Tarea 9
Valor esperado y varianza

Erick Cervantes Mendieta
Matrícula: 2032430

Modelos Probabilistas Aplicados

03/11/2020

1. Valor esperado de variables aleatorias discretas

Ejercicio 1 – pág. 247

Se tienen nueve opciones para este juego, si el jugador al sacar una carta obtiene al 2, 4, 6, 8 y 10 perderá \$1, si obtiene al 3, 5, 7, 9 ganará \$1, por lo que si definimos a X como la cantidad de dinero que gana un jugador, entonces la distribución de probabilidad esta dada en el cuadro 1, luego el valor esperado para X es:

$$\mathbb{E}(X) = -1\left(\frac{5}{9}\right) + 1\left(\frac{4}{9}\right) = -\frac{1}{9},$$

es decir, se espera que al jugar se tenga una pérdida de \$0.11.

Ejercicio 6 – pág. 247

Se debe demostrar que $E(XY) = E(X)E(Y)$, por lo que, como primer paso se determina el valor esperado de X, en el cuadro 2 se presentan todos los posibles resultados para la variable X = suma de los dos números al lanzar un dado dos veces, y su distribución de probabilidad se puede visualizar en el cuadro 3, por lo que el valor esperado se calcula de la siguiente forma:

Cuadro 1: Distribución de probabilidad para X (ejercicio 1 – pág. 247).

x	$p(x)$
-1	5/9
1	4/9

Cuadro 2: Resultados para la variable X (suma de las dos caras observadas al lanzar un dado dos veces).

		Dado 1					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Dado 2	**1**	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Cuadro 3: Distribución de probabilidad para X (ejercicio 6 – pág. 247).

x	$p(x)$
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

$$\mathbb{E}(X) = 2\left(\frac{1}{36}\right) + 3\left(\frac{2}{36}\right) + 4\left(\frac{3}{36}\right) + 5\left(\frac{4}{36}\right) + 6\left(\frac{5}{36}\right) + 7\left(\frac{5}{36}\right) + 8\left(\frac{5}{36}\right) + 9\left(\frac{4}{36}\right)$$
$$+10\left(\frac{3}{36}\right) + 11\left(\frac{2}{36}\right) + 12\left(\frac{1}{36}\right) = \frac{245}{36}.$$

Luego se determina el valor esperado de Y, en el cuadro 4 se presentan todos los posibles resultados para la variable Y = resta de los dos números observados (#1 − #2) al lanzar un dado dos veces, y su distribución de probabilidad se puede visualizar en el cuadro 5, por lo que el valor esperado se calcula de la siguiente forma:

$$\mathbb{E}(Y) = -5\left(\frac{1}{36}\right) - 4\left(\frac{2}{36}\right) - 3\left(\frac{3}{36}\right) - 2\left(\frac{4}{36}\right) - 1\left(\frac{5}{36}\right) + 0\left(\frac{5}{36}\right) + 1\left(\frac{5}{36}\right) + 2\left(\frac{4}{36}\right)$$
$$+3\left(\frac{3}{36}\right) + 4\left(\frac{2}{36}\right) + 5\left(\frac{1}{36}\right) = 0.$$

Cuadro 4: Resultados para la variable Y (resta del primer número observado con el segundo número al lanzar un dado dos veces).

		Dado 1					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Dado 2	**1**	0	1	2	3	4	5
	2	-1	0	1	2	3	4
	3	-2	-1	0	1	2	3
	4	-3	-2	-1	0	1	2
	5	-4	-3	-2	-1	0	1
	6	-5	-4	-3	-2	-1	0

Cuadro 5: Distribución de probabilidad para Y (ejercicio 6 – pág. 247).

y	$p(y)$
-5	1/36
-4	2/36
-3	3/36
-2	4/36
-1	5/36
0	6/36
1	5/36
2	4/36
3	3/36
4	2/36
5	1/36

Cuadro 6: Resultados para la variable XY.

