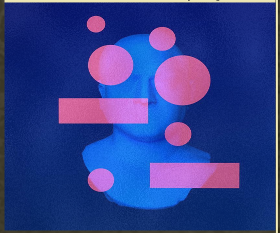
INTRODUCCIÓN AL MACHINE LEARNING APLICADO AL AUDIO

Teoría e Implementación

Agosto - 2023, Universidad de Chile

Profesor: P.h.D Rodolfo Lobo C.

Material de Apoyo

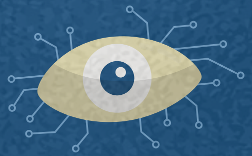


INTRODUCCIÓN AL MACHINE LEARNING APLICADO AL AUDIO

Teoría e Implementación

Agosto - 2023, Universidad de Chile
Profesor: P.h.D Rodolfo Lobo C.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS



Revisión de los fundamentos matemáticos necesarios para comprender los modelos de aprendizaje de máquina.

Objetivos de la Clase

Al finalizar la clase tú aprenderás:

Objetivos de Aprendizaje:

- Entender conceptos matemáticos clave para el entendimiento de los modelos de machine learning.
    - Linealidad, sistemas sobre o sub determinados.
    - Aspectos importantes sobre matrices: intuición de una transformación vía matriz, aspectos geométricos.
    - Solución de sistemas lineales y su relación con el rango y con la independencia de las columnas.
    - Ejercicios escritos y programados de estas ideas.

¿Cómo lo Lograremos?:

- Fijando una notación.
- Discutiendo sobre las definiciones y realizando ejercicios.
- Creando nexos con los modelos que veremos en el futuro.

Motivación para este repaso

- Las redes neuronales artificiales que veremos más adelante en el curso son en realidad arreglos rectangulares de matrices, es decir, podemos entender muchas de las transformaciones que ocurren dentro de estos modelos, a través de conceptos simples del álgebra lineal.

- Además, otros tipos de redes como las redes convolucionales, son operaciones especiales entre matrices. Este tipo de redes es importante en modelos grandes relacionados a audio e imágenes.

- Otros conceptos como "rank", "posto" o "rango" es una forma de decir cuánta información contiene una matriz. Y permiten construir algoritmos de compresión de información de manera intuitiva.

Notación del Curso

- A,Q,U,W matrices. En general, A caso común, Q matriz ortogonal, U matriz unitaria y W muchas veces utilizada como matriz de pesos sinápticos o matriz de pesos.
- V,W también se utiliza para definir espacios vectoriales.
- **x**,**y** en negrito y minúscula se denomina la notación para vectores.
- $\mathbf{a}^i$ i-ésima columna de la matriz A.
- x_{12},x_1, x etc, en minúscula y con un subíndice o sin subíndice se definen escalares y componentes de vectores. Con dos subíndices elementos de una matriz.
- span generador de un espacio.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ producto interno.
- $A \circ B$ producto de Hadamard (componente a componente).
- I es la matriz identidad.
- A^T transpuesta de la matriz A.
- A^* transpuesta conjugada de la matriz A.
- $|| \cdot ||_F$ norma Frobenius de una matriz.
- $|| \cdot ||_2$ norma 2 de un vector.

Contexto: Espacios Vectoriales, Bases y Combinaciones

Un espacio vectorial es un conjunto dotado de operaciones:

- El conjunto es cerrado
- Es definido sobre un cuerpo (Números Reales)
- Posee las propiedades conmutativa, asociativa, elemento neutro en la suma, elemento inverso en la suma
- Es posible multiplicar elementos por escalares, elemento neutro multiplicativo y posee propiedad distributiva respecto a los escalares.

(Ejemplos en Pizarra) - Pendiente!

