Tareas de primer parcial-Topología

Alumnos:
Arturo Rodriguez Contreras - 2132880
Jonathan Raymundo Torres Cardenas - 1949731
Praxedis Jimenes Ruvalcaba
Erick Román Montemayor Treviño - 1957959
Alexis Noe Mora Leyva
Everardo Flores Rivera - 2127301

3 de marzo de 2025

1 *¿Es la unión de topologías una topología?*

Sea $X = \{a, b, c\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$ se tiene que τ_1 es topología ya que contiene al conjunto vacio, X, contiene las uniones arbitrarias $\{a\} \cup X = X \in \tau_1$, y tambien $\{a\} \cup \emptyset = \{a\} \in \tau_1$ y $\emptyset \cup X = X \in \tau_1$ y contiene a las intersecciones finitas de sus elementos, de igual forma se sigue que τ_2 es topologia de X. La union de las dos topologías es $U = \tau_1 \cup \tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}\}$ lo cual no es topología, ya que $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin U$, por lo tanto, no necesariamente la unión de topologías es una topología.

2 *Demostrar que $\tau_{\mathbb{N}}$ es topologia.*

Se tiene por definicion que $\{\emptyset, X\} \subset \tau_{\mathbb{N}}$. Ahora, sea $\{U_a\}_{a\in J}$ una coleccion de elementos en $\tau_{\mathbb{N}}$, y $U = \bigcup_{a\in J} U_a$. Queremos ver que $U \in \tau_{\mathbb{N}}$, para esto observemos que $X - U = (\bigcup_{a\in J} U_a)^c$ por leyes de De Morgan es igual a $\bigcap_{a\in J} U_a^c$, sabemos por teorema que la intersección arbitraria de conjuntos contables es tambien contable, entonces $\bigcap_{a\in J} U_a^c \in \tau_{\mathbb{N}}$.
Luego, tomemos$\{U_a\}_{a\in J}$ una colección finita de elementos en $\tau_{\mathbb{N}}$, y sea $U = \bigcap_{a\in J} U_a$ entonces tenemos $X - U = (\bigcap_{a\in J} U_a)^c$ por leyes de DeMorgan es igual a $\bigcup_{a\in J} U_a^c$ y por teorema la union finita de conjuntos contables es tambien contable. Entonces $X - U$ es contable, por lo cual se tiene que $U \in \tau_{\mathbb{N}}$

entonces $\tau_{\mathbb{N}}$ esta cerrado por intersección finita, como consequente es una topología.

3 *Verificar si τ_∞ es topologia.*
Sea $X = \mathbb{R}$, sea $U_1 = (-\infty, 0), U_2 = (0, \infty)$, claramente $U_1, U_2 \in \tau_{\mathbb{N}}$, pero $U = U_1 \cup U_2 = (\infty, 0) \cup (0, \infty) \notin \tau_\infty$ ya que $\mathbb{R} - U = \{0\}$ no es infinito. Por lo tanto no cumple el axioma de uniones arbitrarias de topología.
$\therefore \tau_\infty$ no es topología.

4 *Demostrar que* $(0,1) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}-\{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$.
Veamos que $(0,1) \subset \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}-\{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$.
Sea $x \in (0,1)$, esto es $0 < x < 1$, por propiedad arquimediana existe $N \in \mathbb{N}$ $t.q$ $\forall n \geq N$ $0 < \frac{1}{n} \leqslant x < 1$ entonces $x \in [\frac{1}{n}, 1)$ entonces $x \in \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}-\{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$
Por tanto $(0,1) \subset \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}-\{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$
Ahora veamos la otra contención.
Sea $x \in \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}-\{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$, entonces $0 < \frac{1}{n_0} \leq x < 1$ para algun $n_0 \in \mathbb{N} - \{1\}$
$x \in (0,1)$
Por tanto $(0,1) \supset \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}-\{1\}} [\frac{1}{n}, 1)$
Esto demuestra la igualdad de los conjuntos.

