UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CAMPUS JARDINS DE ANITA

CIÊNCIA DE DADOS

ERICK COUTINHO

536591

ORIENTADOR: JOSÉ LEONARDO ESTEVES DA SILVA

2° AVALIAÇÃO: MÉTODOS NUMÉRICOS

ITAPAJÉ, CE

2023

1.

Após diversas tentativas, nenhum dos métodos convergiu. Após uma análise buscando o motivo da não convergência:

Os autovalores da matriz A que são [−2.11750391, 3.20697238, 2.16092448, 0.74960704].

Observando esses autovalores, pode-se notar que a matriz não é diagonalizável, pois possui um autovalor negativo. A convergência dos métodos iterativos como Jacobi e Gauss-Seidel está relacionada aos autovalores da matriz. Para esses métodos convergirem, é necessário que a matriz seja diagonalizável ou que, pelo menos, seus autovalores estejam dentro do círculo de convergência.

No entanto, se a matriz não é diagonalizável ou tem autovalores fora do círculo de convergência, esses métodos podem não convergir. No caso, como há um autovalor negativo, isso pode ser uma razão para a não convergência dos métodos.

Mesmo com a não convergência dos métodos, trouxe o resultado do sistema:

Código:

```
print('A solução exata é:\n',np.linalg.inv(A)@b)
```

a expressão completa "np.linalg.inv(A)@b" está resolvendo o sistema linear Ax=b para x encontrando a multiplicação da matriz inversa de A pelo vetor b. Essa operação resulta no vetor x que representa a solução exata do sistema linear.

Saída:

```
Autovalores da matriz A: [-2.11750391  3.20697238  2.16092448  0.74960704]
A solução exata é:
 [[0.90909091]
 [0.81818182]
 [1.54545455]
 [1.27272727]]
```

Na página seguinte os códigos dos métodos -

Código (Tentativa: Jacobi):

```
import numpy as np
A = np.array([[1, 2, -1, 0],
              [2, -1, 0, 0],
              [0, -1, 2, -1],
              [0, 0, -1, 2]])
b = np.array([[1],
             [1],
             [1],
             [1,]])
x0 = np.zeros_like(b)
autovalores = np.linalg.eigvals(A)
print("Autovalores da matriz A:", autovalores)

print('A solução exata é:\n',np.linalg.inv(A)@b)
1 usage
def jacobi(A, b, x0, tol, N):
    # Preliminares
    A = A.astype('double')
    b = b.astype('double')
    x0 = x0.astype('double')
    n = np.shape(A)[0]
    x = np.zeros(n)
    it = 0
    # Iterações
    while it < N:
        it += 1
        # Iteração de Jacobi
        for i in np.arange(n):
            x[i] = b[i]
            for j in np.concatenate((np.arange(0, i), np.arange(i + 1, n))):
                x[i] -= A[i, j] * x0[j]
            x[i] /= A[i, i]
        # Tolerância
        if np.linalg.norm(x - x0, np.inf) < tol:
            return x
        # Prepara nova iteração
        x0 = np.copy(x)
    raise NameError('Número máximo de iterações excedido.')

result = jacobi(A,b,x0, tol: 0.0001, N: 5000)
print(result)
gauss_seidel()
```

Código (Tentativa: Gauss_Seidel):

```
def gauss_seidel(A, b, x0, tol, N):
    # preliminares
    A = A.astype('double')
    b = b.astype('double')
    x0 = x0.astype('double')

    n = np.shape(A)[0]
    x = np.copy(x0)
    it = 0
    # iteracoes
    while (it < N):
        it = it + 1
        # iteracao de Jacobi
        for i in np.arange(n):
            x[i] = b[i]
            for j in np.concatenate((np.arange(0, i), np.arange(i + 1, n))):
                x[i] -= A[i, j] * x[j]
            x[i] /= A[i, i]
            print(x[i], A[i, i])
            # tolerancia
        if (np.linalg.norm(x - x0, np.inf) < tol):
            return x
            # prepara nova iteracao
        x0 = np.copy(x)
    raise NameError('num.max.deiteracoes excedido.')
result_2 = gauss_seidel(A, b, x0, tol: 0.0001, N: 5000)
```