Dado 1

Dado 2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	0	3	8	15	24	35
2	-3	0	5	12	21	32
3	-8	-5	0	7	16	27
4	-15	-12	-7	0	9	20
5	-24	-21	-16	-9	0	11
6	-35	-32	-27	-20	-11	0

Un análisis semejante se utiliza para determinar el valor esperado de XY, en el cuadro 6 se presentan todos los posibles resultados para la variable XY, en dónde se puede observar que su distribución de probabilidad contiene 31 elementos, cada uno con probabilidad igual a $1/36$, excepto para $XY = 0$, ya que su probabilidad es $6/36 = 1/6$, así, el valor esperado se calcula de como sigue:

$$\mathbb{E}(XY) = -35\left(\frac{1}{36}\right) + \cdots - 3\left(\frac{1}{36}\right) + 0\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{36}\right) + \cdots + 35\left(\frac{1}{36}\right) = 0.$$

Luego entonces, $\mathbb{E}(XY) = 0$, $\mathbb{E}(X) = 245/36$ y $\mathbb{E}(Y) = 0$, por lo que: $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = (245/36) * 0 = 0$, así queda demostrado que $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Con este resultado y utilizando el teorema 6.4, se podría concluir que X y Y son variables independientes, es decir, se debería cumplir lo siguiente: $P(X = x_j, Y = y_k) = P(X = X_j)P(Y = y_K)$. Pero, si al lanzar un dado dos veces observamos que en la primera vez obtuvimos un 1 y en el segundo lanzamiento obtuvimos un 2, entonces tendríamos que $x = 3$ y $y = -1$, por lo que $P(X = 3) = 2/36$ y $P(Y = -1) = -5/36$, y $P(X = 3, Y = -1) = 1/36$, luego:

$$P(X = 3, Y = -1) = \frac{1}{36} \neq \frac{5}{648} = \left(\frac{2}{36}\right)\left(\frac{-5}{36}\right) = P(X = 3)P(Y = -1),$$

por lo que se concluye que X y Y *no* son variables independientes.

Ejercicio 15 – pág. 249

Para poder obtener el número de permutaciones posibles para este juego, utilizamos la siguiente expresión:

$${}_5P_{2,3} = \frac{5!}{2!3!} = 10,$$

es decir, exiten 10 formas de extraer las cinco bolas (2 de color oro (O) y 3 de color plata (P)), las cuales se muestran en el cuadro 7 junto con la ganancia generada, en donde, si se tiene **PPOPO**, significa que primero se extrae una bola plateada, por lo que la ganancia sería \$-1, luego se vuelve a extraer otra bola plateada, por lo que la ganancia es \$-2, en el tercer intento se extrae una bola dorada, así la ganancia es \$-2+\$1 = \$-1, luego se extrae una bola plateada cuya ganancia se modifica a \$-2 y finalmente se extrae una bola dorada,

Cuadro 7: Ganancia generada al extraer las cinco bolas (recuerde que no es necesario extraer todas).

Forma de extraer las bolas	**Ganancia ($)**
OOPPP	1
OPOPP	1
OPPOP	1
OPPPO	1
POPPO	-1
PPOPO	-1
PPPOO	-1
POPOP	0
POOPP	1
PPOOP	0

Cuadro 8: Distribución de probabilidad para X (ejercicio 15 – pág. 249).

x	$p(x)$
-1	3/10
0	2/10
1	5/10

por lo que la ganancia total es de $-1. Entonces, se define a la variable X como la ganancia ($) obtenida al extraer bolas de una caja (siempre estando un dólar por arriba o hasta que no haya bolas doradas), así, la distribución de probabilidad para X se muestra en el cuadro 8. Por lo que $\mathbb{E}(X)$ se calcula como sigue:

$$\mathbb{E}(X) = -1\left(\frac{3}{10}\right) + 0\left(\frac{2}{10}\right) + 1\left(\frac{5}{10}\right) = \frac{2}{10},$$

luego, como $\mathbb{E}(X) > 0$, entonces se puede decir que si es un juego favorable para el jugador, ya que se espera obtener una pequeña ganancia cada que se juega.

