Tarea 12
Momentos

Erick Cervantes Mendieta
Matrícula: 2032430

Modelos Probabilistas Aplicados

24/11/2020

1. Procesos de ramificación

Ejercicio 1 – pág. 392

a) $p_0 = 1/2, p_1 = 1/4, p_2 = 1/4$. El valor esperado de un experimento es $h(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2$. La función generadora de probabilidad $d = p_0 + p_1 d + p_2 d^2$ y el número esperado $m = p1 + 2p_2 z$ de descendientes producidos por *un* solo padre, se presentan a continuación:

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}d + \frac{1}{4}d^2 \\
m &= \frac{1}{4} + 2\left(\frac{1}{4}\right)(1) = 0.75,
\end{aligned}
$$

luego, para calcular las probabilidades de morir en cada generación, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
d_0 &= 0 \\
d_1 &= h(d_0) = 0.5 + 0.25(0) + 0.25(0)^2 = 0.5 \\
d_2 &= h(d_1) = 0.5 + 0.25(0.5) + 0.25(0.5)^2 = 0.6875 \\
\vdots &= \vdots
\end{aligned}
$$

En el cuadro 1 se pueden visualizar las probabilidades de morir de diez generaciones, y como $p_0 > p_2$ y $m < 1$, entonces se sigue que $d = 1$, lo cual se respalda con el comportamiento creciente de d presentada en dicho cuadro.

b) $p_0 = 1/3, p_1 = 1/3, p_2 = 1/3$. El valor esperado de un experimento es $h(z) = 1/3 + (1/3)z + (1/3)z^2$. La función generadora de probabilidad d y el número esperado m de descendientes

Cuadro 1: Probabilidades de morir en la $i-$ésima generación (Ejercicio 1 – pág. 392 (a)).

Generación	**Probabilidad de morir**
1	0.5000
2	0.6875
3	0.7900
4	0.8536
5	0.8955
6	0.9243
7	0.9447
8	0.9593
9	0.9699
10	0.9776

producidos por *un* solo padre, se presentan a continuación:

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}d + \frac{1}{3}d^2 \\ m &= \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{3}\right)(1) = 1, \end{aligned}$$

luego, para calcular las probabilidades de morir en cada generación, se tiene que:

$$\begin{aligned} d_0 &= 0 \\ d_1 &= h(d_0) = 0.33 + 0.33(0) + 0.33(0)^2 = 0.3333 \\ d_2 &= h(d_1) = 0.33 + 0.33(0.33) + 0.33(0.33)^2 = 0.4814 \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

En el cuadro 2 se pueden visualizar las probabilidades de morir de diez generaciones, y como $p_0 = p_2$ y $m = 1$, entonces se sigue que $d = 1$, lo cual se respalda con el comportamiento creciente de d presentada en dicho cuadro.

c) $p_0 = 1/3$, $p_1 = 0$, $p_2 = 2/3$. El valor esperado de un experimento es $h(z) = 1/3 + (0)z + (2/3)z^2$. La función generadora de probabilidad d y el número esperado m de descendientes producidos por *un* solo padre, se presentan a continuación:

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{3} + (0)d + \frac{2}{3}d^2 \\ m &= 0 + 2\left(\frac{2}{3}\right)(1) = 1.3333, \end{aligned}$$

Cuadro 2: Probabilidades de morir en la $i-$ésima generación (Ejercicio 1 – pág. 392 (b)).

Generación	**Probabilidad de morir**
1	0.3333
2	0.4818
3	0.5711
4	0.6324
5	0.6775
6	0.7121
7	0.7398
8	0.7623
9	0.7811
10	0.7971

Cuadro 3: Probabilidades de morir en la $i-$ésima generación (Ejercicio 1 – pág. 392 (c)).

