CENTRO FEDERAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA DE MINAS GERAIS

Erick Henrique Dutra de Souza (erickhenriquedds)
Lucas Cota Dornelas (lucascdornelas)
Victor Le Roy Matos (victorlrmatos)

Filtro de imagens e a Transformada de Fourier

Trabalho apresentado no curso de
Cálculo IV no CEFET/MG.
Orientador: Luis Alberto D'Afonseca

Belo Horizonte
2021

1. Resumo

Filtros de imagens são utilizados em massa para a criação de conteúdo digital e profissional. Entretanto há várias formas diferentes de serem produzidas e em sua grande maioria, não sabemos o processo utilizado para sua criação.

Neste projeto, demonstraremos como são elaborados e aplicados os filtros de imagens a partir da forma discreta da transformada de Fourier (dft). Para isso, explicaremos brevemente o que é a dft e como os filtros de imagens funcionam e, em seguida, demonstraremos aplicações e exemplos destes filtros criados. Para este processo, utilizaremos a linguagem de programação Python, para aplicar os conceitos teóricos por meio de um algoritmo.

2. Introdução

A Transformada de Fourier vem do estudo de Fourier, criador da transformada, sobre séries. Ele descobriu que podemos somar os sinais de funções senoidais complexas que variam com uma certa frequência em função do tempo, assim como mostrado na figura abaixo.

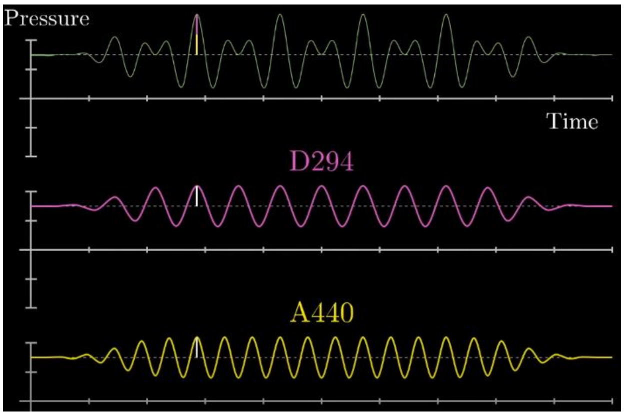

Figura 1 - Exemplo do somatório entre as ondas A440 e D294

Por conta disso, podemos dizer que a Transformada é uma extensão da série de Fourier quando o período da função representada é maximizado, aproximando-se do infinito.

3. Desenvolvimento

a. Série de Fourier Complexa

A Série de Fourier Complexa consiste em substituir as funções seno e cosseno por uma função exponencial complexa. Devemos lembrar que a Série de Fourier só pode ser usada para representar funções periódicas, com período de 2L, e que as senoides somadas tem frequências discretas. De forma geral, para obtermos sua fórmula, devemos manipular as equações das Séries de Fourier utilizando como suporte as equações de Euler e somatórios. Sua fórmula está representada abaixo e precisamos dela para alcançarmos a definição da Transformada de Fourier.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

Figura 2 - Equação da definição das Séries de Fourier complexa

b. Transformada de Fourier

De uma forma simples, a Transformada de Fourier é uma integral que expressa uma função em termos de funções de base senoidal, isto é, seno e cosseno. A Transformada recebe o nome de representação do domínio da frequência do sinal original, pois os termos da Transformada referem-se a ambas as representações do domínio frequência e a operação matemática que associa a representação domínio frequência a uma função temporal. Suas definições são:

Transformada de Fourier

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definimos a **Transformada de Fourier** de f por

$$\mathcal{F}[f(t)](\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

desde que a integral convirja.

Transformada Inversa de Fourier

Se f é seccionalmente contínua e

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$$

então $\hat{f}$ tem **Transformada Inversa de Fourier** e

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega)](t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega$$

Figura 3 - Definições da Transformada de Fourier

Podemos utilizar a Transformada de Fourier em várias aplicações nos campos da engenharia e da tecnologia. Vamos apresentar como ela influência nos filtros de imagens, mas para isso devemos entender o que é a Transformada de Fourier Discreta.

c. Transformada de Fourier Discreta (DFT)

A Transformada Discreta de Fourier (DFT) é semelhante à Transformada de Fourier, porém ela trabalha somente com sinais discretos e periódicos. Devemos considerar que estes sinais "pareçam" ter duração infinita, por conta disso, consideramos que o sinal se repete periodicamente. Este tipo de transformada é a única possível de se utilizar na prática, uma vez que computadores só podem lidar com sinais discretos e finitos em comprimento.