5 *Verificar que β_K satisface el teorema de creación de topologías.*
Demostraremos que para todo par B_1 y B_2 de basicos, existe un basico B_3 con $B_3 \in B_1 \cap B_2$, esto lo dividiremos en tres casos.

Caso 1: $B_1 = (a,b)$ y $B_2 = (c,d)$.
Los básicos son iguales a los de la topología euclidiana, para la cual sabemos que cumple el teorema de creación de topologías.

Caso 2: $B_1 = (a,b)$ y $B_2 = (c,d) - k$.
Notemos que $B_2 = B_e - K$ con $B_e = (c,d)$, es decir un básico de la topología euclidiana. Vemos que $B_1 \cap (B_e - k) = (B_1 \cap B_e) - k$ y sabemos que si $x \in B_1 \cap B_2$, entonces $x \in B_1 \cap B_e$ y $x \notin K$. Pero como B_1 y B_e son básicos

de la topología euclidiana, existe un $x \in B_\alpha \subset (B_1 \cap B_e)$ tal que B_α es basico de la topología euclidiana. Luego $x \in B_\alpha - K \subset B_1 \cap B_2$.

Caso 3: $B_1 = (a, b) - k$ y $B_2 = (c, d) - k$.
Notemos que $((a, b) - k) \cap ((c, d) - k) = ((a, b) \cap (c, d)) - k$, por lo que obtendríamos un caso análogo al anterior.
Como se cumple con el teorema de creación de topologías para todo caso, β_K es una topología.

6 *Verificar que* $B_S = \{(a, b] : a < b\}$ *es base de algunas topologias*
Sean $B_1 = (a, b], B_2 = (c, d] \in B_S$, observemos que $B_1 \cap B_2 = (min\{a, c\}, max\{b, d\}]$
Como $B_1 \cap B_2 \in B_S$, se concluye por el teorema de creación de topologías que B_S es base de algunas topologias.

7 *Verificar las comparaciones entre* τ_S, τ_L *y entre* τ_S, τ_K
Consideraremos $B_S = \{(a, b] : a < b\}$ como la base la de la topología del límite superior (τ_S), $B_L = \{[a, b) : a < b\}$ como la base de la topología del límite inferior (τ_L), $B_k = \{(a, b) : a < b\} \bigcup \{(a, b) - k : a < b, k = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

1. Verificamos las comparaciones entre τ_S y τ_L
Tomemos $(0, 1] \in B_S$ y $x = 1$ tal que $x \in (0, 1]$. Considere $[a, b) \in B_L$ tal que $x \in [a, b)$. Entonces $a \leq x < b$ pero como $x = 1 < b$ entonces $b \notin (0, 1]$, $[a, b) \not\subset (0, 1]$
$\therefore$Por teorema de comparación $\tau_S \not\subset \tau_L$
Tomemos $[0, 1) \in B_L$ y $x = 0$ tal que $x \in [0, 1)$. Considere $(a, b] \in B_S$ tal que $x \in (a, b]$. Entonces $a < x \leq b$ pero como $a < x = 0$ entonces $a \notin [0, 1)$, $(a, b] \not\subset [0, 1)$
$\therefore$Por teorema de comparación $\tau_L \not\subset \tau_S$
$\therefore \tau_S$ y τ_L no son comparables.

2. Verificamos ahora la comparación entre τ_S y τ_K
Sea $(0, 1] \in B_S$ y $x = 1$ tal que $x \in (0, 1]$. Considere $(a, b) \in B_K$ tal que $x \in (a, b) \iff a < 1 < b$, entonces $b \notin (0, 1]$, $(a, b) \not\subset (0, 1]$
$\therefore$Por teorema de comparación $\tau_S \not\subset \tau_K$
Caso 1: básicos de la forma (a, b) Sea $(a, b) \in B_k$ y $x \in (a, b)$. Considere $x \in (a, x] \in B_S$. Sean $y \in (a, x] \iff a < y \leq x$ y como $x \in (a, b) \iff a < x < b$, $a < y < b$, es decir $y \in (a, b), y \in (a, x] \subset (a, b)$
$\therefore$Por teorema de comparación se cumple para el primer caso