Generación	**Probabilidad de morir**
1	0.3333
2	0.4074
3	0.4439
4	0.4647
5	0.4773
6	0.4852
7	0.4903
8	0.4936
9	0.4958
10	0.4972

luego, para calcular las probabilidades de morir en cada generación, se tiene que:

$$\begin{aligned} d_0 &= 0 \\ d_1 &= h(d_0) = 0.33 + 0(0) + 0.67(0)^2 = 0.3333 \\ d_2 &= h(d_1) = 0.33 + 0(0.33) + 0.67(0.33)^2 = 0.4074 \\ \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

En el cuadro 3 se pueden visualizar las probabilidades de morir de diez generaciones, y como $p_0 < p_2$ y $m > 1$, entonces se sigue que $d = p_o/p_2 = (1/3) \div (2/3) = 0.5$, lo cual implicaría que el valor de $d = 0.5$.

d) $p_j = 1/2^{j+1}$ con $j = 0, 1, 2, \ldots$, luego:

$$\begin{aligned} h(z) &= p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots \\ &= \frac{1}{2^{0+1}} + \frac{1}{2^{1+1}} z + \frac{1}{2^{2+1}} z^2 + \ldots \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} z^n \\ &= \frac{1}{2} - \frac{0.5z}{z-2}, \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} h'(z) &= -\left(\frac{(z-2)(0.5) - 0.5z(1)}{(z-2)^2} \right) \\ &= -\left(\frac{0.5(z-2) - 0.5z}{(z-2)^2} \right), \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} h'(1) &= m \\ &= -\left(\frac{0.5(1-2) - 0.5(1)}{(1-2)^2} \right) \\ &= -\left(\frac{-0.5 - 0.5}{1} \right) = 1, \end{aligned}$$

así, como $m = 1$ se implica que $d = 1$, como puede observarse en la figura 1.

e) $p_j = (1/3)(2/3)^j$ con $j = 0, 1, 2, \ldots$, luego:

$$\begin{aligned} h(z) &= p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^1 z + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2 z^2 + \ldots \\ &= \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n z^n \\ &= \frac{1}{3} - \frac{(2/3)z}{2z-3}, \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} h'(z) &= -\left(\frac{(2z-3)(2/3) - (2/3)z(2)}{(2z-3)^2} \right) \\ &= -\left(\frac{(2/3)(2z-3) - (4/3)z}{(2z-3)^2} \right), \end{aligned}$$

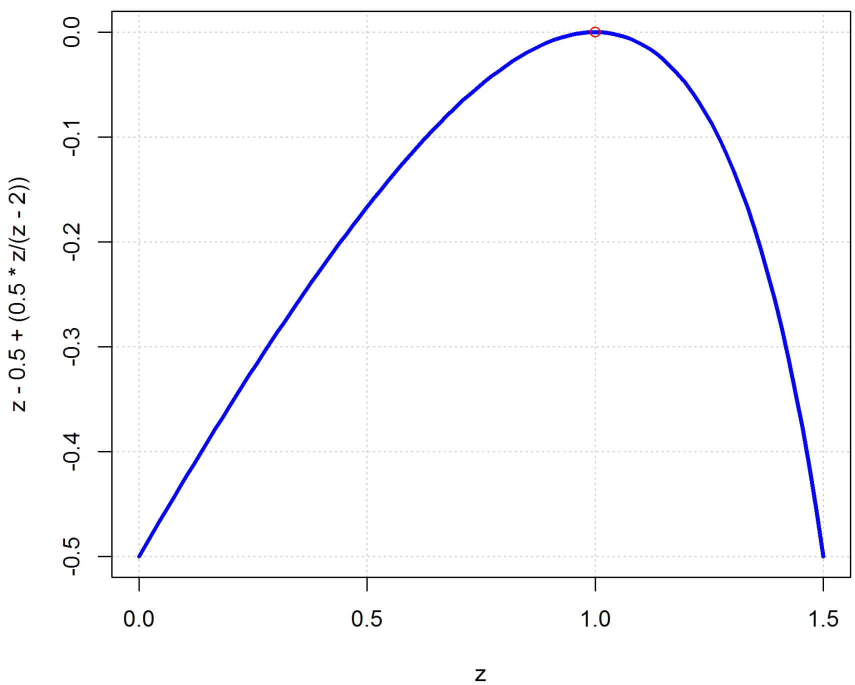

Figura 1: Gráfica de z (Ejercicio 1 – pág. 392 (d)).

