

# Tareas de primer parcial-Topología

Alumnos:

Arturo Rodriguez Contreras - 2132880

Jonathan Raymundo Torres Cardenas - 1949731

Praxedis Jimenes Ruvalcaba

Erick Román Montemayor Treviño - 1957959

Alexis Noe Mora Leyva

Everardo Flores Rivera - 2127301

3 de marzo de 2025

## 1 ¿Es la unión de topologías una topología?

Sea  $X = \{a, b, c\}$ ,  $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ ,  $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$  se tiene que  $\tau_1$  es topología ya que contiene al conjunto vacío,  $X$ , contiene las uniones arbitrarias  $\{a\} \cup X = X \in \tau_1$ , y también  $\{a\} \cup \emptyset = \{a\} \in \tau_1$  y  $\emptyset \cup X = X \in \tau_1$  y contiene a las intersecciones finitas de sus elementos, de igual forma se sigue que  $\tau_2$  es topología de  $X$ . La unión de las dos topologías es  $U = \tau_1 \cup \tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$  lo cual no es topología, ya que  $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin U$ , por lo tanto, no necesariamente la unión de topologías es una topología.

## 2 Demostrar que $\tau_{\mathbb{N}}$ es topología.

Se tiene por definición que  $\{\emptyset, X\} \subset \tau_{\mathbb{N}}$ . Ahora, sea  $\{U_a\}_{a \in J}$  una colección de elementos en  $\tau_{\mathbb{N}}$ , y  $U = \bigcup_{a \in J} U_a$ . Queremos ver que  $U \in \tau_{\mathbb{N}}$ , para esto observemos que  $X - U = (\bigcup_{a \in J} U_a)^c$  por leyes de De Morgan es igual a  $\bigcap_{a \in J} U_a^c$ , sabemos por teorema que la intersección arbitraria de conjuntos contables es también contable, entonces  $\bigcap_{a \in J} U_a^c \in \tau_{\mathbb{N}}$ .

Luego, tomemos  $\{U_a\}_{a \in J}$  una colección finita de elementos en  $\tau_{\mathbb{N}}$ , y sea  $U = \bigcap_{a \in J} U_a$  entonces tenemos  $X - U = (\bigcap_{a \in J} U_a)^c$  por leyes de DeMorgan es igual a  $\bigcup_{a \in J} U_a^c$  y por teorema la unión finita de conjuntos contables es también contable. Entonces  $X - U$  es contable, por lo cual se tiene que  $U \in \tau_{\mathbb{N}}$

entonces  $\tau_{\mathbb{N}}$  esta cerrado por intersección finita, como consecuente es una topología.

### 3 Verificar si $\tau_{\infty}$ es topología.

Sea  $X = \mathbb{R}$ , sea  $U_1 = (-\infty, 0)$ ,  $U_2 = (0, \infty)$ , claramente  $U_1, U_2 \in \tau_{\mathbb{N}}$ , pero  $U = U_1 \cup U_2 = (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \notin \tau_{\infty}$  ya que  $\mathbb{R} - U = \{0\}$  no es infinito. Por lo tanto no cumple el axioma de uniones arbitrarias de topología.

$\therefore \tau_{\infty}$  no es topología.

### 4 Demostrar que $(0, 1) = \bigcup_{n \in \mathbb{N} - \{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$ .

Veamos que  $(0, 1) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N} - \{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$ .

Sea  $x \in (0, 1)$ , esto es  $0 < x < 1$ , por propiedad arquimediana existe  $N \in \mathbb{N}$  t.q  $\forall n \geq N$   $0 < \frac{1}{n} \leq x < 1$  entonces  $x \in [\frac{1}{n}, 1)$  entonces  $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N} - \{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$

Por tanto  $(0, 1) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N} - \{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$

Ahora veamos la otra contención.

Sea  $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N} - \{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$ , entonces  $0 < \frac{1}{n_0} \leq x < 1$  para algun  $n_0 \in \mathbb{N} - \{1\}$

$x \in (0, 1)$

Por tanto  $(0, 1) \supset \bigcup_{n \in \mathbb{N} - \{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$

Esto demuestra la igualdad de los conjuntos.