Un mapa o función lineal

Definition 1. (Función-Mapa Lineal) Sean V y W espacios vectoriales. Un mapa o función lineal $A : V \to W$ es definido como un *mapa lineal* si para cualquier $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ y cualquier escalar $c \in \mathbf{R}$, se cumplen las siguientes dos condiciones:

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v}) \tag{3.1}$$

$$f(c\mathbf{u}) = cf(\mathbf{u}) \tag{3.2}$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-3\end{bmatrix}$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales: otras perspectivas

Un sistema de ecuación lineal es dado de forma matricial por la fórmula:

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \text{con} \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{m\times 1}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d\times 1}, A \in \mathbb{R}^{m\times d}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m\times 1}$$

Toda matriz contiene inherentemente subespacios vectoriales asociados. Puesto que cuando realizamos una multiplicación matriz vector, en realidad estamos generando una **combinación lineal de las columnas de la matriz**.

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = [\mathbf{a}^{(1)}|\mathbf{a}^{(2)}|\dots|\mathbf{a}^{(d)}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{d} \mathbf{a}^{(i)} x_i$$

Ejemplos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot 1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot 0$$

Ejemplos

¿Qué hace una matriz a un vector?

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

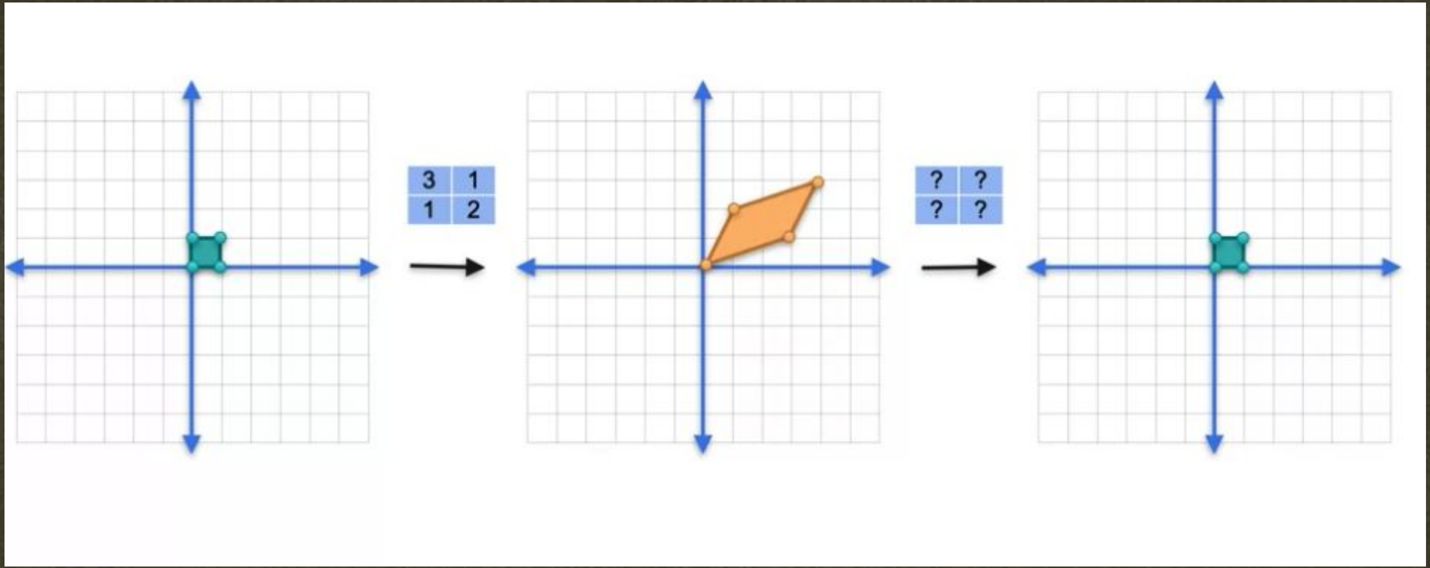
Ejemplos

¿Qué hace una matriz a un vector?

$$\boxed{A\mathbf{x} = \mathbf{b}}$$

Problema que queremos solucionar!!!: ¿Qué valores debe tener el vector **x**?