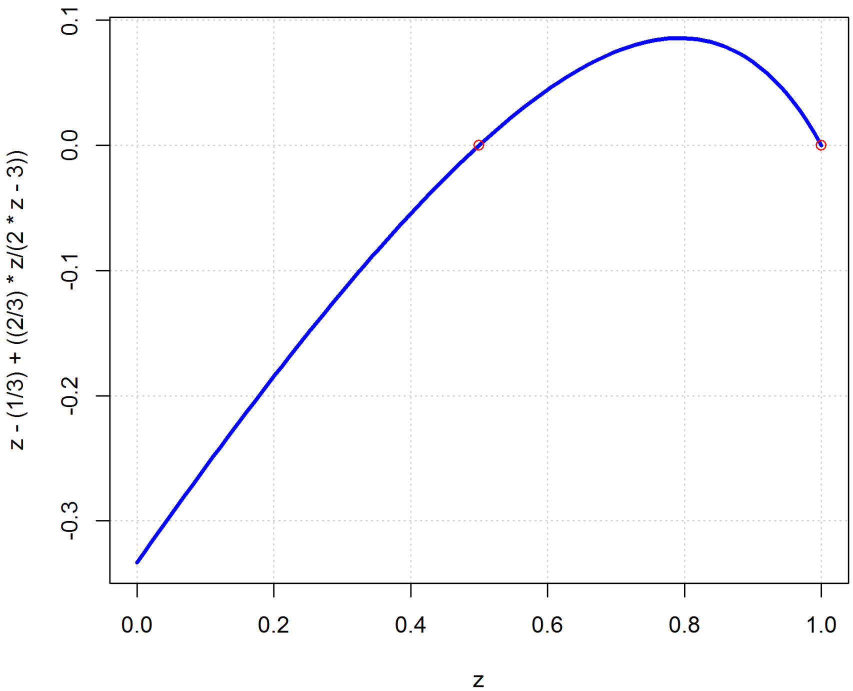

Figura 2: Gráfica de z (Ejercicio 1 – pág. 392 (e)).

luego,

$$\begin{aligned} h'(1) &= m \\ &= -\left(\frac{(2/3)(2(1)-3)-(4/3)(1)}{(2(1)-3)^2}\right) \\ &= -\left(\frac{-(2/3)-(4/3)}{(-1)^2}\right) = 2, \end{aligned}$$

así, como $m > 1$ se implica que $d = 0.5$, como puede observarse en la figura 2.

f) $p_j = e^{-2}(2^j/j!)^j$ con $j = 0, 1, 2, \ldots$, luego:

$$\begin{aligned} h(z) &= p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots \\ &= e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!}\right) + e^{-2}\left(\frac{2^1}{1!}\right) + e^{-2}\left(\frac{2^2}{2!}\right) + \ldots \\ &= e^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^n}{n!}\right) z^n \\ &= e^{-2}e^{2z} = e^{2z-2}, \end{aligned}$$