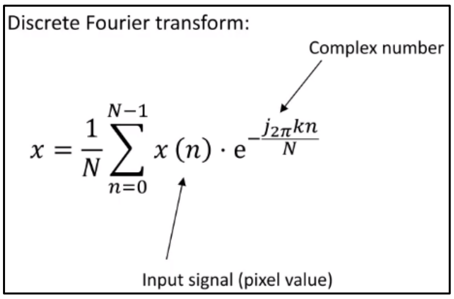

Figura 4 - Fórmula da DFT

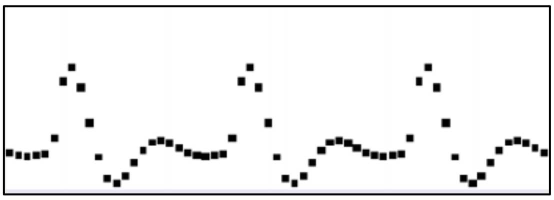

Figura 5 - Exemplo da DFT

4. Aplicação da Transformada de Fourier em filtros de imagem

O uso de imagens digitais faz parte da vida diária de uma grande porção da população mundial, e dificilmente as pessoas conseguem viver sem elas. Sendo assim, o processamento de imagens digitais torna-se indispensável atualmente, como por exemplo, aumentar a resolução de imagens, diminuir alguns detalhes indesejáveis, ou aplicar filtros de mudanças em geral. Sendo assim, a transformação de Fourier pode nos auxiliares para modificar nossas informações de imagem, ou seja, os pixels, em escala de cinza em frequências e fazer outros processos.

Utilizamos a Transformada de Fourier em sua forma discreta, a partir de um algoritmo rápido chamado Transformada Rápida de Fourier (FFT), para a construção de filtros de imagens com o objetivo de criar um filtro de detecção que separa arestas (componentes de frequência alta) dos componentes de baixa frequência.

Para isso, colocamos uma imagem no espaço de Fourier, utilizando a FFT, e ela será transformada em algo *pixelado*, onde o meio representa a área de componentes com baixa frequência e, nas áreas mais externas, os componentes com frequência mais alta. Em outras palavras, arestas que são de maior frequência se localizam na parte mais externa da imagem no espaço de Fourier. Para encontrar a imagem com o filtro aplicado, basta utilizar a FFT invertida e, teremos o resultado da imagem.

Na imagem *pixelada*, que é definida por uma matriz de 0 e 1, onde 1 representa os pontos que serão salvos e 0 os valores vazios, podemos criar uma máscara sobre a imagem para conseguirmos definir o filtro que desejamos e temos várias técnicas que podemos aplicar e obter um resultado desejado. Entre eles estão:

1. Quando os valores da máscara na matriz forem 0, acontece o "Noise reduction" (redução de um ruído da imagem que possa gerar algum tipo de distorção)
2. Quando os valores da máscara na matriz forem 1, acontece o "Smoothing" (suaviza as arestas da imagem)
3. Quando os valores da máscara na matriz forem 1, porém o centro da máscara é ignorado, acontece "Band Pass Filter" (filtro que permite passagem de frequências de uma certa faixa e rejeita as outras)

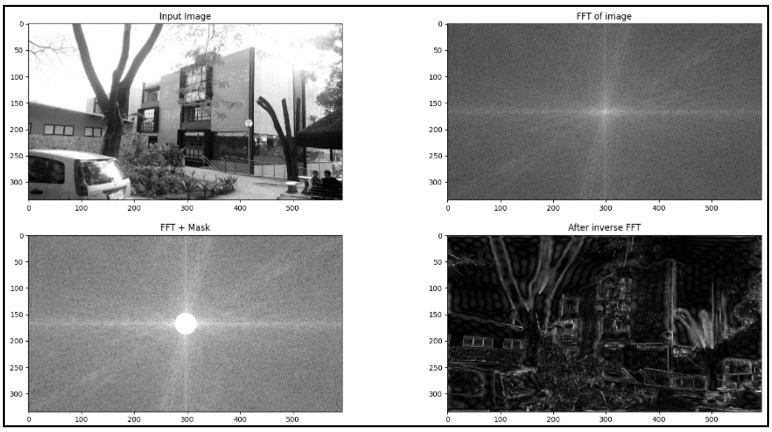

Figura 6 – Exemplo do ponto 1 (Noise Reduction)