Ejercicio 19 – pág. 249

Suponga que las cuatro opciones disponibles en una pregunta son **A**, **B**, **C** y **D**, y que la opción correcta es **A**, luego las posibles respuestas que puede dar un alumno con la puntuación obtenida se muestra en el cuadro 9, y la distribución de probabilidad para X (puntuación obtenida) se muestra en el cuadro 10. Luego, para calcular la puntuación esperada se tiene:

$$\mathbb{E}(X) = -3\left(\frac{1}{16}\right) - 2\left(\frac{3}{16}\right) - 1\left(\frac{3}{16}\right) + 0\left(\frac{2}{16}\right) + 1\left(\frac{3}{16}\right) + 2\left(\frac{3}{16}\right) + 3\left(\frac{1}{16}\right) = 0,$$

por lo que si el estudiante escoge de manera aleatoria sus posibles respuestas se espera que obtenga *cero* como puntuación.

Cuadro 9: Opciones para responder una pregunta.

Conjuntos	**Puntuación obtenida**
No responder	0
{A}	3
{B}	-1
{C}	-1
{D}	-1
{A,B}	2
{A,C}	2
{A,D}	2
{B,C}	-2
{B,D}	-2
{C,D}	-2
{A,B,C}	1
{A,B,D}	1
{A,C,D}	1
{B,C,D}	-3
{A,B,C,D}	0

Cuadro 10: Distribución de probabilidad para X (ejercicio 19 – pág. 249).

x	$p(x)$
-3	1/16
-2	3/16
-1	3/16
0	2/16
1	3/16
2	3/16
3	1/16

Cuadro 11: Distribución de probabilidad para X (ejercicio 1 – pág. 263).

x	$p(x)$	x^2
-1	1/3	1
0	1/3	0
1	1/3	1

2. Varianza de variables aleatorias discretas

Ejercicio 1 – pág. 263

Sea X = escoger un número entre {-1,0,1}, la distribución de probabilidad de X se muestra en el cuadro 11, en la cual se ha agregado una columna que contiene los valores de x^2, ya que este valor se utiliza en el calculo de la varianza. Luego el valor esperado de x y x^2 se obtiene como sigue:

$$\mathbb{E}(X) = -1\left(\frac{1}{3}\right) + 0\left(\frac{1}{3}\right) + 1\left(\frac{1}{3}\right) = 0,$$

$$\mathbb{E}(X^2) = 1\left(\frac{1}{3}\right) + 0\left(\frac{1}{3}\right) + 1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3},$$

así, por teorema 6.6 tenemos que la varianza de X es igual a:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = \frac{2}{3} - 0^2 = \frac{2}{3},$$

luego entonces, la desviación estándar es:

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ejercicio 9 – pág. 264

Se define a X como el valor observado (cara) al lanzar un dado, cuya probabilidad es proporcional al número observado, por lo que la distribución de probabilidad se muestra en el cuadro 12.

Se sabe que $k+2k+3k+4k+5k+6k = 1$, entonces $k = 1/21$, de esta forma la distribución de probabilidad para X se muestra en el cuadro 13, en donde se ha incluido una columna con los valores de x^2.

Luego, el valor esperado de x y x^2 se presentan a continuación:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 1\left(\frac{1}{21}\right) + 2\left(\frac{2}{21}\right) + 3\left(\frac{3}{21}\right) + 4\left(\frac{4}{21}\right) + 5\left(\frac{5}{21}\right) + 6\left(\frac{6}{21}\right)\\ &= \frac{1}{21} + \frac{4}{21} + \frac{9}{21} + \frac{16}{21} + \frac{25}{21} + \frac{36}{21} = \frac{91}{21} = \frac{13}{3},\end{aligned}$$

Cuadro 12: Distribución de probabilidad para X (ejercicio 9 – pág. 264).

x	$p(x)$
1	k
2	$2k$
3	$3k$
4	$4k$
5	$5k$
6	$6k$

Cuadro 13: Distribución de probabilidad para X (ejercicio 9 – pág. 264).