2. Interpole um polinômio que passa pelos pontos : {(1, 2),(2, 0.4),(3, 3),(4, 3.5)}.

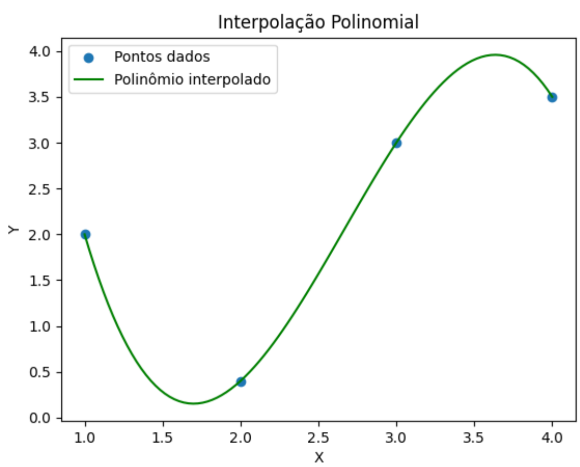
Código:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

#pontos
x1 = np.array([1,2])
x2 = np.array([2,0.4])
x3 = np.array([3,3])
x4 = np.array([4,3.5])
#arrays
x = np.array([x1[0], x2[0], x3[0], x4[0]])
y = np.array([x1[1], x2[1], x3[1], x4[1]])

grau_polinomio = len(x) - 1
# Ajuste do polinômio aos pontos
coeficientes = np.polyfit(x, y, grau_polinomio)
# Criar o polinômio a partir dos coeficientes
polinomio = np.poly1d(coeficientes)
print(f'O polinomia que interpola os pontos é:{polinomio}')
print('Os números "3" e "2" no print representam os graus dos termos do polinômio.')
print('Polinômio: \n-1.05x^3 + 8.4x^2 - 19.45x + 14.1 ')

# Avaliar o polinômio em pontos específicos para plotagem
x_valores = np.linspace(min(x), max(x), num: 100)
y_valores = polinomio(x_valores)

# Plotar os pontos e o polinômio interpolado
plt.scatter(x, y, label='Pontos dados')
plt.plot( *args: x_valores, y_valores, label='Polinômio interpolado', color='green')
plt.title('Interpolação Polinomial')
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y')
plt.legend()
plt.show()
```

Saída:

```
O polinomia que interpola os pontos é:       3       2
-1.05 x + 8.4 x - 19.45 x + 14.1
Os números "3" e "2" no print representam os graus dos termos do polinômio.
Polinômio:
-1.05x^3 + 8.4x^2 - 19.45x + 14.1
```

Saida (Gráfico):



Explicação passo a passo do código:

```
x1 = np.array([1,2])
x2 = np.array([2,0.4])
x3 = np.array([3,3])
x4 = np.array([4,3.5])
```

São dados quatro pontos no plano cartesiano, onde cada ponto é representado por um array de duas coordenadas (x, y).

```
x = np.array([x1[0], x2[0], x3[0], x4[0]])
y = np.array([x1[1], x2[1], x3[1], x4[1]])
```

São criados arrays x e y contendo as coordenadas x e y dos pontos dados.

```
grau_polinomio = len(x) - 1
coeficientes = np.polyfit(x, y, grau_polinomio)
```

É criado um objeto polinômio utilizando os coeficientes calculados.

```
x_valores = np.linspace(min(x), max(x), 100)
y_valores = polinomio(x_valores)
```

São gerados 100 pontos igualmente espaçados ao longo do intervalo definido pelos pontos dados, e o valor do polinômio é calculado para cada ponto.

