \in A \times B$ y $(x, y) \in C \times D$. Además, por definición de producto cruz $x \in A$ y $y \in B$, $x \in C$ y $y \in D$. Reescribiendo obtenemos $x \in A$ y $x \in C$, $y \in B$ y $y \in D$ i.e. $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.

(\supset)

De forma análoga, sea $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$ luego $x \in A$ y $y \in B$, $x \in C$ y $y \in D$ y $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$.

11 Verificar que la topología del orden $\tau(\beta_O)$ es topología.

12 Verificar si en \mathbb{N} , $\tau_O = \tau_d$.

Veamos que las topologías coinciden.

Sea $U \in \tau_O$, observe que $U = \cup_{x \in U} \{x\}$ es una unión de básicos de τ_d i.e. $\tau_O \subset \tau_d$.

De forma análoga, sea $U \in \tau_d$, y $I_x = (x - 1, x + 1)$ si $x \neq 1$, $I_1 = [1, 2)$. Note que $U = \cup_{x \in U} I_x$ es una unión de básicos de τ_O y por tanto $\tau_d \subset \tau_O$. Esto demuestra que, en \mathbb{N} , $\tau_O = \tau_d$.

13 Verificar que el orden lexicográfico genera un orden en \mathbb{R} .

14 Verificar las comparaciones entre τ_O y $\tau_{d \times d}$ en \mathbb{R}

15 Demuestre que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Sabemos que $A \subset \overline{A}$ y $B \subset \overline{B}$. Luego $A \cap B \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. La cerradura de un conjunto es siempre cerrado y la intersección de cerrados es cerrada, por lo que $A \cap B$ está contenido en un cerrado y la cerradura es el cerrado más pequeño que contiene al conjunto. Por lo tanto $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

16 Verificar si $\overline{\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in J} \overline{A_\alpha}$

17 Verificar si $X - \overline{A} = \overline{X - A}$

El resultado es en general, falso. Sea $X = \mathbb{R}$ y $A = \{0\}$ bajo la topología usual. Luego $\mathbb{R} - \{0\} = X - \overline{A} \neq \overline{X - A} = \mathbb{R}$

18 Considere $([0, 1])^2$ bajo $\tau_{\mathbb{R}_L \times \mathbb{R}_S}$ hallar $\text{Int}([0, 1]^2)$

19 Verificar si $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$

Es un hecho conocido que $\text{Int}(A) = \overline{A^c}^c$ y que $\overline{A \cup B} = \overline{AB}$. Aplicando estas propiedades tenemos que

$$\begin{aligned}\text{Int}(A \cap B) &= \overline{(A \cap B)^c}^c \\ &= \overline{(A^c \cup B^c)^c}^c \\ &= \overline{(A^c \cup B^c)}^c \\ &= \overline{A^c}^c \cap \overline{B^c}^c \\ &= \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B).\end{aligned}$$

20 Verificar que si D_1, D_2 son densos y abiertos en X , entonces $D_1 \cap D_2$ es denso en X

Sea U un abierto arbitrario de X , tenemos que por asociatividad de la intersección $U \cap (D_1 \cap D_2) = (U \cap D_1) \cap D_2$, y $(U \cap D_1)$ es abierto por la segunda axioma de topología. Ahora bien, tenemos que la intersección de cualquier abierto con D_2 es no vacío ya que D_2 es denso, entonces $(U \cap D_1) \cap D_2 \neq \emptyset$. Juntando todo lo que tenemos, $U \cap (D_1 \cap D_2) = (U \cap D_1) \cap D_2 \neq \emptyset$, por teorema se tiene que $D_1 \cap D_2$ es denso.