Matriz Inversa

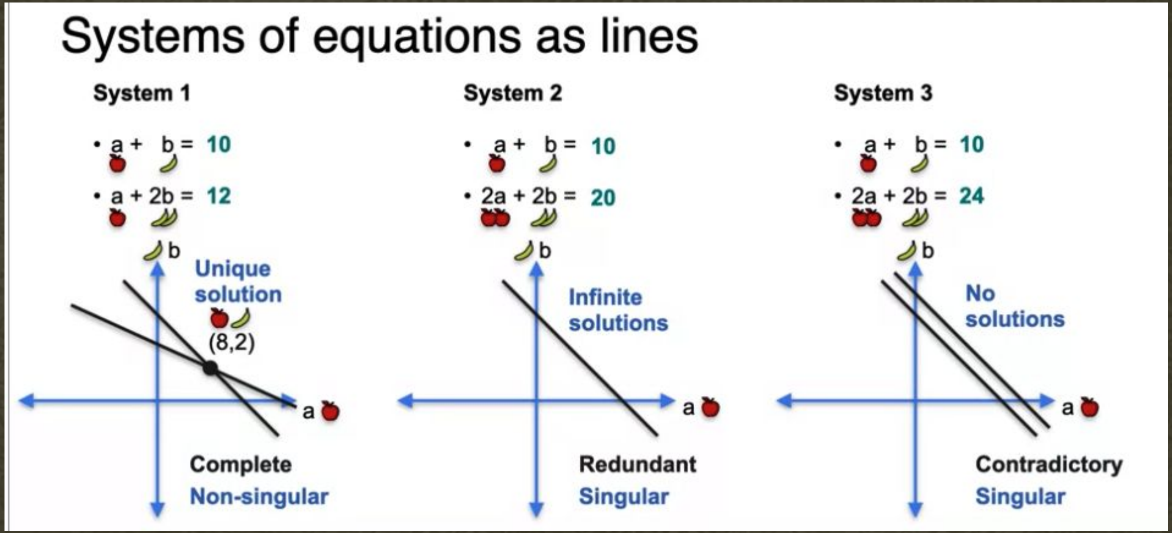


Posible Solución

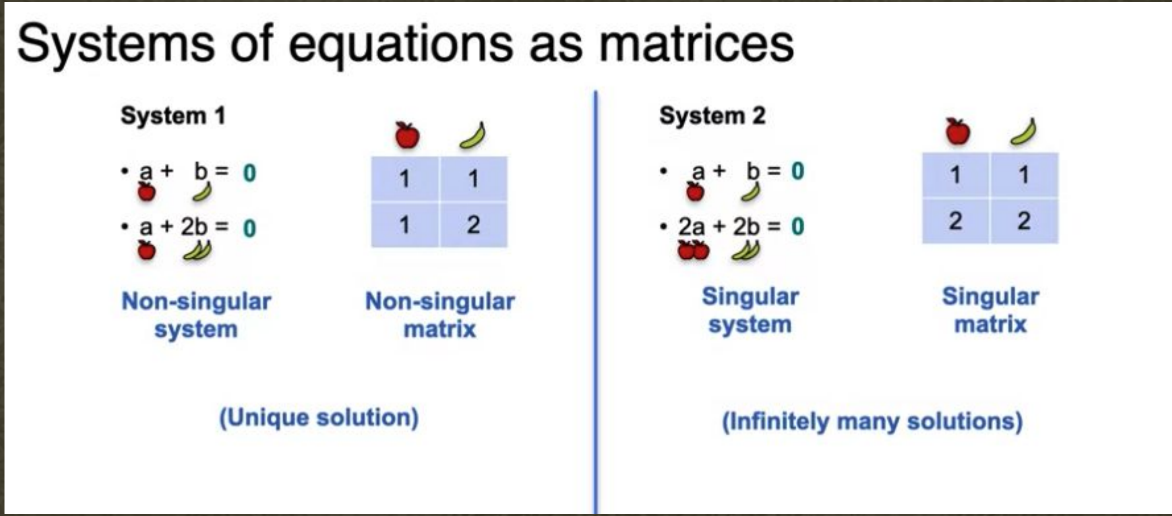
Supongamos que queremos resolver el problema A **x** = **b**

$$
\begin{aligned}
A^{-1}A\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\
I\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b} \\
\mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{b}
\end{aligned}
$$