x	$p(x)$	x^2
1	1/21	1
2	2/21	4
3	3/21	9
4	4/21	16
5	5/21	25
6	6/21	36

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= 1\left(\frac{1}{21}\right)+4\left(\frac{2}{21}\right)+9\left(\frac{3}{21}\right)+16\left(\frac{4}{21}\right)+25\left(\frac{5}{21}\right)+36\left(\frac{6}{21}\right)\\ &= \frac{1}{21}+\frac{8}{21}+\frac{27}{21}+\frac{64}{21}+\frac{125}{21}+\frac{216}{21}=\frac{441}{21}=21,\end{aligned}$$

luego, la varianza y desviación estándar están dadas por:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= 21-\left(\frac{13}{3}\right)^2=\frac{20}{9},\\ \mathbb{D}(X) &= \sqrt{\frac{20}{9}}=\frac{\sqrt{20}}{3}.\end{aligned}$$

Ejercicio 12 – pág. 264

Sea $X^* = (X-\mu)/\sigma$, utilizando algunas de las propiedades de valor esperado y considerando que $\mu = \mathbb{E}$ y $\sigma^2 = \mathbb{V}$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^*) &= \mathbb{E}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)\\ &= \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}(X-\mu)\\ &= \frac{1}{\sigma}(\mathbb{E}(X)-\mu)\\ &= \frac{1}{\sigma}(\mu-\mu)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Luego, por definición 6.3 se sabe que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \sigma^2$, entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X^*) &= \mathbb{E}\left[\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}\right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{E}(X-\mu)^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{\sigma^2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

3. Variables aleatorias continuas

Ejercicio 3 – pág. 278

Sea $f_T(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}$, con $\lambda = 0.05$, luego entonces, por teorema 6.11 se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \int_0^\infty t\left(\left(\frac{1}{20}\right)^2 t e^{-\frac{t}{20}}\right) dt \\
&= \frac{1}{400}\lim_{b\to\infty}\int_0^b t^2 e^{-\frac{t}{20}} \\
&= \frac{1}{400}\lim_{b\to\infty}\left[t^2\left(-20e^{-\frac{t}{20}}\right)\Big|_0^b + 40\int_0^b te^{-\frac{t}{20}}dt\right] \\
&= \frac{1}{400}\lim_{b\to\infty}\left[-20t^2e^{-\frac{t}{20}}\Big|_0^b + 40\left[-20te^{-\frac{t}{20}}\Big|_0^b + 20\int_0^b e^{-\frac{t}{20}}dt\right]\right] \\
&= \frac{1}{400}\lim_{b\to\infty}\left[-20t^2e^{-\frac{t}{20}} - 800te^{-\frac{t}{20}} + 800(-20e^{-\frac{t}{20}})\right]_0^b \\
&= \frac{1}{400}\lim_{b\to\infty}\left[\frac{-20t^2}{e^{\frac{t}{20}}} - \frac{800t}{e^{\frac{t}{20}}} - \frac{16000}{e^{\frac{t}{20}}}\right]_0^b \\
&= \frac{1}{400}\left[\lim_{b\to\infty}\left(\frac{-20b^2}{e^{\frac{b}{20}}} - \frac{800b}{e^{\frac{b}{20}}} - \frac{16000}{e^{\frac{b}{20}}}\right) - \left(\frac{-20(0)^2}{e^{\frac{0}{20}}} - \frac{800(0)}{e^{\frac{0}{20}}} - \frac{16000}{e^{\frac{0}{20}}}\right)\right] \\
&= \frac{16000}{400} = 40,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(T) &= \int_0^{\infty} t^2 \left(\lambda^2 t e^{-\lambda t}\right) dt - 40^2 \\
&= \lambda^2 \lim_{b\to\infty} \int_0^b t^3 e^{-\lambda t} dt - 1600 \\
&= \lambda^2 \lim_{b\to\infty} \left[\left.\frac{-t^3 e^{-\lambda t}}{\lambda}\right|_0^b + \frac{3}{\lambda}\int_0^b t^2 e^{-\lambda t} dt \right] - 1600 \\
&= \lambda^2 \lim_{b\to\infty} \left[\left.\frac{-t^3 e^{-\lambda t}}{\lambda}\right|_0^b + \frac{3}{\lambda}\left[-\left.\frac{t^2 e^{-\lambda t}}{\lambda}\right|_0^b + \frac{2}{\lambda}\int_0^b t e^{-\lambda t} dt \right] \right] - 1600 \\
&= \lambda^2 \lim_{b\to\infty} \left[\left.\frac{-t^3 e^{-\lambda t}}{\lambda}\right|_0^b + \frac{3}{\lambda}\left[-\left.\frac{t^2 e^{-\lambda t}}{\lambda}\right|_0^b + \frac{2}{\lambda}\left[-\left.\frac{t e^{-\lambda t}}{\lambda}\right|_0^b + \frac{1}{\lambda}\int_0^b e^{-\lambda t} dt \right] \right] \right] - 1600 \\
&= \lambda^2 \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-t^3 e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{3}{\lambda}\left[-\frac{t^2 e^{-\lambda t}}{\lambda} + \frac{2}{\lambda}\left[-\frac{t e^{-\lambda t}}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2} \right] \right] \right]_0^b - 1600 \\
&= \frac{\lambda}{e^{\lambda t}} \lim_{b\to\infty} \left[-t^3 - \frac{3t^2}{\lambda} - \frac{6t}{\lambda^2} - \frac{6}{\lambda^3} \right]_0^b - 1600 \\
&= 0 - \lambda\left(-0^3 - \frac{3(0)^2}{\lambda} - \frac{6(0)}{\lambda^2} - \frac{6}{\lambda^3} \right) - 1600 \\
&= 2400 - 1600 = 800.
\end{aligned}$$