```
plt.scatter(x, y, label='Pontos dados')
plt.plot(x_valores, y_valores, label='Polinômio interpolado', color='green')
plt.title('Interpolação Polinomial')
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y')
plt.legend()
plt.show()
```

Os pontos dados são plotados como pontos no plano, e o polinômio interpolado é plotado como uma curva verde. O título, rótulos dos eixos e a legenda são adicionados à figura, e a figura é exibida usando plt.show().

3. Obtenha a reta de regressão que melhor ajusta o conjunto de pontos abaixo plotando seu gráfico: {(1, 3.25), (1.5, 3.5), (2, 3.75), (2.5, 4), (3, 4.25), (3.5, 4.5)}.

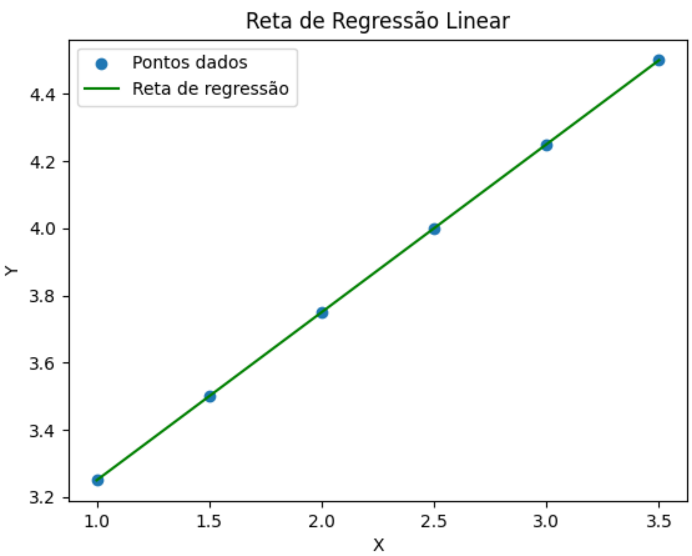
Código:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Pontos
pontos = np.array([(1, 3.25), (1.5, 3.5), (2, 3.75), (2.5, 4), (3, 4.25), (3.5, 4.5)])

# Separar os pontos em coordenadas x e y
x = pontos[:, 0]
y = pontos[:, 1]

# Realizar a regressão linear
coeficientes = np.polyfit(x, y, deg: 1)  # O argumento "1" indica uma regressão linear (reta)
reta_regressao = np.poly1d(coeficientes)
print('Equação da reta:', reta_regressao)
x_valores_reta = np.linspace(min(x), max(x), num: 100)
y_valores_reta = reta_regressao(x_valores_reta)
# Plotar os pontos e a reta de regressão
plt.scatter(x, y, label='Pontos dados')
plt.plot( *args: x_valores_reta, y_valores_reta, label='Reta de regressão', color='green')
plt.title('Reta de Regressão Linear')
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y')
plt.legend()
plt.show()
```

Saída:

```
Equação da reta:
0.5 x + 2.75
```

Saida (Gráfico):



Explicação passo a passo do código:

```
pontos = np.array([(1, 3.25), (1.5, 3.5), (2, 3.75), (2.5, 4), (3, 4.25), (3.5, 4.5)])
```

São fornecidos seis pontos no plano, onde cada ponto é representado por um par ordenado (x, y).

```
x = pontos[:, 0]
y = pontos[:, 1]
```

Os pontos são divididos em arrays x e y, representando as coordenadas x e y dos pontos, respectivamente.

```
coeficientes = np.polyfit(x, y, 1)
```

A função polyfit do NumPy é utilizada para ajustar uma reta (polinômio de grau 1) aos pontos. Os coeficientes da reta são calculados e armazenados em coeficientes.

```
reta_regressao = np.poly1d(coeficientes)
```

A função poly1d do NumPy cria um objeto de função polinomial com os coeficientes dados, representando a reta de regressão.

```
x_valores_reta = np.linspace(min(x), max(x), 100)
y_valores_reta = reta_regressao(x_valores_reta)
```

São gerados 100 pontos igualmente espaçados ao longo do intervalo definido pelos pontos dados, e os valores da reta de regressão são calculados para cada ponto.

```
plt.scatter(x, y, label='Pontos dados')
plt.plot(x_valores_reta, y_valores_reta, label='Reta de regressão', color='green
plt.title('Reta de Regressão Linear')
plt.xlabel('X')
plt.ylabel('Y')
plt.legend()
plt.show()
```

Os pontos dados são plotados como pontos no plano, e a reta de regressão é plotada como uma linha verde. O título, rótulos dos eixos e a legenda são adicionados à figura, e a figura é exibida usando plt.show().