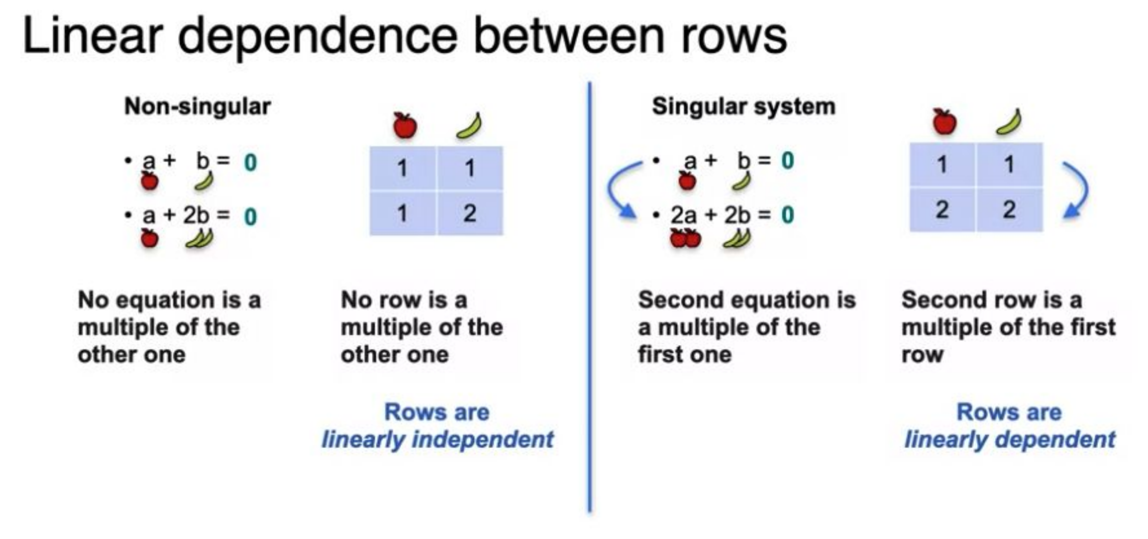
Ejemplos de Diferentes Tipos de Sistemas



