

Tareas de segundo parcial-Topología

Alumnos:

Arturo Rodriguez Contreras - 2132880

Jonathan Raymundo Torres Cardenas - 1949731

Praxedis Jimenes Ruvalcaba

Erick Román Montemayor Treviño - 1957959

Alexis Noe Mora Leyva

Everardo Flores Rivera - 2127301

24 de mayo de 2025

1 Sea $f, g : X \rightarrow Y$ funciones continuas y Y bajo la top. del orden. Sea $h(x) = \min f(x), g(x)$.

Demostrar que h es continua en X

2 Sea $f : X \leftarrow Y$ una función abierta. Si $S \subset Y$ y C cerrado en X tal que $f^{-1}(S) \subset C$, entonces existe K cerrado en Y tal que $S \subset K$ y $f^{-1}(K) \subset C$

3 Caso 1 y Caso 2 de ejemplo clase del 12/03/23

4 Ver que $h^{-1} = g$ es continua en $[a, b]$

5 Demostrar que la relación entre esp. top. $X \sim Y$ es de equivalencia

6 Demostrar que si $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ para cada $A \subset X$ entonces f es un homeomorfismo

Supongamos que $f : X \rightarrow Y$ es una función tal que para todo subconjunto $A \subset X$, se cumple que

$$f(\overline{A}) = \overline{f(A)}.$$

P. D. f es continua: Sea $C \subset Y$ cerrado. Consideramos $A = f^{-1}(C) \subset X$. Por demostrar que A es cerrado Por hipótesis

$$f(\overline{A}) = \overline{f(A)} = \overline{f(f^{-1}(C))} \subset \overline{C} = C.$$

entonces,

$$\overline{A} \subset f^{-1}(f(\overline{A})) \subset f^{-1}(C) = A.$$

por lo tanto, A es cerrado y f es continua

P.D. f es inyectiva: Supongamos que $f(x_1) = f(x_2)$. Tomamos $A = \{x_1\}$ y notamos que

$$f(\overline{A}) = \overline{f(\{x_1\})} = \overline{\{f(x_1)\}} = \overline{\{f(x_2)\}} = \overline{f(\{x_2\})} = f(\overline{\{x_2\}}).$$

Entonces $\overline{\{x_1\}}$ y $\overline{\{x_2\}}$ tienen la misma imagen bajo f . Así que, f debe ser inyectiva.

P.D. f es sobreyectiva Sea $y \in Y$. Supongamos que no existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Entonces $y \notin f(X)$, y por tanto $y \notin \overline{f(A)}$ para ningún $A \subset X$. Pero si $y \notin \overline{f(A)}$ para todo A , entonces no existe $A \subset X$ tal que $y \in f(\overline{A})$, pero esto contradice que la cerradura de A debe contener todos los puntos límite de las imágenes. Por lo tanto, $y \in f(X)$, y f es sobreyectiva.

P.D: f^{-1} es continua: Como f es biyectiva, para todo $B \subset Y$ existe $A \subset X$ tal que $B = f(A)$.

Entonces:

$$f(\overline{A}) = \overline{f(A)} = \overline{B}.$$

Aplicando f^{-1} ,

$$f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(f(\overline{A})) = \overline{A} = \overline{f^{-1}(B)}.$$

Así, $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$, lo que implica que f^{-1} también es continua (por el mismo argumento del paso 1).

Como f es continua, biyectiva y su inversa también es continua. Por lo tanto, f es un homeomorfismo.

7 *Demostrar que $X \times Y \sim Y \times X$, extenderlo a caso finito utilizando cualquier permutación.*

Sea $f : X \times Y \rightarrow Y \times X$ definida por $f(x, y) = (y, x)$. Es claro que f es biyectiva, veamos que es un homeomorfismo. Sea $A = V \times U$ un basico de $Y \times X$, tenemos que $f^{-1}(V \times U) = U \times V$ es abierto en $X \times Y$. Con un argumento similar obtenemos que f^{-1} es continua, por tanto f es

un homeomorfismo.