4. Plote a derivada exata e a derivada numérica da função com h = 0.1 e h = 0.001

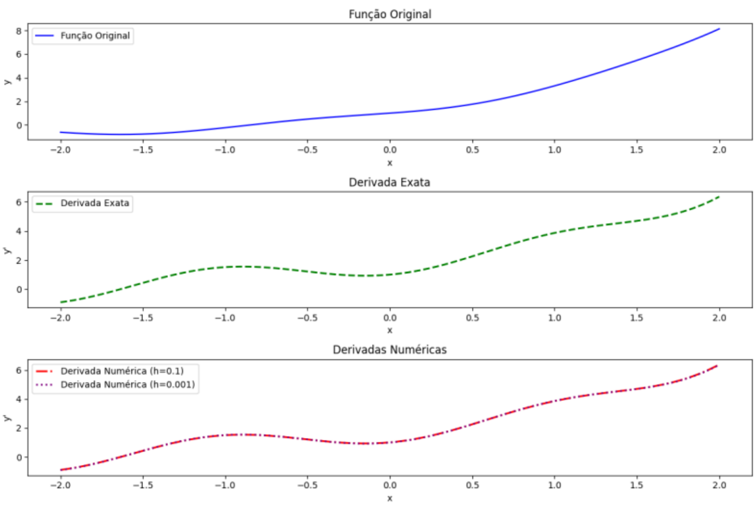
y = e^x + sen(x)^3

Código:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
3 usages
def funcao(x):
    return np.exp(x) + np.sin(x)**3
1 usage
def derivada_exata(x):
    return np.exp(x) + 3 * np.sin(x)**2 * np.cos(x)
2 usages
def derivada_numerica(x, h):
    return (funcao(x + h) - funcao(x - h)) / (2 * h)
#Valores de x
x_valores = np.linspace(-2, stop: 2, num: 500)
y_valores = funcao(x_valores)
derivada_exata_valores = derivada_exata(x_valores)
derivada_numerica_h_01 = derivada_numerica(x_valores, h: 0.1)
derivada_numerica_h_001 = derivada_numerica(x_valores, h: 0.001)
# Plote
plt.figure(figsize=(12, 8))
# Plotar a função original
plt.subplot( *args: 3, 1, 1)
plt.plot( *args: x_valores, y_valores, label='Função Original', color='blue')
plt.title('Função Original')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.legend()
# Plotar a derivada exata
plt.subplot( *args: 3, 1, 2)
plt.plot( *args: x_valores, derivada_exata_valores, label='Derivada Exata', linestyle='--', linewidth=2, color='green')
plt.title('Derivada Exata')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y\'')
plt.legend()
# Plotar as derivadas numéricas
plt.subplot( *args: 3, 1, 3)
plt.plot( *args: x_valores, derivada_numerica_h_01, label='Derivada Numérica (h=0.1)', linestyle='-.', linewidth=2, color='red')
plt.plot( *args: x_valores, derivada_numerica_h_001, label='Derivada Numérica (h=0.001)', linestyle=':', linewidth=2, color='purple')
plt.title('Derivadas Numéricas')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y\'')
```

```python
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y\'')
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.show()
```

Saida (Gráfico):



Explicação passo a passo do código:

```python
def funcao(x):
    return np.exp(x) + np.sin(x)**3

def derivada_exata(x):
    return np.exp(x) + 3 * np.sin(x)**2 * np.cos(x)

def derivada_numerica(x, h):
    return (funcao(x + h) - funcao(x - h)) / (2 * h)
```

São definidas a função original, a derivada exata e a derivada numérica.

```python
x_valores = np.linspace(-2, 2, 500)
```

Gera 500 valores igualmente espaçados no intervalo de −2 a 2 para x.

```python
y_valores = funcao(x_valores)
derivada_exata_valores = derivada_exata(x_valores)
derivada_numerica_h_01 = derivada_numerica(x_valores, 0.1)
derivada_numerica_h_001 = derivada_numerica(x_valores, 0.001)
```

Calcula os valores correspondentes da função original, derivada exata e derivadas numéricas.

Em seguida é realizada a plotagem dos 3 gráficos.

5. Sejam as integrais definidas:

(a) $\int_2^5 cos\,(2x)\,dx.$

(b) $\int_1^4 x ln(x) dx.$

Construa duas tabelas com n = {4, 10, 25, 100}. A primeira deverá comparar a solução analítica com os métodos de Riemann usando o ponto médio, trapézios e Simpson enquanto que a segunda tabela deverá comparar os erros absolutos da solução analítica em relação a cada um desses três métodos citados.

Código (A):