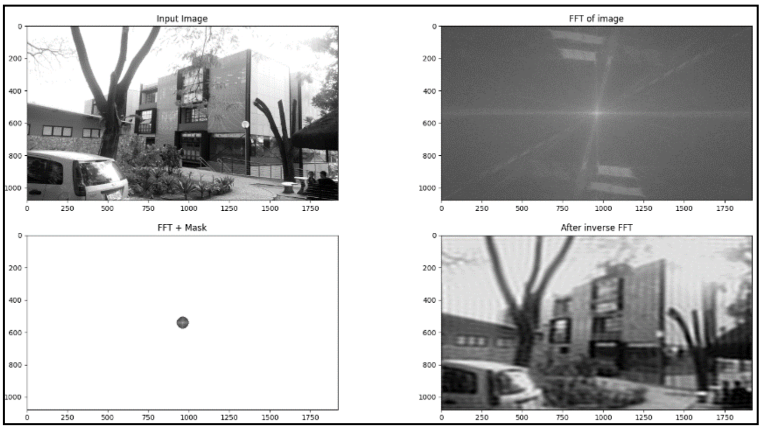

Figura 7 – Exemplo do ponto 2 (Smoothing)

5. Transformadas de Fourier em Python

As Figuras 6 e 7 foram obtidas a partir do tratamento de imagens utilizando-se as transformadas de Fourier na linguagem de programação Python:

```
1 import cv2
2 from matplotlib import pyplot as plt
3 import numpy as np
4 if __name__ == '__main__':
5     img_path = "new_data/c2.jpg"
6     img = cv2.imread(img_path, 0) # load an image
7     dft = cv2.dft(np.float32(img), flags=cv2.DFT_COMPLEX_OUTPUT)
8     dft_shift = np.fft.fftshift(dft)
9     magnitude_spectrum = 20 * np.log(cv2.magnitude(dft_shift[:, :, 0], dft_shift[:, :, 1]))
10    # FIGURA 6:
11    rows, cols = img.shape
12    crow, ccol = int(rows / 2), int(cols / 2)
13    mask = np.ones((rows, cols, 2), np.uint8)
14    r = 20
15    center = [crow, ccol]
16    x, y = np.ogrid[:rows, :cols]
17    mask_area = (x - center[0]) ** 2 + (y - center[1]) ** 2 <= r*r
18    mask[mask_area] = 0
19    # FIGURA 7:
20    rows, cols = img.shape
21    crow, ccol = int(rows / 2), int(cols / 2)
22    mask = np.zeros((rows, cols, 2), np.uint8)
23    r = 40
24    center = [crow, ccol]
25    x, y = np.ogrid[:rows, :cols]
26    mask_area = (x - center[0]) ** 2 + (y - center[1]) ** 2 <= r*r
27    mask[mask_area] = 1
28    fshift = dft_shift * mask
29    fshift_mask_mag = 20 * np.log(cv2.magnitude(fshift[:, :, 0], fshift[:, :, 1]))
30    f_ishift = np.fft.ifftshift(fshift)
31    img_back = cv2.idft(f_ishift)
32    img_back = cv2.magnitude(img_back[:, :, 0], img_back[:, :, 1])
33    fig = plt.figure(figsize=(12, 12))
34    ax1 = fig.add_subplot(2,2,1)
35    ax1.imshow(img, cmap='gray')
36    ax1.title.set_text('Input Image')
37    ax2 = fig.add_subplot(2,2,2)
38    ax2.imshow(magnitude_spectrum, cmap='gray')
39    ax2.title.set_text('FFT of image')
40    ax3 = fig.add_subplot(2,2,3)
41    ax3.imshow(fshift_mask_mag, cmap='gray')
42    ax3.title.set_text('FFT + Mask')
43    ax4 = fig.add_subplot(2,2,4)
44    ax4.imshow(img_back, cmap='gray')
45    ax4.title.set_text('After inverse FFT')
46    plt.show()
```