### 5 Verificar que $\beta_K$ satisface el teorema de creación de topologías.

Mostraremos que para todo par  $B_1$  y  $B_2$  de basicos, existe un basico  $B_3$  con  $B_3 \in B_1 \cap B_2$ , esto lo dividiremos en tres casos.

Caso 1:  $B_1 = (a, b)$  y  $B_2 = (c, d)$ .

Los básicos son iguales a los de la topología euclidiana, para la cual sabemos que cumple el teorema de creación de topologías.

Caso 2:  $B_1 = (a, b)$  y  $B_2 = (c, d) - k$ .

Notemos que  $B_2 = B_e - K$  con  $B_e = (c, d)$ , es decir un básico de la topología euclidiana. Vemos que  $B_1 \cap (B_e - k) = (B_1 \cap B_e) - k$  y sabemos que si  $x \in B_1 \cap B_2$ , entonces  $x \in B_1 \cap B_e$  y  $x \notin K$ . Pero como  $B_1$  y  $B_e$  son básicos

de la topología euclidiana, existe un  $x \in B_\alpha \subset (B_1 \cap B_e)$  tal que  $B_\alpha$  es básico de la topología euclidiana. Luego  $x \in B_\alpha - K \subset B_1 \cap B_2$ .

Caso 3:  $B_1 = (a, b) - k$  y  $B_2 = (c, d) - k$ .

Notemos que  $((a, b) - k) \cap ((c, d) - k) = ((a, b) \cap (c, d)) - k$ , por lo que obtendríamos un caso análogo al anterior.

Como se cumple con el teorema de creación de topologías para todo caso,  $\beta_K$  es una topología.

## 6 Verificar que $B_S = \{(a, b] : a < b\}$ es base de algunas topologías

Sean  $B_1 = (a, b], B_2 = (c, d] \in B_S$ , observemos que  $B_1 \cap B_2 = (\min\{a, c\}, \max\{b, d\}]$

Como  $B_1 \cap B_2 \in B_S$ , se concluye por el teorema de creación de topologías que  $B_S$  es base de algunas topologías.

## 7 Verificar las comparaciones entre $\tau_S, \tau_L$ y entre $\tau_S, \tau_K$

Consideraremos  $B_S = \{(a, b] : a < b\}$  como la base de la topología del límite superior ( $\tau_S$ ),  $B_L = \{[a, b) : a < b\}$  como la base de la topología del límite inferior ( $\tau_L$ ),  $B_k = \{(a, b) : a < b\} \cup \{(a, b) - k : a < b, k = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

### 1. Verificamos las comparaciones entre $\tau_S$ y $\tau_L$

Tomemos  $(0, 1] \in B_S$  y  $x = 1$  tal que  $x \in (0, 1]$ . Considere  $[a, b) \in B_L$  tal que  $x \in [a, b)$ . Entonces  $a \leq x < b$  pero como  $x = 1 < b$  entonces  $b \notin (0, 1]$ ,  $[a, b) \not\subset (0, 1]$

$\therefore$  Por teorema de comparación  $\tau_S \not\subset \tau_L$

Tomemos  $[0, 1) \in B_L$  y  $x = 0$  tal que  $x \in [0, 1)$ . Considere  $(a, b] \in B_S$  tal que  $x \in (a, b]$ . Entonces  $a < x \leq b$  pero como  $a < x = 0$  entonces  $a \notin [0, 1)$ ,  $(a, b] \not\subset [0, 1)$

$\therefore$  Por teorema de comparación  $\tau_L \not\subset \tau_S$

$\therefore \tau_S$  y  $\tau_L$  no son comparables.

### 2. Verificamos ahora la comparación entre $\tau_S$ y $\tau_K$

Sea  $(0, 1] \in B_S$  y  $x = 1$  tal que  $x \in (0, 1]$ . Considere  $(a, b) \in B_K$  tal que  $x \in (a, b) \iff a < 1 < b$ , entonces  $b \notin (0, 1]$ ,  $(a, b) \not\subset (0, 1]$

$\therefore$  Por teorema de comparación  $\tau_S \not\subset \tau_K$

Caso 1: básicos de la forma  $(a, b)$  Sea  $(a, b) \in B_k$  y  $x \in (a, b)$ . Considere  $x \in (a, x] \in B_S$ . Sean  $y \in (a, x] \iff a < y \leq x$  y como  $x \in (a, b) \iff a < x < b$ ,  $a < y < b$ , es decir  $y \in (a, b)$ ,  $y \in (a, x] \subset (a, b)$