Por lo que la vida útil esperada para la bombilla es igual a 40 horas, con una varianza de 800 horas^2.

Ejercicio 12 – pág. 280

Para este ejercicio se utilizó la siguiente definición [3]: sea $g(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$ una función de las variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta $f(y_1, y_2, \ldots, y_k)$, entonces

$$\mathbb{E}[g(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(y_1, y_2, \ldots, y_k) * f(y_1, y_2, \ldots, y_k) dy_1 dy_2 \ldots dy_k.$$

Luego entonces, como X y Y son variables aleatorias que provienen de una distribución uniforme $[0, 1]$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^Y) &= \int_0^1 \int_0^1 x^y dx dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_0^1 dy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1^{y+1}}{y+1} - \frac{0^{y+1}}{y+1} \right] dy \\
&= \int_0^1 \frac{1}{y+1} dy, \text{ sea } u = y+1 \text{ entonces } du = dy \\
&= \int_1^2 \frac{1}{u} du \\
&= \ln u|_1^2 \\
&= \ln 2.
\end{aligned}$$

Para corroborar este resultado, se generaron en R (Versión 4.0.2) 100 números aleatorios uniformes tanto para X como para Y, de tal forma que se calcularon 100 números con la forma X^Y, la distribución de probabilidad se muestra en el cuadro 14, en donde se supone una distribución discreta para los datos, entonces el valor esperado de X^Y se determina como sigue:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^Y) &= 0(\frac{1}{100}) + 0.1(\frac{3}{100}) + 0.2(\frac{3}{100}) + 0.3(\frac{7}{100}) + 0.4(\frac{5}{100}) + 0.5(\frac{11}{100}) + 0.6(\frac{9}{100}) \\
&\quad +0.7(\frac{9}{100}) + 0.8(\frac{14}{100}) + 0.9(\frac{19}{100}) + 1.0(\frac{19}{100}) \\
&= 0.695 \\
&\approx \ln 2,
\end{aligned}$$

este resultado respalda lo obtenido anteriormente.

Referencias

[1] . S. J. L. Grinstead, C. M. *Introduction to probability.* American Mathematical Soc., 2012.

[2] R Core Team. R: A Language and Environment for Statistical Computing. https://www.R-project.org/, 2020.

[3] D. Wackerly, W. Mendenhall, and R. L. Scheaffer. *Estadística Matemática con Aplicaciones.* Cengage Learning Editores, México, 2009.

Cuadro 14: Distribución de probabilidad para X^Y (ejercicio 12 – pág. 280).

x	$p(x)$
0	1/100
0.1	3/100
0.2	3/100
0.3	7/100
0.4	5/100
0.5	11/100
0.6	9/100
0.7	9/100
0.8	14/100
0.9	19/100
1.0	19/100