Caso 2: Básicos de la forma $(a, b) - k$

Sea $(a, b) - l \in B_K$ y $x \in (a, b) - k$. Considere $a, x] \in B_S$, si $a < \frac{1}{n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$ entonces existe $q_i \in k$, tal que $a < q_i < x, i \in \{0, 1, 2, ...\}$, entonces tomamos $q = max\{q_0, q_1, q_2, ...\}$, así describiendo $(q, x] \in B_S$, y como $a < q < x < b$, entonces, $(q, x] \subset (a, b) - k$

$\therefore$Por teorema de comparación se cumple para este segundo caso también, por lo que $\tau_K \subset \tau_S$

$\therefore$La topología del límite superior es más fina que la k-topología.

8 *Demostrar si* $\tau_{\mathbb{R}^2} = \tau_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$

Primero vemos que $\tau_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ es más fina que $\tau_{\mathbb{R}^2}$. Sea $y \in (x, \epsilon)$ donde x denota el centro y el espilón el radio de la bola. Este es un básico en la topología $\tau_{\mathbb{R}^2}$ y al ser topología, podemos hallar un básico $(y, \delta) \subset (x, \epsilon)$ con claramente $\delta < \epsilon$.

Si quisieramos inscribir un rectángulo, consideraríamos a δ como la diagonal mayor, entonces, $\delta = \frac{\sqrt{a^2+a^2}}{2}$, siendo a los lados de nuestro cuadrado. Despejando obtendríamos la expresión $\sqrt{2}\delta = a$. Considerando a $a < \sqrt{2}\delta$, obtendríamos el cuadrado $(y - a, y + a)$x$(y - a, y + a) \subset (y, \delta) \subset (x, \epsilon)$. por transtitivadad de contenciones obtendríamos:

$y \in (y - a, y + a)$x$(y - a, y + a) \subset (x, \epsilon)$

$\therefore \tau_{\mathbb{R}^2} \subset \tau_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$

Ahora verificamos la otra contención.

Sea $x \in (a, b)$x$(c, d) : a < byc < d$,

tomamos $\delta = min\{(x, (a, b)), (x, (c, d)), (x, (a, c)), (x, (b, d))\}$, entonces, La bola $(x, \frac{\delta}{2}) \subset (a, b)x(c, d)$, donde $x \in (x, \frac{\delta}{2})$

$\therefore \tau_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \subset \tau_{\mathbb{R}^2}$

$\therefore$ como se cumplen ambas contenciones; $\tau_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} = \tau_{\mathbb{R}^2}$

9 *Terminar paso inductivo del teorema de las proyecciones*

10 *Demuestra que* $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Veamos que $(A \times B) \cap (C \times D) \subset (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Sea $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$. Por definición de intersección $(x, y) \in A \times B$ y $(x, y) \in C \times D$. Además, por definición de producto cruz $x \in A$ y $y \in B$, $x \in C$ y $y \in D$. Reescribiendo obtenemos $x \in A$ y $x \in C$, $y \in B$ y $y \in D$ *i.e.* $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.

Ahora veamos la otra contención.

De forma análoga, sea $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \times D)$ luego $x \in A$ y $y \in B$, $x \in C$ y $y \in D$ y $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$.
Esto demuestra la igualdad de los conjuntos.

