Sesión 1

Erick Oré

12 de octubre de 2016

El proceso generador de datos (DGP)

- Se asume la existencia de un DGP.

$$y = f(\theta, x)$$

- La especificación puede realizarse siguiendo criterios estadísticos (mejor ajuste, pruebas de hipótesis,...) o considerando criterios teóricos.

Pariedad de las tasas de interés

$$i* = i + \Delta e$$

$$i* = \beta_1 i + \beta_2 \Delta e + \epsilon \rightarrow H_0 : \beta_1 = 1, \beta_2 = 1$$

- La identificación del DGP no depende de criterios estadísticos, sino de los argumentos que sostienen la estrategia de identificación. (¿Y el método Box-Jenkins?)

El proceso generador de datos (DGP)

- Bajo el enfoque econométrico clásico, los parámetros del DGP son fijos. La variabilidad es producto de las perturbaciones aleatorias que se incluyen dentro del DGP. El concepto de probabilidad esta ligado a la posibilidad de ocurrencia de la muestra dado el DGP. (Función de verosimilitud de la muestra, Momentos teóricos y muestrales,...)
- Bajo el enfoque bayesiano, los parámetros del DGP son considerados variables aleatorias. En este caso, el concepto de probabilidad esta ligado a la creencia del investigador, y dichas creencias se actualizan usando información de la muestra. (Proceso de actualización bayesiana)

Procesos estocásticos y convergencia

- Un proceso estocástico es un vector $y_t(x)_{t=1}^{\infty}$ con una medida de probabilidad bien definida. Una muestra es un ejemplo de proceso estocástico.
- Los estimadores son calculados en función a la información muestral. $\hat{\theta} = f(y_t(x))$
- Dado ello, el concepto de convergencia sirve para aproximar a que distribuciones o valores convergen dichos estimadores.
- Estos conceptos de convergencia requieren que $t \to \infty$ (muestras grandes) ¿Como se soluciona el problema de muestras pequeñas bajo este enfoque?

Procesos estocásticos y convergencia

- Convergencia Casi Segura (Almost Sure): $y_t(x) \to y(x)$ si $lim_{T\to\infty} P[||y_t(x) - y(x)|| \leq \epsilon, \forall t > T] = 1$
- Convergencia en probabilidad: $y_t(x) \to y(x)$ si $lim_{t\to\infty} P[x : ||y_t(x) - y(x)|| \leq \epsilon] = 1$
- Convergencia in norm: $Lim_{t\to\infty} E[\| \, y_t(x) - y(x) \, \|^q] = 0$
- Convergencia en distribución: Sea ς_t la distribución de $y_t(x)$, se dice que $y_t(x)$ converge en distribución a ς si existe una variable aleatoria $y(x)$ con dicha distribución de probabilidad a la que $y_t(x)$ converge.

Ejercicio

Suponga una variable y_t que toma el valor de 1 con la siguiente probabilidad: $P(y_t = 1) = 1 - 1/j$ para todo $2^j + 1, ..., 2^{j+1}$. Este proceso converge en probabilidad a 1 (criterio 2), pero no converge a.s. (concepto 1) a 1.

- El operador lag: $Ly_t = y_{t-1}$
- Función de autocovarianza:

$$ACF_t(\tau) = E(y_t - E(y_t))(y_{t-\tau} - E(y_{t-\tau}))$$

- Función de autocorrelación:

$$FAC_t(\tau) = \frac{E(y_t - E(y_t))(y_{t-\tau} - E(y_{t-\tau}))}{Var(y_t)Var(y_{t-\tau})}$$

- Función de autocorrelación parcial:

$$FAP_t(\tau) = \frac{E(y_t - E(y_t|y_{t-1}, \ldots))(y_{t-\tau} - E(y_{t-\tau}|y_{t-\tau-1}, \ldots))}{Var(y_t)Var(y_{t-\tau})}$$

Series de Tiempo

- Estacionariedad: Función de distribución invariante en el tiempo $X = y_t : y_t \leq \rho \rightarrow P(X) = P(L^\tau X)$
- Estacionariedad en covarianzas: $ACF_t(\tau) = ACF(\tau)$
- Ergodicidad: Convergencia de los momentos muestrales a los momentos poblacionales

Conceptos de convergencia

El proceso $y_t = e_1 + e_{2t}$ donde e_1 $N(0, \sigma_e)$ y e_{2t} $N(0, \sigma_e)$ es estacionario, pero no ergódico.

Teorema de Wold

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t-1} \oplus \varrho_t$$

Donde $\mathcal{F}_{t-1}$ es ortogonal a ϱ_t.

$$y_t = E(y_t|\mathcal{F}_{t-1}) + e_t$$

En el caso de las series de tiempo $\mathcal{F}_t = \{y_t, y_{t-1}, ..., e_t, e_{t-1}, e_{t-2}, ...\}$

Contra-casos

Impuestos con efecto diferido t y actividad económica y_t.
Efecto de los anuncios de cambios en tasas de referencias y el tipo de cambio.

Modelos ARIMA

- Teorema de Wold - Justificación $y_t = f(y_{t-1}, ..., \epsilon_{t-1}, ...) + \epsilon_t$
- Se asume que $f(.)$ es lineal.
- $\phi(L)(y_t - \mu) = \psi(L)\epsilon_r$
  $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - ...$
  $\psi(L) = 1 - \psi_1 L - \psi_2 L^2 - ...$
  (¿Por qué hay un término 1 en cada polinomio lag?)