Ejemplos de Diferentes Tipos de Sistemas



Independencia Lineal



Rango de una Matriz

Systems of equations

System 1

$a + b = 0$

$a + 2b = 0$

Two equations

Two pieces of information

Rank = 2

System 2

$a + b = 0$

$2a + 2b = 0$

Two equations

One piece of information

Rank = 1

System 3

$0a + 0b = 0$

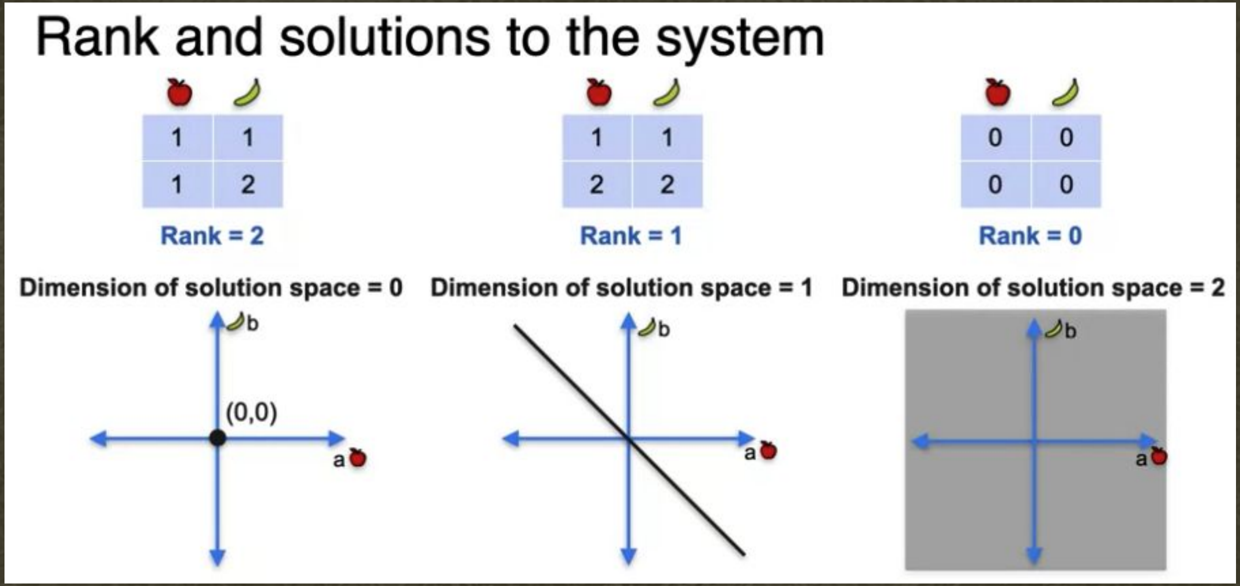
$0a + 0b = 0$

Two equations

Zero pieces of information

Rank = 0

Rango de una Matriz



Entonces ¿Cuándo Puedo Invertir una Matriz?

$$5^{-1} = 0.2$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Non-singular matrix

$$8^{-1} = 0.125$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0.25 & -0.25 \\ -0.125 & 0.625 \end{bmatrix}$$