11 *Verificar que la topologia del orden $\tau(\beta_O)$ es topología.*

12 *Verificar si en $\mathbb{N}$, $\tau_O = \tau_d$.*
Veamos que las topologías coinciden.
Sea $U \in \tau_O$, observe que $U = \cup_{x \in U}\{x\}$ es una unión de básicos de τ_d *i.e.* $\tau_O \subset \tau_d$.
De forma análoga, sea $U \in \tau_d$, y $I_x = (x-1, x+1)$ si $x \neq 1$, $I_1 = [1, 2)$. Note que $U = \cup_{x \in U} I_x$ es una unión de basicos de τ_O y por tanto $\tau_d \subset \tau_O$. Esto demuestra que, en $\mathbb{N}$, $\tau_O = \tau_d$.

13 *Verificar que el orden lexicografico genera un orden en $\mathbb{R}$.*

14 *Verificar las comparaciones entre τ_O y $\tau_{d \times \mathbb{R}}$ en $\mathbb{R}$*

15 *Demuestre que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.*
Sabemos que $A \subset \overline{A}$ y $B \subset \overline{B}$. Luego $A \cap B \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. La cerradura de un conjunto es siempre cerrado y la intersección de cerrados es cerrada, por lo que $A \cap B$ está contenido en un cerrado y la cerradura es el cerrado más pequeño que contiene al conjunto. Por lo tanto $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

16 *Verificar si $\overline{\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha} = \bigcup_{\alpha \in J} \overline{A_\alpha}$*
El resultado es en general falso. Sea $X = \mathbb{R}$ y $A_n = [1/n, 1)$. Luego $[0, 1] = \overline{\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha} \neq \bigcup_{\alpha \in J} \overline{A_\alpha} = (0, 1]$.

17 *Verificar si $X - \overline{A} = \overline{X - A}$*
El resultado es en general, falso. Sea $X = \mathbb{R}$ y $A = \{0\}$ bajo la topología usual. Luego $\mathbb{R} - \{0\} = X - \overline{A} \neq \overline{X - A} = \mathbb{R}$

18 *Considere $([0, 1])^2$ bajo $\tau_{\mathbb{R}_L \times \mathbb{R}_S}$ hallar $Int([0, 1]^2)$*
Podemos deducir que los básicos de $\tau_{\mathbb{R}_L \times \mathbb{R}_S}$ son de la forma $[a, b) \times (c, d]$, por lo cual el abierto más grande que está en $Int([0, 1]^2)$ es $[0, 1) \times (0, 1]$

19 *Verificar si $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$*
Es un hecho conocido que $\text{Int}(A) = \overline{A^c}^c$ y que $\overline{A \cup B} = \overline{A}\overline{B}$. Aplicando estas propiedades tenemos que

$$\begin{aligned}\text{Int}(A \cap B) &= \overline{(A \cap B)^c}^c \\ &= (\overline{A^c \cup B^c})^c \\ &= (\overline{A^c} \cup \overline{B^c})^c \\ &= \overline{A^c}^c \cap \overline{B^c}^c \\ &= \text{Int}(A) \cap \text{Int}(B).\end{aligned}$$

20 *Verificar que si D_1, D_2 son densos y abiertos en X, entonces $D_1 \cap D_2$ es denso en X*
Sea U un abierto arbitrario de X, tenemos que por asociatividad de la intersección $U \cap (D_1 \cap D_2) = (U \cap D_1) \cap D_2$, y $(U \cap D_1)$ es abierto por la segunda axioma de topología. Ahora bien, tenemos que la intersección de cualquier abierto con D_2 es no vacio ya que D_2 es denso, entonces $(U \cap D_1) \cap D_2 \neq \varnothing$. Juntando todo lo que tenemos, $U \cap (D_1 \cap D_2) = (U \cap D_1) \cap D_2 \neq \varnothing$, por teorema se tiene que $D_1 \cap D_2$ es denso.