```python
import numpy as np

# Função a ser integrada
def f(x):
    return np.cos(2 * x)
# Solução analítica
def solucao_analitica(a, b):
    return (1 / 2) * np.sin(4) - (1 / 4) * np.sin(2)
# Métodos de Riemann
def ponto_medio(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    xi = np.linspace(a + h / 2, b - h / 2, n)
    return h * np.sum(f(xi))
def trapezios(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    xi = np.linspace(a, b, n + 1)
    return h / 2 * (f(a) + 2 * np.sum(f(xi[1:-1])) + f(b))
def simpson(f, a, b, n):
    if n % 2 != 0:
        n += 1  # Se n é impar, torná-lo par
    h = (b - a) / n
    xi = np.linspace(a, b, n + 1)
    resultado_simpson = f(a) + f(b)
    for i in range(1, n, 2):
        resultado_simpson += 4 * f(xi[i])
    for i in range(2, n - 1, 2):
        resultado_simpson += 2 * f(xi[i])
    return h / 3 * resultado_simpson
# Definindo intervalo
a, b = 2, 5
```

```python
# Definindo intervalo
a, b = 2, 5
# Valores de n
n_valores = [4, 10, 25, 100]
# Tabela 1: Comparando com a solução analítica
print("Tabela 1: Comparando com a solução analítica")
print("n | Solução Analítica | Ponto Médio | Trapézios | Simpson")
print("--|-------------------|-------------|-----------|--------")
for n in n_valores:
    ponto_medio_resultado = ponto_medio(f, a, b, n)
    trapezios_resultado = trapezios(f, a, b, n)
    simpson_resultado = simpson(f, a, b, n)
    analitico = solucao_analitica(a, b)
    print(f"{n} | {analitico:.6f} | {ponto_medio_resultado:.6f} | {trapezios_resultado:.6f} | {simpson_resultado:.6f}")
# Tabela 2: Comparando os erros absolutos
print("\nTabela 2: Comparando os erros absolutos")
print("n | Erro Ponto Médio | Erro Trapézios | Erro Simpson")
print("--|------------------|----------------|-------------")
for n in n_valores:
    ponto_medio_resultado = ponto_medio(f, a, b, n)
    trapezios_resultado = trapezios(f, a, b, n)
    simpson_resultado = simpson(f, a, b, n)
    analitico = solucao_analitica(a, b)
    erro_pm = np.abs(analitico - ponto_medio_resultado)
    erro_trap = np.abs(analitico - trapezios_resultado)
    erro_simpson = np.abs(analitico - simpson_resultado)
    print(f"{n} | {erro_pm:.6f} | {erro_trap:.6f} | {erro_simpson:.6f}")
```

Saída (A):

```
Tabela 1: Comparando com a solução analítica
n | Solução Analítica | Ponto Médio | Trapézios | Simpson
--|-------------------|-------------|-----------|--------
4 | -0.605726 | 0.117061 | 0.085652 | 0.110430
10 | -0.605726 | 0.108003 | 0.103180 | 0.106471
25 | -0.605726 | 0.106646 | 0.105880 | 0.106392
100 | -0.605726 | 0.106407 | 0.106359 | 0.106391

Tabela 2: Comparando os erros absolutos
n | Erro Ponto Médio | Erro Trapézios | Erro Simpson
--|------------------|----------------|-------------
4 | 0.722786 | 0.691378 | 0.716156
10 | 0.713729 | 0.708905 | 0.712196
25 | 0.712372 | 0.711605 | 0.712118
100 | 0.712132 | 0.712084 | 0.712116
```

CONTEXTO:

Solução Analítica:

A solução analítica de uma integral definida é a expressão matemática exata que representa a área sob a curva da função no intervalo especificado. Em outras palavras, é o resultado teórico exato da integral.

Métodos de Riemann:

Os métodos de Riemann são técnicas de aproximação numérica para calcular integrais definidas. Eles dividem o intervalo de integração em subintervalos e aproximam a área sob a curva usando somas de áreas de retângulos (no caso do ponto médio), trapézios (no caso dos trapézios) ou segmentos de parábolas (no caso de Simpson).

- Ponto Médio:

Este método utiliza o valor da função no ponto médio de cada subintervalo para calcular a altura do retângulo.

- Trapézios:

Este método usa segmentos de reta conectando os pontos da curva nos extremos de cada subintervalo, formando trapézios. A área de cada trapézio é calculada e somada para obter a aproximação da integral.

- Simpson:

Este método usa segmentos de parábolas para conectar os pontos da curva nos extremos e no ponto médio de cada subintervalo.

Código (B):