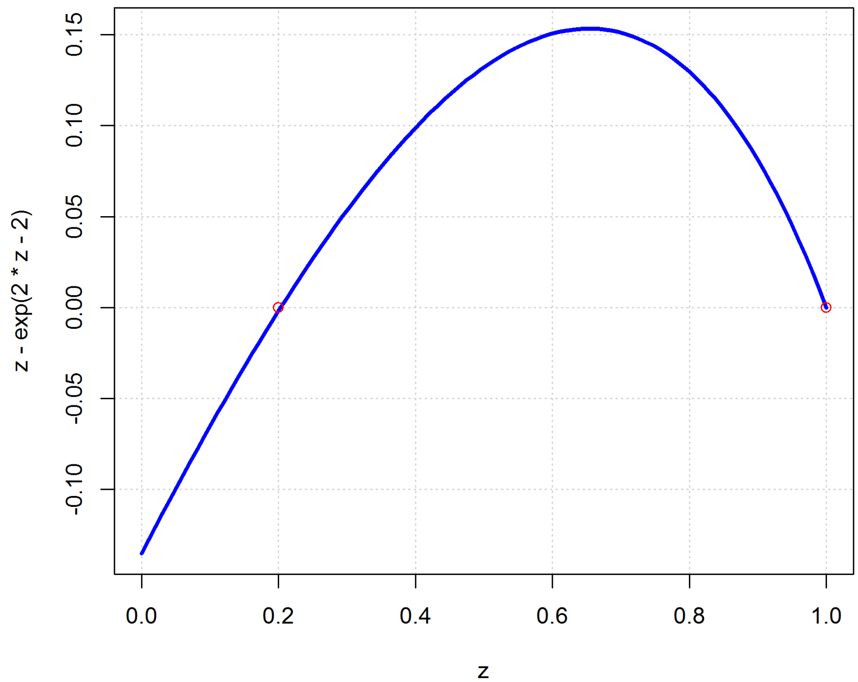

Figura 3: Gráfica de z (Ejercicio 1 – pág. 392 (f)).

luego,

$$h'(z) = 2e^{2z-2},$$

luego,

$$\begin{aligned} h'(1) &= m \\ &= 2e^{2(1)-2} \\ &= 2, \end{aligned}$$

así, como $m > 1$ se implica que $d = 0.2$, como puede observarse en la figura 3.

Ejercicio 3 – pág. 392

a) $p_0 = 1/2$, $p_1 = 0$, $p_2 = 1/2$. Sea $m = p_1 + 2p_2$ el número esperado de letras que vendió, entonces: $m = 0 + 2(1/2) = 1$. Por lo tanto la *ganancia esperada* esta dada por:

$$50(1 + 1^{12}) - 100 = 0,$$

la probabilidad de que reciba al menos un pago de la duodécima generación es $1 - d_{12}$. Al realizar el calculo se tiene que $d_{12} = 0.8791$. Por lo tanto, $1 - d_{12} = 0.1209$ es la probabilidad de que reciba algún bono. Nótese que esta probabilidad es *baja*.

b) $p_0 = 1/6$, $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/3$. Sea m el número esperado de letras que vendió, entonces: $m = (1/2) + 2(1/3) = 7/6$. Por lo tanto la *ganancia esperada* esta dada por:

$$50\left(\left(\frac{7}{6}\right) + \left(\frac{7}{6}\right)^{12}\right) - 100 \approx 276,$$

la probabilidad de que reciba al menos un pago de la duodécima generación es $1 - d_{12}$. Al realizar el calculo se tiene que $d_{12} = 0.4743$. Por lo tanto, $1 - d_{12} = 0.5257$ es la probabilidad de que reciba algún bono. Nótese que es *algo probable* recibir un pago en la duodécima generación.

c) Para mostrar el caso en el que no se espera obtener ganancias, sea $p_0 = 3/5$ $(p > 1/2)$, $p_1 = 1/6$, $p_2 = 7/30$. Sea m el número esperado de letras que vendió, entonces: $m = (1/6)+2(7/30) = 19/30 < 1$, por lo que el juego es desfavorable. Luego, la *ganancia esperada* esta dada por:

$$50\left(\left(\frac{17}{30}\right) + \left(\frac{17}{30}\right)^{12}\right) - 100 \approx -72,$$

la cual representa una pérdida.