$\therefore$  Por teorema de comparación se cumple para el primer caso

Caso 2: Básicos de la forma  $(a, b) - k$

Sea  $(a, b) - l \in B_K$  y  $x \in (a, b) - k$ . Considere  $a, x] \in B_S$ , si  $a < \frac{1}{n}$  para algún  $n \in \mathbb{N}$  entonces existe  $q_i \in k$ , tal que  $a < q_i < x, i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ , entonces tomamos  $q = \max\{q_0, q_1, q_2, \dots\}$ , así describiendo  $(q, x] \in B_S$ , y como  $a < q < x < b$ , entonces,  $(q, x] \subset (a, b) - k$

$\therefore$  Por teorema de comparación se cumple para este segundo caso también, por lo que  $\tau_K \subset \tau_S$

$\therefore$  La topología del límite superior es más fina que la k-topología.

## 8 Demostrar si $\tau_{\mathbb{R}^2} = \tau_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$

Primero vemos que  $\tau_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$  es más fina que  $\tau_{\mathbb{R}^2}$ . Sea  $y \in (x, \epsilon)$  donde x denota el centro y el espilón el radio de la bola. Este es un básico en la topología  $\tau_{\mathbb{R}^2}$  y al ser topología, podemos hallar un básico  $(y, \delta) \subset (x, \epsilon)$  con claramente  $\delta < \epsilon$ .

Si quisieramos inscribir un rectángulo, consideraríamos a  $\delta$  como la diagonal mayor, entonces,  $\delta = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{2}$ , siendo a los lados de nuestro cuadrado. Despejando obtendríamos la expresión  $\sqrt{2}\delta = a$ . Considerando a  $a < \sqrt{2}\delta$ , obtendríamos el cuadrado  $(y - a, y + a) \times (y - a, y + a) \subset (y, \delta) \subset (x, \epsilon)$ . por transtitividad de contenciones obtendríamos:

$$y \in (y - a, y + a) \times (y - a, y + a) \subset (x, \epsilon)$$

$$\therefore \tau_{\mathbb{R}^2} \subset \tau_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}$$

Ahora verificamos la otra contención.

Sea  $x \in (a, b) \times (c, d) : a < b, c < d$ ,

tomamos  $\delta = \min\{(x, (a, b)), (x, (c, d)), (x, (a, c)), (x, (b, d))\}$ , entonces, La bola  $(x, \frac{\delta}{2}) \subset (a, b) \times (c, d)$ , donde  $x \in (x, \frac{\delta}{2})$

$$\therefore \tau_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \subset \tau_{\mathbb{R}^2}$$

$\therefore$  como se cumplen ambas contenciones;  $\tau_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} = \tau_{\mathbb{R}^2}$

## 9 Terminar paso inductivo del teorema de las proyecciones

### 10 Demuestra que $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$ .

Veamos que  $(A \times B) \cap (C \times D) \subset (A \cap C) \times (B \cap D)$ .

Sea  $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$ . Por definición de intersección  $(x, y) \in A \times B$  y  $(x, y) \in C \times D$ . Además, por definición de producto cruz  $x \in A$  y  $y \in B$ ,  $x \in C$  y  $y \in D$ . Reescribiendo obtenemos  $x \in A$  y  $x \in C$ ,  $y \in B$  y  $y \in D$  i.e.  $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$ .

Ahora veamos la otra contención.

De forma análoga, sea  $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \times D)$  luego  $x \in A$  y  $y \in B$ ,  $x \in C$  y  $y \in D$  y  $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$ .

Esto demuestra la igualdad de los conjuntos.

**11** Verificar que la topología del orden  $\tau(\beta_O)$  es topología.

**12** Verificar si en  $\mathbb{N}$ ,  $\tau_O = \tau_d$ .

Veamos que las topologías coinciden.

Sea  $U \in \tau_O$ , observe que  $U = \cup_{x \in U} \{x\}$  es una unión de básicos de  $\tau_d$  i.e.  $\tau_O \subset \tau_d$ .