Ahora demostraremos que si $\sigma \in S_n$ es una permutación, entonces $\prod_{k=1}^n X_k \sim \prod_{k=1}^n X_{\sigma(k)}$. Recordemos que toda permutación se puede escribir como una composición de transposiciones de la forma $\pi(k) = k$ si $k < i$ o $k > i+1$ y $\pi(i) = i+1$, $\pi(i+1) = i$. Por lo primero demostrado, y del hecho que la relación de homeomorfismo es de equivalencia, tenemos que $\sigma = \pi_1 \circ \dots \circ \pi_m$,

$$\prod_{k=1}^n X_k \sim \prod_{k=1}^n X_{\pi_1(k)} \sim \prod_{k=1}^n X_{(\pi_1 \circ \pi_2)(k)} \sim \dots \sim \prod_{k=1}^n X_{\sigma(k)}$$

8 *Demostrar que $\mathcal{B} = \{ \prod_{\alpha \in J} U_\alpha : U_\alpha \in \tau_\alpha \}$ es una base para la topología del producto y se le conoce como la topología por cajas.*

Sean $A = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha$, $B = \prod_{\alpha \in J} V_\alpha$. Como $A \cap B = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha \cap V_\alpha = C \in \mathcal{B}$, entonces \mathcal{B} es base.

9 *Verificar que si $A_\alpha \subset X_\alpha$, entonces $\prod_{\alpha \in J} \text{int}(A_\alpha) = \text{int}(\prod_{\alpha \in J} A_\alpha)$ en la topología por cajas.*

El resultado es en general falso. Tomemos \mathbb{R}^ω , $A_n = (-1/n, 1/n)$. Es facil ver que $\prod \text{int}(A_n) = \prod A_n$, pero si $U = \prod_{i=1}^m U_{n_i} \times \prod_{n \neq n_i} \mathbb{R} \subset \prod A_n$, entonces $x_{n_i} \in U_{n_i} \cap A_{n_i}$ y $x_n = 1$ si $n \neq n_i$, cumple que $(x_n) \in U$, pero $(x_n) \notin \prod A_n$.

10 *Verificar si las β -ésima proyecciones son abiertas y/o cerradas en ambas topologías*

Sea $U = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha$ y note que $\pi_\beta(U) = U_\beta$, por lo que si U es abierto en la top. por cajas o producto, en ambos casos $\pi_\beta(U)$ es abierto en X_β . Además, de la igualdad $\overline{U} = \prod_{\alpha \in J} \overline{U_\alpha}$, que se cumple en ambas topologías, se sigue que $\pi_\beta(U) = \overline{U_\beta}$ es cerrado, es decir, π_β es un mapeo abierto y cerrado.

11 *Sea $f : X \rightarrow Y$, X, Y espacios metricos. Demostrar que f es continua en X si y solo si $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : f(B_{d_X}(x, \delta)) \subset B_{d_Y}(f(x), \epsilon) \forall x \in X$*

Del teorema de equivalencia para continuidad, f es continua si, y sólo si para cada basico $V = B_{d_Y}(f(x), \epsilon)$ existe un basico $U = B_{d_X}(x, \delta)$ tal que $f(U) \subset V$, esto es, $f(B_{d_X}(x, \delta)) \subset B_{d_Y}(f(x), \epsilon)$.

Supongamos que f es continua Sea $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Entonces el conjunto $B_{d_Y}(f(x), \epsilon) \subset Y$ es abierto. Como f es continua, la preimagen $f^{-1}(B_{d_Y}(f(x), \epsilon)) \subset X$ es abierta. Además, $x \in f^{-1}(B_{d_Y}(f(x), \epsilon))$, ya que $f(x) \in B_{d_Y}(f(x), \epsilon)$.

Entonces, como $f^{-1}(B_{d_Y}(f(x), \epsilon))$ es un abierto que contiene a x , por definición de la topología métrica, existe $\delta > 0$ tal que:

$$B_{d_X}(x, \delta) \subset f^{-1}(B_{d_Y}(f(x), \epsilon)).$$

Aplicando f

$$f(B_{d_X}(x, \delta)) \subset B_{d_Y}(f(x), \epsilon).$$

lo cual es a lo que queremos llegar

Supongamos que:

$$\forall x \in X, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(B_{d_X}(x, \delta)) \subset B_{d_Y}(f(x), \epsilon).$$

Queremos probar que f es continua. Sea $V \subset Y$ un abierto

P.D. $f^{-1}(V)$ es abierto en X .