Estacionariedad y ergodicidad

$$\phi(z_\phi^{-1}) = 0 \rightarrow |z_{\phi i}| < 1, \psi(z_\psi^{-1}) = 0 \rightarrow |z_{\psi i}| < 1$$

Representación MA-Infinita

$y_t - \mu = \phi(L)^{-1}\psi(L)\epsilon_t$
$y_t = 0{,}3y_{t-1} - 0{,}02y_{t-2} + \epsilon_t \rightarrow (1 - 0{,}1L)(1 - 0{,}2L)y_t = \epsilon_t$

- AR(1): $y_t = \phi y_{t-1} + \epsilon_t$
  Función de autocorrelación persistente: $FAC(\tau) = \phi^\tau$
  Función de autocorrelación parcial: $FAP\tau = \phi_t$ si $\tau = 1$
- MA(1): $y_t = \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1}$

Ecuaciones de Yule Walker

La *FAC* de una proceso AR(p) esta determinada por la siguiente EED:
$FAC(\tau) = \sum_{i=1}^{p} \phi_i FAC(\tau - i)$, $FAC(0) = 1$, $FAC(\tau) = FAC(-\tau)$
¿*FAP* de un MA(q)?

Función de Verosimilitud

- Proceso ARMA(p,q):

$$\phi(L)(y_t - \mu) = \psi(L)\epsilon_r$$

- Función de Verosimilitud:

$$y \sim N(\mu, \Sigma) \rightarrow FV = f(y, \mu, \Sigma)$$

- Función de Verosimilitud Condicional:

$$y_t|\mathcal{F}_{t-1} \sim N(\mu + \phi_1 y_{t-1} + ... + \theta_1 \epsilon_{t-1} + ..., \sigma_\epsilon^2)$$

$$FV = \prod_{t=1}^{N} f(y_t, \phi_1, ..., \theta_1, ...|\mathcal{F}_{t-1})$$

- Justificación del uso de MCO - Verosimilitud condicional

Método Box-Jenkins

1. Identifique un proceso ARMA(p,q) en base al correlograma y al correlograma parcial.
2. Estime el proceso que identificó.
3. Verifique que los errores de la estimación se comporten como ruido blanco. En caso de que no, re-especifique en base al correlograma de los errores y vuelva a 2.
4. En caso existan más de dos procesos que cumplan las condiciones, escoja el más parsimonioso.

Aproximación de Fourier

- Aproximar una función mediante sumas de funciones cíclicas:

$$y_t = \mu + \int_{w=0}^{\pi} a(w)cos(wt)dw + \int_{w=0}^{\pi} b(w)sen(wt)dw$$

- Cada $a(w)$ y $b(w)$ permite determinar la importancia del ciclo w de frecuencia $\frac{2\pi}{w}$ para generar la serie y_t.

Función generatriz de momentos y espectro

- La función generatriz de autocovarianzas permite resumir la información sobre el proceso de que genera la serie.

$$g(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_j z^j$$

Donde $\gamma_j = ACF(j)$

- Aplicando la aproximación de fourier a la función de autocovarianzas:

$$s(\rho) = \frac{1}{2\pi} g(e^{-i\rho}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_j e^{-iwj}$$

- Usando el teorema de Moivre: $e^{-ij\rho} = cos(\rho j) + isen(\rho j)$

$$s(\rho) = \frac{1}{2\pi} \left(\gamma_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j cos(\rho j) \right)$$

Interpretación del Espectro

- Se pueden recuperar las covarianzas del espectro:

$$\int_{-\pi}^{\pi} s(\rho) e^{\rho k i} d\rho = \gamma_k$$

- Evaluada en $k = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} s(\rho) d\rho = \gamma_0$$

- El espectro descompone la varianza acorde a a contribución de cada ciclo.

Representación espectral

$$y_t = \sum_{j=1}^{M} (\alpha_j cos(\rho_j t) + \beta_j sen(\rho_j t))$$

Donde $\alpha_j \sim N(0, \sigma)$ $\beta_j \sim N(0, \sigma)$ y $E(\alpha_j \beta_j) = 0$. Halle la función de autocovarianza.

Métodos de descomposición ciclo tendencia

1. Métodos estadísticos
   - Regresión con componente tendencial
   - Beveridge Nelson
   - Componentes no observables
   - Cambios de régimen
2. Métodos fundamentados en la teoría
   - Blanchard Quah
   - KPSW
3. Métodos híbridos
   - Hodrick-Prescott
   - Band-pass Filters

Método Beveridge Nelson

- Se asume que el proceso es un ARIMA:

$$\Delta y_t = \bar{y} + \phi(L)\epsilon_t$$

- La tendencia se define como la proyección ajustada por tasa de crecimiento promedio:

$$y_t^p = E(y_{t+\tau}|\mathcal{F}_t) - \tau\bar{y}$$

$$y_t^p = y_t + E(\Delta y_{t+1} + \Delta y_{t+2} + ... + \Delta y_{t+\tau}|\mathcal{F}_t) - \tau\bar{y}$$