De forma análoga, sea  $U \in \tau_d$ , y  $I_x = (x - 1, x + 1)$  si  $x \neq 1$ ,  $I_1 = [1, 2)$ . Note que  $U = \cup_{x \in U} I_x$  es una unión de básicos de  $\tau_O$  y por tanto  $\tau_d \subset \tau_O$ . Esto demuestra que, en  $\mathbb{N}$ ,  $\tau_O = \tau_d$ .

**13** Verificar que el orden lexicográfico genera un orden en  $\mathbb{R}$ .

**14** Verificar las comparaciones entre  $\tau_O$  y  $\tau_{d \times d}$  en  $\mathbb{R}$

**15** Demuestre que  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ .

Sabemos que  $A \subset \overline{A}$  y  $B \subset \overline{B}$ . Luego  $A \cap B \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ . La cerradura de un conjunto es siempre cerrado y la intersección de cerrados es cerrada, por lo que  $A \cap B$  está contenido en un cerrado y la cerradura es el cerrado más pequeño que contiene al conjunto. Por lo tanto  $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ .

**16** Verificar si  $\overline{\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in J} \overline{A_\alpha}$

El resultado es en general falso. Sea  $X = \mathbb{R}$  y  $A_n = [1/n, 1)$ . Luego  $[0, 1] = \overline{\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha} \neq \bigcup_{\alpha \in J} \overline{A_\alpha} = (0, 1]$ .

**17** Verificar si  $X - \overline{A} = \overline{X - A}$

El resultado es en general, falso. Sea  $X = \mathbb{R}$  y  $A = \{0\}$  bajo la topología usual. Luego  $\mathbb{R} - \{0\} = X - \overline{A} \neq \overline{X - A} = \mathbb{R}$

**18** Considere  $([0, 1])^2$  bajo  $\tau_{\mathbb{R}_L \times \mathbb{R}_S}$  hallar  $Int([0, 1]^2)$

Podemos deducir que los básicos de  $\tau_{\mathbb{R}_L \times \mathbb{R}_S}$  son de la forma  $[a, b) \times (c, d]$ , por lo cual el abierto más grande que está en  $Int([0, 1]^2)$  es  $(0, 1) \times (0, 1]$

**19** Verificar si  $\text{Int}(A \cap B) = \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B)$

Es un hecho conocido que  $\text{Int}(A) = \overline{A^c}^c$  y que  $\overline{A \cup B} = \overline{AB}$ . Aplicando estas propiedades tenemos que

$$\begin{aligned}\text{Int}(A \cap B) &= \overline{(A \cap B)^c}^c \\ &= \overline{(A^c \cup B^c)}^c \\ &= \overline{(A^c \cup B^c)}^c \\ &= \overline{A^c}^c \cap \overline{B^c}^c \\ &= \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B).\end{aligned}$$

**20** Verificar que si  $D_1, D_2$  son densos y abiertos en  $X$ , entonces  $D_1 \cap D_2$  es denso en  $X$

Sea  $U$  un abierto arbitrario de  $X$ , tenemos que por asociatividad de la intersección  $U \cap (D_1 \cap D_2) = (U \cap D_1) \cap D_2$ , y  $(U \cap D_1)$  es abierto por la segunda axioma de topología. Ahora bien, tenemos que la intersección de cualquier abierto con  $D_2$  es no vacío ya que  $D_2$  es denso, entonces  $(U \cap D_1) \cap D_2 \neq \emptyset$ . Juntando todo lo que tenemos,  $U \cap (D_1 \cap D_2) = (U \cap D_1) \cap D_2 \neq \emptyset$ , por teorema se tiene que  $D_1 \cap D_2$  es denso.

**21** Verificar la convergencia de  $\{\frac{1}{n}\}$  donde  $n \in \mathbb{N}$ , bajo la topología del límite superior

Sea la sucesión  $\{\frac{1}{n}\}$ , donde  $n$  pertenece a los naturales. Bajo la topología del límite superior, la convergencia se verifica observando que la sucesión tiende a 0 cuando  $n \rightarrow \infty$ . Para cualquier  $\epsilon > 0$ , existe un  $N$  tal que para todo  $n > N$ ,  $\frac{1}{n} < \epsilon$ , lo cual demuestra que la sucesión converge a 0 bajo esta topología.