Sea $x \in f^{-1}(V)$, entonces $f(x) \in V$, y como V es abierto, existe $\epsilon > 0$ tal que:

$$B_{d_Y}(f(x), \epsilon) \subset V.$$

Por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que:

$$f(B_{d_X}(x, \delta)) \subset B_{d_Y}(f(x), \epsilon) \subset V.$$

Entonces:

$$B_{d_X}(x, \delta) \subset f^{-1}(V).$$

Por lo tanto, $f^{-1}(V)$ es abierto, por lo que queda demostrado el ejercicio

12 Demostrar que la métrica uniforme ρ es métrica.

Por definición, $\rho((x_n), (y_n)) = \sup \{\bar{d}(x_n, y_n)\}$, donde $\bar{d}(x, y) \leq 1$ para cada $x, y \in \mathbb{R}$, por lo que ρ está bien definida. Es claro que $\rho((x_n), (x_n)) = 0$, además, $(x_n) \neq (y_n)$ implica que existe un natural m con $\rho((x_n), (y_n)) > \bar{d}(x_m, y_m) > 0$. Por tanto, $\rho((x_n), (y_n)) = 0$, si y sólo si $(x_n) = (y_n)$. La simetría se hereda de la métrica acotada, $\rho((x_n), (y_n)) = \sup \{\bar{d}(x_n, y_n)\} =$

$\sup \{\bar{d}(y_n, x_n)\} = \rho((y_n), (x_n))$. Finalmente, veamos la desigualdad triangular.

$$\begin{aligned} \rho((x_n), (y_n)) &\leq \sup \{\bar{d}(x_n, z_n) + \bar{d}(z_n, y_n)\} \\ &\leq \sup \{\bar{d}(x_n, z_n)\} + \sup \{\bar{d}(z_n, y_n)\} \\ &= \rho((x_n), (z_n)) + \rho((z_n), (y_n)). \end{aligned}$$

13 Sea $A = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\omega : \exists N \in \mathbb{N} : x_n = 0; n \geq N\}$ Hallar \bar{A} en top. uniforme

14 Sea A del ejercicio anterior, hallar \bar{A} en top. cajas

Veamos que $A = \bar{A}$. Sea $(x_n) \notin A$, luego existe una sucesión estrictamente creciente de naturales (n_k) tal que $x_{n_k} \neq 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como \mathbb{R} es T_1 , existen vecindades abiertas U_{n_k} de x_{n_k} que no contienen al 0. Tomemos $U = \prod_{k=1}^{\infty} U_{n_k} \times \prod_{n \neq n_k} \mathbb{R}$. Es fácil ver que $(x_n) \in U$. Ahora sea $(y_n) \in A \cap U$, por definición existe N tal que $n > N$ entonces $y_n = 0$, pero al ser $n_k \rightarrow \infty$, para algún k se cumple que $n_k > N$ y $y_{n_k} \in U_{n_k}$, contradiciendo el hecho que $0 \notin U_{n_k}$. Por tanto $A \cap U = \emptyset$ y $A = \bar{A}$.

15 Demostrar que $f^{-1}(Fr_Y(B)) \subset Fr_X(f^{-1}(B))$

16 Sea $h : \mathbb{R}^\omega \rightarrow \mathbb{R}^\omega$ definida por: $h((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (a_n x_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ver si h es homeomorfismo en \mathbb{R}^ω bajo top. cajas

Si $a_m = 0$ para algún $m \in \mathbb{N}$, dado (x_n) , definimos (y_n) por $y_n = x_n$ si $n \neq m$, $y_m = x_m + 1$. Es claro que $(x_n) \neq (y_n)$, pero $h((x_n)) = h((y_n))$, por lo que h no es biyectiva y por tanto, no puede ser homeomorfismo. Supongamos entonces que $a_n \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Observe que $h^{-1}((x_n)) = (\frac{x_n - b_n}{a_n})$ es la función inversa de h . Tanto h como h^{-1} son de la forma $f((x_n)) = (c_n x_n + d_n)$, por lo que basta probar que esta función es continua en la topología por cajas. Sea $p_n((x_n)) = c_n x_n + d_n$, es fácil ver que es continua para cada $n \in \mathbb{N}$, y sea $U = \prod_{i=1}^m U_{n_i} \times \prod_{n \neq n_i} \mathbb{R}$ un abierto en \mathbb{R}^ω , $f^{-1}(U) = \cap_{i=1}^m p_{n_i}^{-1}(U_{n_i})$ es una intersección finita de abiertos, por lo que es abierta y f es continua. Por tanto, h es un homeomorfismo.