```python
print('\nItem B:\n')
# Função a ser integrada
6 usages
def g(x):
    return x * np.log(x)
# Solução analítica
2 usages
def solucao_analitica_b(a, b):
    return b * (np.log(b) - 1) - a * (np.log(a) - 1)
# Métodos de Riemann
2 usages
def ponto_medio_b(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    xi = np.linspace(a + h / 2, b - h / 2, n)
    return h * np.sum(f(xi))
2 usages
def trapezios_b(f, a, b, n):
    h = (b - a) / n
    xi = np.linspace(a, b, n + 1)
    return h / 2 * (f(a) + 2 * np.sum(f(xi[1:-1])) + f(b))
2 usages
def simpson_b(f, a, b, n):
    if n % 2 != 0:
        n += 1  # Se n é ímpar, torná-lo par
    h = (b - a) / n
    xi = np.linspace(a, b, n + 1)
    resultado_simpson = f(a) + f(b)
    for i in range(1, n, 2):
        resultado_simpson += 4 * f(xi[i])
    for i in range(2, n - 1, 2):
        resultado_simpson += 2 * f(xi[i])
    return h / 3 * resultado_simpson
```

```python
# Definindo intervalo
a, b = 1, 4
# Valores de n
n_valores_b = [4, 10, 25, 100]
# Tabela 1: Comparando com a solução analítica
print("Tabela 1: Comparando com a solução analítica")
print("n | Solução Analítica | Ponto Médio | Trapézios | Simpson")
print("--|------------------|------------|----------|--------")
for n in n_valores_b:
    ponto_medio_resultado = ponto_medio_b(g, a, b, n)
    trapezios_resultado = trapezios_b(g, a, b, n)
    simpson_resultado = simpson_b(g, a, b, n)
    analitico_b = solucao_analitica_b(a, b)
    print(
        f"{n} | {analitico_b:.6f} | {ponto_medio_resultado:.6f} | {trapezios_resultado:.6f} | {simpson_resultado:.6f}")
# Tabela 2: Comparando os erros absolutos
print("\nTabela 2: Comparando os erros absolutos")
print("n | Erro Ponto Médio | Erro Trapézios | Erro Simpson")
print("--|-----------------|---------------|-------------")
for n in n_valores_b:
    ponto_medio_resultado = ponto_medio_b(g, a, b, n)
    trapezios_resultado = trapezios_b(g, a, b, n)
    simpson_resultado = simpson_b(g, a, b, n)
    analitico_b = solucao_analitica_b(a, b)
    erro_pm = np.abs(analitico_b - ponto_medio_resultado)
    erro_trap = np.abs(analitico_b - trapezios_resultado)
    erro_simpson = np.abs(analitico_b - simpson_resultado)
    print(f"{n} | {erro_pm:.6f} | {erro_trap:.6f} | {erro_simpson:.6f}")
```

Saída (B):

```
Item B:

Tabela 1: Comparando com a solução analítica
n | Solução Analítica | Ponto Médio | Trapézios | Simpson
--|-------------------|-------------|-----------|--------
4 | 2.545177 | 7.308197 | 7.404954 | 7.341614
10 | 2.545177 | 7.335165 | 7.350742 | 7.340395
25 | 2.545177 | 7.339523 | 7.342018 | 7.340356
100 | 2.545177 | 7.340303 | 7.340459 | 7.340355

Tabela 2: Comparando os erros absolutos
n | Erro Ponto Médio | Erro Trapézios | Erro Simpson
--|------------------|-----------------|-------------
4 | 4.763019 | 4.859776 | 4.796437
10 | 4.789988 | 4.805564 | 4.795217
25 | 4.794346 | 4.796841 | 4.795178
100 | 4.795125 | 4.795281 | 4.795177
```

Em Resumo, o código realiza a integração numérica de duas funções distintas utilizando métodos de Riemann (ponto médio, trapézios e Simpson) e compara os resultados com as soluções analíticas. Primeiramente, a função $f(x)=\cos(2x)$ é integrada no intervalo de $x=2$ a $x=5$, e os resultados são comparados com a solução analítica. Em seguida, a função $g(x)=x\ \log(x)$ é integrada no intervalo de $x=1$ a $x=4$, e os resultados também são comparados com a solução analítica. O código imprime tabelas que mostram os valores da solução analítica e os resultados dos métodos numéricos para diferentes valores de n (número de subintervalos). Além disso, são apresentadas tabelas com os erros absolutos em relação à solução analítica para cada método e n. A estrutura do código permite fácil adaptação para integrar outras funções e comparar diferentes métodos de integração numérica.

Link para acessar repositório: https://github.com/ErickCoutinho/AV_2_M-todos_Numericos