Ejercicio 1 – pág. 401

a) Sea $f_X(x) = 1/2$. La función generadora de momentos esta dada por:

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_0^2 e^{tx}\left(\frac{1}{2}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 e^{tx}dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{tx}}{t}\right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2t}\left[e^{2t} - e^0\right] \\ &= \frac{e^{2t}-1}{2t}. \end{aligned}$$

b) Sea $f_X(x) = (1/2)x$. La función generadora de momentos esta dada por:

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \int_0^2 e^{tx}\left(\frac{1}{2}x\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 xe^{tx}dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\left.\frac{xe^{tx}}{t}\right|_0^2 - \int_0^2 \frac{e^{tx}}{t}dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{xe^{tx}}{t} - \frac{1}{t}\left(\frac{e^{tx}}{t}\right)\right]_0^2 \\
&= \frac{1}{2t}\left[\left(2e^{2t} - \frac{e^{2t}}{t}\right) - \left(0e^0 - \frac{e^0}{t}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2t}\left[2e^{2t} - \frac{e^{2t}}{t} + \frac{1}{t}\right] \\
&= \frac{2te^{2t} - e^{2t} + 1}{2t^2}.
\end{aligned}
$$

c) Sea $f_X(x) = 1 - (1/2)x$. La función generadora de momentos esta dada por:

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \int_0^2 e^{tx}\left(1 - \frac{1}{2}x\right)dx \\
&= \left.\left(1 - \frac{1}{2}x\right)\frac{e^{tx}}{t}\right|_0^2 - \int_0^2 \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{e^{tx}}{t}dx \\
&= \left.\left(1 - \frac{1}{2}x\right)\frac{e^{tx}}{t}\right|_0^2 + \frac{1}{2t}\int_0^2 e^{tx}dx \\
&= \left[\left(1 - \frac{1}{2}x\right)\frac{e^{tx}}{t} + \frac{1}{2t}\left(\frac{e^{tx}}{t}\right)\right]_0^2 \\
&= \frac{e^{2t}}{2t^2} - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2}\right) \\
&= \frac{e^{2t} - 2t - 1}{2t^2}.
\end{aligned}
$$

d) Sea $f_X(x) = |1-x|$. La función generadora de momentos esta dada por:

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \int_0^2 e^{tx}|1-x|dx \\
&= \int_0^1 e^{tx}(1-x)dx + \int_1^2 e^{tx}(x-1)dx \\
&= (1-x)\left.\frac{e^{tx}}{t}\right|_0^1 + \frac{1}{t}\int_1^0 e^{tx}dx + (1-x)\left.\frac{e^{tx}}{t}\right|_1^2 - \frac{1}{t}\int_1^2 e^{tx}dx \\
&= \frac{e^t - t - 1}{t^2} + \frac{te^{2t} - e^{2t} + e^t}{t^2} \\
&= \frac{te^{2t} - e^{2t} + 2e^t - t - 1}{t^2}.
\end{aligned}
$$

e) Sea $f_X(x) = (3/8)x^2$. La función generadora de momentos esta dada por:

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \int_0^2 e^{tx}\left(\frac{3}{8}x^2\right)dx \\
&= \frac{3}{8}\int_0^2 e^{tx}x^2 dx \\
&= \frac{3}{8}\left(\frac{4t^2e^{2t} - 4te^{2t} + 2e^{2t} - 2}{t^3}\right) \\
&= \frac{3(2)}{4(2)}\left(\frac{2t^2e^{2t} - 2te^{2t} + e^{2t} - 1}{t^3}\right) \\
&= \frac{3}{4}\left(\frac{2t^2e^{2t} - 2te^{2t} + e^{2t} - 1}{t^3}\right).
\end{aligned}
$$

Ejercicio 6 – pág. 402

Sea la función característica $k_X(\tau) = e^{-|\tau|}$ con $-\infty < \tau < \infty$, por demostrar que:

$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$. Luego:

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau x}e^{-|\tau|}d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-i\tau x+\tau}d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-i\tau x-\tau}d\tau\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{\tau(1-ix)}d\tau + \int_{0}^{\infty} e^{-\tau(ix+1)}d\tau\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\lim_{a\to-\infty} \left.\frac{e^{\tau(1-ix)}}{1-ix}\right|_{a}^{0} - \lim_{b\to\infty} \left.\frac{e^{-\tau(ix+1)}}{ix+1}\right|_{0}^{b}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{e^{0(1-ix)}}{1-ix} - \frac{e^{a(1-ix)}}{1-ix}\right) - \lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{-b(ix+1)}}{ix+1} - \frac{e^{0(ix+1)}}{ix+1}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1-ix} + \frac{1}{ix+1}\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{ix+1+1-ix}{(1-ix)(1+ix)}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{ix+1-i^2x^2-ix}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1-(\sqrt{-1})^2x^2}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+x^2}\right).
\end{aligned}$$

Ejercicio 10 – pág. 403

Sea la función de densidad $f(x) = (1/2)e^{-|x|}$ con $-\infty < x < \infty$.

a) Para poder determinar la media y la varianza de la función, se calcula la función generadora de momentos como sigue:

$$\begin{aligned}
M(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\left(\frac{1}{2}e^{-|x|}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-(-x)}e^{tx}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}e^{tx}dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{x(1+t)}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x(1-t)}dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\lim_{a\to-\infty} \left.\frac{e^{x(t+1)}}{t+1}\right|_{0}^{a} - \lim_{b\to\infty} \left.\frac{e^{-x(1-t)}}{1-t}\right|_{0}^{b}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{e^{0(t+1)}}{t+1} - \frac{e^{a(t+1)}}{t+1}\right) - \lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{-b(1-t)}}{1-t} - \frac{e^{-0(1-t)}}{1-t}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{t+1} + \frac{1}{1+t}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1-t+t+1}{(t+1)(1-t)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{t-t^2+1-t}\right] \\
&= \frac{1}{1-t^2},
\end{aligned}$$

luego, por definición:

$$M(t) = 1 + \mu t + \mu_2'\frac{t^2}{2!} + \ldots + \mu_r'\frac{t^r}{r!} + \ldots,$$

$$\mu_r' = \left.\frac{d^r}{dt^r}M(t)\right|_{t=0},$$

de donde se sabe que: $\mu_1' = \mu$ y $\mu_2 = \mu_2' - \mu^2 = \sigma^2$. Entonces:

$$\begin{aligned}
\mu_1' &= \left.\frac{(1-t^2)(0) - 1(-2t)}{(1-t^2)^2}\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{2t}{(1-t^2)^2}\right|_{t=0} \\
&= 0 = \mu,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_2' &= \left.\frac{(1-t^2)^2(2) - 2t(2(1-t^2)(-2t))}{(1-t^2)^4}\right|_{t=0} \\
&= \left.\frac{(1-0^2)^2(2) - 2(0)(2(1-0^2)(-2(0)))}{(1-0^2)^4}\right|_{t=0} \\
&= 2,
\end{aligned}$$

$$\mu_2 = 2 - 0^2 = 2 = \sigma^2,$$

es decir, la media es igual a cero y la varianza a dos.

b) Por definición, la función generadora para X_1 es $g(t) = M(t)$, para S_n es $g_n(t) = (g(t))^n$, para S_n^* esta dada por $g_n^*(t) = (g(t/\sqrt{n}))^n$. Luego:

$$g(t) = \frac{1}{1-t^2},$$

$$g_n(t) = \left(\frac{1}{1-t^2}\right)^n = \frac{1}{(1-t^2)^n},$$

$$g_n^*(t) = \left(\frac{1}{1-(\frac{t}{\sqrt{n}})^2}\right)^n = \left(\frac{1}{1-\frac{t^2}{n}}\right)^n = \left(\frac{n}{n-t^2}\right)^n,$$

Referencias

[1] C. M. Grinstead and J. L. Snell. *Introduction to probability*. American Mathematical Soc., 2012.