O algoritmo acima, consiste em:

- Implementar a transformação rápida de Fourier para transformar a imagem em escala de cinza em frequência (Input Image). Linha 1 até Linha 8.
- Visualizar e centralizar o componente de frequência zero (FFT of image). Linha 9.
- Aplicar a máscara desejada para filtrar as frequências (FFT + Mask). Linha 28 e Linha 29.
- Implementar a transformação rápida de Fourier inversa para gerar os dados da imagem-resultado (After inverse FFT). Linha 30 até Linha 32.
- Imprime o resultado do processo. Linha 33 até Linha 46.

Sendo assim, temos implementada durante as linhas 10 a 18, o primeiro exemplo ilustrado pela Figura 6, e durante as linhas 19 a 27, o segundo exemplo ilustrado pela Figura 7. O algoritmo completo pode ser encontrado no GitHub dos autores.

6. Conclusão

Neste trabalho abordamos o assunto sobre a aplicação de filtros em imagens digitais utilizando as Transformadas de Fourier, com o intuito de demonstrar uma aplicação computacional de um modelo teórico matemático.

Sendo assim, a realização deste projeto contribuiu para a compreensão matemática e teórica em relação as Transformadas de Fourier, além de proporcionar uma aplicação computacional deste modelo matemático. Ademais, observamos que existem diversas formas e diversos modelos matemáticos que podem auxiliar e construir diversas aplicações tecnológicas para problemas do mundo atual.

Logo, podemos observar que a manipulação de imagens digitais utilizando as Transformadas de Fourier é apenas um pequeno exemplo de que as leis matemáticas podem atuar no cenário computacional.

7. Referências

[1] Apostila do curso

[2] Transformada de Fourier - Profa. Maria Suzana Balparda de Carvalho - DFM, CEFET-MG, 2011

[3] Transformada de Fourier: fundamentos matemáticos, implementação e aplicações musicais - Jorge H. Neyra-Araoz – IME/USP 2007. Acessada em 21 de agosto de 2021. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~kon/MAC5900/seminarios/seminario_Jorge.pdf>

[4] Wikipédia - Transformada de Fourier. Acessada em 21 de agosto de 2021. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Transformada_de_Fourier#Definição>

[5] Série de vídeos do youtube de DigitalSreeni. 105 - What is Fourier Transform? Acessada em 21 de agosto de 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=lzR86lz1Sg8>. 106 - Image filters using discrete Fourier transform (DFT). Acessada em 21 de agosto de 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Wka_XhcZAcQ>

[6] Série de vídeos do youtube de Apeer_micro. Tutorial 40 - What is Fourier transform and how is it relevant for image processing? Acessada em 21 de agosto de 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=RVE-CSZijAI>. Tutorial 41 - Image filtering using Fourier transform in python. Acessada em 21 de agosto de 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=9mLeVn8xzMw>.

[7] Mas o que é a Transformada de Fourier? Uma introdução visual - 3Blue1Brown. Acessada em 21 de agosto de 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=spUNpyF58BY>.

[8] Me Salva! TRF01 - Introdução à Transformada de Fourier - Sinais e Sistemas. Acessada em 21 de agosto de 2021. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=9hNW9ymb2ng>.

[9] Transformada Discreta de Fourier - Prof. Dr. Carlos Alberto Ynoguti – INATEL

Download pdf. Acessada em 23 de agosto de 2021. Disponível em: <https://www.inatel.br/docentes/ynoguti/downloads/dsp-s886637-1/20-dft-s244331-1/file>.

[10] Image processing with FFT and IFFT along with filters. Disponível em: <https://github.com/ErickHDdS/filters-image-fourier>.

[11] Image processing with FFT and IFFT along with filters. Disponível em: <https://github.com/lucascdornelas/filters-image-fourier>.

[12] Image processing with FFT and IFFT along with filters. Disponível em: <https://github.com/vmleroy/filters-image-fourier>.