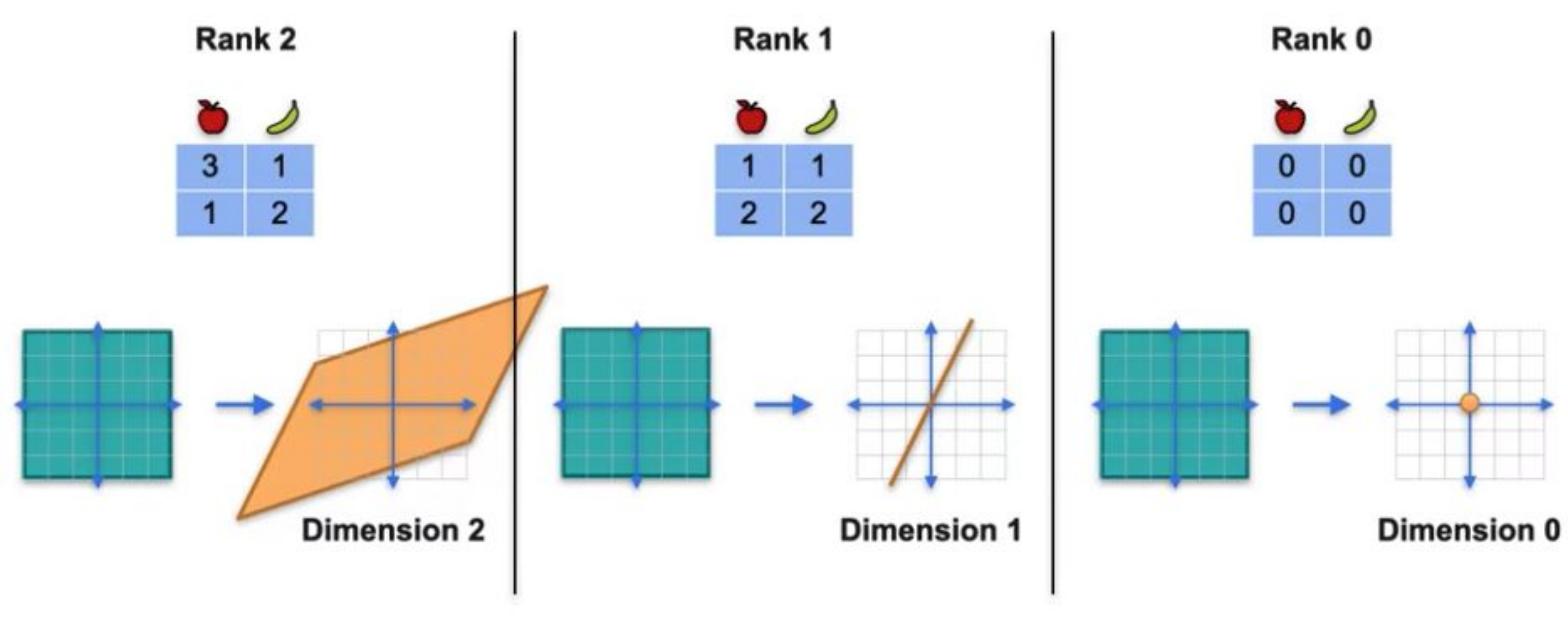
Non-singular matrix

$$0^{-1} = ???$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}$$

Singular matrix

Sistemas de Ecuaciones Lineales



Espacios Fundamentales

Es decir la matriz A está relacionada a los espacios columna y línea de forma inherente, estos espacios se pueden definir de manera formal como:

$$\mathbf{C}(A) = \text{span}\left(\{\mathbf{a}^1, \ldots, \mathbf{a}^m\}\right)$$
$$\mathbf{C}(A^T) = \text{span}\left(\{(\mathbf{a}^T)^1, \ldots, (\mathbf{a}^T)^m\}\right)$$

También existen los siguientes casos, denominados **Espacios Nulos**

$$A\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{x} \neq 0$$
$$A^T\mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{w} \neq 0$$

$$\ker(A) = \{\mathbf{v} \in V | A\mathbf{v} = 0\}$$

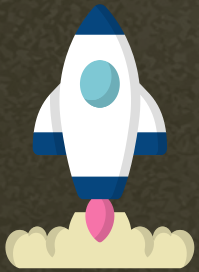
Resumen sobre Matrices

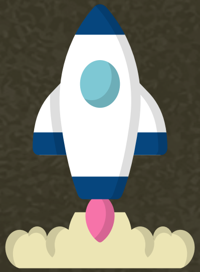
- Son mapas lineales.
- Tienen asociados 4 espacios fundamentales: 2 espacios asociados a sus columnas y 2 a sus líneas.
- Para poder resolver el problema A **x** = **b** con solución única podemos interpretar el problema de diferentes perspectivas:
  - Independencia lineal entre filas o columnas.
  - Autovalores diferentes de cero.
  - Determinante diferente de cero.
  - Que **b** pueda ser generado por el espacio columna de A.
  - Que sea posible aplicar una factorización LU sin elementos iguales a cero en la matriz diagonal.
  - Que tenga rango columna completo.
  - Entre otros!.

- El rango de una matriz se puede asociar a la cantidad de información en una matriz (forma triangular superior con unos en la diagonal). La cantidad de elementos no nulos en la diagonal equivale al rango de la matriz.

Resumen sobre Matrices

- Practiquemos!: utilizaremos notebooks creados por el profesor y notebooks de cursos internacionales.
- Revisa estos links para entender la sintaxis en `python` y cómo trabajar con vectores y matrices LINK1, LINK2
- Luego, ya estás en condiciones de revisar y trabajar los siguientes cuadernos sobre sistemas lineales LINK3 para resolver sistemas 2x2 usando `numpy`.
- Si quieres profundizar, de manera opcional, revisa el siguiente LINK4 para entender cómo programar las operaciones fila y resolver sistemas 3x3.





Referencias principales

- Introduction to Probability for Data Science, Stanley H. Chan, 2021, Michigan Publishing. ISBN 978-1-60785-747-1
- https://www.geogebra.org/m/gwg96f7r
- https://www.math.uwaterloo.ca/~hwolkowi/matrixcookbook.pdf
- https://www.coursera.org/specializations/mathematics-for-machine-learning-and-data-science

Gracias!

¿Preguntas?

rodolfolobo@ug.uchile.cl