Lista de Exercícios Interpolação

1. A tabela abaixo mostra os valores de temperatura (em Celsius) em função da profundidade (em metros) em um tanque de água:

p	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$T(p)$	66	52	18	11	10

(a) Sabe-se que a uma determinada profundidade, dentro do intervalo $[1, 3]$, a derivada segunda de $T(p)$ muda de sinal. O ponto que indica esta mudança é o ponto em que derivada segunda é igual a zero. Estime a profundidade deste ponto utilizando interpolação polinomial de grau 3.

(b) O fluxo de calor é dado em função da profundidade pela função $f(p) = -k\frac{dT}{dp}$, com $k = 0.01$. Estime o fluxo de calor na profundidade 1.3 metros.

A)Como a questão pede por um polinomio de grau 3 e, por Lagrange, para ter um polinomio de grau K eu preciso apenas de K+1 pontos, minha ideia é pegar os 2 pontos extremos e o central e fazer 2 polinomios diferentes, usando 1.0 e 2.5. Segue imagem da ideia.

$\rightarrow f(x)$

p	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$T(p)$	66	52	18	11	10

$\rightarrow N(x)$

Portato para f(x):

	x_0	x_1	x_2		x_3
p	1.0	1.5	2.0	[redacted]	3.0
$T(p)$	66	52	18	[redacted]	10

$$P_3(x) = f(x_0)\cdot L_0 + f(x_1)\cdot L_1 + f(x_2)\cdot L_2 + f(x_3)\cdot L_3$$

$$L_0 = \frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)\cdot(x_0-x_3)}$$

$$L_0 = \frac{(x-1{,}5)(x-2{,}0)(x-3{,}0)}{(1-1{,}5)(1-2{,}0)(1-3)}$$

$$L_0 = \frac{(x-1{,}5)(x^2-5x+6)}{-0{,}5\cdot-1\cdot-2}$$

$$L_0 = \frac{x^3-5x^2+6x-1{,}5x^2+7{,}5x-9}{-1}$$

$$L_0 = \frac{x^3-6{,}5x^2+13{,}5x-9}{-1}$$

$$L_1 = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(1{,}5-1)\cdot(1{,}5-2{,}0)(1{,}5-3)}$$

$$h_1 = \frac{(x-1)(x^2-3x-2x+6)}{0{,}5\cdot(-0{,}5)\cdot(-1{,}5)}$$

$$h_1 = \frac{x^3-3x^2-2x^2+6x-x^2+3x+2x-6}{0{,}375}$$

$$h_1 = \frac{x^3-6x^2+11x-6}{0{,}375}$$

$$h_2 = \frac{(x-1)(x-1{,}5)(x-3)}{(2-1)(2-1{,}5)(2-3)}$$

$$h_2 = \frac{(x-1)(x^2-3x-1{,}5x+4{,}5)}{1\cdot 0{,}5\cdot(-1)}$$

$$h_2 = \frac{x^3 - 3x^2 - 1{,}5x^2 + 4{,}5x - x^2 + 3x + 1{,}5x - 4{,}5}{-0{,}5}$$

$$h_2 = \frac{x^3 - 5{,}5x^2 + 9x - 4{,}5}{-0{,}5}$$

$$h_3 = \frac{(x-1)(x-1{,}5)(x-2)}{(3-1)(3-1{,}5)(3-2)}$$

$$h_3 = \frac{(x-1)(x^2 - 3{,}5x + 3)}{2 \cdot 1{,}5 \cdot 1}$$

$$h_3 = \frac{x^3 - 3{,}5x^2 + 3x - x^2 + 3{,}5x - 3}{3}$$

$$h_3 = \frac{x^3 - 4{,}5x^2 + 6{,}5x - 3}{3}$$

$$P_3(x) = f(x_0)\cdot L_0 + f(x_1)\cdot L_1 + f(x_2)\cdot L_2 + f(x_3)\cdot L_3$$

$$P_3(x) = 66\cdot\left(\frac{x^3-6{,}5x^2+13{,}5x-9}{-1}\right) + 52\left(\frac{x^3-6x^2+11x-6}{0{,}375}\right)$$

$$+18\cdot\left(\frac{x^3-5{,}5x^2+9x-4{,}5}{-0{,}5}\right) + 10\cdot\left(\frac{x^3-4{,}5x^2+6{,}5x-3}{3}\right)$$

$$= -66x^3+429x^2-891+594+138{,}666667x^3$$
$$-832x^2+1525{,}33333x-832-36x^3+198x^2$$
$$-324x+162+3{,}33333333x^3-15x^2+$$
$$21{,}6666667x-10$$

$$P_3(x) = 40x^3-220x^2+332x-86$$

$$P_3'(x) = 120x^2-440x+332$$

$$P_3''(x) = 240x-440$$

$$240x-440=0$$

$$X = \frac{440}{240} \rightsquigarrow X = 1,833$$

Afim de não transcrever todos os calculos do outro polinomio, já o trarei pronto.

$$-5,33333x^3 + 52x^2 - 166,667x + 186$$

Ao fazer a segunda derivada e encontrar a raiz, teremos X = 3,25.
Como a questão diz que há uma mudança de sinal entre [1,3] e 3,25 não está dentro deste intervalo, tenho como reposta final X = 1,833.

(b) O fluxo de calor é dado em função da profundidade pela função $f(p) = -k\frac{dT}{dp}$, com $k = 0.01$. Estime o fluxo de calor na profundidade 1.3 metros.

$$P_3(x) = 40x^3 - 220x^2 + 332x - 86$$

$$f(p) = -0{,}01\,(120x^2 - 440x + 332)$$

$$\Rightarrow -0{,}01 \cdot (120(1{,}3)^2 - 440(1{,}3) + 332)$$

$$f(1{,}3) = 0{,}372$$