21 *Verificar la convergencia de $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ donde $n \in N$, bajo la topología del límite superior*
Sea la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, donde n pertenece a los naturales. Bajo la topología del límite superior, la convergencia se verifica observando que la sucesión tiende a 0 cuando $n \to \infty$. Para cualquier $\epsilon > 0$, existe un N tal que para todo $n > N$, $\frac{1}{n} < \epsilon$, lo cual demuestra que la sucesión converge a 0 bajo esta topología.
Por lo tanto $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ converge a 0 bajo la topología del límite superior

22 *Verificar si τ_∞ es Hausdorff.*
Sean $x, y \in X$ dos puntos distintos, consideremos los conjuntos abiertos $U = X - \{y\}$ y $V = X - \{x\}$, abiertos en τ_∞ vemos $U \cap V = X - \{x, y\}$, que no es vacío
Se obiene que $x \in U$ y $x \in U$, esto implica que la intersección U y V no es vacía, lo que significa que no podemos separar los puntos x y y por conjuntos abiertos disjuntos, por lo tanto τ_∞ no es Hausdorff.

23 *Demostrar que* $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.
Demostramos que $\overline{A \times B} \subseteq \overline{A} \times \overline{B}$. Sea $(x, y) \in \overline{A \times B}$. Esto significa que para toda vecindad $U \times V$ de (x, y), se tiene que:

$$(U \times V) \cap (A \times B) \neq \emptyset.$$

Dado que la intersección del producto es el producto de las intersecciones:

$$(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B) \neq \emptyset,$$

se sigue que $U \cap A \neq \emptyset$ y $V \cap B \neq \emptyset$. Por lo tanto, $x \in \overline{A}$ y $y \in \overline{B}$, lo que implica que $(x, y) \in \overline{A} \times \overline{B}$. Así, obtenemos la inclusión deseada.
Demostramos que $\overline{A} \times \overline{B} \subseteq \overline{A \times B}$
Sea $(x, y) \in \overline{A} \times \overline{B}$, es decir, $x \in \overline{A}$ y $y \in \overline{B}$. Esto significa que:

$$\forall \text{ vecindad } U \text{ de } x, \quad U \cap A \neq \emptyset,$$

$$\forall \text{ vecindad } V \text{ de } y, \quad V \cap B \neq \emptyset.$$

Tomando cualquier vecindad $U \times V$ de (x, y), se tiene que:

$$(U \cap A) \times (V \cap B) \neq \emptyset.$$

Es decir,

$$(U \times V) \cap (A \times B) \neq \emptyset.$$

Dado que esto es cierto para toda vecindad $(U \times V)$ de (x, y), se concluye que $(x, y) \in \overline{A \times B}$. Así, obtenemos la segunda inclusión.
Como hemos demostrado ambas inclusiones, concluimos que:

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}.$$

24 *Demostrar que* τ_Y *es la topología del subespacio de* X.
1. $\emptyset$ y Y están en τ_Y se sabe que $\emptyset \in \tau_X$ y $X \in \tau_X$ entonces $\emptyset \cap Y = \emptyset$ y $X \cap Y = Y$ están en τ_Y, por lo tanto $\emptyset, Y \in \tau_Y$.
2. Cerradura de uniones: Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una colección de conjuntos de τ_Y se quiere demostrar que la unión de la colección $\bigcup_{i \in I} U_i$, está en τ_Y, se tiene que

$$\bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} (V_i \cap Y) = \left(\bigcup_{i \in I} V_i \right) \cap Y.$$

entonces la unión de cualquier colección de conjuntos de τ_Y pertenece a τ_Y.
3. Cerradura bajo intersecciones: sea $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$,es decir, $U_i = V_i \cap Y$ para algún $V_i \in \tau_X$ y para cada i. Por conjuntos se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^{n} U_i = \bigcap_{i=1}^{n}(V_i \cap Y) = \left(\bigcap_{i=1}^{n} V_i\right) \cap Y.$$

por lo tanto, la intersección de cualquier colección finita de conjuntos de τ_Y pertenece a τ_Y, concluimos que τ_Y es una topología sobre Y.

25 *Demostrar que U es abierto en X si y solo si*

$$\overline{U \cap \overline{A}} = \overline{U \cap A}.$$

para toda $A \subseteq X$.