Por lo tanto  $\{\frac{1}{n}\}$  converge a 0 bajo la topología del límite superior

**22** Verificar si  $\tau_\infty$  es Hausdorff.

Sean  $x, y \in X$  dos puntos distintos, consideremos los conjuntos abiertos  $U = X - \{y\}$  y  $V = X - \{x\}$ , abiertos en  $\tau_\infty$  vemos  $U \cap V = X - \{x, y\}$ , que no es vacío

Se obtiene que  $x \in U$  y  $x \in U$ , esto implica que la intersección  $U$  y  $V$  no es vacía, lo que significa que no podemos separar los puntos  $x$  y  $y$  por conjuntos abiertos disjuntos, por lo tanto  $\tau_\infty$  no es Hausdorff.

**23** *Demostrar que  $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ .*

Demostramos que  $\overline{A \times B} \subseteq \overline{A} \times \overline{B}$ . Sea  $(x, y) \in \overline{A \times B}$ . Esto significa que para toda vecindad  $U \times V$  de  $(x, y)$ , se tiene que:

$$(U \times V) \cap (A \times B) \neq \emptyset.$$

Dado que la intersección del producto es el producto de las intersecciones:

$$(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B) \neq \emptyset,$$

se sigue que  $U \cap A \neq \emptyset$  y  $V \cap B \neq \emptyset$ . Por lo tanto,  $x \in \overline{A}$  y  $y \in \overline{B}$ , lo que implica que  $(x, y) \in \overline{A} \times \overline{B}$ . Así, obtenemos la inclusión deseada.

Demostramos que  $\overline{A} \times \overline{B} \subseteq \overline{A \times B}$

Sea  $(x, y) \in \overline{A} \times \overline{B}$ , es decir,  $x \in \overline{A}$  y  $y \in \overline{B}$ . Esto significa que:

$$\forall \text{ vecindad } U \text{ de } x, \quad U \cap A \neq \emptyset,$$

$$\forall \text{ vecindad } V \text{ de } y, \quad V \cap B \neq \emptyset.$$

Tomando cualquier vecindad  $U \times V$  de  $(x, y)$ , se tiene que:

$$(U \cap A) \times (V \cap B) \neq \emptyset.$$

Es decir,

$$(U \times V) \cap (A \times B) \neq \emptyset.$$

Dado que esto es cierto para toda vecindad  $(U \times V)$  de  $(x, y)$ , se concluye que  $(x, y) \in \overline{A \times B}$ . Así, obtenemos la segunda inclusión.

Como hemos demostrado ambas inclusiones, concluimos que:

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}.$$

**24** *Demostrar que  $\tau_Y$  es la topología del subespacio de  $X$ .*

1.  $\emptyset$  y  $Y$  están en  $\tau_Y$  se sabe que  $\emptyset \in \tau_X$  y  $X \in \tau_X$  entonces  $\emptyset \cap Y = \emptyset$  y  $X \cap Y = Y$  están en  $\tau_Y$ , por lo tanto  $\emptyset, Y \in \tau_Y$ .

2. Cerradura de uniones: Sea  $\{U_i\}_{i \in I}$  una colección de conjuntos de  $\tau_Y$  se quiere demostrar que la unión de la colección  $\bigcup_{i \in I} U_i$ , está en  $\tau_Y$ , se tiene que

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (V_i \cap Y) = \left( \bigcup_{i \in I} V_i \right) \cap Y.$$

entonces la unión de cualquier colección de conjuntos de  $\tau_Y$  pertenece a  $\tau_Y$ .  
 3. Cerradura bajo intersecciones: sea  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ , es decir,  $U_i = V_i \cap Y$  para algún  $V_i \in \tau_X$  y para cada  $i$ . Por conjuntos se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^n U_i = \bigcap_{i=1}^n (V_i \cap Y) = \left( \bigcap_{i=1}^n V_i \right) \cap Y.$$

por lo tanto, la intersección de cualquier colección finita de conjuntos de  $\tau_Y$  pertenece a  $\tau_Y$ , concluimos que  $\tau_Y$  es una topología sobre  $Y$ .

**25**  *Demostrar que  $U$  es abierto en  $X$  si y solo si*

$$\overline{U \cap \overline{A}} = \overline{U} \cap \overline{A}.$$

*para toda  $A \subseteq X$ .*