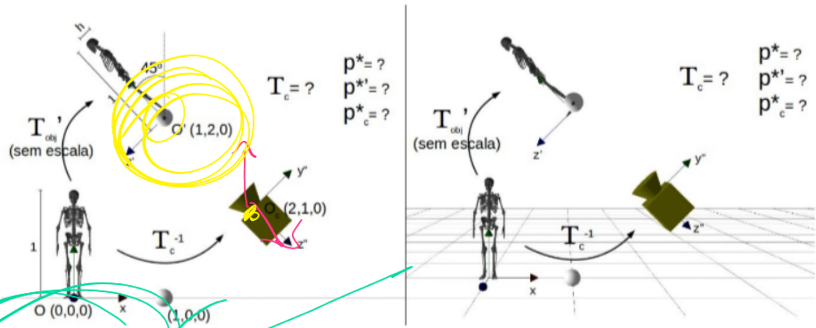
2- **[Conversão entre sistemas de coordenadas] (5,0 pontos)** Baseado nas figuras seguintes, trabalhe com mudança de sistemas de coordenadas.



a) (2,0 pontos) Gere a matriz correspondente à conversão do sistema de coordenadas local ' do objeto para o sistema de coordenadas global e mostre que ela é equivalente à matriz de composição de transformações T_{obj}'. Primeiramente, compare as imagens do modelo ' com a do modelo original, inicialmente alinhado com o sistema de coordenadas global, para deduzir a matriz de composição de transformações T_{obj}' (observe que nesse caso nenhuma transformação de escala foi aplicada). Para obter os vetores i', j' e k' (em coordenadas globais), correspondentes à base ortonormal do sistema de coordenadas local ', considere $j'=(O'-O_c)_u$ e $i'=(0,0,1)$.
Os vetores i', j' e k' correspondem a transformar os vetores canônicos i, j e k usando parte da própria matriz T_{obj}'.
As informações de coordenadas na figura estão todas dadas em relação ao sistema de coordenadas global.

b) (3,0 pontos) Gere a matriz T_c correspondente à conversão do sistema de coordenadas global para o sistema de coordenadas da câmera. Considere que a câmera está apontada para o ponto O' e use o vetor (0,1,0) como o seu vetor up. Escreva o código OpenGL equivalente para gerar a matriz T_c. Por último, use as matrizes T_{obj}' e T_c para obter e mostrar as coordenadas do ponto p* referentes a cada um dos sistemas de coordenadas mostrados na figura: p*'(objeto), p*(global), e p^*_c(câmera). Produto vetorial: a x b = ($a_yb_z-a_zb_y$, $a_zb_x-a_xb_z$, $a_xb_y-a_yb_x$).

A B

B - A

$$P_G = T \cdot P_L$$

$$P_L = T^{-1} P_G$$

$k' = (olho - centro)_u$

$i' = (up \times k')_u$

$j' = (k' \times i')_u$

O_c O_c

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & R^T * (-t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i' j' k

i' j' k

gluLookAt($\vec{olho}$, $\vec{centro}$, $\vec{up}$)

$\vec{up} \to (0,1,0)$

$\vec{centro} \to (1,2,0)$

$\vec{olho} \to (2,1,0)$

b) (3,0 pontos) Gere a matriz T_c correspondente à conversão do sistema de coordenadas global para o sistema de coordenadas da câmera. Considere que a câmera está apontada para o ponto O' e use o vetor (0,1,0) como o seu vetor up. Escreva o código OpenGL equivalente para gerar a matriz T_c. Por último, use as matrizes T_{obj}' e T_c para obter e mostrar as coordenadas do ponto p* referentes a cada um dos sistemas de coordenadas mostrados na figura: p*'(objeto), p*(global), e p^*_c(câmera). Produto vetorial: $a \times b = (a_y b_z - a_z b_y,\ a_z b_x - a_x b_z,\ a_x b_y - a_y b_x)$.

$$k' = (\text{olho} - \text{centro})_u$$

$$\big((2,1,0) - (1,2,0)\big)_u \Rightarrow (1,-1,0)_u$$

$$k' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$\underbrace{i' = (up \times k')_u}$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}} \Rightarrow i' = \left(0, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)_u$$

$$\Rightarrow \boxed{i' = (0, 0, -1)}$$

$$\underbrace{j' = (k' \times i')}$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = j' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} i & j & k & O_c \end{array} \\
T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 2 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
T^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{P_{Lc}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}
$$